Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

ДЕЙСТВИЕ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ НА L_p — ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

К. В. Сторожук

Пусть M — риманово многообразие. Символом $\Omega^k(M)$ обозначим множество $Hom(\Lambda^k TM, R)$ дифференциальных форм степени k на M.

Каждая дифференциальная форма $\omega \in \Omega^k(M)$ имеет локальное координатное представление $\omega = \widetilde{\omega}_{i_1\dots i_k}(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Будем считать дифференциальные формы равными, если их коэффициенты совпадают почти всюду.

Для дифференциальной формы ω определим ее модуль в точке $x \in M$, положив $|\omega|(x) = \sup\{\omega(x)\langle\overline{v}\rangle \mid \overline{v} \in \Lambda^k T_x M, |\overline{v}_x| \le 1\}$.

Пусть $1 \le p < \infty$. Пространство $L_p^k(M)$, состоящее из измеримых k-форм на M, модуль которых интегрируем в степени p, является сепарабельным банаховым пространством с нормой $\|\omega\|_p = (\int\limits_M |\omega|^p(x)d\mu_M)^{\frac{1}{p}}$.

Если отображение $g : M \to M$ почти всюду дифференцируемо и прообраз любого множества меры нуль есть множество меры нуль, то корректно определено отображение $g^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ формулой $g^*\omega(x)\langle\overline{v}\rangle = \omega(gx)\langle\Lambda^k Dg\langle\overline{v}\rangle\rangle$.

Лемма 1. *Пусть M — n-мерное риманово многообразие и $g : M \to M$ — билипшицев гомеоморфизм, причем константы Липшица отображений g и g^{-1} не превосходят числа $\lambda < \infty$. Тогда $g^* : L_p^k(M) \to L_p^k(M)$ — непрерывный линейный оператор, норма которого не превосходит $\lambda^{\frac{n}{p}+k}$.*

Доказательство. Липшицево отображение, согласно теореме Степанова-Радемахера [1], почти всюду дифференцируемо. Кроме того, очевидно, что модули дифференциалов Dg и Dg^{-1} не превосходят числа λ.

Пусть $\omega \in L_p^k(M)$. Для каждого единичного поливектора $\overline{v} \in \Lambda^k T_x M$

$$g^*\omega(x)\langle\overline{v}\rangle = \omega(gx)\langle\Lambda^k Dg\langle\overline{v}\rangle\rangle \le \lambda^k|\omega|(gx).$$

Поэтому $|g^*\omega|(x) \le \lambda^k|\omega|(gx)$. Используя замену переменной $x \mapsto g^{-1}x$ и то, что якобиан отображения g^{-1} не превосходит λ^n, получаем:

$$\|g^*\omega\|^p = \int\limits_M |g^*\omega|^p(x)dx = \int\limits_M |g^*\omega|^p(g^{-1}x)dg^{-1}x \le$$

$$\le \lambda^{kp}\int\limits_M |\omega|^p(x)dg^{-1}x \le \lambda^{kp+n}\|\omega\|^p.$$

Остальное очевидно. Лемма доказана.

Пусть G — топологическая группа, непрерывно действующая на метрическом пространстве M, то есть определено непрерывное отображение $T : G \times M \to M$ такое, что $T(e, x) = x$ и $T(g, (T(h, x))) = T(gh, x)$ для всех $x \in M$ и $g, h \in G$. В дальнейшем вместо $T(g, x)$ будем писать gx.

Если G действует на M эффективно, то G можно отождествить с подмножеством $C(M)$ непрерывных отображений из M в M.

Определение. *Будем говорить, что семейство отображений $G \subset C(M)$ равномерно липшицево, если существует $\lambda(G) < \infty$ такое, что константы Липшица всех отображений $g \in G$ ограничены сверху числом $\lambda(G)$.*

Пример: Пусть $G \subset C(M)$ группа. В этом случае $\lambda(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G состоит из изометрий.

Снабдим $C(M)$ топологией равномерной сходимости на компактах.

Лемма 2. *Пусть M — риманово многообразие и $G \subset C(M)$ — равномерно липшицева группа. Тогда замыкание множества G в топологии $C(M)$ есть локально компактная группа $\overline{G}$, причем $\lambda(\overline{G}) = \lambda(G)$.*

Доказательство. Локальная компактность группы G следует из теоремы Асколи [2]. То, что $\overline{G}$ — группа и $\lambda(\overline{G}) = \lambda(G)$, следует из свойств равномерной сходимости (см.еще [3 стр 55-56], где утверждение, аналогичное нашему, подробно доказано для изометрий). Лемма доказана.

Известно, что равномерная сходимость гладких отображений на многообразии M не влечет сходимости их производных. Например, пусть $M = S^1$, $f_n(t) = t + \frac{\sin nt}{n}$. Тогда f_n равномерно сходится к тождественному отображению, но отображения $f'_n(t) = \cos t$ не стремятся к нулю. Однако известно [4], что если все отображения принадлежат какой-нибудь одной локально компактной группе диффеоморфизмов M, то их равномерная сходимость влечет сходимость производных:

Утверждение.[4]*Пусть $G \subset C(M)$ — локально компактная группа преобразований G, непрерывно действующая на гладком связном многообразии M. Предположим, что каждый элемент $g \in G$, $g : M \to M$ является C^1-отображением. Тогда частные производные отображения $(g, x) \mapsto gx$ непрерывны на $G \times M$.*

Основная теорема.

Пусть M — n-мерное риманово многообразие, $G \subset C(M)$ — равномерно липшицева группа. Пусть $\omega \in L_p^k(M)$, $1 \le p < \infty$. Тогда отображение $F_\omega : G \to L_p^k(M)$, определяемое формулой $F_\omega(g) = g^*\omega$, непрерывно.

Неформально, основная теорема утверждает, что частные производные сходящейся последовательности отображений равномерно липшицевой группы сходятся в L_p-норме. В приведенном выше примере отображения $f_n : S^1 \to S^1$ сходятся, но 1-формы $f_n^* dt = df_n$ не сходятся.

Доказательство разобьем на несколько частей.

Ниже предполагается, что на группе G задана левоинвариантная мера Хаара.[5] Идея доказательства состоит в том, чтобы вывести искомую непрерывность отображения F_ω из его измеримости.

Теорема 1. *Пусть отображение $F : G \to E$ локально компактной группы G в сепарабельное метрическое пространство E квазиинвариантно относительно сдвигов, т.е. существует $C < \infty$ такое, что*

$$\forall g_1, g_2, h \in G \quad |F(g_1) - F(g_2)| \leq C|F(g_1 h) - F(g_2 h)|. \qquad (1)$$

Тогда если F измеримо, то F непрерывно.

Теорема 2.*В условиях основной теоремы соотношение (1) выполнено для $C = \lambda(G)^{\frac{n}{p}+k}$.*

Теорема 3. *В условиях основной теоремы отображение F_ωизмеримо.*

Очевидно, что из этих теорем следует Основная теорема.

В ситуациях, рассматриваемых ниже, удобно работать со следующим критерием измеримости:

Отображение $f : A \to B$ измеримо, если существует последовательность непрерывных функций $f_n : A \to B$ такая, что $f = \lim f_n$ почти для всех точек из A. (Подразумевается, что f определена в тех точках, где предел существует). Множество $A_0 \subset A$ измеримо, если его характеристическая функция измерима.

Сформулируем еще часть теоремы Фубини, нужную в дальнейшем:

Теорема Фубини. *Пусть $f : A_1 \times A_2 \to B$ — некоторое измеримое отображение. Тогда почти для любой точки $a_1 \in A_1$ отображение $x \mapsto f(a_1, x)$ измеримо на A_2. При этом отображение $a_1 \mapsto \int_{A_2} f(a_1, a_2)$ измеримо на A_1 и $\int_{A_1 \times A_2} f(a, b)\, d(a, b) = \int_{A_1} (\int_{A_2} f(a, b)\, db) da$.*

Доказательство **теоремы 1**.

Пусть μ — левоинвариантная мера Хаара на группе G. Предположим, что группа G не компактна. Согласно теореме Лузина, в G можно выбрать замкнутое подмножество $\widetilde{G}$, дополнение к которому в G имеет произвольно малую меру и такое, что сужение отображения F на $\widetilde{G}$ непрерывно. Выберем такое $\widetilde{G}$, что $\mu(G \backslash \widetilde{G}) < \infty$.

Отображение $F|_{\widetilde{G}}$ равномерно непрерывно на компактах. Следовательно, каков бы ни был компакт $B \subset G$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U единицы $e \in G$ такая, что

$$\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2} \in \widetilde{G} \bigcap B,\ \widetilde{g_1}\widetilde{g_2}^{-1} \in U \ \Rightarrow |F(\widetilde{g_1}) - F(\widetilde{g_2})| < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь произвольные g_1 и $g_2 \in G$. Наша мера Хаара инвариантна относительно левых сдвигов, поэтому $\mu_G(g_1^{-1}\widetilde{G}) = \mu_G(g_2^{-1}\widetilde{G})$. Дополнение в G множества $g_1^{-1}\widetilde{G} \bigcap g_2^{-1}\widetilde{G}$ имеет конечную меру. Поэтому существует компакт K (любой компакт большей меры), такой, что для любых g_1 и g_2 множество $g_1^{-1}\widetilde{G} \bigcap g_2^{-1}\widetilde{G}$ пересекается с K, то есть существует элемент $h \in G$ такой, что $g_1 h \in \widetilde{G} \bigcap K$ и $g_2 h \in \widetilde{G} \bigcap K$. Заметим, что $(g_1 h)(g_2 h)^{-1} = g_1 h h^{-1} g_2^{-1} = g_1 g_2^{-1}$, поэтому если $g_1 g_2^{-1} \in U$, то $(g_1 h)(g_2 h)^{-1} \in U$ и в этом случае, согласно условию,

$$|F(g_1) - F(g_2)| \leq C|F(g_1 h) - F(g_2 h)| < C \cdot \varepsilon.$$

Случай компактной G аналогичен и проще. Теорема 1 доказана.

Доказательство **теоремы 2**.

Пусть $g_1, g_2, h \in G$ и $\omega \in L_p^k(M)$. Положим $C = \lambda(G)^{\frac{n}{p}+k}$. Согласно лемме 2, имеем:

$$|F_\omega(g_1) - F_\omega(g_2)| = \|g_1^*\omega - g_2^*\omega\| \leq C \cdot \|h^*(g_1^*\omega - g_2^*\omega)\| = C \cdot |F(g_1 h) - F(g_2 h)|.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство **теоремы 3**.

Предположим сначала, что M — подмножество $\mathbb{R}^n$.

Без ограничения общности можно считать, что $k = 1$ и форма ω имеет вид $\omega = \widetilde{\omega}(x)dx_1$. Действительно, любая форма является линейной комбинаций внешних произведений 1-форм такого вида, а операция взятия внешнего произведения сохраняет измеримость.

Итак, пусть $\omega = \widetilde{\omega}(x)dx_1$, где $\widetilde{\omega} : M \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, модуль которой интегрируем в степени p. Тогда

$$F_\omega(g) = g^*\omega = \widetilde{\omega}(gx) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} dx_i \qquad (2)$$

Докажем, что коэффициенты дифференциальной формы $F_\omega(g)$ суть измеримые функции двух переменных $(g, x) \in G \times M$.

Лемма 3. *Отображения $A_i : (g, x) \mapsto \widetilde{\omega}(gx)\frac{\partial g_1}{\partial x_i}$, измеримы и почти всюду определены на множестве $G \times M$.*

Доказательство. По определению частной производной имеем:

$$A_i(g, x) = \widetilde{\omega}(gx) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g_1(x + \varepsilon x_i) - g_1(x)}{\varepsilon} \qquad (3)$$

В формуле (3) предельный переход применяется к непрерывной функции трех переменных (g, x, ε). Несложно показать, что результат предельного перехода будет измеримой функцией переменной (g, x). Все отображения g липшицевы и, значит, почти всюду на M дифференцируемы. Поэтому для любого $g \in G$ почти для каждого $x \in M$ значение $\lim(\cdots)$ в формуле (3) определено. Из измеримости области определения функции $\lim(\cdots)$ и теоремы Фубини следует, что функция $\lim(\cdots)$ определена почти во всех точках $(g, x) \in G \times M$.

Изменив, если требуется, значение функции $\widetilde{\omega}$ на множестве меры нуль, потребуем, чтобы она являлась поточечным пределом последовательности непрерывных функций. Тогда и функция $\widetilde{\omega}(gx) : G \times M \to \mathbb{R}$ поточечно аппроксимируется непрерывными функциями и, следовательно измерима. Ее почти всюду определенность следует из теоремы Фубини. Лемма доказана.

Согласно [6], любая функция $F : G \to E$, заданная на пространстве с мерой G и принимающая значения в сепарабельном банаховом пространстве E, является измеримой, если она слабо измерима, т.е. для любого функционала $\alpha \in E'$ композиция $\langle \alpha, F \rangle : G \to \mathbb{R}$ измерима.

В нашем случае $E = L_p^1(M)$. Сопряженное пространство есть пространство $L_q^{n-1}(M)$, где $1/p + 1/q = 1$. При этом если $\alpha \in L_q^{n-1}(M)$, то для любой формы $\gamma \in L_p^1(M)$ $\langle \alpha, \gamma \rangle = \int_M \alpha \wedge \gamma$.

Пусть $\alpha \in L_q^{n-1}(M)$, $\alpha = \widetilde{\alpha}_i(x)dx_{\widehat{i}}$, где $dx_{\widehat{i}} = dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$. Из координатного представления (2) формы $F_\omega(g)$ получаем:

$$\langle \alpha, F_\omega \rangle(g) = \int_M \alpha \wedge g^*\omega = \sum_{i=1}^{n} (\pm 1) \int_M \widetilde{\alpha}_i(x)\widetilde{\omega}(gx) \frac{\partial g_1}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n.$$

Из леммы 3 следует, что под интегралом стоит измеримая функция переменной $(g, x) \in G \times M$. Интегрируя эту функцию по M, получаем, согласно теореме Фубини, измеримую функцию переменной $g \in G$. Итак, функция $F_\omega : G \to M$ слабо измерима, а значит, измерима.

Предположим теперь, что M — произвольное многообразие. Трудность, возникающая в этом случае, носит технический характер и связана с отсутствием глобального координатного представления форм.

По-прежнему не ограничивая общности, считаем, что $\omega \in L_p^1(M)$. Потребуем еще, чтобы носитель формы ω был компактен и сосредоточен в области определения некоторой карты $U \subset M$, $U \simeq \mathbb{R}^n$.

Ясно, что это новое требование также не ограничивает общности, поскольку любую форму можно с помощью подходящего разбиения единицы представить в виде суммы таких форм. Как и в первой части доказательства, пусть координатное представление формы ω на U будет $\omega = \widetilde{\omega}(x)dx_1$. Так как $\operatorname{supp}\omega \subset U$ компактен и U — открытое множество, то отображения $M \to M$, достаточно близкие к тождественному, не выведут точки множества $\operatorname{supp}\omega$ из множества U. Поэтому в группе G найдется такая окрестность единицы $V_\omega \subset G$, что для любого $g \in V_\omega$ выполнено $g(\operatorname{supp}\omega) \subset U$. Считая, что функция $\widetilde{\omega}$ определена на всем M и равна нулю вне множества U, получаем, что координатное представление, аналогичное формуле (2), корректно определено во всех точках (g, x) множества $V_\omega \times M$. Повторяя рассуждения первой части доказательства, приходим к выводу, что функция $F_\omega : G \to L_p^1(M)$ измерима в окрестности $V_\omega \subset G$ единицы группы G.

Заметим, что для любого $g \in G$ функция $F_{g^*\omega}$ измерима в той же окрестности V_ω. В то же время $F_{g^*\omega} = F_\omega \circ L_g$, где $L_g : h \mapsto gh$ — левый сдвиг в группе G. Из этого легко следует, что функция F_ω измерима в окрестности любой точки $g \in G$. Доказательство теоремы 3, а вместе с ней и основной теоремы, закончено.

Из известных автору результатов о группах, действующих липшицевыми преобразованиями, отметим результат Т.Карубе [7]: локально компактная группа, эффективно действующая на локально евклидовом метрическом многообразии локально липшицевыми преобразованиями, константы Липшица которых локально ограничены на $G \times M$, является группой Ли (так как не содержит малых подгрупп).

Автору известно также доказательство непрерывности действия группы римановых изоморфизмов (отображений, сохраняющих риманову структуру) липшицевых римановых многообразий, использующее спектральную теорию. Оно было сообщено автору И.А.Шведовым; готовится статья в Сибирском Математическом Журнале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов В.В. *Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale* // Mat. Sb. 1924. V. 30. P. 487–489.

2. Н. Бурбаки. *Общая топология. Использование вещ. чисел в общ. топологии. Функциональные пространства.* М.: Наука, 1975. Zbl 0305.54003

3. Кобаяси Ш, Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* М.: Наука, 1981. Zbl 0508.53002

4. D. Montgomery, L. Zippin. *Topological transformation groups.* New York: Interscience publishers, inc., 1955. Zbl 0068.01904

5. Н. Бурбаки. *Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления.* М.: Наука, 1970. Zbl 0213.07501

6. J. Diestel, J. J. Uhl. *Vector measures.* Providence: AMS, 1977. Zbl 0369.46039

7. Karube, Takashi. *Transformation groups satisfying some local metric conditions* // 1966. J. Math. Soc. Japan. V. 18. P. 45–50. Zbl 0136.43801

Институт математики им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск
e-mail: stork@math.nsc.ru