MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

EXTENSIONES DE LAS DESIGUALDADES TIPO KHINCHINE-KAHANE PARA LA BOLA UNIDAD DE ℓ_q^n, $0 < q < 1$

JESÚS BASTERO Y MIGUEL ROMANCE

En recuerdo al profesor José Javier Guadalupe Hernández, «Chicho»

Abstract. We study the behaviour of moments of order p of affine and quadratic forms with respect to the tail volume of the unit ball of ℓ_q^n $(0 < q < 1)$ and we give some Kahane-Khinchine type inequalities for them.

Una de las propiedades más destacables de las funciones de Rademacher $\{r_i(\cdot)\}_{i=0}^{+\infty}$ definidas, para $t \in [0,1]$, por

$$r_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0, \\ \operatorname{sign}(\operatorname{sen}(2^n \pi t)), & \text{si } i \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

es que generan ℓ_2 en cada $L_p[0,1]$, para cada $0 < p < +\infty$. Este resultado, conocido como desigualdades de Khinchine (véase, por ejemplo, [14]), asegura que para cada $0 < p < +\infty$ existen constantes positivas A_p, B_p tales que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Este tipo de desigualdades no es en absoluto particular de las funciones de Rademacher y se repite en diferentes situaciones y en muy distintas circunstancias. Un método que permite encontrar otras situaciones en las que existen este tipo de desigualdades nos lleva al terreno de la probabilidad, ya que podemos identificar las funciones de Rademacher con una familia de variables aleatorias independientes de Bernoulli $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{+\infty}$ (es decir, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que toman solamente los valores 1 y -1 con probabilidad $1/2$). Entonces las desigualdades de Khinchine aseguran que existe constante $C > 0$ tal que

$$\left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^p \right)^{1/p} \leq C\sqrt{p} \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^2 \right)^{1/2}, \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46B20; Secondary 52A40.

Key words and phrases. Khinchine-Kahane inequality, equivalence of moments, Gromov-Milman inequality, convex bodies.

Los autores están parcialmente subvencionados por un proyecto financiado por la DGES (España).

para cualquier familia de escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y para cualquier $p \geq 2$. Siguiendo esta línea, cabe preguntarse si existen desigualdades de tipo Khinchine para otras familias de variables aleatorias. Es fácil comprobar que la existencia de este tipo de desigualdades para una familia de variables aleatorias independientes $\{X_i\}_{i=1}^{+\infty}$ es equivalente a que la familia tenga un *decrecimiento de tipo exponencial*, es decir que exista una constante $C' > 0$ tal que, para cualquier colección de escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right| > t\,\|(a_i)\|_2\right\} \leq C' \exp(-Ct^2),$$

donde $\|(a_i)\|_2 = \left(\sum_1^n |a_i|^2\right)^{1/2}$. Este es el caso, por ejemplo, de una familia de variables aleatorias gaussianas independientes $\{g_i\}_{i=1}^{+\infty}$ (véase, por ejemplo, [6]).

Otra vía por la que se pueden extender las desigualdades de Khinchine es estudiar si existen desigualdades de este tipo, pero con carácter vectorial. Los principales resultados en esta dirección son las desigualdades de Kahane (véase [11] y [12]), que aseguran que si X es un espacio normado entonces para cualquier $0 < p < +\infty$ y para cualesquiera vectores $x_1, \dots, x_n \in X$ se tiene que

$$A_p \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i\right\| dt \leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i\right\|^p dt\right)^{1/p} \leq B_p \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i\right\| dt,$$

donde $A_p, B_p > 0$ son constantes absolutas independientes de p, de n y del espacio normado X.

En una línea completamente diferente a ésta, Gromov y Milman ([8]) demostraron que se tienen desigualdades de la forma (1) en otra situación: la medida de Lebesgue normalizada en un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Notemos que $|\cdot|$ denotará indistintamente tanto la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ como el valor absoluto, sin que esto signifique ninguna confusión pues el contexto resolverá cualquier posible duda. El resultado fundamental que probaron es el siguiente:

Teorema 1 (Desigualdad de Gromov-Milman)**.** *Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ (es decir, un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío). Para cualquier forma lineal $f(x)$ definida en $\mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$\left(\frac{1}{|K|}\int_K |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leq Cp\left(\frac{1}{|K|}\int_K |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \tag{2}$$

para todo $p \geq 2$, donde $C > 0$ es una constante absoluta independiente de K y de la dimensión de $\mathbb{R}^n$. Es más,

$$|\{x \in K; |f(x)| > t\,\|f\|_2\}| \leq C|K|\exp(-Ct).$$

De este resultado se desprende que para cualquier forma lineal $f(x)$ definida en $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\|f\|_{L_{\psi_1}(K,dx)} \leq C\|f\|_{L_2(K,dx)} \tag{3}$$

con $C > 0$ constante absoluta, siendo $L_{\psi_1}(K, dx)$ el espacio de Orlicz generado por la función de Orlicz $\psi_1(t) = e^t - 1$ con la medida de Lebesgue normalizada y concentrada en K. En efecto, si denotamos

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

entonces, si $C > 0$, usando el resultado de Gromov-Milman,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|K|} \int_K \exp\left(\frac{|f(x)|}{C\|f\|_2} \right) dx &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|K|} \int_K \frac{|f(x)|^i}{C^i \|f\|_2^i \, i!} \, dx \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^i}{C^i \, i!} \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(Ce)^i \sqrt{2\pi i}} \leq 2, \end{aligned}$$

siempre que C sea suficientemente grande.

Este resultado de Gromov y Milman admite diversas aplicaciones en la teoría local de espacios de Banach (como, por ejemplo, dar estimaciones de la constante de isotropía de cuerpos convexos tal y como se muestra en [5] y [17]) y además marca una camino para extender las desigualdades tipo Khinchine-Kahane a otras situaciones, en principio muy distintas a las planteadas con las funciones de Rademacher.

Siguiendo esta vía pero empleando técnicas completamente distintas, Borell probó (véase [16]) que se tiene una desigualdad tipo Gromov-Milman para cualquier medida μ de Borel en $\mathbb{R}^n$ que sea *logarítmicamente cóncava*, es decir que verifique

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \mu(A)^{\lambda} \mu(B)^{1-\lambda},$$

para cualquier $\lambda \in [0, 1]$ y cualquier pareja de conjuntos μ-medibles $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. La idea clave de la demostración de este hecho se basa en el siguiente resultado de Borell (véase [3], [4]):

Teorema 2 (Lema de Borell). *Si μ es una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ logarítmicamente cóncava y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo simétrico respecto al origen con $\mu(A) = \theta > 1/2$, entonces*

$$\mu((tA)^c) \leq \theta \left(\frac{1-\theta}{\theta} \right)^{\frac{1+t}{2}}, \tag{4}$$

para cualquier $t > 1$.

A partir de este resultado G. Pisier probó (véase [16]) que si μ es una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ logarítmicamente cóncava y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una seminorma, entonces

$$\|f\|_p \leq C_{pq} \|f\|_q,$$

para todo $p, q > 0$, donde C_{pq} es una constante que solo depende de p y q, y $\|f\|_p$ denota el valor

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

En esta línea, Latała ([13]) demostró que se puede conseguir que C_{pq} sólo dependa de p, es decir para cualquier $p > 0$

$$\|f\|_p \le C_p \|f\|_0,$$

donde

$$\|f\|_0 = \exp\left(\frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \log|f(x)|\, d\mu(x)\right). \tag{5}$$

O. Guédon ([9]), por su parte, ha probado que el resultado también es cierto para $q \in (-1, 0]$, definiendo $\|f\|_q$ de forma natural si $q < 0$. Para ser más precisos, ha demostrado que

$$\|f\|_1 \le \frac{4e}{1+q} \|f\|_q,$$

para cualquier $q \in (-1, 0]$.

A la vista de la desigualdad de Gromov-Milman, una pregunta natural es si existen este tipo de desigualdades cuando se consideran formas que no sean lineales o seminormas.

Fue J. Bourgain (véase [5]) quien encontró desigualdades del tipo Gromov-Milman válidas para polinomios en lugar de formas lineales, respondiendo así una pregunta planteada anteriormente por V. D. Milman. El resultado principal de J. Bourgain es el siguiente:

Teorema 3 (Desigualdad de Bourgain)**.** *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Para cualquier polinomio f en $\mathbb{R}^n$ de grado d*

$$\left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \le C p^{C'd} \frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|\, dx, \tag{6}$$

para todo $p > 0$, donde C, C' son constantes absolutas independientes de K y de la dimensión de $\mathbb{R}^n$. Es más, existe constante absoluta tal que, para cualquier $t > 0$,

$$|\{x \in K;\ \ |f(x)| > t\|f\|_1\}| \le e^{-t^{c/d}} |K|. \tag{7}$$

Como consecuencia, $\|f\|_{L_\psi(K,dx)} \le C^d \|f\|_1$, siendo $L_\psi(K, dx)$ el espacio de Orlicz generado por la función de Orlicz $\psi(t) = e^{ct/d} - 1$ con la medida de Lebesgue normalizada y concentrada en K. Dicho de otro modo

$$\frac{1}{|K|} \int_K \exp\left(\frac{|f(x)|}{C\|f\|_2}\right)^{c/d} dx \le 2,$$

para cualquier polinomio de grado d, siendo C constante absoluta.

Del mismo modo que empleando el lema de Borell se obtienen desigualdades del tipo Gromov-Milman para medidas logarítmicamente cóncavas, Bobkov (véase [2]) demostró que existen desigualdades del tipo Bourgain para medidas de Borel μ logarítmicamente cóncavas, llegando a probar que

$$\|f\|_{L_\psi(K,d\mu)} \le C^d \|f\|_1,$$

para cualquier polinomio de grado d, siendo $L_\psi(K, d\mu)$ el espacio de Orlicz generado por la función $\psi(t) = e^{t/d} - 1$ y la medida μ.

En relación con este tipo de extensiones de las desigualdades de Khnichine-Kahane para familias más generales que las formas lineales se ha probado recientemente que la desigualdad de Khinchine-Kahane original para funciones de Rademacher admite extensiones válidas para formas cuadráticas (véase los trabajos de Il'in [10] o Gnedenko [7]).

Notemos que si K es un cuerpo convexo de $\mathbb{R}^n$ entonces, μ_K definida para cada boreliano $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ como $\mu_k(A) = |A|/|K|$ es una medida de Borel logarítmicamente cóncava, sin más que recordar la desigualdad de Brunn-Minkowski, por lo que los resultados de Borell, Latała, Guedón y Bobkov se pueden interpretar como extensiones de las desigualdades de Gromov-Milman y Bourgain. Sin embargo, si eliminamos la condición de convexidad del conjunto K, perdemos, en general, el carácter de logarítmico concavidad de la medida μ_K, por lo que podemos preguntarnos si tienen sentido desigualdades tipo Gromov-Milman o Bourgain para medidas μ_K, con K no convexo.

Parece natural comenzar el estudio de desigualdades tipo Gromov-Milman-Bourgain para familias de conjuntos que exhiban propiedades parecidas a los conjuntos convexos. Un claro ejemplo de una familia de este tipo es la de las bolas unidad de los espacios ℓ_q^n con $0 < q < 1$. A continuación vamos a probar que para esta colección de conjuntos se tienen desigualdades tipo Gromov-Milman-Bourgain, gracias a las excelentes propiedades de simetría de estos conjuntos. Las demostraciones de estos hechos van a pasar por dar desigualdades tipo Gromov-Milman y Bourgain válidas para cuerpos compactos en general con buenas propiedades de simetría y pueden encontrarse en el trabajo, en preparación, [1].

Sea K un compacto en $\mathbb{R}^n$ tal que tiene volumen (medida de Lebesgue) positiva y verifica la siguiente propiedad de *simetría*: un punto $x = (x_1, \dots, x_n)$ pertenece a K si y solo si $(\pm x_1, \dots, \pm x_n)$ pertenece a K para cualquier elección de signos ± 1.

Sea $\varphi(p, K)$ el valor definido por

$$\varphi(p, K) = \max_{1 \le i \le n} \frac{\left(\frac{1}{|K|}\int_K |x_i|^p\right)^{1/p}}{\left(\frac{1}{|K|}\int_K |x_i|^2\right)^{1/2}} \tag{8}$$

El siguiente resultado da una desigualdad de tipo Gromov-Milman para conjuntos compactos con la condición de simetría anterior y válida para formas lineales en la que aparece explícitamente involucrado $\varphi(p, K)$. Asimismo, incluimos la demostración del mismo pues es un ejemplo ilustrativo del tipo de técnicas que se emplean para dar extensiones de desigualdades del tipo Gromov-Milman.

Proposición 4. *Sea K un conjunto compacto con volumen positivo verificando la condición de simetría anterior y sea a un vector en $\mathbb{R}^n$. Si $p \ge 2$, entonces se cumple que*

$$\left(\frac{1}{|K|}\int_K |\langle a, x\rangle|^p dx\right)^{1/p} \le C\varphi(p, K)\sqrt{p}\left(\frac{1}{|K|}\int_K |\langle a, x\rangle|^2 dx\right)^{1/2}, \tag{9}$$

donde $C > 0$ es una constante absoluta.

Demostración. Sea $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que toma los valores ± 1 con probabilidad $1/2$ (variables aleatorias de Bernoulli). Es claro que, gracias a la condición de simetría de K,

$$\frac{1}{|K|}\int_K |\langle a,x\rangle|^p dx = \frac{1}{|K|}\int_K \left|\sum_1^n a_i\varepsilon_i x_i\right|^p dx$$

para cualquier elección de signos ε_i, $1 \le i \le n$. Entonces, promediando y usando las desigualdades clásicas de Khinchine se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|K|}\int_K |\langle a,x\rangle|^p dx &= \frac{1}{|K|}\int_K \mathbb{E}\left|\sum_1^n a_i x_i\varepsilon_i\right|^p dx \\
&\le C^p p^{p/2}\frac{1}{|K|}\int_K \left(\sum_1^n a_i^2 x_i^2\right)^{p/2} dx \\
&\le C^p p^{p/2}\left(\sum_1^n a_i^2\left(\frac{1}{|K|}\int_K |x_i|^p dx\right)^{2/p}\right)^{p/2} \\
&\le C^p p^{p/2}\varphi(p,K)^p\left(\sum_1^n \frac{1}{|K|}\int_K a_i^2|x_i|^2 dx\right)^{p/2} \\
&= C^p p^{p/2}\varphi(p,K)^p\left(\frac{1}{|K|}\int_K |\langle a,x\rangle|^2\right)^{p/2}
\end{aligned}$$

□

A la vista del resultado anterior, podemos preguntarnos si tendrán sentido desigualdades de tipo Gromov-Milman para conjuntos compactos K con volumen positivo y que verifiquen ciertas condiciones de simetría si se consideran familias $\mathcal{F}$ de funciones más generales que las formas lineales, es decir si se tendrá, siguiendo la idea de las desigualdades de Bourgain, que

$$\left(\frac{1}{|K|}\int_K |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \le C\alpha(p)\left(\frac{1}{|K|}\int_K |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

para todo $p \ge 2$ y para toda $f \in \mathcal{F}$.

Parece lógico comenzar el estudio de este tipo de desigualdades considerando familias de funciones parecidas a la familia de las formas lineales, por lo que no parece descabellado comenzar con la familia de las formas afines. Notemos que, en caso de que K sea convexo, se obtiene automáticamente un resultado tipo Gromov-Milman para cualquier aplicación afín, sin más que hacer un cambio de variable que transforme la integral de la forma afín sobre K en una integral de una forma lineal sobre un trasladado de un cuerpo convexo $K + a$, que vuelve a ser convexo y por tanto se puede usar el resultado de Gromov-Milman. A priori, esta técnica de demostración no va a servir para generar desigualdades de tipo Khinchine-Kahane válidas para formas afines, ya que la condición de simetría impuesta a K queda inoperante al hacer traslaciones. Sin embargo esta dificultad puede salvarse, tal y como muestra el siguiente resultado.

Proposición 5. *Sea K un conjunto compacto con volumen positivo y tal que verifica la condición de simetría anterior. Si a es un vector de $\mathbb{R}^n$ y m es un número real, entonces, para cualquier $p \geq 2$,*

$$\left(\frac{1}{|K|}\int_K |m+\langle a,x\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leq C\varphi(p,K)\sqrt{p}\left(\frac{1}{|K|}\int_K (m+\langle x,a\rangle)^2\, dx\right)^{1/2},$$

donde C es una constante absoluta.

Otra familia sobre la que podemos estudiar la validez de desigualdades tipo Bourgain es la familia de las formas cuadráticas. Para ello debemos primero introducir algo de notación. Sea $\gamma(p,K)$ el valor definido por

$$\gamma(p,K) = \max_{1\leq i\neq j\leq n} \frac{\left(\frac{1}{|K|}\int_K |x_i x_j|^p\right)^{1/p}}{\left(\frac{1}{|K|}\int_K |x_i x_j|^2\right)^{1/2}} \tag{10}$$

para cada $2 \leq p$.

El siguiente resultado da una desigualdad de tipo Bourgain para conjuntos compactos con la condición de simetría anterior y válida para ciertas formas cuadráticas en la que aparece explícitamente involucrados $\varphi(p,K)$ y $\gamma(p,K)$.

Proposición 6. *Sea K un conjunto compacto con volumen positivo verificando la condición de simetría anterior y sea $C = (c_{ij})$ una matriz real $n\times n$ tal que $c_{ij} = c_{ji}$ y $c_{ii} = 0$. Si $p \geq 2$, entonces*

$$\left(\frac{1}{|K|}\int_K \left|\sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_i x_j\right|^p dx\right)^{1/p} \leq Cp\Bigg[\sum_{i,j=1}^n c_{ij}^2\Bigg(\gamma^2(p,K)\frac{1}{|K|}\int_K |x_i x_j|^2 dx$$
$$+\varphi(p,K)^4\left(\frac{1}{|K|}\int_K |x_i|^2 dx\right)\left(\frac{1}{|K|}\int_K |x_j|^2 dx\right)\Bigg)\Bigg]^{1/2},$$

donde $C > 0$ es una constante absoluta.

Debemos decir que la idea de la demostración de este resultado es diferente a la que podemos ver en la proposición 4 y usa técnicas de cálculo parecidas a las empleadas por Il'in para dar una extensión de las desigualdades de Khinchine a formas cuadráticas (véase [10]).

Los resultados anteriores se pueden interpretar como desigualdades tipo Gromov-Milman-Bourgain para conjuntos compactos con volumen positivo y verificando ciertas propiedades de simetría, si bien, en las desigualdades aparecen explícitamente $\varphi(p,K)$y $\gamma(p,K)$, valores sobre los que, a priori, no se tiene ningún control. Cabe esperar que, dependiendo de las propiedades que tenga el conjunto K, se podrá tener una información más precisa del valor de $\varphi(p,K)$. Como caso particular de esto, se pueden dar estimaciones de $\varphi(p,K)$ y $\gamma(p,K)$ cuando K es la bola unidad de los espacios ℓ_q^n denotada por

$$B_q^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^n |x_i|^q \leq 1 \right\},$$

donde $0 < q \leq \infty$, tal y como muestra el siguiente resultado.

Proposición 7. *Sean $0 < q < +\infty$ y $2 \leq p < \infty$. Entonces, para cada $1 \leq i \leq n$,*

(i) $$\left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |x_i|^p dx \right)^{1/p} \sim_q \left(\frac{p}{n+p} \right)^{1/q},$$

(ii) $$\left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |x_i x_j|^p dx \right)^{1/p} \sim_q \left(\frac{p}{n+p} \right)^{2/q} \left(\frac{n}{n+p} \right)^{1/pq},$$

donde $\sim_q$ quiere decir que el cociente esta acotado superior e inferiormente por una constante que sólo depende de q. Como consecuencia,

$$\varphi(p, B_q^n) \leq C_q p^{1/q} \qquad y \qquad \gamma(p, B_q^n) \leq C'_q p^{2/q},$$

donde C_q y C'_q son constantes que solo dependen de q.

Usando estas estimaciones, ya podemos dar una desigualdad tipo Gromov-Milman para B_q^n de forma bastante precisa. Además, del mismo modo que las desigualdades de Gromov-Milman sirven para establecer relación entre la norma en $L_p(K, dx)$ y la norma de Orlicz $L_{\psi_1}(K, dx)$, se puede establecer un resultado de esta misma naturaleza pero en caso de que K sea B_q^n $(0 < q < 1)$.

Corolario 8. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma afín y $0 < q < 1$. Si para cada $0 \leq p < +\infty$ denotamos*

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

entonces existe constante $C_q > 0$, que solo depende de q, tal que

$$\|f\|_p \leq C_q p^{\frac{1}{q}+\frac{1}{2}} \|f\|_2. \tag{11}$$

Además existen $C'_q, C''_q > 0$ que solo dependen de q, tales que

$$\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} \exp\left(\left| \frac{f(x)}{C'_q \|f\|_2} \right|^{\frac{2q}{2+q}} \right) dx \leq 2 \tag{12}$$

y también

$$\left| \{x \in B_q^n; |f(x)| > t\} \right| \leq C''_q |B_q^n| \exp(-C''_q t^{\frac{2q}{2+q}}).$$

Nota 9. Se puede comprobar que si fijamos $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\varphi(p, B_q^n) \leq C_q n^{1/q}$$

para todo $p \geq 2$. Por lo que, si prefijamos la dimensión n, se obtiene que para todo $0 < q < +\infty$ y para cualquier forma afín f

$$\left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq C_q n^{1/q} \sqrt{p} \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}, \tag{13}$$

es decir que si prefijamos la dimensión para las bolas B_q^n con $1 \leq q < +\infty$ se obtiene una mejor estimación que con las desigualdades de Gromov-Milman válidas para un cuerpo convexo K general.

En la misma línea del corolario anterior, las estimaciones obtenidas en la proposición 7 para la bola B_q^n también nos permiten enunciar las siguientes desigualdades de tipo Bourgain para la bola unidad de los espacios ℓ_q^n $(0 < q < +\infty)$.

Corolario 10. *Sea $C = (c_{ij})$ una matriz real $n \times n$ tal que $c_{ij} = c_{ji}$ y $c_{ii} = 0$. Consideremos $f\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $0 < q < 1$. y denotamos para cada $p \geq 2$*

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/2},$$

entonces existe constante C_q, que solo depende de q, tal que

$$\|f\|_p \leq C_q p^{1+\frac{4}{q}} \|f\|_2. \tag{14}$$

Además existen $C_q', C_q'' > 0$ que solo dependen de q, tales que

$$\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} \exp\left(\left| \frac{f(x)}{C_q' \|f\|_2} \right|^{\frac{q}{4+q}} \right) dx \leq 2 \tag{15}$$

y también

$$\left| \{x \in B_q^n ; |f(x)| > t\} \right| \leq C_q'' |B_q^n| \exp(-C_q'' t^{\frac{q}{4+q}}).$$

Nota 11. Análogamente a lo que ocurría con las desigualdades tipo Gromov-Milman para B_q^n, se puede comprobar que fijado $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\gamma(p, B_q^n) \leq C_q n^{2/q}$$

para todo $p \geq 2$. Por lo que, si prefijamos la dimensión n, para todo $0 < q < +\infty$ y para cualquier forma cuadrática f en las condiciones del corolario anterior, se tiene que

$$\left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq C_q n^{4/q} p \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{16}$$

Por tanto, si prefijamos la dimensión, para las bolas B_q^n con $1 \leq q < +\infty$ y las formas cuadráticas que aparecen en el corolario anterior se obtiene una mejor estimación que con las desigualdades de Bourgain válidas para un cuerpo convexo K general y un polinomio cualquiera de grado 2.

A la vista de que para la colección de bolas unidad de los espacios ℓ_q^n se tienen desigualdades tipo Gromov-Milman y Bourgain, se puede preguntar si este tipo de resultados será válido para la familia de los cuerpos q-convexos, con $0 < q < 1$, ya que las bolas unidad de los espacios ℓ_q^n son los ejemplos clásicos de conjuntos q-convexos. Recordemos que un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es q-convexo $(0 < q < 1)$ si dados $x, y \in K$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tales que $\alpha^q + \beta^q = 1$ entonces $\alpha x + \beta y \in K$. Es fácil comprobar que si K es un cuerpo q-convexo (es decir, un conjunto q-convexo compacto con interior no vacío), la medida μ_K asociada no es, en general, logarítmicamente cóncava, si bien verifica que si $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ son tales que $\alpha^q + \beta^q = 1$, entonces

$$\mu_K(\alpha A + \beta B) \geq 2^{n-\frac{n}{q}} \mu_K(A)^\alpha \mu_K(B)^\beta.$$

A pesar de que es bien conocido que en teoría local de espacios de Banach la familia de los cuerpos q-convexos ($0 < q < 1$) tiene un comportamiento parecido en algunos casos a la familia de los cuerpos convexos, Litvak (véase [15]) ha demostrado que en este caso los resultados esperables para los cuerpos q-convexos no van a ser acordes con las desigualdades tipo Gromov-Milman-Bourgain conocidas para cuerpos convexos, puesto que ha probado que es imposible que se obtenga una desigualdad de la forma

$$\left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq C_p \frac{1}{|K|} \int_K |f(x)| \, dx,$$

válida para cualquier forma lineal f, par cualquier q-convexo y para todo $p > 0$, siendo C_p una constante independiente de la dimensión de $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, si se es un poco menos ambicioso y se permite que C_p pueda variar con la dimensión, se puede dar un resultado tipo Gromov-Milman válido para cuerpos q-convexos. Las técnicas necesarias para obtener este tipo de resultado pasan por obtener una extensión del lema de Borell que permitía dar desigualdades tipo Gromov-Milman para medidas logarítmicamente cóncavas, pero esta vez para medidas μ_K con K cuerpo q-convexo. Usando una extensión de este tipo del lema de Borell, se puede dar una desigualdad de tipo Gromov-Milman de la forma

$$\left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq C_p C_q^n \frac{1}{|K|} \int_K |f(x)| \, dx, \tag{17}$$

válida para cualquier cuerpo y para cualquier $p > 0$, siendo $C_p, C_q > 0$ constantes que solo dependen de p y q respectivamente, resultado en el que aparece explícitamente la dependencia de la dimensión n.

Referencias

[1] J. Bastero y M. Romance, en preparación.

[2] S. G. Bobkov, Remarks on the growth of L^p-norms of polynomials, en *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math. **1745**, Springer, Berlín (2000), 27–35.

[3] C. Borell, The Brunn-Minkowski inequality in Gauss spaces, *Invent. Math.* **12** (1974), 239–252.

[4] C. Borell, Convex measures on locally convex spaces, *Ark. Math.* **30** (1975), 207–216.

[5] J. Bourgain, On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets, en *Geometric aspects of functional analysis (1989–90)*, Lecture Notes in Math. **1469**, Springer, Berlín (1991), 127–137.

[6] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, Nueva York, 1957.

[7] B. D. Gnedenko, The best constant in an inequality of Khinchin type for quadratic forms, *Russ. Math. Soc.* **55** (2000), 340–341.

[8] M. Gromov y V. Milman, Brunn theorem and a concentration of volume phenomena for symmetric convex bodies, en *Israel seminar on GAFA (1983/84), V*, Tel Aviv Univ., Tel Aviv, 1984.

[9] O. Guédon, Kahane-Khinchine type inequalities for negative exponent, *Mathematika* **46** (1999), 165–173.

[10] P. V. Il'in, A generalization of Khinchin's inequalities to the case of quadratic forms, *Russ. Math. Soc.* **54** (1999), 1244–1245.

[11] J. P. Kahane, *Series of random functions*, Heart Math. Monographs, Lexington, Mass., Heart & Co., 1968.

[12] S. Kwapień, A theorem on the Rademacher series with vector coefficients, en *Probability in Banach spaces* (Proc. First Internat. Conf., Oberwolfach, 1975), Lecture Notes in Math. **526**, Springer-Verlag, Berlín (1976), 157–158.

[13] R. Latała, On the the equivalence between geometric and arithmetic means for log-concave measures, en *Convex Geometric Analysis* (Berkeley, CA, 1996), *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **34**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999), 123–127.

[14] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I. Sequence spaces*, Springer-Verlag, Berlín, 1977.

[15] A. E. Litvak, Kahane Khinchin's inequality for quasinorms, *Canad. Math. Bull.* **43** (2000), 368–379.

[16] V. D. Milman y G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, Lecture Notes in Math. **1200**, Springer-Verlag, Berlín, 1986.

[17] G. Paouris, On the isotropic constant of non-symmetric convex bodies, en *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math. **1745**, Springer, Berlín (2000), 239–243.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, España

Correo electrónico: `bastero@posta.unizar.es, mromance@posta.unizar.es`