MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

TEORÍA DE POLINOMIOS ORTOGONALES Y FUNCIONES SEMI-ORTOGONALES

M. JOSÉ CANTERO, M. PILAR FERRER, LEANDRO MORAL Y LUIS VELÁZQUEZ

A la memoria de Chicho

Abstract. In this work it is shown that semi-orthogonal functions are suitable tool to obtain new results about some classic topics of Orthogonal Polynomials on the unit circle. More precisely, it is raised the study of the orthogonality mesure through the zeros of semi-orthogonal functions.

Besides, it can be chosen a suitable basis relates with semi-orthogonal functions, so that the representation of the multiplication operator which can be obtained is a five-diagonal matrix.

1. Introducción. Funciones semi-ortogonales

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos los números enteros y $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$. Se denotará por $\mathcal{P}$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes complejos, y con $\mathcal{P}_n$ el subespacio vectorial de los polinomios de $\mathcal{P}$ cuyos grados son menores o iguales que n. Sea μ una medida de probabilidad soportada en $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con infinitos puntos de crecimiento efectivo. Definimos en $\mathcal{P}$ el producto interno

$$\langle f, g\rangle_\mu := \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}\, d\mu(z), \qquad f, g \in \mathcal{P}. \tag{1}$$

El procedimiento de Gram-Schmidt determina la sucesión de polinomios ortogonales mónicos (SPOM), $\big(\Phi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, que verifican las conocidas relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} &\Phi_0(z) = 1, \\ &\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z), \qquad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi}_n(z^{-1})$ es el polinomio recíproco de Φ_n. Además, para $n \geq 1$, los ceros de los polinomios Φ_n están en $|z| < 1$ y, entonces, $|\Phi_n(0)| < 1$.

La sucesión $\big(\Phi_n(0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es la denominada sucesión de parámetros de Schur, y la condición $|\Phi_n(0)| < 1$, $n \geq 1$, es de hecho equivalente a la existencia de una única medida de probabilidad con infinitos puntos de crecimiento efectivo, para la que $\big(\Phi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es una SPOM.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C05.

Key words and phrases. Orthogonal polynomials, semi-orthogonal functions, support of a measure, spectral theory.

A partir de (2) se puede mostrar que las constantes positivas $\varepsilon_n = \langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_\mu$ están relacionadas con los parámetros de Schur mediante la expresión

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} = 1 - |a_n|^2, \quad n \geq 1. \tag{3}$$

Esta relación implica que $|a_n| < 1$ para $n \geq 1$ y que la sucesión $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ debe ser estrictamente decreciente. Además, (3) da la siguiente expresión de ε_n:

$$\varepsilon_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - |a_k|^2)\varepsilon_0, \quad n \geq 1. \tag{4}$$

Los polinomios ortogonales de la sucesión $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ están definidos salvo un factor de módulo uno, que puede fijarse si se exige que el coeficiente director sea real y positivo. Por otro lado, se dice que φ_n es el n-ésimo polinomio ortonormal asociado a μ si verifica $\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_\mu = 1$, y se denotará con κ_n su correspondiente coeficiente director. Es claro que $\kappa_n = \varepsilon_n^{-1/2}$ y, por lo tanto, $(\kappa_n)_{n=0}^{\infty}$ es estrictamente creciente.

Los polinomios $K_n(z, y)$, denominados n-núcleos, están definidos por

$$K_n(z, y) := \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(y)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Phi_k(x)\overline{\Phi_k(y)}}{\varepsilon_k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

y satisfacen la propiedad reproductora

$$\langle K_n(z, y), f(z) \rangle_\mu = \overline{f(y)}, \qquad f \in \mathcal{P}_n, \tag{6}$$

así como la fórmula de Christoffel-Darboux

$$\varepsilon_{n+1}(1 - \overline{y}z)K_n(z, y) = \Phi_{n+1}^*(z)\overline{\Phi_{n+1}^*(y)} - \Phi_{n+1}(z)\overline{\Phi_{n+1}(y)}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Por otro lado, se denota por $\Lambda = \operatorname{span}\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ al espacio vectorial de los polinomios de Laurent con coeficientes complejos, y, para $p, q \in \mathbb{Z}$ con $p \leq q$, se denota por $\Lambda_{p,q}$ al subespacio de Λ

$$\Lambda_{p,q} := \left\{ \sum_{k=p}^{q} \alpha_k z^k : \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}. \tag{8}$$

La medida μ induce un funcional lineal hermitiano definido positivo sobre Λ, $\mathcal{L} : \Lambda \to \mathbb{C}$, que viene dado por

$$\mathcal{L}[f] := \int_{\mathbb{T}} f(z)\, d\mu(z), \qquad f \in \Lambda. \tag{9}$$

Un procedimiento de ortogonalización sobre $(\Lambda_{-n,n}, \mathcal{L})$, $n \in \mathbb{N}$, conduce a la obtención de una familia de funciones que determinan una base de Λ y se introducen a continuación.

Sea la familia de funciones $\mathcal{B}$ dada por

$$\mathcal{B} = \{1\} \cup \left(\bigcup_{n\geq 1} \{f_n^{(1)}, f_n^{(2)}\} \right), \tag{10}$$

con

$$
\begin{aligned}
f_n^{(1)}(z) &= \frac{\overline{\alpha}_n \Phi_{2n}(z) + \alpha_n \Phi_{2n}^*(z)}{z^n} = \frac{\overline{A}_n z \Phi_{2n-1}(z) + A_n \Phi_{2n-1}^*(z)}{z^n}, \\
f_n^{(2)}(z) &= \frac{\overline{\beta}_n \Phi_{2n}(z) - \beta_n \Phi_{2n}^*(z)}{iz^n} = \frac{\overline{B}_n z \Phi_{2n-1}(z) - B_n \Phi_{2n-1}^*(z)}{iz^n},
\end{aligned} \tag{11}
$$

donde, para $n \geq 1$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$ son tal que $\operatorname{Re}(\alpha_n \overline{\beta}_n) \neq 0$, y donde Φ_n es el n-ésimo polinomio ortogonal mónico asociado a μ.

Proposición 1.1. *La familia de polinomios de Laurent, $\mathcal{B}$, constituye una base de Λ tal que*

$$
\mathcal{L}\big[f_n^{(j)}(z)\, z^k\big] = 0, \quad -n+1 \leq k \leq n-1, \quad j = 1, 2. \tag{12}
$$

Además, la matriz

$$
\big(\mathcal{L}\big[f_n^{(j)}(z) f_n^{(l)}(z)\big]\big)_{j,l=1,2} \tag{13}
$$

es definida positiva para cada $n \geq 1$.

Esta propiedad es la que da el nombre a las funciones de la familia $\mathcal{B}$.

Definición 1.2. *Las funciones $f_n^{(j)} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $j = 1, 2$, dadas en (11) se denominan Funciones Semi-Ortogonales (FSO) con respecto a $\mathcal{L}$ o a μ.*

Se muestra a continuación cómo estas funciones permiten obtener nuevos puntos de vista en la teoría de PO.

2. Medida en $\mathbb{T}$

Dada una medida de probabilidad ν sobre la recta real, es bien conocido que una sucesión de polinomios ortogonales (SPO), $\big(P_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, con respecto a ν, verifica las siguientes propiedades:

(a) Los ceros de P_n son reales y simples para $n \geq 1$.
(b) Si I es un intervalo tal que $\operatorname{supp}\nu \subseteq I$, los ceros de p_n están localizados en el interior de I para $n \geq 1$.
(c) Los polinomios P_n y P_{n+1} tienen los ceros entrelazados para $n \geq 1$.
(d) Las fórmulas de cuadratura interpolatorias

$$
\int_{\mathbb{R}} F(x)\, d\nu(x) \approx \sum_{k=1}^{n} F(x_k^{(n)}) H_k^{(n)}, \qquad n \geq 1,
$$

son exactas para todo F con grado no mayor que $2n-1$ si los nodos $\big(x_k^{(n)}\big)_{k=1}^n$ son los ceros de P_n y $H_k^{(n)} = 1/K_{n-1}(x_k^{(n)}, x_k^{(n)})$, donde $K_n(x,y)$ es el n-núcleo asociado a $\big(P_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dado por

$$
K_n(x,y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{(x-y)\int_{\mathbb{R}} P_n^2(t)\, d\nu(t)},
$$

siendo k_n el coeficiente director de P_n.

Estas fórmulas de cuadratura implican la existencia de una sucesión $\big(\nu_n\big)_{n\geq 1}$ de medidas discretas sobre la recta real dadas por

$$d\nu_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(x - x_k^{(n)})}{K_{n-1}(x_k^{(n)}, x_k^{(n)})}\, dx$$

(δ es la distribución de Dirac) tal que $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$ cuando el soporte de ν está acotado.

Además, existe una estrecha relación entre la medida ν y la localización de ceros de una SPO. De hecho, las propiedades (a), (b), (c), (d) pueden utilizarse en el estudio del soporte de ν a partir del comportamiento asintótico de tales ceros.

En cuanto a medidas sobre la circunferencia unidad $\mathbb{T}$, la situación es bastante distinta. Los polinomios ortogonales tienen sus ceros dentro del disco unidad, y no sobre $\mathbb{T}$, donde la medida está soportada. Además, estos ceros no son necesariamente simples. Por lo tanto, esto indica que no se verificarán en esta situación resultados completamente análogos a los anteriores.

Volviendo a la recta real, se pueden encontrar funciones que satisfacen la propiedad (a), y otras versiones más débiles de (b), (c), (d): los polinomios cuasi-ortogonales $q_n(x), n \geq 1$, con grado$(q_n) = n$, y ortogonales a x^k para todo $k < n-1$, pero no con x^{n-1}. Estos satisfacen (a) y:

- (b') Si I es un intervalo tal que $\operatorname{supp}\nu \subseteq I$, se puede asegurar que todos los ceros de q_n, salvo a lo más uno, están localizados en el interior de I.
- (c') No siempre se verifica que q_n y q_{n+1} tienen los ceros entrelazados, pero, si la envolvente convexa de $\operatorname{supp}\nu$ no es $\mathbb{R}$, la sucesión $\big(q_n\big)_{n\geq 1}$ se puede elegir tal que todos los polinomios q_n tienen un cero común fuera de esta envolvente convexa y el resto de ceros de q_n y q_{n+1}, localizados en el interior, se entrelazan.
- (d') Las fórmulas de cuadratura interpolatorias construidas utilizando como nodos los ceros de q_n son exactas para todo polinomio con grado menor o igual que $2n-2$, en vez de $2n-1$. Es decir, son exactas en un subespacio vectorial $(2n-1)$-dimensional del espacio de polinomios reales. De otra manera, estas fórmulas de cuadratura generan una sucesión de medidas discretas sobre la recta real que convergen débilmente a ν.

(Ver [9] y [10].)

Al igual que con los polinomios ortogonales, las propiedades (a), (b'), (c'), (d') permiten el estudio del soporte de ν a través del análisis de la distribución asintótica de ceros de los polinomios cuasi-ortogonales.

El papel de los polinomios cuasi-ortogonales en la recta real lo desempeñan las FSO en el caso de $\mathbb{T}$, proporcionando resultados similares.

2.1. Estudio asintótico de la medida. Dada una medida de probabilidad μ en $\mathbb{T}$, se buscarán sucesiones de funciones, $\big(F_n\big)_{n\geq 1}$, analíticas sobre un abierto $\Omega \supset \mathbb{T}$ de $\mathbb{C}$, tales que en $\mathbb{T}$ tomen valores reales y satisfagan propiedades análogas a (a), (b'), (c'), (d'). En concreto,

1. $F_n(z)$ es real para $z \in \mathbb{T}$.
2. Los ceros de F_n son simples y están localizados en $\mathbb{T}$.

3. Si I es un subconjunto conexo de $\mathbb{T}$ tal que $\operatorname{supp}\mu \subseteq I$, a lo más un cero de F_n está en la clausura de $\mathbb{T} \setminus I$.
4. Los ceros de las funciones F_n y F_{n+1} satisfacen una «propiedad de entrelazamiento de ceros».
5. Existen fórmulas de cuadratura interpolatorias

$$\int_{\mathbb{T}} F(z)\, d\mu(z) \approx \sum_{k=1}^{n} F(z_k^{(n)}) H_k^{(n)}, \tag{14}$$

donde $H_k^{(n)} > 0$ y $\big(z_k^{(n)}\big)_{k=1}^{n}$ son los ceros de F_n, que son exactas sobre cierto subespacio $(2n-1)$-dimensional del espacio de polinomios de Laurent, y que generan una sucesión $\big(\mu_n\big)_{n\geq 1}$ de medidas discretas soportadas en $\mathbb{T}$ y que convergen débilmente a μ.

Es claro que los PO con respecto μ no satisfacen ninguna de las propiedades anteriores; sin embargo, las funciones semi-ortogonales sí que verifican 1, 2, 3, 4, 5. En el proceso de búsqueda realizado aparecen los llamados polinomios para-ortogonales k-invariantes, PPO k-invariantes, ([3], [7]). La expresión de estos polinomios cuando $k = 1$ es, básicamente, la del numerador de la función semi-ortogonal correspondiente.

Dada una medida μ con soporte en $\mathbb{T}$, se denomina problema de cuadratura de Szegő en n puntos, al problema siguiente:

Encontrar n puntos $\big(z_k\big)_{k=1}^{n} \subset \mathbb{T}$, $z_k \neq z_j$ si $k \neq j$ y n números positivos $\big(H_k\big)_{k=1}^{n}$ tal que la fórmula de cuadratura

$$\int_{\mathbb{T}} F(z)\, d\mu(z) \approx \sum_{k=1}^{n} F(z_k) H_k, \qquad F \in C(\mathbb{T}), \tag{15}$$

(i) *sea exacta para cada $F \in \Lambda_{r,s}$, para algún entero r, s,*
(ii) *no es exacta para algún $F \in \Lambda_{r',s'}$ si $\Lambda_{r',s'} \supsetneqq \Lambda_{r,s}$.*

La condición (ii) es una condición de maximalidad, que impide garantizar en general la existencia de solución al problema de cuadratura. Sin embargo, cuando $-r = s = n - 1$ tal solución maximal existe.

Teorema 2.1. *El problema de cuadratura de Szegő en n puntos tiene solución sobre $\Lambda_{-n+1,n-1}$ si y sólo si los nodos $\big(z_k\big)_{k=1}^{n}$ son los ceros de un POP 1-invariante de grado n. En este caso, los pesos H_k en la fórmula de cuadratura están dados por*

$$H_k = \frac{1}{K_{n-1}(z_k, z_k)}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Si P es el n-POP invariante cuyos ceros son $\big(z_k\big)_{k=1}^{n}$, se llama $f(z)$ a la expresión dada por $\dfrac{P(z)}{z^{\frac{n}{2}}}$. Nótese que f es nula en los mismos puntos que P.

Si grado(P) es par, $n = 2p$, y utilizando las propiedades de los PPO (ver [7]), se puede poner

$$f(z) = \frac{\overline{\alpha}\, \Phi_{2p}(z) + \alpha\, \Phi_{2p}^{*}(z)}{z^{p}}.$$

Así, f es una FSO con respecto a μ y por lo tanto es real para $z \in \mathbb{T}$.

Por el contrario, si grado$(P) = 2p+1$, no se puede definir $f(z)$ de igual forma, ya que la expresión $\dfrac{\overline{\alpha}\, \Phi_{2p+1}(z) + \alpha\, \Phi^*_{2p+1}(z)}{z^p z^{(1/2)}}$ no es un polinomio de Laurent. Un proceso de transformaciones de f, en el que se hace uso tanto de las propiedades de los polinomios para-ortogonales (ver [3]) como de las ecuaciones (7), (2), permite expresar f en términos de una función g que es una FSO respecto de una nueva medida $\tilde{\mu}$ dada por $d\tilde{\mu}(z) = |z-\omega|^2\, d\mu(z)$:

$$f(z) = \frac{z-\omega}{i z^{1/2} \omega^{1/2}}\, g(z). \tag{16}$$

Nótese que g tiene los mismos ceros que f menos uno, ω, el cual es fijado en el proceso anterior.

De este modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, se puede elegir $w_n \in \mathbb{T}$ cualquiera y definir una sucesión $\big(F_n(z; w_n)\big)_{n\geq 1}$ en Λ tal que $\big(F_{2n}\big)_{n\geq 1}$ es una sucesión de FSO con respecto a μ, y $\big(F_{2n+1}\big)_{n\geq 0}$ es otra con respecto a la familia de medidas variantes $\mu^{(2n+1)}$, dadas por

$$d\mu^{(2n+1)}(z) = |z - w_{2n+1}|^2\, d\mu(z), \qquad z \in \mathbb{T}.$$

Así, las fórmulas de cuadratura (14), generadas por los ceros de $F_{2n}(z; w_{2n})$ y $(z - w_{2n+1})F_{2n+1}(z; w_{2n+1})$ son exactas para toda $F \in \Lambda_{-n+1,n-1}$.

Se definen las medidas discretas en $\mathbb{T}$ de la forma

$$d\mu_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta\big(\theta - \theta_k^{(n)}\big)}{K_{n-1}(z_k^{(n)}, z_k^{(n)})}\, d\theta, \quad n \geq 1,$$

donde $\theta_k^{(n)} = \operatorname{Arg}(z_k^{(n)})$, y $\big(z_k^{(n)}\big)_{k=1}^{n}$ son los ceros anteriores y $\big(w_n\big)_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$ cualquiera. Entonces, la exactitud para $F \in \Lambda_{-n+1,n-1}$ implicará que

$$\int_{\mathbb{T}} F(z)\, d\mu_n(z) = \int_{\mathbb{T}} F(z)\, d\mu(z) \qquad \forall F \in \Lambda_{-n+1,n-1}.$$

Concretando, cuando $F = 1$ se tiene $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} d\mu_n(z) = \int_{\mathbb{T}} d\mu(z) = c_0 = 1$, es decir, $\big(\mu_n\big)_{n\geq 1}$ es una sucesión de medidas uniformemente acotadas.

Por otro lado, para cada $F \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, si $n > m$ y $G \in \Lambda_{-m,m}$, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} F(z)\, d\mu(z) - \int_{\mathbb{T}} F(z)\, d\mu_n(z) \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{T}} (F(z) - G(z))\, d\mu(z) \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{T}} (F(z) - G(z))\, d\mu_n(z) \right| \leq 2\|F - G\|_\infty. \end{aligned}$$

Finalmente, como toda función continua en $\mathbb{T}$ se puede aproximar uniformemente por polinomios de Laurent, se concluye que

$$\lim_n \int_{\mathbb{T}} F(z)\, d\mu_n(z) = \int_{\mathbb{T}} F(z)\, d\mu(z), \qquad \forall F \in C(\mathbb{T}).$$

Es decir, $\mu_n \to \mu$ en la topología $*$-débil.

Teorema 2.2. *Dada una sucesión de puntos* $\big(w_n\big)_{n\geq 1} \subset \mathbb{T}$*, existen una sucesión de FSO,* $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$*, y una sucesión de medidas discretas uniformemente acotadas en* $\mathbb{T}$*,* $\big(\mu_n\big)_{n\geq 1}$*, tales que*

(i) μ_n *tiene su soporte en* w_n *y sobre los ceros de* f_n*,*

(ii) $\mu_n \xrightarrow{\ *\ } \mu$*.*

2.2. Descripción del soporte de la medida. Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{T}$ y sea $\big(\Phi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ la SPOM asociada. Para cada sucesión de números complejos $\big(\alpha_n\big)_{n\geq 1}$, con $\alpha_n \neq 0$, podemos definir las funciones

$$f_n(z) = \frac{\overline{\alpha}_n \Phi_n(z) - \alpha_n \Phi_n^*(z)}{i z^{\frac{n}{2}}}, \qquad n \geq 1, \tag{17}$$

donde la determinación de $z^{\frac{n}{2}}$ se elegirá más adelante. Se sabe que f_n tiene sus ceros en $\mathbb{T}$, $f_n(e^{i\theta}) \in \mathbb{R}$, y, como hemos visto, las medidas discretas generadas μ_n son tales que $\mu_n \xrightarrow{\ *\ } \mu$.

Definición 2.3. *Sea* $\omega_0 \in \mathbb{R}$ *fijo. Dados dos puntos* $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T}$ *con* $\theta_j = \arg(\zeta_j) \in [\omega_0, \omega_0 + 2\pi)$*,* $j = 1, 2$*, se define la siguiente relación de orden en* $\mathbb{T}$*:*

$$\zeta_1 < \zeta_2 \iff \theta_1 < \theta_2.$$

Si se escribe $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} : \theta \in [\omega_0, \omega_0 + 2\pi)\}$, es claro que $f_n(e^{i\theta})$ es una función real C^∞, definida en $[\omega_0, \omega_0 + 2\pi)$, donde las potencias no enteras de z y w se toman tal que $\arg(z^{\frac{1}{2}}), \arg(w^{\frac{1}{2}}) \in \big[\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2} + \pi\big)$.

Sean $\big(\zeta_j^{(n)}\big)_{j=1}^{n}$ y $\big(\zeta_j^{(n+1)}\big)_{j=1}^{n+1}$ los ceros de f_n y f_{n+1} respectivamente. Se puede considerar que están dados de forma ordenada mediante la relación anterior. En [6] se muestra cómo es posible determinar una sucesión $\big(\alpha_n\big)_{n\geq 1}$ tal que, para cada $n \geq 1$, se verifique

$$\zeta_j^{(n+1)} < \zeta_j^{(n)} < \zeta_{j+1}^{(n+1)}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

cuando $\zeta_j^{(k)} \neq e^{i\omega_0}$, $k = n, n+1$, en cuyo caso se dice que f_n y f_{n+1} tienen entrelazamiento de ceros. Más aún, en el mencionado trabajo se fijan dos sucesiones de funciones $\big(f_n^{(1)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\big(f_n^{(2)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por

$$f_n^{(1)}(z; w) := \frac{\Phi_n^*(w)\Phi_n(z) - \Phi_n(w)\Phi_n^*(z)}{i(zw)^{\frac{n}{2}}}, \qquad n \geq 1,$$

$$f_n^{(2)}(z; w) := \frac{\Omega_n^*(w)\Phi_n(z) + \Omega_n(w)\Phi_n^*(z)}{(zw)^{\frac{n}{2}}}, \qquad n \geq 1,$$

donde $\big(\Omega_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es la SPOM de segunda especie, para las que se demuestra que tienen los ceros entrelazados en $[\omega_0, \omega_0 + 2\pi)$; además, cualquier par de funciones f_n, g_n tales que

$$f_n(z) = A_1 f_n^{(1)}(z; w) + A_2 f_n^{(2)}(z; w),$$

$$g_n(z) = B_1 f_n^{(1)}(z; w) + B_2 f_n^{(2)}(z; w),$$

con A_j, $B_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, y donde $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, verifican que f_n y g_n tienen los ceros entrelazados en $[\omega_0, \omega_0 + 2\pi)$.

La forma general de las funciones que generan las fórmulas de cuadratura de Szegő es

$$f_n(z) = \frac{\overline{\alpha}_n \Phi_n(z) - \alpha_n \Phi_n^*(z)}{i z^{\frac{n}{2}}}, \qquad \alpha_n \neq 0. \tag{18}$$

La convergencia débil a μ de las medidas discretas, μ_n, asociadas a estas fórmulas, y el hecho de que tienen su soporte en los ceros de las funciones f_n implican que para cualquier sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones de la forma (18), un punto del soporte $\operatorname{supp}\mu$ debe ser un punto límite del conjunto de ceros de todas las funciones f_n, o un cero de infinitas funciones f_n. Así, si se denota por A' el conjunto derivado de A, se llega a la proposición siguiente.

Proposición 2.4. *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones de la forma (19), y sean $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{X}$ el conjunto de ceros de todas las funciones f_n, y el conjunto de números complejos que son ceros de infinitas funciones f_n, respectivamente. Entonces,*

$$\operatorname{supp}\mu \subseteq \mathcal{Z}' \cup \mathcal{X}.$$

Como $\mathcal{Z}'' \subset \mathcal{Z}'$ y $\mathcal{X}' \subset \mathcal{Z}'$, el corolario siguiente es inmediato.

Corolario 2.5. *Bajo las condiciones de la Proposición 2.4,*

$$(\operatorname{supp}\mu)' \subseteq \mathcal{Z}'.$$

El Corolario 2.5 afirma que todo punto límite del $\operatorname{supp}\mu$ es, también, punto límite de $\mathcal{Z}$. De la Proposición 2.4, el resto de puntos del $\operatorname{supp}\mu$, esto es, los puntos aislados, podrían ser puntos límite de $\mathcal{Z}$, o bien, ceros de infinitas funciones f_n. El resultado siguiente proporciona más información sobre los puntos aislados, ya que asegura que todo punto aislado o bien es un punto límite de $\mathcal{Z}$, o bien es un cero de todas las funciones f_n, excepto para un número finito de estas.

Proposición 2.6. *Bajo las condiciones de la Proposición 2.4,*

$$\operatorname{supp}\mu \subseteq \mathcal{Z}' \cup \widetilde{\mathcal{X}},$$

donde $\widetilde{\mathcal{X}}$ es el conjunto de los números complejos que son ceros de todas las funciones f_n excepto, a lo más, un número finito de ellas.

Se puede demostrar también un resultado casi recíproco del anterior.

Proposición 2.7. *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones de la forma (18), y sean z_1, z_2 dos ceros de f_n. Entonces, en cada una de las dos componentes conexas de $\mathbb{T} \setminus \{z_1, z_2\}$ existe al menos un punto de $\operatorname{supp}\mu$, y un cero de f_m para $m > n$.*

Como consecuencia directa se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.8. *Si I es un subconjunto conexo de $\mathbb{T}$ tal que $\operatorname{supp}\mu \subseteq I$, a lo sumo un cero de f_n está en la clausura de $\mathbb{T} \setminus I$.*

Resultados más precisos sobre $\operatorname{supp}\mu$ se obtienen si se se limita el estudio a aquellas sucesiones de funciones con entrelazamiento de ceros. Así, supongamos que $\big(f_n(z)\big)_{n\geq 1}$ es una sucesión tal que

$$f_n(z) = A_1 f_n^{(1)}(z;w) + A_2 f_n^{(2)}(z;w), \qquad (A_1, A_2) \neq (0,0). \tag{19}$$

En este caso, f_n y f_{n+1} pueden tener un cero común en el punto w, dándose el entrelazamiento de ceros en $\mathbb{T}\setminus\{w\}$. Así, $\widetilde{\mathcal{X}} \subseteq \{w\}$. De hecho se puede ver que $\widetilde{\mathcal{X}} = \{w\}$ sólo cuando $A_2 = 0$.

Proposición 2.9. *Sea $\big(f_n\big)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones de la forma (18). Entonces, si $A_2 = 0$,*

$$\operatorname{supp}\mu \subseteq \mathcal{Z}' \cup \{w\},$$

y, si $A_2 \neq 0$,

$$\operatorname{supp}\mu \subseteq \mathcal{Z}'.$$

Ahora, centremos la atención en las funciones $f_n^{(1)}(z;w)$, es decir, en las funciones $f_n(z)$ con un cero común en $z = w$. Supongamos, además, que no se trata de una situación trivial, es decir, $\operatorname{supp}\mu \neq \mathbb{T}$. Se elegirá un punto w en cada componente conexa de $\mathbb{T}\setminus\operatorname{supp}\mu$, y se considerarán las correspondientes funciones $f_n^{(1)}(z;w)$. Así, la representación de $\operatorname{supp}\mu$ estará dada a través de los ceros de varias sucesiones $\big(f_n^{(1)}(z;w)\big)_{n\geq 1}$, una por cada componente conexa de $\mathbb{T}\setminus\operatorname{supp}\mu$.

Teorema 2.10. *Supongamos que* $\operatorname{supp}\mu \neq \mathbb{T}$ *y sea*

$$\mathbb{T}\setminus\operatorname{supp}\mu = \bigcup_{k\in\mathcal{A}} C_k$$

la descomposición de $\mathbb{T}\setminus\operatorname{supp}\mu$ en componentes conexas. Si $w_k \in C_k$ para cada $k \in \mathcal{A}$, entonces

$$\operatorname{supp}\mu = \bigcap_{k\in\mathcal{A}} \mathcal{Z}(w_k)',$$

donde $\mathcal{Z}(w)$ es el conjunto de ceros de todas las funciones $f_n^{(1)}(z;w)$.

3. Representación penta-diagonal del operador multiplicación

Sea $\mathcal{L}$ un funcional de momentos hermitiano definido positivo, con normalización $\mathcal{L}[1] = 1$. En estas condiciones, existe una única medida de probabilidad μ sobre $\mathbb{T}$, tal que

$$\mathcal{L}[f] = \int_{\mathbb{T}} f(z)\,d\mu, \qquad f \in \Lambda.$$

Como es habitual, denotaremos por $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de parámetros de Schur asociada. La sucesión de polinomios ortonormales, $\big(\varphi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, viene definida mediante

$$\varphi_n(z) = \kappa_n \Phi_n(z); \qquad \kappa_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}, \quad n \geq 0,$$

de modo que se verifica la relación de recurrencia

$$z\varphi_n(z) = \sigma_{n+1}\varphi_n(z) - a_{n+1}\varphi_n^*(z), \qquad n \geq 0, \tag{20}$$

donde $\sigma_{n+1} = \kappa_n/\kappa_{n+1} = \sqrt{1-|a_{n+1}|^2}$.

Definición 3.1. *Se define el operador de multiplicación* $\Pi : \Lambda \to \Lambda$ *como* $\Pi[f](z) = z\, f(z)$, $\forall f \in \Lambda$.

En particular, de (20) se obtiene

$$z\varphi_n(z) = \sum_{j=0}^{n+1} d_{nj}\varphi_j(z), \qquad d_{nj} = \begin{cases} \sigma_{n+1}, & j = n+1, \\ -(\kappa_j/\kappa_n)\overline{a}_j a_{n+1}, & j \leq n. \end{cases}$$

Esto permite representar la restricción de Π al espacio de polinomios $\mathcal{P}$ mediante la matriz de Hessenberg

$$M = \begin{pmatrix} d_{00} & 1 & 0 & \dots \\ d_{10} & d_{11} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

respecto de la base ortonormal $\big(\varphi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si denotamos por M_n la submatriz principal de M de orden n e I_n la matriz unidad $n \times n$, es bien conocido que

$$\varphi_n(z) = \det(zI_n - M_n), \quad n \geq 1,$$

(ver, por ejemplo, [1]).

Consideremos el producto escalar en $\mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T}) = \overline{\Lambda}$ dado por

$$\big\langle f, g\big\rangle_\mu := \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}\, d\mu(z), \qquad f, g \in \overline{\Lambda}.$$

Nótese que $\overline{\mathcal{P}} \subset \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$, pero $\overline{\mathcal{P}} \neq \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$, en general.

El operador $\Pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es isométrico, luego acotado y continuo. Entonces, existe una única extensión continua a $\overline{\mathcal{P}}$, $T : \overline{\mathcal{P}} \to \overline{\mathcal{P}}$. Puesto que $\big(\varphi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Hilbert de $\overline{\mathcal{P}}$, la matriz asociada a T en la base $\big(\varphi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es también M. Ahora bien, aunque T es isométrico, no es unitario en general, ya que $T(\overline{\mathcal{P}}) = \overline{\Pi(\mathcal{P})} \subset \overline{\mathcal{P}}$, pero no podemos asegurar $T(\overline{\mathcal{P}}) = \overline{\mathcal{P}}$ puesto que $\Pi(\mathcal{P}) \subsetneq \mathcal{P}$.

Ejemplo. Si la sucesión de parámetros de Schur es tal que $a_n = 0$ $(n \geq 1)$, $T\varphi_n = \varphi_{n+1}$, luego $\operatorname{spec}(T) = \{z : |z| \leq 1\}$. Pero la medida asociada es la de Lebesgue, y $\operatorname{supp}(\mu) = \mathbb{T}$. Obviamente, $\operatorname{spec}(T) \nsubseteq \mathbb{T}$, pues T es isométrico pero no unitario.

Si el operador de multiplicación se considera sobre Λ, es decir $\Pi : \Lambda \to \Lambda$, se mantiene la propiedad de isometría y, como $\Pi(\Lambda) = \Lambda$, se sigue que la única extensión continua de Π a $\overline{\Lambda}$, $T : \overline{\Lambda} \to \overline{\Lambda}$, es también isométrica y unitaria, ya que $T(\overline{\Lambda}) = \overline{\Pi(\Lambda)} = \overline{\Lambda}$. Obsérvese que la unitariedad de T no depende de qué medida se ha elegido en $\mathbb{T}$. Es remarcable esta diferencia con el caso de medidas soportadas en $\mathbb{R}$, donde el correspondiente operador T es hermítico pero puede ser no acotado, por lo que no siempre es autoadjunto.

Ya que $\overline{\Lambda} = \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$, el operador $T : \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$ es simplemente el operador multiplicación en $\mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$, es decir, $T(f)(z) = zf(z)$, $\forall f \in \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$. En consecuencia, sin más que utilizar la definición de espectro de un operador, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Sea μ una medida de probabilidad sobre $\mathbb{T}$ y sea el operador $T : \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$ definido por $T(f)(z) = zf(z)$, $\forall f \in \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$. Entonces*

$$\operatorname{spec}(T) = \operatorname{supp}(\mu).$$

Por tanto se puede estudiar el soporte de la medida de ortogonalidad mediante el análisis espectral del operador T. Para el estudio del $\operatorname{spec}(T)$ resulta útil la búsqueda de una base ortonormal de Λ, $\big(g_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, respecto de la cual la matriz de Π (es decir, la matriz de T) sea lo más sencilla posible.

3.1. Representación matricial de $\Pi : \Lambda \to \Lambda$. Sea la base de Λ dada por $\{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \dots\}$. El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt proporciona una base ortonormal de Λ, de acuerdo con el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \Lambda_{0,0} & \subset & \Lambda_{0,1} & \subset & \Lambda_{-1,1} & \subset & \Lambda_{-1,2} & \cdots & \subset & \Lambda_{-n,n} & \subset & \Lambda_{-n,n+1} & \cdots \\ g_0 = 1 & & g_1 & & g_2 & & g_3 & \cdots & & g_{2n} & & g_{2n+1} & \cdots \end{array}$$

que se puede precisar más en la siguiente proposición casi inmediata:

Proposición 3.3. *Sean $(\varphi_n) \subset \mathcal{P}$ tales que* $\operatorname{grado}\varphi_n = n$, *y $(g_n) \subset \Lambda$ dado por*

$$g_{2n} = z^{-n}\varphi^*_{2n}(z), \quad g_{2n+1} = z^{-n}\varphi_{2n+1}(z), \quad n \geq 0.$$

Entonces, (g_n) es base de Λ, y (φ_n) es ortonormal si y sólo si (g_n) es ortonormal.

Daremos ahora la expresión matricial de $\Pi : \lambda \to \Lambda$ en la base (g_n): puesto que $zg_{2n} \perp \Lambda_{-n,n+1}$ y $g_{2n} \perp \Lambda_{-(n-1),n}$, se sigue que $zg_{2n} \perp z\Lambda_{-(n-1),n} = \Lambda_{-(n-2),n-1} = \big\langle g_0, \dots, g_{2n-3}\big\rangle$, y análogamente para g_{2n-1}. Luego

$$zg_{2n-1}, zg_{2n} \in \big\langle g_{2n-2}, \dots, g_{2n+1}\big\rangle,$$

es decir, existen matrices $A_n, B_n \in \mathbb{C}^{(2,2)}$ tales que

$$z\begin{pmatrix} g_{2n-1} \\ g_{2n} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} g_{2n-2} \\ g_{2n-1} \end{pmatrix} + B_n \begin{pmatrix} g_{2n} \\ g_{2n+1} \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1.$$

Además, de (20) se tiene $zg_0 = c_0 g_0 + c_1 g_1$ lo que proporciona, para la expresión

$$J = \begin{pmatrix} c_0 \quad c_1 & 0 & 0 & \dots \\ A_1 & B_1 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & B_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

que no es ya una matriz de Hessenberg, sino pentadiagonal.

Un cálculo elemental permite obtener $A_n = N^T_{2n-1}, B_n = N_{2n}$, con

$$N_n = \begin{pmatrix} -\sigma_n a_{n+1} & \sigma_n\sigma_{n+1} \\ \overline{a}_n a_{n+1} & \sigma_{n+1}\overline{a}_n \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1.$$

Nótese que N_n es singular.

Según el Teorema 3.2 se tiene por tanto una representación espectral del soporte de la medida de ortogonalidad en términos de un operador pentadiagonal unitario. Además, una demostración análoga a la del caso de matrices de Hessenberg conduce al resultado siguiente:

Teorema 3.4. *Sea J_n la submatriz principal de orden n de J. Entonces,*

$$\Phi_n(z) = \det[zI_n - J_n], \quad n \geq 1.$$

Ejemplo. Sea la sucesión de parámetros de Schur dada por $a_n = a$ $(n \geq 1)$, $|a| < 1$. Sean $d\mu$ la medida asociada, $T(a)$ el operador unitario sobre $L^2_\mu(\mathbb{T})$ y $J(a)$ la representación matricial de $T(a)$ en la base ortonormal (g_n). El espectro esencial de $T(a)$ es un arco simétrico contenido en $\mathbb{T}$, es decir, $\operatorname{supp}(\mu)$ es ese mismo arco, y, a lo sumo, un punto de masa (v., p. ej., [4]).

Supongamos que se perturba la anterior situación del siguiente modo: se considera la sucesión de parámetros de Schur $\alpha := (\alpha_n)_{n\geq 0}$ con $\alpha_n \to a$, y denotamos por $d\mu_\alpha$ la medida asociada, $T(\alpha)$ el operador unitario sobre $L^2_{\mu_\alpha}(\mathbb{T})$ y $J(\alpha)$ la matriz (pentadiagonal) de $T(\alpha)$ en la correspondiente base ortonormal (g_n^α).

Sea $K = J(a) - J(\alpha)$; entonces, K es pentadiagonal y tal que sus elementos tienden a 0. Luego K es matriz de un cierto operador compacto, con lo que, según el teorema de Weyl, los espectros esenciales de $J(a)$ y $J(\alpha)$ coinciden. Es decir, $\operatorname{supp}(\mu_\alpha)$ es, salvo puntos de masa aislados, el mismo que $\operatorname{supp}(\mu)$.

Nota. La truncación de Π a espacios $\Lambda_{-p,q}$ no es unitaria en general. En el caso de medidas sobre $\mathbb{R}$, el operador de multiplicación es hermítico, y esta característica se mantiene en sus truncaciones sobre $\mathcal{P}_n$. Los operadores truncados $(\pi_n \Pi|_{\mathcal{P}_n})_{n\geq 1}$ (π_n es el proyector ortogonal sobre $\mathcal{P}_n$) son autoadjuntos y sus medidas espectrales discretas convergen a la medida espectral del operador T en una gran variedad de situaciones (por ejemplo, cuando T es acotado). La generalización a la circunferencia unidad de estas ideas, discutida en la siguiente sección, requiere la representación espectral de los ceros de las funciones semi-ortogonales.

3.2. Funciones semi-ortogonales y operadores unitarios. Ahora, consideremos una sucesión de parámetros de Schur $(a_n)_{n\geq 0}$ y una sucesión arbitraria de números complejos $(w_n)_{n\geq 1}$ con $|w_n| = 1$. Para cada $N \geq 1$, se define el operador unitario

$$U_N : \Lambda_{-p,q} \to \Lambda_{-p,q},$$

donde $p, q \in \mathbb{N}$, $0 \leq q - p \leq 1$, $N = p + q$, dado por

$$U_N \begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zg_0 \\ \vdots \\ zg_{n-1} \end{bmatrix} - b_N\, \tilde{g}_N,$$

con

$$\tilde{g}_N(z) = [z\varphi_{N-1}(z) + w_N \varphi^*_{N-1}(z)]\, z^{-[\frac{N-1}{2}]}$$

y

$$b_N = (0, \ldots, 0, 0, 1)^\mathsf{T} \quad \text{si } N \text{ es par}, \tag{21}$$

$$b_N = (0, \ldots, 0, \sigma_{N-1}, \bar{a}_{N-1})^\mathsf{T} \quad \text{si } N \text{ es impar}. \tag{22}$$

Nótese que $\{g_0, \ldots, g_{N-1}, \tilde{g}_N\}$ es una base ortonormal de $\Lambda_{-p,q}$ con $\tilde{g}_N$ función semi-ortogonal. Los ceros de $\tilde{g}_N$, simples y de módulo 1, son los valores propios del operador (U_N). La correspondiente medida espectral discreta $d\mu_N$ está por tanto soportada en los ceros de $\tilde{g}_N$, de modo que $d\mu_N \xrightarrow{*} d\mu$ cuando $N \to \infty$ (v. §2.1).

Esta interpretación espectral de las FSO sugiere que el estudio más profundo de la medida $d\mu$ habrá de hacerse sobre la sucesión de los operadores unitarios (U_N) (v. [7], [8]).

Referencias

[1] M. Alfaro, Una expresión de los polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad, en *Actas III Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas* (Sevilla 1974), Vol. 2 (1982), 1–8.

[2] M. Alfaro, M. J. Cantero y L. Moral, Semi-orthogonal functions and orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Comput. Appl. Math.* **99** (1998), 3–14.

[3] A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen y O. Njästad, *Orthogonal rational functions*, University Press, Cambridge, 1999.

[4] M. J. Cantero, *Polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad. Modificaciones de los parámetros de Schur*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, 1997.

[5] M. J. Cantero, M. P. Ferrer, L. Moral y L. Velázquez, Funciones semiortogonales y formulas de cuadratura, en *Actes des VI^{èmes} Journées Zaragoza-Pau de Mathématiques Apliquées et de Statistiques* (Jaca, España, 1999), Publications de L'Université de Pau, Pau, Francia (2001), 141–150.

[6] M. J. Cantero, M. P. Ferrer, L. Moral y L. Velázquez, Measures and semi-orthogonal functions on the unit circle, prepublicación.

[7] M. J. Cantero, M. P. Ferrer, L. Moral y L. Velázquez, Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle, prepublicación.

[8] M. J. Cantero, M. P. Ferrer, L. Moral y L. Velázquez, Semi-orthogonal functions and spectral theory on the unit circle, prepublicación.

[9] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, Nueva York, 1978.

[10] G. Freud, *Orthogonal polynomials*, Pergamon Press, Oxford, 1971.

[11] Ya. L. Geronimus, *Orthogonal polynomials*, Consultants Bureau, Nueva York, 1961.

[12] W. B. Jones, O. Njästad y W. I. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bull. London Math. Soc.* **21** (1989), 113–152.

[13] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.ª edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

M. J. Cantero y L. Velázquez: Departamento de Matemática Aplicada, Centro Politécnico Superior, Universidad de Zaragoza, Calle María de Luna s/n, 50015 Zaragoza, Spain

Correo electrónico: `mjcante@posta.unizar.es, velazque@posta.unizar.es`

M. P. Ferrer y L. Moral: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, Calle Pedro Cerbuna 9, 50009 Zaragoza, Spain

Correo electrónico: `pferrer@posta.unizar.es, lmoral@posta.unizar.es`