Proc. Summer School on Diff. Geometry
Dep. de Matemática, Universidade de Coimbra
September 1999, 127-147.

# Modèles Locaux de Structures de Poisson-Nijenhuis en Dimension Impaire[1]

**Fani Petalidou**

*Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques*
*4, place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France*
*e-mail: petalido@math.jussieu.fr*

**Abstract.** The aim of this paper is the construction of a local model of a Poisson-Nijenhuis structure $(\Lambda_0, N)$ defined on a differentiable manifold $M$ of odd dimension. Taking into consideration the results which concern the same problem for a symplectic Poisson-Nijenhuis structure, the problem of the reduction of a Poisson-Nijenhuis structure and the problem of the symplectisation of a such structure, we arrive into constructing in the neighbourhood of a generic point $p$ of $M$, a system of local coordinates in which $\Lambda_0$ is written with constant coefficients and $N$ with affine coefficients.

Keywords: Poisson-Nijenhuis structure, reduction, symplectisation
Mots-clès: structure de Poisson-Nijenhuis, réduction, symplectisation
A.M.S. classification: 58F07, 58F05.

## 1. Introduction

Une structure de *Poisson-Nijenhuis* sur une variété différentiable $M$ est définie par la donnée d'un tenseur de Poisson $\Lambda_0$ et d'un tenseur de Nijenhuis $N$ compatibles entre eux. Précisement, $\Lambda_0$ est un champ de bivecteurs sur $M$ tel que $[\Lambda_0, \Lambda_0] = 0$ en tout point de $M$, où $[\,,\,]$ désigne le crochet de Schouten [13, 23]. La donnée de $\Lambda_0$ permet de définir sur l'espace $C^\infty(M, \mathbf{R})$ une loi de composition bilinéaire antisymétrique, appelée *crochet de Poisson* et

[1] This paper is in final form and no other version has been submitted for publication elsewhere.

notée $\{,\}_0$, vérifiant la formule de Leibniz et l'identité de Jacobi, et réciproquement [12]. Pour toutes $f, g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$,

$$\{f, g\}_0 = \Lambda_0(df, dg).$$

Le tenseur de Nijenhuis $N$ est un champ de tenseurs de type (1,1) à torsion de Nijenhuis $T(N)$ identiquement nulle sur $M$; pour tout couple $(X, Y)$ de sections de $TM$,

$$T(N)(X, Y) = [NX, NY] - N[NX, Y] - N[X, NY] + N^2[X, Y].$$

On dit que les champs de tenseurs $\Lambda_0$ et $N$ sont compatibles lorsqu'ils vérifient les deux propriétés suivantes:

i) En notant $\Lambda_0^\# : T^\star M \to TM$ le morphisme de fibrés vectoriels associé à $\Lambda_0$ et ${}^tN : T^\star M \to T^\star M$ l'opérateur transposé de $N$,

$$N\Lambda_0^\# = \Lambda_0^{\#t}N,$$

ce qui exprime l'antisymétrie du champ de tenseurs associé au morphisme de fibrés vectoriels $N\Lambda_0^\#$.

ii) Le concomitant de Magri-Morosi $R(\Lambda_0, N)$ de $\Lambda_0$ et de $N$ défini, pour toute 1-forme $\alpha$ et tout champ de vecteurs $X$ sur $M$, par

$$R(\Lambda_0, N)(\alpha, X) = L_{\Lambda_0^\#(\alpha)}NX - \Lambda_0^\#\big(L_X({}^tN\alpha)\big) + \Lambda_0^\#\big(L_{NX}\alpha\big)$$

s'annule identiquement sur $M$. La deuxième condition est équivalente à

$$L_{NX}\Lambda_0 = L_X\Lambda_0\,{}^tN - L_XN\Lambda_0.$$

On dit que $(M, \Lambda_0, N)$ est une *variété de Poisson-Nijenhuis.*

Il est bien connu qu'une variété $(M, \Lambda_0, N)$ est aussi munie d'une hiérarchie $(\Lambda_k,\ k \in \mathbf{N})$ de tenseurs de Poisson deux à deux compatibles sur $M$ engendrée par $\Lambda_0$ et $N$, [18]. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, le morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda_k^\# : T^\star M \to TM$ associé à $\Lambda_k$ est déterminé par $\Lambda_k^\# = N^k\Lambda_0^\#$. Le champ de tenseurs $N$ s'appelle *opérateur de récursion* de la hiérarchie $(\Lambda_k,\ k \in \mathbf{N})$.

Les structures de Poisson-Nijenhuis constituent une classe particulière de *structures bihamiltoniennes* qui sont définies par la donnée sur une variété différentiable $M$ d'un couple $(\Lambda_0, \Lambda_1)$ de tenseurs de Poisson compatibles au sens de Magri, i.e. $[\Lambda_0, \Lambda_1] = 0$ en tout point de $M$, [16]. D'après les travaux de F. Magri et C. Morosi, [16, 18], et de I. M. Gel'fand et I. Dorfman [5, 6], ces structures jouent un rôle important dans la théorie d'intégrabilité de systèmes hamiltoniens, qui fait partie de leur géométrie. Des exemples de systèmes intégrables étudiés dans le cadre de la géométrie des variétés de Poisson-Nijenhuis et des variétés bihamiltoniennes sont présentés dans [3, 11, 17]. Une famille intéressante de structures de Poisson-Nijenhuis est celle de structures définies sur une algèbre de Lie et sur son espace dual; plusieurs systèmes completèment intégrables bien connus (p.ex. le système de Toda, [2]) peuvent être considérés comme systèmes bihamiltoniens relativement à une telle structure. Une étude approfondie de ces structures, avec des exemples, est effectuée par Y. Kosmann-Schwarzbach et F. Magri dans [7, 10], (voir aussi [1, 20]).

Une nouvelle approche de la géométrie des variétés de Poisson-Nijenhuis, dans le cadre de la théorie des algébroïdes et des bialgébroïdes de Lie ([8, 14, 15]) est développée par Y. Kosmann-Schwarzbach [9] et I. Vaisman [25].

Le but principal de notre travail est la construction d'un modèle local du couple de tenseurs $(\Lambda_0, N)$ ainsi que des $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$. Dans [21], en appliquant la technique suivie par Turiel pour la classification de couples de formes symplectiques Poisson-compatibles ([24]), nous établissons ces modèles dans le cas où $\Lambda_0$ est non-dégénéré, fait qui impose que $M$ soit de dimension paire. Dans cet article, nous allons construire une forme normale de $(\Lambda_0, N)$ et des $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, au voisinage d'un point *régulier* $p$ de $M$ tel que $corang\Lambda_0(p) = 1$; c'est le cas générique lorsque $M$ est de dimension impaire et $\Lambda_0$ de rang maximum sur un ouvert dense de $M$. La construction de cette forme est basée sur: i) les résultats de l'étude du problème posé concernant les structures de Poisson-Nijenhuis symplectiques, i.e. les structures dont le tenseur de Poisson est inversible sur $M$ ([21]); ii) le théorème de réduction d'une variété de Poisson-Nijenhuis ([26, 19]); iii) les résultats qui apparaissent dans [22] et qui concernent la symplectisation d'une structure de Poisson-Nijenhuis.

Après quelques résultats auxiliaires, utiles pour l'étude ultérieure, et la présentation, dans les §2-§5, des résultats cités ci-dessus, (le §5 contient aussi un nouvel théorème sur l'unicité de symplectisation d'une structure de Poisson-Nijenhuis), nous arrivons à construire, dans le §6, au voisinage de $p$, un système de coordonnées dans lequel $\Lambda_0$ s'écrit à coefficients constants et $N$ à coefficients affines. Dans ce système, les coefficients des $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, sont des polynômes de degré $k$, (cf. §7).

## 2. Le lieu régulier de $N$

On note $\mathbf{K}_M[\lambda]$ l'algèbre des polynômes à une variable à coefficients dans l'anneau $\mathcal{A}(M, \mathbf{K})$ des fonctions $C^\infty$-différentiables, si $M$ est une variété réelle, ou des fonctions holomorphes sur $M$, si $M$ est une variété complexe. Un polynôme $P$ de $\mathbf{K}_M[\lambda]$ sera dit *irréductible* s'il est irréductible en chaque point de $M$ et deux polynômes $P$ et $Q$ de $\mathbf{K}_M[\lambda]$ seront dits *premiers entre eux* s'ils le sont partout sur $M$.

Soit $N$ un tenseur de Nijenhuis défini sur $M$. Il définit une section du fibré vectoriel $Hom(TM, TM) \to M$, où $Hom(TM, TM)$ désigne le fibré des endomorphismes du fibré tangent $TM$ de $M$.

**Définition 2.1** *On dit que le type algébrique de $N : M \to Hom(TM, TM)$ est constant sur un voisinage ouvert $U$ d'un point $p$ de $M$, s'il existe des polynômes irréductibles et premiers entre eux $P_1, \ldots, P_r$ de $\mathbf{K}_U[\lambda]$ et des entiers positifs $n_{ij}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s_i$, tels que la famille des polynômes $(P_i^{n_{ij}}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s_i)$ soit, en chaque $x \in U$, la famille des diviseurs élémentaires de l'endomorphisme $N(x) : T_xM \to T_xM$.*

D'un point de vue géométrique, le type algébrique de $N : M \to Hom(TM, TM)$ est constant sur $U$ lorsque, en chaque $x \in U$, l'espace $T_xU$ se décompose en sous-espaces $N(x) - cycliques$ isomorphes aux sous-espaces $N(p) - cycliques$ en lesquels se décompose l'espace $T_pU$.

**Définition 2.2** *On dit que $N : M \to Hom(TM, TM)$ est 0-déformable sur $U$, si la famille $(P_i^{n_{ij}}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s_i)$ de ses diviseurs élémentaires est indépendante du point $x$ de $U$.*

Bien entendu, lorsque $N$ est 0-déformable sur $U$, son type algébrique est constant sur $U$.

L'ensemble des points de $M$ qui possèdent un voisinage ouvert sur lequel le type algébrique de $N$ est constant, est un ouvert dense de $M$, (cf. [21]).

**Définition 2.3 (Conditions de régularité)** *Un point $p$ de $M$ est dit régulier relativement à $N$ lorsqu'il possède un voisinage ouvert $U$ dans $M$ tel que :*

1. *le type algébrique de $N$ soit constant sur $U$;*
2. *les sous-espaces*
$$E_x = \bigcap_{i=1}^{s} kerdf_i(x)$$
*de $T_xU$, $x \in U$, où $f_1, \dots, f_s$ désignent les coefficients fonctionnels des facteurs irréductibles du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_N$ de $N$, définissent une distribution $E$ de rang constant sur $U$;*
3. *le type algébrique de la restriction de $N$ à $E$ soit constant sur $U$.*

**Définition 2.4** *On appelle lieu régulier de $N$, et on note $\mathcal{R}_N$, l'ensemble des points réguliers de $M$ relativement à $N$.*

L'ensemble $\mathcal{R}_N$ est un ouvert dense de $M$, (cf. [21]).

## 3. Décomposition des variétés de Poisson-Nijenhuis symplectiques

Soit $(M, \Lambda_0, N)$ une variété de Poisson-Nijenhuis, avec $\Lambda_0$ non-dégénéré, et $p$ un point de $M$ possédant un voisinage ouvert $U$ dans $M$ sur lequel le type algébrique de $N$ est constant. Notons $\mathcal{P}_N$ le polynôme caractéristique de $N$ et supposons qu'il s'écrive sur $U$ comme produit $\mathcal{P}_N = \mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2$ de deux polynômes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ premiers entre eux dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1. Posons $N_1 = \mathcal{P}_1(N)$ et $N_2 = \mathcal{P}_2(N)$. Alors, $TU = kerN_1 \oplus kerN_2$, ou bien $TU = ImN_2 \oplus ImN_1$, puisque $kerN_1 = ImN_2$ et $kerN_2 = ImN_1$. Les $N_i : ImN_i \to ImN_i$, $i = 1, 2$, sont des champs d'isomorphismes. Aussi, $T^\star U = Im^tN_2 \oplus Im^tN_1$, où ${}^tN_i$ désigne le transposé de $N_i$, et ${}^tN_i = \mathcal{P}_i({}^tN)$, $i = 1, 2$.

**Lemme 3.1** *Les sous-fibrés $ImN_i$, $i = 1, 2$, sont involutifs.*

*Démonstration.* Soient $X$ et $Y$ deux sections de $ImN_1$. Compte tenu des faits que $N_1 : ImN_1 \to ImN_1$ est un isomorphisme et que $T(N_1)(V, W) = \sum_{r=0}^{m} (\alpha_r(V)N^rW - \alpha_r(W)N^rV)$, où $\alpha_r$, $r = 1, \dots, m$, sont 1-formes et $V, W$ deux sections de $ImN_1$, on montre que $[X, Y]$ est aussi une section de $ImN_1$, d'où l'involutivité de $ImN_1$.

De même manière on prouve l'involutivité de $ImN_2$. □

Alors, les $ImN_1$ et $ImN_2$ définissent deux feuilletages supplémentaires de $U$. En conséquence, à un voisinage convenable de $p$, $M$ s'identifie à un produit $M' \times M''$ de deux variétés; $M'$ s'identifiant à l'ensemble des feuilles de $ImN_1$ et $M''$ à celui de $ImN_2$. Donc, $TM' = ImN_2 = kerN_1$ et $TM'' = ImN_1 = kerN_2$.

**Lemme 3.2** *Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\Lambda_k(Im^tN_2, Im^tN_1) = 0$.*

*Démonstration.* Pour toutes $\alpha, \beta$ 1-formes sur $U$,

$$\Lambda_k({}^tN_2\alpha, {}^tN_1\beta) = \Lambda_k(\mathcal{P}_2({}^tN)\alpha, \mathcal{P}_1({}^tN)\beta) = \Lambda_k(\mathcal{P}_1({}^tN)\mathcal{P}_2({}^tN)\alpha, \beta) = \Lambda_k(\mathcal{P}_N({}^tN)\alpha, \beta) = 0,$$

comme $\mathcal{P}_N$ est un polynôme annulateur de ${}^tN$. □

**Proposition 3.3** *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que ci-dessus, au voisinage de p, la variété de Poisson-Nijenhuis symplectique* $(M, \Lambda_0, N)$ *s'identifie au produit* $(M', \Lambda'_0, N') \times (M'', \Lambda''_0, N'')$ *de variétés de Poisson-Nijenhuis symplectiques.*

*Démonstration.* Du lemme 3.2 résulte que dans un système de coordonnées produit $(x, y)$ de $M' \times M''$, les $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, reçoivent une expression locale du type

$$\Lambda_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n_1} f_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq l < m \leq n_2} g_{klm} \frac{\partial}{\partial y_l} \wedge \frac{\partial}{\partial y_m},$$

où $n_1 = dim M'$ et $n_2 = dim M''$. Puisque les $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, sont de Poisson deux à deux compatibles, leurs crochets de Poisson associés $\{\, ,\, \}_k$, $k \in \mathbf{N}$, vérifient l'identité de Jacobi et l'identité de Jacobi généralisée. En appliquant ces identités pour les fonctions coordonnées, on prouve facilement que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f_{kij} = f_{kij}(x)$, $1 \leq i < j \leq n_1$, et que $g_{klm} = g_{klm}(y)$, $1 \leq l < m \leq n_2$.

Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\Lambda'_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n_1} f_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \quad et \quad \Lambda''_k = \sum_{1 \leq l < m \leq n_2} g_{klm} \frac{\partial}{\partial y_l} \wedge \frac{\partial}{\partial y_m}.$$

Les $\Lambda'_k$ (resp. $\Lambda''_k$), $k \in \mathbf{N}$, définissent sur $M'$ (resp. $M''$) une hiérarchie de tenseurs de Poisson deux à deux compatibles, avec $\Lambda'_0$ (resp. $\Lambda''_0$) non-dégénéré sur $M'$ (resp. $M''$), dont l'opérateur de récursion $N'$ (resp. $N''$) est la projection de $N\,|_{ImN_2}$ (resp. $N\,|_{ImN_1}$) sur $ImN_2$ (resp. $ImN_1$) et son polynôme caractéristique est le polynôme $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$). □

**Remarque 3.4** *Une suite de propositions sur les propriétés des diviseurs élémentaires* [4] *assure que le lieu régulier* $\mathcal{R}_{N'}$ *(resp.* $\mathcal{R}_{N''}$*) de* $N'$ *(resp.* $N''$*) est la projection de* $\mathcal{R}_N$ *sur* $M'$ *(resp.* $M''$*).*

## 4. Modèles locaux de structures de Poisson-Nijenhuis symplectiques

Soit $(\Lambda_0, N)$ une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique définie sur une variété différentiable $M$ de dimension $2n$. D'après les résultats de §3, le problème de construction d'une forme normale de $(\Lambda_0, N)$ et des $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, se réduit à la recherche de la forme normale de ces tenseurs lorsque $\mathcal{P}_N$ est une puissance d'un polynôme irréductible. Les cas possibles sont:

1. $\mathcal{P}_N(\lambda) = (\lambda + f)^{2n}$;
2. $\mathcal{P}_N(\lambda) = (\lambda^2 + g\lambda + h)^n$, (ce cas apparaît lorsque $M$ est une variété réelle).

En se plaçant au voisinage d'un point $p \in \mathcal{R}_N$ et en étudiant séparément les deux cas distingués, nous établissons dans [21] les théorèmes suivants.

**Théorème 4.1** *Soit* $(\Lambda_0, N)$ *une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique définie sur une variété différentiable* $M$ *(réelle ou complexe) de dimension* $2n$, $(\Lambda_k, k \in \mathbf{N})$ *la hiérarchie de tenseurs de Poisson engendrée sur* $M$ *à partir de* $\Lambda_0$ *et de* $N$, *et* $p$ *un point régulier de* $M$ *relativement à* $N$. *Si le polynôme caractéristique de* $N$ *est du type* $\mathcal{P}_N(\lambda) = (\lambda + f)^{2n}$, *alors*

- *si* $df(p) = 0$, *il existe un voisinage ouvert* $U$ *de* $p$ *dans* $M$ *sur lequel* $f$ *est constante et sur* $U$ *un système de coordonnées locales* $(x_j^i)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, *de* $M$, *centré en* $p$, *dans lequel le couple* $(\Lambda_0, N)$ *et les membres de la hiérarchie* $(\Lambda_k, k \in \mathbf{N})$ *ont simultanément les expressions:*

$$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{2k}^i} \right),$$

$$N = -aId + H,$$

*où* $a = f(p)$,

$$H = \sum_{i=1}^{m} \left[ \sum_{k=1}^{r_i - 1} \left( \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^i} \otimes dx_{2k+1}^i + \frac{\partial}{\partial x_{2k+2}^i} \otimes dx_{2k}^i \right) \right],$$

*et*

$$\Lambda_k = (-a)^k \Lambda_0 + \Pi_k,$$

*où*

$$\Pi_k = \sum_{i=1}^{m} \left[ \sum_{j=1}^{r_i - k} \binom{k}{0} (-a)^0 \frac{\partial}{\partial x_{2j-1}^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{2(j+k)}^i} + \ldots + \sum_{j=1}^{r_i - 1} \binom{k}{k-1} (-a)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_{2j-1}^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{2(j+1)}^i} \right];$$

- *si* $df(p) \neq 0$, *il existe sur un voisinage* $U$ *de* $p$ *un système de coordonnées locales* $((x_j^i), y_1, y_2)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, *de* $M$, *où* $y_2 = f - a$, $a = f(p)$, *centré en* $p$, *dans lequel le couple* $(\Lambda_0, N)$ *et les tenseurs* $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, *ont les expressions :*

$$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{2k}^i} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$N = -(y_2 + a)Id + H + \frac{\partial}{\partial y_1} \otimes \alpha - Z \otimes dy_2,$$

*où* $H$ *comme précédemment,*

$$\alpha = dx_2^1 + \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{r_i} \left[ (k - \frac{1}{2}) x_{2k}^i dx_{2k-1}^i + (k + \frac{1}{2}) x_{2k-1}^i dx_{2k}^i \right] \right),$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial x_1^1} + \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i}\left[(k+\frac{1}{2})x_{2k-1}^i\frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^i} - (k-\frac{1}{2})x_{2k}^i\frac{\partial}{\partial x_{2k}^i}\right]\right),$$

*et*

$$\Lambda_k = (-1)^k(y_2+a)^k\Lambda_0 + \Pi_k + Z_k \wedge \frac{\partial}{\partial y_1},$$

*où*

$$\Pi_k = \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{r_i-k}\binom{k}{0}\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_{2(j+k)}^i} + \dots \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{r_i-1}\binom{k}{k-1}(-(y_2+a))^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_{2(j+1)}^i}\right],$$

$$Z_k = \binom{k}{k-1}(-(y_2+a))^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_1^1} +$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{r_i-(k-1)}\binom{k}{0}(-(y_2+a))^0\left[(j+k-1+\frac{1}{2})x_{2(j+k-1)-1}^i\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}^i} - \right.\right.$$
$$\left. - (j-\frac{1}{2})x_{2j}^i\frac{\partial}{\partial x_{2(j+k-1)}^i}\right] +$$
$$+ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots +$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{r_i}\binom{k}{k-1}(-(y_2+a))^{k-1}\left[(j+\frac{1}{2})x_{2j-1}^i\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}^i} - (j-\frac{1}{2})x_{2j}^i\frac{\partial}{\partial x_{2j}^i}\right]\right\}.$$

**Idée de la démonstration.** Après la détermination des modèles canoniques d'un bivecteur $\Lambda$ non-dégénéré défini sur un espace vectoriel $V$ de dimension $2n$ et d'un endomorphisme $N : V \to V$ de $V$, (voir proposition 4.1 ci-après), nous construisons les formes normales des tenseurs d'une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique $(\Lambda, N)$, définie sur une variété différentiable $W$ et dépendant d'un paramètre, dont le tenseur de Nijenhuis $N$ est nilpotent et 0-déformable, par rapport au paramètre aussi, (cf. proposition 4.2 ci-dessous). À partir de ces résultats, en traitant séparément les sous-cas i) $df(p) = 0$ et ii) $df(p) \neq 0$, nous établissons les modèles de $(\Lambda_0, N)$ ainsi que des $\Lambda_k,\ k \in \mathbf{N}$.

**Proposition 4.2** [21] *Soit $\Lambda$ un bivecteur non-dégénéré défini sur un espace vectoriel $V$ (réel ou complexe) de dimension $2n$, et $N : V \to V$ un endomorphisme de $V$. Si le polynôme minimal $\mathcal{M}_N$ de $N$ est du type $\mathcal{M}_N(\lambda) = \lambda^r$, alors, il existe une décomposition $V = \oplus_{i=1}^m V_i$ invariante par $N$, avec $dimV_i = 2r_i$ et $r = r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m$, telle que chaque $V_i$ se décompose en somme directe de deux sous-espaces $N$-cycliques de dimension $r_i$; aussi, il existe une base $\mathcal{B} = \{e_j^i,\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, 2r_i\}$ de $V$ telle que, pour chaque $i = 1, \dots, m$,*

$\{e^i_j,\ j=1,\ldots,2r_i\}$ *soit une base de* $V_i$*, et, dans cette base et sa base duale* $\mathcal{B}^* = \{\phi^i_j,\ i = 1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,2r_i\}$*,* $\Lambda$ *et* $N$ *ont les écritures suivantes :*

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i} e^i_{2k-1}\wedge e^i_{2k}\right)$$

*et*

$$N = \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{r_i-1}\left(e^i_{2k-1}\otimes\phi^i_{2k+1} + e^i_{2k+2}\otimes\phi^i_{2k}\right)\right].$$

**Définition 4.3** *On appelle système de coordonnées dépendant d'un paramètre* $y\in B$ *(où* $B$ *est une variété différentiable) sur un ouvert* $U$ *d'une variété différentiable* $W$ *modelée sur l'espace vectoriel* $\mathbf{K}^k$ *(*$\mathbf{K}=\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$*) une application* $F : A\to\mathbf{K}^k$ *d'un ouvert* $A = U\times O$ *de* $W\times B$ *dans* $\mathbf{K}^k$ *telle que, pour toute valeur du paramètre* $y\in O$*, l'application* $F_y : U\to\mathbf{K}^k$ *définie, pour tout* $x\in U$*, par* $F_y(x) = F(x,y)$ *soit un difféomorphisme de* $U$ *sur un ouvert de* $\mathbf{K}^k$*.*

*Si* $F_y = (f_{1y},\ldots,f_{ky})$*, on dit qu'un champ de tenseurs* $T$ *sur* $U$ *dépendant de* $y\in B$ *s'écrit à coefficients constants dans les coordonnées* $(f_{1y},\ldots,f_{ky})$ *lorsque tous ses coefficients sont des éléments de* $\mathbf{K}$*.*

**Proposition 4.4** [21] *Soit* $(\Lambda, N)$ *une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique définie sur une variété différentiable* $W$ *de dimension* $2n$*, dépendant d'un paramètre* $y\in B$*, où* $B$ *est une variété différentiable. Si* $N$ *est nilpotent et 0-déformable, par rapport au paramètre aussi, alors, au voisinage de chaque point de* $W$*, il existe un système de coordonnées locales* $(x^i_j)$*,* $i=1,\ldots,m$*,* $j=1,\ldots,2r_i$*, de* $W$ *dépendant du paramètre* $y\in B$*, dans lequel*

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i}\frac{\partial}{\partial x^i_{2k-1}}\wedge\frac{\partial}{\partial x^i_{2k}}\right)$$

*et*

$$N = \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{r_i-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i_{2k-1}}\otimes dx^i_{2k+1} + \frac{\partial}{\partial x^i_{2k+2}}\otimes dx^i_{2k}\right)\right].$$

### i) Étude du cas $df(p)=0$

Si $df(p) = 0$, puisque $p\in\mathcal{R}_N$, $f$ est constante sur $U$. Nous considérons la structure de Poisson-Nijenhuis symplectique $(\Lambda_0, N + fId)$; son opérateur de récursion est 0-déformable et nilpotent. Alors, son modèle est bien connu par la proposition 4.2, d'où nous déduisons facilement les modèles de $(\Lambda_0, N)$, ainsi que des $\Lambda_k$, $k\in\mathbf{N}$, donnés dans la première partie du théorème 4.1. Dans l'écriture de ces modèles, $m$ désigne le nombre de sous-espaces $(N + fId)(x)-$invariants en lesquels se décompose l'espace $T_xU$, $x\in U$; le $i$-ème sous-espace, $i=1,\ldots,m$, se décompose en deux sous-espaces $(N+fId)(x)-$cycliques, tous deux de dimension $r_i$.

**ii) Étude du cas $df(p) \neq 0$**

On considère le gradient hamiltonien $X_f = \Lambda_0^{\#}(df)$ de $f$ relativement à $\Lambda_0$; il est une section de $kerdf$ et définit sur chaque hypersurface $\mathcal{H}_c = f^{-1}(c)$, où $c$ est une valeur régulière de $f$, un feuilletage simple. On démontre facilement que le couple $(\Lambda_0, N + fId)$ induit sur chaque variété intégrale $\mathcal{H}_c/X_f$ du fibré quotient $kerdf/X_f$ une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique $(\hat{\Lambda}_{0c}, H_c)$ dépendant paramétriquement de $c$ dont l'opérateur de récursion $H_c$ est nilpotent et 0-déformable par rapport au paramètre $c$ aussi. Alors, pour chaque valeur régulière $c$ de $f$, il existe un système de coordonnées locales $(z^i_{jc})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, 2r_i$, dépendant de $c$, dans lequel le couple $(\hat{\Lambda}_{0c}, H_c)$ a l'expression du modèle présenté dans la proposition 4.2. À partir des $(z^i_{jc})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, 2r_i$, on construit sur $U$ un système de coordonnées $(x^i_j; y_1, y_2)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, 2r_i$, qui peut, sans perte de généralité, être considéré centré en $p$. Les fonctions $x^i_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, 2r_i$, sont choisies de sorte que $x^i_j \circ i_c = z^i_{jc} \circ \pi_c$, où $i_c : \mathcal{H}_c \to M$ est l'injection canonique de $\mathcal{H}_c$ dans $M$ et $\pi_c : \mathcal{H}_c \to \mathcal{H}_c/X_f$ la projection canonique de $\mathcal{H}_c$ sur $\mathcal{H}_c/X_f$; $y_2 = f - a$, où $a = f(p)$; $y_1$ est choisie de manière que $\frac{\partial}{\partial y_1} = X_f$. Alors, dans ces coordonnées,

$$\Lambda_0 = \hat{\Lambda}_0 + \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2},$$

où

$$\hat{\Lambda}_0 = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\partial}{\partial x^i_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i_{2k}} \right)$$

est le tenseur induit par $\Lambda_0$ sur le fibré quotient $kerdf/X_f$ dont la restriction à chaque variété intégrale $\mathcal{H}_c/X_f$ de $kerdf/X_f$ coïncide avec $\hat{\Lambda}_{0c}$, et

$$N = -(y_2 + a)Id + H + \frac{\partial}{\partial y_1} \otimes \alpha - Z \otimes dy_2,$$

où

$$H = \sum_{i=1}^{m} \left[ \sum_{k=1}^{r_i - 1} \left( \frac{\partial}{\partial x^i_{2k-1}} \otimes dx^i_{2k+1} + \frac{\partial}{\partial x^i_{2k+2}} \otimes dx^i_{2k} \right) \right]$$

est le tenseur de Nijenhuis induit par $N + fId$ sur $kerdf/X_f$ dont la restriction à $\mathcal{H}_c/X_f$ coïncide avec $H_c$, $\alpha$ est une forme de Pfaff sur $M$, combinaison fonctionnelle des $dx^i_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, 2r_i$, et $Z$ un champ de vecteurs sur $M$, combinaison fonctionnelle des $\frac{\partial}{\partial x^i_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, 2r_i$, tels que

$$\hat{\Lambda}_0^{\#}(\alpha) = Z. \tag{1}$$

Comme $L_{\partial/\partial y_1} N = L_{X_f} N = 0$, les fonctions coefficients de $\alpha$ et de $Z$ sont indépendantes de $y_1$.

Le fait que $(\Lambda_0, N)$ définit sur $M$ une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique se traduit par les relations

$$[\hat{\Lambda}_0, Z] = \hat{\Lambda}_0 \quad \text{et} \quad L_Z H = H. \tag{2}$$

En plus, le lieu régulier $\mathcal{R}_N$ de $N$ coïncide avec l'ensemble des points $q \in M$ en lesquels $Z(q)$ est *transverse* à $H$, i.e. le polynôme minimal de $Z(q)$ est égal à celui de H, (cf. [21]).

Ainsi, la classification de $(\Lambda_0, N)$ au voisinage d'un point $p \in \mathcal{R}_N$ se ramène à celle des champs de vecteurs $Z$, solutions du système d'équations (2), dont le vecteur $Z(p)$ est transverse à $H$.

En développant une technique assez compliquée (cf. [21]), on démontre que, dans les coordonnées construites, un modèle de $Z$ est le champ de vecteurs

$$Z = \frac{\partial}{\partial x_1^1} + \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{r_i} \left[ (k + \frac{1}{2}) x_{2k-1}^i \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^i} - (k - \frac{1}{2}) x_{2k}^i \frac{\partial}{\partial x_{2k}^i} \right] \right).$$

Par suite, à cause de (1),

$$\alpha = dx_2^1 + \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{r_i} \left[ (k - \frac{1}{2}) x_{2k}^i dx_{2k-1}^i + (k + \frac{1}{2}) x_{2k-1}^i dx_{2k}^i \right] \right).$$

Les modèles des $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, sont établis à partir de ceux-ci de $\Lambda_0$ et de $N$ par un calcul direct. □

Dans le cas où $\mathcal{P}_N(\lambda) = (\lambda^2 + g\lambda + h)^n$, avec $g^2 - 4h$ strictement negative sur un voisinage de $p$, la construction des modèles est basée sur l'existence, au voisinage de $p$, d'une stsucture complexe $J$ à partir de laquelle on établit la hiérarchie $(\hat{\Lambda}_k,\ k \in \mathbf{N})$, de tenseurs de Poisson complexes holomorphes compatibles entre eux. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\hat{\Lambda}_k^\# = \Lambda_k^\# - iJ\Lambda_k^\#$. Son opérateur de récursion est aussi l'opérateur $N$, qui est holomorphe, dont le lieu régulier coïncide avec celui de $N$ vu comme opérateur réel et dont le polynôme caractéristique est $\hat{\mathcal{P}}_N(\lambda) = (\lambda + f)^n$, où $f = 1/2[g - i(4h - g^2)^{1/2}]$ est une fonction holomorphe. Il existe donc une carte locale complexe $\big(U,\ (z_l^j),\ w_1,\ w_2\big)$, $j = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, 2r_j$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, centrée en $p$, sur laquelle, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\hat{\Lambda}_k = \left(-(w_2 + \hat{a})\right)^k \hat{\Lambda}_0 + \hat{\Pi}_k + \hat{Z}_k \wedge \frac{\partial}{\partial w_1};$$

les champs de tenseurs $\hat{\Lambda}_0$, $\hat{\Pi}_k$, $\hat{Z}_k$ ont les expressions qui figurent au deuxième cas du théorème 4.1 et $\hat{a} = f(p) = a + ib$. Si $\big(U,\ (x_l^j),\ u_1,\ u_2; (y_l^j),\ v_1,\ v_2\big)$, $j = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, 2r_j$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, est la carte réelle associée à la carte complexe, après les remplacements adéquats dans l'expression ci-dessus de $\hat{\Lambda}_k$, $k \in \mathbf{N}$, en considérant sa partie réelle, on obtient une forme normale de $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$.

Nous aboutissons ainsi à formuler le théorème suivant.

**Théorème 4.5** *Dans le contexte considéré ci-dessus, si le polynôme caractéristique de $N$ est du type $\mathcal{P}_N(\lambda) = (\lambda^2 + g\lambda + h)^n$, avec $g^2 - 4h$ strictement negative sur un voisinage de $p$, alors il existe un système de coordonnées locales $\big((x_l^j),\ u_1,\ u_2;\ (y_l^j),\ v_1,\ v_2\big)$, $j = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, 2r_j$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, de $M$, centré en $p$, dans lequel le couple de tenseurs $(\Lambda_0, N)$ et les tenseurs $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, ont les expressions :*

$$\Lambda_0 = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{r_j}\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x^j_{2k-1}}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j_{2k}} - \frac{\partial}{\partial y^j_{2k-1}}\wedge\frac{\partial}{\partial y^j_{2k}}\right)\right] + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\wedge\frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial v_1}\wedge\frac{\partial}{\partial v_2}\right),$$

$$N = -(u_2+a)Id - (v_2+b)J + H_x + H_y +$$

$$+\frac{\partial}{\partial u_1}\otimes(\alpha_x-\alpha_y) + \frac{\partial}{\partial v_1}\otimes(\alpha_x+\alpha_y) - Z_x\otimes(du_2+dv_2) - Z_y\otimes(du_2-dv_2),$$

*où* $a = Re\hat{a},\ b = Im\hat{a},$

$$J = \sum_{j,l}\left(\frac{\partial}{\partial y^j_l}\otimes dx^j_l - \frac{\partial}{\partial x^j_l}\otimes dy^j_l\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\otimes dv_1 - \frac{\partial}{\partial u_2}\otimes dv_2 + \frac{\partial}{\partial v_1}\otimes du_1 + \frac{\partial}{\partial v_2}\otimes du_2,$$

$$H_x = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{r_j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^j_{2k-1}}\otimes dx^j_{2k+1} + \frac{\partial}{\partial x^j_{2k+2}}\otimes dx^j_{2k}\right)\right],$$

$$H_y = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{r_j-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^j_{2k-1}}\otimes dy^j_{2k+1} + \frac{\partial}{\partial y^j_{2k+2}}\otimes dy^j_{2k}\right)\right],$$

$$\alpha_x = dx^1_2 + \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_j}\left[(k-\frac{1}{2})x^j_{2k}dx^j_{2k-1} + (k+\frac{1}{2})x^j_{2k-1}dx^j_{2k}\right]\right),$$

$$\alpha_y = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_j}\left[(k-\frac{1}{2})y^j_{2k}dy^j_{2k-1} + (k+\frac{1}{2})y^j_{2k-1}dy^j_{2k}\right]\right),$$

$$Z_x = \frac{\partial}{\partial x^1_1} + \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_j}\left[(k+\frac{1}{2})x^j_{2k-1}\frac{\partial}{\partial x^j_{2k-1}} - (k-\frac{1}{2})x^j_{2k}\frac{\partial}{\partial x^j_{2k}}\right]\right),$$

$$Z_y = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_j}\left[(k+\frac{1}{2})y^j_{2k-1}\frac{\partial}{\partial y^j_{2k-1}} - (k-\frac{1}{2})y^j_{2k}\frac{\partial}{\partial y^j_{2k}}\right]\right),$$

*et*

$$\Lambda_k = (-1)^k\left[Re(w_2+\hat{a})^k\Lambda_0 + Im(w_2+\hat{a})^k\bar{\Lambda}_0\right] + Re\hat{\Pi}_k + \frac{1}{2}(X_k\wedge\frac{\partial}{\partial u_1} - JX_k\wedge\frac{\partial}{\partial v_1}),$$

*où*

$$\bar{\Lambda}_0 = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{r_j}\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x^j_{2k-1}}\wedge\frac{\partial}{\partial y^j_{2k}} + \frac{\partial}{\partial y^j_{2k-1}}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j_{2k}}\right)\right] + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\wedge\frac{\partial}{\partial v_2} - \frac{\partial}{\partial v_1}\wedge\frac{\partial}{\partial u_2}\right)$$

*et* $X_k$ *est la partie réelle de* $\hat{Z}_k$.

**Théorème 4.6** *Soit* $(\Lambda_0, N)$ *une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique définie sur une variété différentiable* $M$ *de dimension* $2n$, $(\Lambda_k,\ k \in \mathbf{N})$ *la hiérarchie de tenseurs de Poisson deux à deux compatibles engendrée sur* $M$ *à partir de* $\Lambda_0$ *et de* $N$. *Alors, au voisinage de chaque point régulier* $p$ *de* $M$ *relativement à* $N$, *le modèle de* $(\Lambda_0, N)$ *ainsi que des* $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, *est un produit fini de facteurs choisis parmi*
- *ceux du théorème 4.1 lorsque la variété* $M$ *est complexe;*
- *ceux des théorèmes 4.1 et 4.2 lorsque la variété* $M$ *est réelle.*

*Les modèles sont complètement déterminés par la famille des diviseurs élémentaires de* $N$. *(On note que chaque diviseur élémentaire apparaît un nombre paire de fois dans cette famille.)*

## 5. Symplectisation de structures de Poisson-Nijenhuis

Soit $(\Lambda_0, N)$ une structure de Poisson-Nijenhuis définie sur une variété différentiable $M$, avec $\Lambda_0$ dégénéré. Le problème de *symplectisation* de $(\Lambda_0, N)$ qui, dans un certaine sens est le problème inverse de *réduction* d'une telle structure (cf. [26]), consiste à établir, au moins au voisinage d'un point $p \in M$ tel que $corang\Lambda_0(p) \geq 1$, l'existence d'une submersion surjective

$$\Phi : (\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}) \to (M, \Lambda_0, N)$$

ayant les propriétés :
1. la variété $\tilde{M}$ est de dimension paire, munie d'une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N})$;
2. $\Phi$ est une application de Poisson pour $\tilde{\Lambda}_0$ et $\Lambda_0$;
3. $\tilde{N}(kerd\Phi) \subseteq kerd\Phi$;
4. $\tilde{N}$ applique les champs de vecteurs projectables par $\Phi$ à champs de vecteurs projectables, i.e., pour toute section $\tilde{X}$ de $kerd\Phi$ et tout champ de vecteurs $\tilde{Y}$ sur $\tilde{M}$, $L_{\tilde{X}}(\tilde{N})\tilde{Y}$ est une section de $kerd\Phi$;
5. $\tilde{N}$ se projette par $\Phi$ et a pour projection $N$.

**Définition 5.1** *On dit que la variété de Poisson-Nijenhuis symplectique* $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N})$ *et la submersion surjective* $\Phi : \tilde{M} \to M$ *possédant les propriétés spécifiées ci-dessus constituent une symplectisation (locale) de* $(M, \Lambda_0, N)$.

Dans [22], en se plaçant au voisinage d'un point $p$ de $(M, \Lambda_0, N)$ tel que $corang\Lambda_0(p) = 1$ et en utilisant les résultats de Weinstein [27] concernant la symplectisation (ou *réalisation symplectique*) des structures de Poisson, on prouve le théorème suivant.

**Théorème 5.2** *Chaque point* $p$ *d'une variété de Poisson-Nijenhuis* $(M, \Lambda_0, N)$ *de dimension* $2n+1$, *tel que* $corang\Lambda_0(p) = 1$, *possède un voisinage ouvert* $U$ *dans* $M$ *sur lequel* $(\Lambda_0, N)$ *est symplectisable par la projection canonique*

$$\pi : (\tilde{U}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}) \to (U, \Lambda_0, N).$$

*Précisément,* $\tilde{U} = U \times \mathbf{R}$,

$$\tilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0 + X_0 \wedge \frac{\partial}{\partial t},$$

*où $X_0$ est un automorphisme de Poisson infinitésimal de $\Lambda_0$ transverse en $p$ à la feuille symplectique $S_0$ de $\Lambda_0$ qui passe par ce point et $t$ la coordonnée canonique sur le facteur $\mathbf{R}$, et $\tilde{N}$ est l'opérateur de récursion du couple $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{\Lambda}_1)$ de tenseurs de Poisson compatibles, i.e. $\tilde{N} = \tilde{\Lambda}_1^{\#}\tilde{\Lambda}_0^{\#-1}$ où*

$$\tilde{\Lambda}_1 = \Lambda_1 \, + \, (NX_0) \wedge \frac{\partial}{\partial t}.$$

*La variété de Poisson-Nijenhuis symplectique $(\tilde{U}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N})$ est de dimension $2n+2$, qui est la plus petite dimension possible d'une symplectisation de $(U, \Lambda_0, N)$.*

**Remarques**

**1.** Dans un système de coordonnées produit de $\tilde{U} = U \times \mathbf{R}$, $\tilde{N}$ a une expression du type

$$\tilde{N} = N \, + \, \frac{\partial}{\partial t} \otimes \alpha \, - \, f\frac{\partial}{\partial t} \otimes dt, \tag{3}$$

où $\alpha$ est une 1-forme sur $U$ et $f \in C^\infty(U, \mathbf{R})$. Bien entendu, $-f$ est une valeur propre fonctionnelle de $\tilde{N}$ et $spectre\tilde{N} = \{-f\} \cup spectre N$. Comme les valeurs propres fonctionnelles de $\tilde{N}$ sont de multiplicité paire, $-f$ est aussi une valeur propre fonctionnelle de $N$ et en plus $-f$ est la seule valeur propre de $N$ de multiplicité impaire.

**2.** Si $(\tilde{\Lambda}_k, \; k \in \mathbf{N})$ est la hiérarchie de tenseurs de Poisson deux à deux compatibles engendrée sur $\tilde{U}$ à partir de $\tilde{\Lambda}_0$ et de $\tilde{N}$, alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\tilde{\Lambda}_k = \Lambda_k \, + \, (N^k X_0) \wedge \frac{\partial}{\partial t}$$

et $\pi : (\tilde{U}, \tilde{\Lambda}_k) \to (U, \Lambda_k)$ est une application de Poisson.

**Lemme 5.3** *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que ci-dessus, si $\pi : (\tilde{U}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}) \to (U, \Lambda_0, N)$ est une symplectisation de $(\Lambda_0, N)$ sur $U$ de dimension $2n+2$, avec $\tilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0 \, + \, X_0 \wedge \frac{\partial}{\partial t}$, alors $\tilde{N}$ est l'opérateur de récursion de la structure bihamiltonienne $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{\Lambda}_1)$ où $\tilde{\Lambda}_1 = \Lambda_1 \, + \, (NX_0) \wedge \frac{\partial}{\partial t}$.*

À l'aide de ce lemme dont la démonstration est facile, on établit le théorème suivant.

**Théorème 5.4** *Soit $(\Lambda_0, N)$ une structure de Poisson-Nijenhuis définie sur une variété différentiable $M$ de dimension $2n+1$, et $p$ un point de $M$, régulier relativement à $N$, tel que $corang\Lambda_0(p) = 1$. Alors, deux symplectisations de $(\Lambda_0, N)$ sur un voisinage de $p$ de type du théorème 5.1 sont équivalentes.*

*Démonstration.* Soient $\pi : (\tilde{U}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}) \to (U, \Lambda_0, N)$ et $\pi' : (\tilde{U}, \tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}') \to (U, \Lambda_0, N)$ deux symplectisations de $(\Lambda_0, N)$ sur $U$, avec

$$\tilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0 \, + \, X_0 \wedge \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda}'_0 = \Lambda_0 \, + \, X'_0 \wedge \frac{\partial}{\partial t},$$

où $X_0$ et $X'_0$ sont deux automorphismes de Poisson infintésimaux de $\Lambda_0$, différents entre eux, transverses en $p$ à la feuille symplectique $S_0$ de $\Lambda_0$ qui passe par $p$. Du lemme ci-dessus resulte que $\tilde{N}$ et $\tilde{N}'$ sont respectivement les opérateurs de récursion des couples $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{\Lambda}_1)$ et $(\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{\Lambda}'_1)$, où

$$\tilde{\Lambda}_1 = \Lambda_1 + (NX_0) \wedge \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda}'_1 = \Lambda_1 + (NX'_0) \wedge \frac{\partial}{\partial t}.$$

Alors, dans un système de coordonnées produit de $\tilde{U} = U \times \mathbf{R}$, ils ont respectivement des expressions de type

$$\tilde{N} = N + \frac{\partial}{\partial t} \otimes \alpha - f \frac{\partial}{\partial t} \otimes dt \quad \text{et} \quad \tilde{N}' = N + \frac{\partial}{\partial t} \otimes \alpha' - f' \frac{\partial}{\partial t} \otimes dt,$$

où $\alpha$, $\alpha'$ sont des 1-formes sur $U$ et $f, f' \in C^\infty(U, \mathbf{R})$. En répétant le raisonement développé dans la remarque précédente, on conclut que $-f'$ est aussi la seule valeur propre fonctionnelle de $N$ de multiplicité impaire. Donc, $f'$ coïncide avec $f$. Alors, les opérateurs $\tilde{N}$ et $\tilde{N}'$ ont exactement les mêmes valeurs propres fonctionnelles de même multiplicité algébrique et géométrique. Par conséquente, les familles de leurs diviseurs élémentaires coïncident ainsi que leurs lieux réguliers sur $\tilde{U} = U \times \mathbf{R}$.

Comme les diviseurs élémentaires de l'opérateur de récursion d'une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique déterminent complètement le modèle de cette structure (cf. th. 4.3), les couples $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N})$ et $(\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}')$ ont exactement le même modèle au voisinage des points de $\mathcal{R}_{\tilde{N}} = \mathcal{R}_{\tilde{N}'}$. Alors, au voisinage de ces points, ils sont équivalents (cf. [27]), i.e. il existe un difféomorphisme

$$\Psi : (\tilde{U}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}) \to (\tilde{U}, \tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}')$$

qui est de Poisson pour $\tilde{\Lambda}_0$ et $\tilde{\Lambda}'_0$ et qui applique $\tilde{N}$ à $\tilde{N}'$. Sous l'hypothèse que le point considéré $p$ est régulier relativement à $N$, par suite il est la projection d'un point de $\mathcal{R}_{\tilde{N}} = \mathcal{R}_{\tilde{N}'}$ sur $U$ (cf. lemme 6.2), on a $\pi = \pi' \circ \Psi$. □

## 6. Modèles locaux de structures de Poisson-Nijenhuis en dimension impaire

Soit $(\Lambda_0, N)$ une structure de Poisson-Nijenhuis définie sur une variété différentiable $M$ de dimension $2n+1$, avec $\Lambda_0$ de rang maximum sur un ouvert dense de M. L'objectif de ce paragraphe est la construction d'un système de coordonnées locales de $M$ dans lequel le couple de tenseurs $(\Lambda_0, N)$ a une expression, la plus simple possible. D'après les résultats des paragraphes précédents, afin de construire un tel système on suit, grosso-modo, la démarche suivante. On considère d'abord une symplectisation locale $\pi : (\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}) \to (M, \Lambda_0, N)$ de $(M, \Lambda_0, N)$. Ainsi, on se ramène à une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N})$ dont celle initiale est un quotient. Le théorème 4.3 affirme l'existence, au voisinage de chaque point de $\mathcal{R}_{\tilde{N}}$, d'un système de coordonnées dans lequel $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N})$ a l'écriture du modèle décrit par ce théorème. En considérant donc le modèle de $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N})$ et en passant au quotient on va obtenir une forme normale de $(\Lambda_0, N)$.

Soient $p$ un point générique de $(M, \Lambda_0, N)$, i.e. $p \in \mathcal{R}_N$ et $corang\Lambda_0(p) = 1$, et $\pi : (\tilde{U}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}) \to (U, \Lambda_0, N)$ une sympectisation de $(\Lambda_0, N)$ sur un voisinage $U$ de $p$ déterminée par le théorème 5.1.

**Lemme 6.1** *Si la fonction $f$ qui figure dans l'expression (3) de $\tilde{N}$ n'est pas constante sur un voisinage $U$ de $p$, alors elle est une fonction de Casimir de $\Lambda_0$.*

*Démonstration.* Puisque $\tilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0 + X_0 \wedge \frac{\partial}{\partial t}$ est non-dégénéré sur $\tilde{U}$ et $L_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{\Lambda}_0 = 0$, le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ est hamiltonien relativement à $\tilde{\Lambda}_0$ d'hamiltonien $g$, où $g$ est une fonction de Casimir de $\Lambda_0$ telle que $X_0 \cdot g = -1$. À cause de la compatibilité des $\Lambda_0$ et $N$, leur concomitant de Magri-Morosi $R(\Lambda_0, N)$ s'annule identiquement sur $M$. Donc $R(\Lambda_0, N)(dg, X_0) = 0$. Mais, en tenant compte du fait qu'en chaque $x \in U$, la direction de $dg(x)$ est une direction propre de ${}^tN(x)$ associée à sa valeur propre $-f(x)$, d'après un calcul direct, on montre que $R(\Lambda_0, N)(dg, X_0) = \Lambda_0^{\#}(df)$. Alors, $\Lambda_0^{\#}(df) = 0$, d'où il découle que $f$ est une fonction de Casimir de $\Lambda_0$; par suite $f = h \circ g$, où $h$ est une fonction d'une variable. □

**Lemme 6.2** *Le lieu régulier $\mathcal{R}_N$ de $N$ sur $U$ est la projection par $\pi : \tilde{U} \to U$ du lieu régulier $\mathcal{R}_{\tilde{N}}$ de $\tilde{N}$ sur $\tilde{U}$.*

*Démonstration.* Par application des propriétés des diviseurs élémentaires d'un opérateur concernant leur comportement par quotient ([4]), on déduit que le type algébrique de $\tilde{N}$ est constant sur $\tilde{U}$ si, et seulement si, celui de $N$ est constant sur $U = \pi(\tilde{U})$.

Comme le polynôme caractéristique de $\tilde{N}$ est $\mathcal{P}_{\tilde{N}}(\lambda) = -(\lambda + f)\mathcal{P}_N(\lambda)$ et $-f$ est une valeur propre fonctionnelle de $N$, l'ensemble $\{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ des coefficients fonctionnels des facteurs irréductibles de $\mathcal{P}_{\tilde{N}}$ sur $\tilde{U}$ coïncide avec celui de $\mathcal{P}_N$ sur $U$. En plus, pour tout $i = 1, \ldots, s$, le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ est une section de $kerdf_i$. Alors, les sous-espaces

$$\tilde{E}_{\tilde{x}} = \bigcap_{i=1}^{s} kerdf_i(\tilde{x})$$

de $T_{\tilde{x}}\tilde{U}$, $\tilde{x} \in \tilde{U}$, définissent une distribution $\tilde{E}$ de rang constant sur $\tilde{U}$ si, et seulement si, les sous-espaces

$$E_x = \bigcap_{i=1}^{s} kerdf_i(x) = \tilde{E}_{\tilde{x}} / \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{x})$$

de $T_xU$, $x = \pi(\tilde{x}) \in U$, définissent une distribution $E$ de rang constant sur $U$.

En appliquant encore une fois les propriétés des diviseurs élémentaires d'un opérateur indiquées ci-dessus, on conclut que le type algébrique de la restriction de $\tilde{N}$ à $\tilde{E}$ est constant sur $\tilde{U}$ si, et seulement si, celui de la restriction de $N$ à $E$ est constant sur $U$.

Alors, $\mathcal{R}_N = \pi(\mathcal{R}_{\tilde{N}})$. □

Le point considéré $p$ de $M$ étant un point régulier relativement à $N$, il possède un voisinage ouvert $U$ dans $M$ sur lequel le type algébrique de $N$ est constant. Compte tenu du fait que $-f$ est la seule valeur propre de $N$ de multiplicité impaire, soit égale à $2l - 1$, $l \in \mathbf{N}$, le polynôme caractéristique $\mathcal{P}_N$ de $N$ s'écrit sur $U$ sous la forme

$$\mathcal{P}_N(\lambda) = -(\lambda + f)^{2l-1}Q(\lambda);$$

les polynômes $(\lambda + f)^{2l-1}$ et $Q(\lambda)$ sont premiers entre eux sur $U$ et le coefficient de plus haut degré de $Q(\lambda)$ est aussi égal à 1. Donc, le polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{\tilde{N}}$ de $\tilde{N}$ s'écrit sur $\tilde{U}$ comme produit

$$\mathcal{P}_{\tilde{N}}(\lambda) = (\lambda + f)^{2l}Q(\lambda)$$

de polynômes premiers entre eux dont le coefficient de plus haut degré est égal à 1. Ainsi, d'après la proposition 3.1, à un voisinage convenable d'un point $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$, la variété $(\tilde{U}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N})$ s'identifie à un produit $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}') \times (\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'')$ de variétés de Poisson-Nijenhuis symplectiques. La variété $\tilde{M}'$ s'identifiant à l'ensemble des feuilles de $Im(\tilde{N} + fId)^{2l} = kerQ(\tilde{N})$ et la variété $\tilde{M}''$ à l'ensemble des feuilles de $ImQ(\tilde{N}) = ker(\tilde{N} + fId)^{2l}$; leurs fibrés tangents sont $T\tilde{M}' = ker(\tilde{N} + fId)^{2l}$ et $T\tilde{M}'' = kerQ(\tilde{N})$. Aussi, $\tilde{N}'$ (resp. $\tilde{N}''$) est la projection de $\tilde{N}|_{ker(\tilde{N}+fId)^{2l}}$ (resp. $\tilde{N}|_{kerQ(\tilde{N})}$) sur $ker(\tilde{N} + fId)^{2l}$ (resp. $kerQ(\tilde{N})$) et $\mathcal{P}_{\tilde{N}'}(\lambda) = (\lambda + f)^{2l}$ (resp. $\mathcal{P}_{\tilde{N}''}(\lambda) = Q(\lambda)$). Comme $(\tilde{N} + fId)(\frac{\partial}{\partial t}) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t}$ est une section de $ker(\tilde{N} + fId)^{2l} = T\tilde{M}'$. Soit $M' \cong \tilde{M}'/\frac{\partial}{\partial t}$ l'ensemble des courbes intégrales de $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}')$. Les conditions du thórème de réduction d'une variété de Poisson-Nijenhuis [26] étant vérifiées par $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}')$ et $(\tilde{M}', \frac{\partial}{\partial t})$, la structure $(\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}')$ passe au quotient et induit sur $M'$ une structure de Poisson-Nijenhuis $(\Lambda'_0, N')$ dont le tenseur de Nijenhuis a comme polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{N'}(\lambda) = -(\lambda + f)^{2l-1}$. Alors, au voisinage de $p$, la variété initiale $(M, \Lambda_0, N)$ s'identifie au produit $(M', \Lambda'_0, N') \times (\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'')$ de variétés de Poisson-Nijenhuis. Puisque le tenseur de Poisson $\tilde{\Lambda}''_0$ est non-dégénéré sur $\tilde{M}''$, le modèle local de $(\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'')$ est bien connu par le théorème 4.3. Ainsi, notre problème se réduit à la construction d'une forme normale de $(M', \Lambda'_0, N')$.

Par les précédents, on déduit que

$$\tilde{\Lambda}'_0 = \Lambda'_0 + X_0 \wedge \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \tilde{N}' = N' + \frac{\partial}{\partial t} \otimes \alpha - f \frac{\partial}{\partial t} \otimes dt, \tag{4}$$

$X_0$ étant vu comme un automorphisme de Poisson infinitésimal de $\Lambda'_0$ transverse en la projection de $p$ sur $M'$ à la feuille symplectique de $\Lambda'_0$ qui passe par ce point.

### Construction du modèle de $(\Lambda'_0, N')$

Soit $\tilde{p}'$ la projection de $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ sur $\tilde{M}'$. Nous distinguons les cas : *i)* $df(\tilde{p}') = 0$ et *ii)* $df(\tilde{p}') \neq 0$.

**i)** Si $df(\tilde{p}') = 0$, à cause de régularité de $\tilde{p}'$ relativement à $\tilde{N}'$, il existe un voisinage $\tilde{U}'$ de $\tilde{p}'$ dans $\tilde{M}'$ sur lequel $f$ est constante. D'après le théorème 4.1, il existe sur $\tilde{U}'$ des coordonnées locales $(\tilde{x}'^i_j)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, de $\tilde{M}'$, centrées en $\tilde{p}'$, dans lesquelles $(\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}')$ a l'expression du modèle.

Observons qu'en chaque $\tilde{x}' \in \tilde{U}'$ les directions des vecteurs $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_1}(\tilde{x}')$ et $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2r_i}}(\tilde{x}')$, $i = 1, \ldots, m$, sont les directions propres de $\tilde{N}'(\tilde{x}')$ appartenant à la base construite de $T_{\tilde{x}'}\tilde{U}'$. D'autre part, en chaque $\tilde{x}' \in \tilde{U}'$, la direction de $\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{x}')$ est aussi une direction propre de $\tilde{N}'(\tilde{x}')$. De la manière de construction des coordonnées ci-dessus, (cf. [21]), on déduit que l'on peut, sans perte de généralité, les choisir de sorte que $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^m_{2r_m}} = \frac{\partial}{\partial t}$. Ainsi, à partir des $(\tilde{x}'^i_j)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, en passant au quotient $M' \cong \tilde{M}'/\frac{\partial}{\partial t}$, on obtient un système de coordonnées locales $(x'^i_j)$, $i = 1, \ldots, m$, pour $i \neq m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, pour $i = m$, $j = 1, \ldots, 2r_m - 1$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, de $M'$, centré en $p' = \pi'(\tilde{p}')$, $\pi' : \tilde{M}' \to M'$ étant la projection canonique de $\tilde{M}'$ sur $M'$, $\tilde{x}'^i_j = x'^i_j \circ \pi'$, dans lequel le couple $(\Lambda'_0, N')$

induit sur $M'$ par $(\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}')$ via $(\tilde{M}', \frac{\partial}{\partial t})$ a l'expression :

$$\Lambda'_0 = \sum_{i=1}^{m-1} \left( \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\partial}{\partial x'^i_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x'^i_{2k}} \right) + \sum_{k=1}^{r_m-1} \frac{\partial}{\partial x'^m_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x'^m_{2k}} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} N' = & - \sum_{i=1}^{m-1} \left( \sum_{j=1}^{2r_i} a' \frac{\partial}{\partial x'^i_j} \otimes dx'^i_j \right) - \sum_{j=1}^{2r_m-1} a' \frac{\partial}{\partial x'^m_j} \otimes dx'^m_j + \\ & + \sum_{i=1}^{m-1} \left[ \sum_{k=1}^{r_i-1} \left( \frac{\partial}{\partial x'^i_{2k-1}} \otimes dx'^i_{2k+1} + \frac{\partial}{\partial x'^i_{2k+2}} \otimes dx'^i_{2k} \right) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{r_m-1} \frac{\partial}{\partial x'^m_{2k-1}} \otimes dx'^m_{2k+1} + \sum_{k=1}^{r_m-2} \frac{\partial}{\partial x'^m_{2k+2}} \otimes dx'^m_{2k}, \end{aligned} \tag{6}$$

où $a' = f(p') = f(\tilde{p}')$; la dernière égalité est vraie puisque $f$ est indépendante de $t$.

**ii)** Si $df(\tilde{p}') \neq 0$, l'hypothèse de régularité de $\tilde{p}'$ relativement à $\tilde{N}'$ assure que $f$ n'est pas constante sur les voisinages de $\tilde{p}'$ et le théorème 4.1 affirme l'existence d'un système de coordonnées locales $\big((\tilde{x}'^i_j), \tilde{y}'_1, \tilde{y}'_2\big)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, 2r_i$, $r_1 \geq \dots \geq r_m$, de $\tilde{M}'$, centré en $\tilde{p}'$, dans lequel $\tilde{\Lambda}'_0$ et $\tilde{N}'$ ont les écritures qui figurent dans ce théorème. Pour la construction de ces coordonnées, on pose $\tilde{y}'_2 = f - \tilde{a}'$, $\tilde{a}' = f(\tilde{p}')$, et on choisit la coordonnée $\tilde{y}'_1$ de manière que $\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1} = \tilde{X}'_f$, où $\tilde{X}'_f = \tilde{\Lambda}'^{\#}_0(df)$, ([21]).

Comme $\tilde{\Lambda}'^{\#}_0 \left( \{\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1}\}^\circ \right) = ker d\tilde{y}'_2 \subset T\tilde{M}'$, $\tilde{N}'(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1}) = -(\tilde{y}'_2 + \tilde{a}')\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1}$, $L_{\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1}} \tilde{N}' = 0$, le couple $(\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}')$ passe au quotient $\tilde{M}'/\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1}$, (cf. [25]). Mais, la variété $\tilde{M}'/\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1}$ coïncide avec $M' \cong \tilde{M}'/\frac{\partial}{\partial t}$. Pour le confirmer, il suffit de remarquer que $\tilde{X}'_f$ coïncide, à un facteur près, avec $\frac{\partial}{\partial t}$. Effectivement, en tenant compte de la relation $\Lambda_0 = \Lambda'_0 + \tilde{\Lambda}''_0$, du lemme 6.1 et de la formule 4, nous concluons $\tilde{X}'_f = -h'(g)\frac{\partial}{\partial t}$. En conséquence, la structure induite par $(\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}')$ sur $\tilde{M}'/\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1}$ s'identifie à la structure définie par $(\Lambda'_0, N')$.

Ainsi, à partir des coordonnées $\big((\tilde{x}'^i_j), \tilde{y}'_1, \tilde{y}'_2\big)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, 2r_i$, $r_1 \geq \dots \geq r_m$, de $\tilde{M}'$, en passant au quotient $M' \cong \tilde{M}'/\frac{\partial}{\partial t}$, on obtient un système de coordonnées $\big((x'^i_j), y'_2\big)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, 2r_i$, $r_1 \geq \dots \geq r_m$, de $M'$, centré en $p' = \pi'(\tilde{p}')$, où $\pi' : \tilde{M}' \to M'$ est la projection canonique de $\tilde{M}'$ sur $M'$, $\tilde{x}'^i_j = x'^i_j \circ \pi'$, $\tilde{y}'_2 = y'_2 \circ \pi'$, dans lequel les tenseurs $\Lambda'_0$ et $N'$ ont respectivement les expressions :

$$\Lambda'_0 = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\partial}{\partial x'^i_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x'^i_{2k}} \right), \tag{7}$$

$$N' = - \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{2r_i} (y'_2 + a') \frac{\partial}{\partial x'^i_j} \otimes dx'^i_j \right) + \sum_{i=1}^{m} \left[ \sum_{k=1}^{r_i-1} \left( \frac{\partial}{\partial x'^i_{2k-1}} \otimes dx'^i_{2k+1} + \frac{\partial}{\partial x'^i_{2k+2}} \otimes dx'^i_{2k} \right) \right] -$$

$$- \left( \frac{\partial}{\partial x_1'^1} + \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{r_i} \left[ (k+\frac{1}{2}) x_{2k-1}'^i \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}'^i} - (k-\frac{1}{2}) x_{2k}'^i \frac{\partial}{\partial x_{2k}'^i} \right] \right) \right) \otimes dy_2', \tag{8}$$

où $a' = f(p') = f(\tilde{p}') = \tilde{a}'$.

## Conclusion

D'après le théorème 5.2, nous concluons facilement que le modèle construit de $(\Lambda_0, N)$ au voisinage d'un point générique $p$ de $M$ est indépendant, à un difféomorphisme près, du choix de la sysmplectisation de type du théorème 5.1 à l'aide de laquelle nous avons établi ce modèle.

Nous arrivons ainsi à formuler le théorème suivant.

**Théorème 6.3** *Soit $(\Lambda_0, N)$ une structure de Poisson-Nijenhuis définie sur une variété différentiable $M$ de dimension $2n+1$, avec $\Lambda_0$ de rang maximum sur un ouvert dense de $M$. Alors, au voisinage de chaque point générique $p$ de $M$, le modèle de $(\Lambda_0, N)$ est un produit d'une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique dont la forme canonique est déterminée par le théorème 4.3 et d'une structure de Poisson-Nijenhuis $(\Lambda_0', N')$ dont le tenseur de Nijenhuis a comme polynôme caractéristique un polynôme du type $\mathcal{P}_{N'}(\lambda) = (\lambda + f)^{2l-1}$, $l \in \mathbf{N}$. Si,*

- *$f$ est constante sur un voisinage de $p$, les modèles des $\Lambda_0'$ et $N'$ sont respectivement donnés par les formules 5 et 6;*
- *$f$ n'est pas constante sur un voisinage de $p$, les modèles des $\Lambda_0'$ et $N'$ sont respectivement donnés par les formules 7 et 8.*

*Le modèle de $(\Lambda_0, N)$ est complètement déterminé par la famille des diviseurs élémentaires de $N$.*

## 7. Modèle local d'une hiérarchie de tenseurs de Poisson en dimension impaire

Nous nous plaçons dans le contexte du paragraphe précédent et nous considérons la hiérarchie $(\Lambda_k,\ k \in \mathbf{N})$ de tenseurs de Poisson deux à deux compatibles engendrée sur $M$ par $\Lambda_0$ et $N$; pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\Lambda_k^{\#} = N^k \Lambda_0^{\#}$. Dans la suite, nous allons établir les expressions locales canoniques des $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$.

Comme nous l'avons déjà remarqué au section 5, en considérant une symplectisation $\pi : (\tilde{U}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}) \to (U, \Lambda_0, N)$ de $(\Lambda_0, N)$ sur un voisinage $U$ d'un point générique $p$ de $M$ déterminée par le théorème 5.1, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\Lambda_k$ peut être vu comme la projection par $\pi : \tilde{U} \to U$ du tenseur de Poisson $\tilde{\Lambda}_k = \Lambda_k + (N^k X_0) \wedge \frac{\partial}{\partial t}$, $\tilde{\Lambda}_k^{\#} = \tilde{N}^k \tilde{\Lambda}_0^{\#}$. Les $\tilde{\Lambda}_k$, $k \in \mathbf{N}$, étant engendrés sur $\tilde{U}$ à partir de $\tilde{\Lambda}_0$, qui est non-dégénéré, et de $\tilde{N}$, leurs modèles locaux sont bien décrits par le théorème 4.3. Par suite, nous pouvons obtenir une forme normale des $\Lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, en quotientant les modèles des $\tilde{\Lambda}_k$, $k \in \mathbf{N}$.

D'autre part, $(\tilde{U}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N})$ s'identifiant, au voisinage d'un point $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$, au produit $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}_0', \tilde{N}') \times (\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}_0'', \tilde{N}'')$ de variétés de Poisson-Nijenhuis symplectiques, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $(\tilde{U}, \tilde{\Lambda}_k)$ s'identifie au produit de variétés de Poisson $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}_k') \times (\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}_k'')$, $\tilde{\Lambda}_k'^{\#} = \tilde{N}'^k \tilde{\Lambda}_0'^{\#}$ et $\tilde{\Lambda}_k''^{\#} = \tilde{N}''^k \tilde{\Lambda}_0''^{\#}$ 'A cause des faits que $\frac{\partial}{\partial t}$ est une section de $T\tilde{M}'$ et que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$\tilde{\Lambda}_k'^{\#}\left(\{\frac{\partial}{\partial t}\}^\circ\right) \subset T\tilde{M}'$, la hiérarchie $(\tilde{\Lambda}_k',\, k \in \mathbf{N})$ de tenseurs de Poisson deux à deux compatibles induit sur la variété quotient $M' \cong \tilde{M}'/\frac{\partial}{\partial t}$ une famille $(\Lambda_k',\, k \in \mathbf{N})$ de tenseurs de Poisson compatibles entre eux dont l'opérateur de récursion $N'$ a comme polynôme caractéristique un polynôme du type $\mathcal{P}_{N'}(\lambda) = (\lambda + f)^{2l-1}$, $l \in \mathbf{N}$; sans doute, elle coïncide avec la hiérarchie de tenseurs de Poisson engendrée sur $M'$ par le couple $(\Lambda_0', N')$. Alors, au voisinage de $p$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la variété de Poisson $(M, \Lambda_k)$ s'identifie au produit de variétés de Poisson $(M', \Lambda_k') \times (\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}_k'')$. Le modèle du facteur $(\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}_k'')$ étant connu par le théorème 4.3, notre problème se réduit à la construction d'un modèle de $(M', \Lambda_k')$.

Soit $\tilde{p}'$ la projection de $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ sur $\tilde{M}'$. Comme précédemment, nous distinguons les cas : *i)* $df(\tilde{p}') = 0$ et *ii)* $df(\tilde{p}') \neq 0$. Dans les deux cas on peut obtenir une forme normale des $\Lambda_k'$, $k \in \mathbf{N}$, en répétant le raisonement du §6 et en quotientant les formes normales des $\tilde{\Lambda}_k'$, $k \in \mathbf{N}$, ou bien, en calculant, dans les coordonnées construites, les expressions des $N'^k$, $k \in \mathbf{N}$, et en les composant avec l'expression de $\Lambda_0'$. De toute façon, nous aboutissons au théorème suivant.

**Théorème 7.1** *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que ci-dessus, au voisinage de chaque point générique $p$ de $M$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, le modèle de $\Lambda_k$ est un produit du membre correspondant d'une hiérarchie de tenseurs de Poisson compatibles entre eux dont le premier terme est non-dégénéré, donc son modèle est bien déterminé par le théorème 4.3, et du membre correspondant d'une hiérarchie $(\Lambda_k',\, k \in \mathbf{N})$ de tenseurs de Poisson deux à deux compatibles dont l'opérateur de récursion $N'$ a comme polynôme caractéristique un polynôme du type $\mathcal{P}_{N'}(\lambda) = (\lambda + f)^{2l-1}$, $l \in \mathbf{N}$. Soit $M'$ la variété sur laquelle est définie la hiérarchie $(\Lambda_k',\, k \in \mathbf{N})$, et $p'$ la projection de $p$ sur $M'$. Alors,*

- *si $df(p') = 0$, il existe un système de coordonnées locales $(x_j'^i)$, $i = 1, \ldots, m$, pour $i \neq m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, pour $i = m$, $j = 1, \ldots, 2r_m - 1$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, de $M'$, centré en $p'$, dans lequel*

$$\Lambda_k' = (-a')^k \Lambda_0' + \Pi_k';$$

*le tenseur $\Lambda_0'$ a l'expression (5),*

$$\Pi_k' = \sum_{i=1}^{m-1}\left[\sum_{j=1}^{r_i-k}\binom{k}{0}\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}'^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_{2(j+k)}'^i} + \ldots + \sum_{j=1}^{r_i-1}\binom{k}{k-1}(-a)'^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}'^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_{2(j+1)}'^i}\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r_m-1-k}\binom{k}{0}\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}'^m}\wedge\frac{\partial}{\partial x_{2(j+k)}'^m} + \ldots + \sum_{j=1}^{r_m-2}\binom{k}{k-1}(-a')^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}'^m}\wedge\frac{\partial}{\partial x_{2(j+1)}'^m},$$

*et $a' = f(p')$.*

- *si $df(p') \neq 0$, il existe un système de coordonnées $\left((x_j'^i),\, y_2'\right)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, de $M'$, centré en $p'$, dans lequel*

$$\Lambda_k' = \left(-(y_2' + a')\right)^k \Lambda_0' + \Pi_k';$$

*le tenseur $\Lambda'_0$ a l'expression (7),*

$$\Pi'_k = \sum_{i=1}^{m} \left[ \sum_{j=1}^{r_i-k} \binom{k}{0} \frac{\partial}{\partial x'^i_{2j-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x'^i_{2(j+k)}} + \cdots + \sum_{j=1}^{r_i-1} \binom{k}{k-1} \left(-(y'_2 + a')\right)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x'^i_{2j-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x'^i_{2(j+1)}} \right],$$

*et $a' = f(p')$.*

## Références


[1] J. V. Beltran and J. Monterde: *Poisson-Nijenhuis structures and the Vinogradov's bracket.* Annals Global Analysis and Geometry **12** (1994), 65–78.

[2] P. Damianou: *Nonlinear Poisson Brackets.* Dissertation, University of Arizona 1989.

[3] I. Ya. Dorfman: *Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations.* John Wiley & Sons 1993.

[4] F. R. Gantmacher: *Théorie des Matrices.* Jacques Gabay 1990.

[5] I. M. Gel'fand and I. Ya. Dorfman. *Hamiltonian operators and Algebraic structures related to them.* Funct. Anal. Applic. **13** (1979), 248–262.

[6] I. M. Gel'fand and I. Ya. Dorfman: *The Schouten bracket and Hamiltonian operators.* Funct. Anal. Applic. **14** (1980), 223–226.

[7] Y. Kosmann-Schwarzbach: *The Modified Yang-Baxter Equation and Bihamiltonian Structures.* In "Methods in Theoretical Physics, Proc. XVIIth Int. Conf. on Diff. Geom.", A. Solomon (Ed.), Chester 1988, World Scientific 1989, 12–25.

[8] Y. Kosmann-Schwarzbach: *Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroïds.* Acta Appl. Math.**41** (1995), 153–165.

[9] Y. Kosmann-Schwarzbach: *The Lie Bialgebroïd of a Poisson-Nijenhuis Manifold.* Lett. Math. Phys. **38** (1996), 421–428.

[10] Y. Kosmann-Schwarzbach and F. Magri: *Poisson-Nijenhuis structures.* Ann. I.H.P. **53** (1990), 35–81.

[11] Y. Kosmann-Schwarzbach and F. Magri: *Lax-Nijenhuis Operators for Integrable Systems.* J. Math. Phys. **37** (1996), 6173–6197.

[12] P. Libermann and Ch.-M. Marle: *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics.* D. Reidel 1987.

[13] A. Lichnerowicz: *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées.* J. Diff. Geom. **12** (1977), 253–300.

[14] K. Mackenzie: *Lie Groupoïds and Lie Algebroïds in Differential Geometry.* Lecture Notes Series **124**, Cambridge Univ. Press 1987.

[15] K. Mackenzie and P. Xu: *Lie bialgebroïds and Poisson groupoïds.* Duke Math. J. **73** (1994), 415–452.

[16] F. Magri: *A simple model of the integrable Hamiltonian equation.* J. Math. Phys. **19** (1978), 1156–1162.

[17] F. Magri: *La Mécanique Analytique de Lagrange et son Héritage.* Dans "Geometry and Soliton Equations", Acta Academiae Scientiarum Taurinensis, Torino 1990.

[18] F. Magri and C. Morosi: *A geometric characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds.* Quaderno S 19, Università di Milano, 1984.

[19] J. M. Nunes da Costa and Ch.-M. Marle: *Reduction of bihamiltonian manifolds and recursion operators.* Diff. Geom. and Appl., Proc. Conf., Brno, Czech Republic, Aug. 28 – Sept. 1, 1995.

[20] R. Ouzilou: *Quelques remarques sur les variétés de Poisson-Nijenhuis.* Dans "Symplectic Geometry and Mathematical Physics, Actes du colloque en l'honneur de Jean-Marie Souriau", P. Donato and C. Duval and J. Elhadad (Eds.), Diff. Geom. and Appl., Proc. Conf., Progress in Math. **99**, Birkhäuser 1991.

[21] F. Petalidou: *Etude locale de structures bihamiltoniennes.* Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie 1998.

[22] F. Petalidou: *Sur la symplectisation de structures bihamiltoniennes.* Bull. des Sciences Math., accepté.

[23] J. A. Schouten: *On the differential operators of first order in tensor calculus.* Convegno Int. Geom. Diff. Italia 1953, Cremonese 1954, 1–7.

[24] F. J. Turiel: *Classification locale simultanée de deux formes symplectiques compatibles.* Manuscr. Math. **82** (1994), 349–362.

[25] I. Vaisman: *The Poisson-Nijenhuis manifolds revisited.* Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **52** (1994), 377–393.

[26] I. Vaisman: *Reduction of Poisson-Nijenhuis manifolds.* J. Geom. Phys. **19** (1996), 90–98.

[27] A. Weinstein: *The local structure of Poisson manifolds.* J. Diff. Geom. **18** (1983), 523–557.