

Schwengeler, Christoph A.:

Geometrie experimentell Ideen und Anregungen zu einem handlungsorientierten Mathematikunterricht

Zürich: Orell Füssli, 1998. – 174 p.
ISBN 3-280-02743-8

Günter Graumann, Bielefeld

1. Konzeption und Übersicht

Das Buch "Geometrie experimentell" wendet sich an Lehrende der Sekundarstufe und Studierende des Lehramtes und ist geeignet als Sammlung von "Ideen und Anregungen zu einem handlungsorientierten Mathematikunterricht", wie es im Untertitel heißt. Zur Erläuterung seines Konzeptes schreibt der Autor im Vorwort u.a.: "Mathematische Fragestellungen, die nach standardisierten Lösungsrezepten verlangen und sich ausschließlich auf idealisierte Modelle beziehen, finden sich quer durch die Rechenbüchleinliteratur. Etwa bei Rechnungen zur Dichte von Körpern: wieviele Quader, Zylinder oder Würfel aus Marmor, Granit oder Aluminium sollten da berechnet werden ... mathematisch vollkommene Gebilde. Was aber, wenn einmal ein gewöhnlicher Stein vorliegt, wie berechnet man da seine Dichte? Für mich war bald einmal klar: Es mußten Problemanlagen geschaffen werden, in welchen Schülerinnen und Schüler, unmittelbar von ihrer Situation ausgehend, durch eigenes Beschaffen von Daten und Messungen sich jenes Material handelnd erwerben konnten, dessen Verknüpfung zu Termen ihnen eine sinnvolle Lösung bringen konnte" (S. 3). Und weiter unten: "Viele der Beispiele können direkt in den Unterricht eingebaut werden, sie können aber auch die Basis für eigene Weiterentwicklungen zur Geometrie von ebenen Figuren und von Körpern bilden" (S. 4).

In den vergangenen Jahren hat der Autor, wie er schreibt, viele unterschiedliche Beispiele zum experimentieren mit mathematischen Gedanken gesammelt und in der Lehrerbildung erprobt. Eine Reihe auf Geometrie der S I bezogener Beispiele sowie einige grundsätzliche Überlegungen zur "experimentellen Mathematik" finden sich nun in dem hier zu besprechenden Buch, gegliedert in zwölf voneinander unabhängige Kapitel, wobei jedem Kapitel ein kurzes "Entracte (Pause, Zwischenspiel)" folgt, das ein Problem oder eine "Überlegungsaufgabe" mit nicht immer unmittelbarem Bezug zum Thema enthält. In die Themenkreise wurden bewußt auch weiterführende Gedanken miteinbezogen, denn "die Sammlung soll nicht ein weiteres Lehrbuch für den Geometrieunterricht sein, sondern zu neuen didaktischen Sichtweisen und unterrichtspraktischen Umsetzungen anregen" (S. 4). Neben Lösungshinweisen zu den Entracten und Literaturhinweisen enthält das Buch am Schluß noch eine Reihe von Arbeitblättern zu verschiedenen Themen, die als Kopiervorlagen verwendet werden können und sollen.

2. Zu den einzelnen Inhalten

Um einen Einblick in die einzelnen Themenkreise, die unabhängig voneinander gelesen werden können, zu bekommen, werde ich im folgenden die zwölf Kapitel kurz charakterisieren:

Im 1. Kapitel wird am Beispiel des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck verdeutlicht, was der Autor unter "experimentell" versteht. Im Entracte I wird dieses vertieft an einem Beweis, dessen Fehlerhaftigkeit man entdecken soll.

Im 2. Kapitel werden die Flächenbestimmung erstens mit der gravimetrischen Methode (Wägen einer Einheitsfläche und der zu bestimmenden Fläche – aufgeklebt bzw. aufgeprägt auf Papier oder Pappe konstanter Dicke), zweitens mit der Methode des Auszählens von Einheitsquadraten (etwa auf Millimeterpapier) und drittens der Methode des "Stechens" (einer Variante des Auszählens: Durchstechpunkte werden gezählt) vorgeführt.

Im 3. Kapitel "Experimentelle Mathematik – eine Begründung" findet man theoretische Überlegungen. Zuerst wird das Stufenmodell der Intelligenzentwicklung nach Piaget dargestellt. Dann folgen einige Bemerkungen über das Beziehungsgefüge Wort-Zeichen-Bild-Handlung sowie über die "Schnittstelle zwischen konkret-operationalem und formal-operationalem Denken". Schließlich wird die Theorie des handelnden Lernens an einem Beispiel (Stein in einer Wasserschale) verdeutlicht.

Im 4. Kapitel werden verschiedene Methoden zur Bestimmung der Dichte unterschiedlicher Objekte mit genauen Anweisungen des Vorgehens beschrieben.

Das 5. Kapitel hat die Schulung des Vorstellungsvermögens mittels neun verschiedener ebener und räumlicher Puzzles zum Ziel.

Im 6. Kapitel "Gleich, nur gerade anders" geht es um Überlegungen und Handlungen zum Thema der axialen Symmetrie und der Punktsymmetrie.

Im 7. Kapitel "Reguläre Vielecke" werden zunächst drei interessante Wege (mit Spiegeln, Pappstreifen gleicher Länge, Strohhalmen) zur Herstellung regulärer Vielecke präsentiert. Allerdings wird auf das Problem, wie man die gleichgroßen Winkel erhält nicht eingegangen. Z. B. wäre an dieser Stelle ein Verfahren angebracht, das sich auf folgenden Satz stützt: *Ein Vieleck mit lauter gleichlangen Seiten ist regulär, wenn die Ecken alle auf einem Kreis liegen.* Im weiteren dieses Kapitels folgen zwei Zirkel-Lineal-Konstruktionen des regulären Fünfecks sowie Bemerkungen über die Konstruierbarkeit von regulären Vielecken mit $2^n \cdot 3$ bzw. $2^n \cdot 4$ bzw. $2^n \cdot 5$ Ecken. Schließlich werden noch Näherungskonstruktionen für das reguläre Sieben- und Neuneck angegeben.

Im 8. Kapitel bilden die platonischen Körper das Thema. Es wird von einer Unterrichtseinheit über Möglichkeiten der Behandlung platonischer Körper mit Siebtkläßlern berichtet, wobei der Phasenaufbau Erfassen-Entstehung-Aufbauen-Betrachten die didaktische Grundlage bildet. Verschiedene Möglichkeiten der Herstellung und Betrachtung platonischer Körper kommen dabei zum Tragen.

Im 9. Kapitel geht es um die Zahl π . Zunächst wird von persönlichen Erfahrungen mit der Zahl π berichtet.

Danach folgen Bemerkungen zur Geschichte und zu Geschichten um π . Schließlich werden verschiedene experimentelle Wege bzw. Näherungsverfahren zur Bestimmung von π angegeben.

Das 10. Kapitel ist dann dem Satz von Pythagoras gewidmet. Um sich in die Welt des Pythagoras einzufinden zu können, wird im narrativen Stile ausführlich vom Leben des Pythagoras und möglichen Lehrsituationen des Pythagoras berichtet. Allerdings wird dabei zu wenig deutlich, daß wir vom wirklichen Leben des Pythagoras keine gesicherten Kenntnisse haben. Danach werden auf einer Seite die Aussagen der drei Sätze der Satzgruppe des Pythagoras vorgestellt. Durch die standardisierte Notationweise mit a , b , c wird leider versäumt, einen flexiblen Umgang mit diesen Aussagen zu fördern. Es folgen weiterhin mehrere Beweise des Satzes von Pythagoras, größtenteils auf experimenteller Basis. Für ganzzahlige Seitenverhältnisse wird auf das einfache Auszählen der Einheitsquadrate hingewiesen, wobei allerdings unklar bleibt, warum bei solchen ganzzahligen pythagoreischen Tripeln der Winkel im Dreieck ein rechter ist. Soll das experimentell durch Messen geschehen? Der zweite Beweis verwendet die schon oben benutzte Methode des Aufzählens von Millimeterquadraten. Der dritte Beweis benutzt die ebenfalls schon bekannte gravimetrische Methode (Auswiegen der Quadrate). Als viertes wird der bekannte geometrisch-algebraische Beweis mit Hilfe des Quadrates, dessen Seitenlänge die Summe der Kathetenlängen ist, vorgestellt. Allerdings wird nicht auf das Problem des Prüfens des rechten Winkels beim Hypotenusenquadrat hingewiesen. Der folgende abbildungsgeometrische Beweis verzichtet ganz auf Begründungen und gibt nur die Figurenfolge an. Weiterhin folgt ein logisch vollständiger Beweis des Kathetensatzes von Euklid. Den Abschluß dieses Kapitels bildet ein rein experimentell durchgeführter Zerlegungsbeweis.

Das 11. Kapitel ("Von der rundesten Sache der Welt") hat das Kugelvolumen und die Oberfläche der Kugel zum Thema. Zunächst wird ein Näherungsverfahren mittels ein- und umschriebenen Zylinderschichten dargelegt und es werden einige Näherungswerte, ermittelt mit Hilfe von Tabellenkalkulation, angegeben. Danach wird beschrieben, wie man mittels der Verdrängungsmethode (Körper in einen Wasserbehälter legen) das Kugelvolumen im Rahmen der Meßgenauigkeit bestimmen kann. Nach Bemerkungen über Archimedes und dessen Entdeckung der Beziehung zwischen Halbkugel-, Zylinder- und Kegelvolumen gleicher Grundfläche und Höhe wird das Bestimmen der Verhältnisse dieser Volumina durch Ausfüllen von hohlen Plastikformen mit Flüssigkeit oder Papierformen mit Hirse bzw. Sand erläutert. Weiterhin wird auf die Möglichkeit des Umformens eines Würfels aus Knete (Plastilin) in eine Kugel hingewiesen, wobei erwähnt wird, daß aus Erfahrung diese Methode nicht sehr genau ist. Auch der schon von Archimedes vorgenommene Vergleich der drei Körper mittels Ebenenschnitten und der anschließenden Anwendung des Prinzips von Cavalieri wird dargestellt. Schließlich wird noch eine Überlegung angestellt, die zur Bestimmung der Oberfläche der Kugel aufgrund der Kenntnis des Volumens führt.

Das 12. Kapitel schließlich ist den drei klassischen Problemen der Antike gewidmet. Nachdem klargestellt wurde, daß diese Probleme exakt mit Zirkel und Lineal nicht lösbar sind, werden zunächst zwei Verfahren der angenäherten Quadratur des Kreises angegeben. Danach folgt die exakte Konstruktion des 72° -Winkels und die Diskussion anderer damit zusammenhängender Winkel. Daraufhin wird eine Konstruktion der Trisektion eines beliebigen Winkels angegeben, von der anschließend gezeigt wird, daß sie nur eine Näherung liefert. Schließlich wird das Delische Problem und dessen Zusammenhang mit der Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen geschildert. Danach wird ein Gerät, das Mesolabium von Eratosthenes, beschrieben und es wird erläutert, wie man damit die zwei mittleren Proportionalen experimentell bestimmen kann. Anschließend wird eine Anregung zum Selbstbau des Mesolabiums gegeben. Schließlich wird noch angeregt, sich acht Würfel zu bauen, deren Volumen sich wie $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8$ verhalten. Für die Kantenlängen wird dazu eine Tabelle gegeben, deren Werte mit dem Taschenrechner ermittelt werden können.

3. Zusammenfassung

Das Buch enthält also viele Anregungen, um mit experimentellen Herangehensweisen an die bekannten Fragestellungen den Geometrieunterricht in der S I aufzulockern und Schülerinnen und Schülern einen selbstaktiven Zugang zu Lösungen zu verschaffen. Für die Studierenden und Anfänger würde ich mir allerdings – außer den Bemerkungen über die Grenzen der Näherungsberechnungen bzw. -konstruktionen – Reflexionen in Bezug auf die Strenge der Beweise und die Einordnung der Themen in einen größeren Zusammenhang wünschen. Trotz dieser und einiger oben erwähnter kritischer Bemerkungen empfehle ich das Buch allen – insbesondere erfahrenen – Lehrerinnen und Lehrern, die Geometrie in der Sekundarstufe unterrichten, sowie allen, die solche Lehrerinnen und Lehrer ausbilden, als Anregung für die eigene Arbeit. Dabei muß man nicht gleich das ganze Buch auf einmal lesen, sondern man kann sich jeweils mit dem gerade interessierenden Teil beschäftigen. Darüberhinaus ist das Buch in einem anregenden Stil geschrieben und Kopien einzelner Passagen und Arbeitsblätter sind auch gut für die Hand der Schülerinnen und Schüler geeignet.

Autor

Graumann, Günter, Prof. Dr., Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Universitätsstr. 25-27, D-33615 Bielefeld.
E-mail: graumann@mathematik.uni-bielefeld.de