Die NCTM-Standards – Anstöße für den Mathematikunterricht nach TIMSS

Joachim Engel, Ludwigsburg

Abstract: *The NCTM standards – Proposals for mathematics education after TIMSS.* Over the last two decades the National Council of Teachers of Mathematics initiated a very comprehensive discussion process on the objectives and contents of mathematical instruction for schools. The latest document, the "Principles and Standards 2000 for School Mathematics (Discussion Draft)", provides orientation regarding content and emphasizes five process oriented objectives of mathematics education: problem solving, reasoning and proof, communication, connections and representation. The process goals provide impulses and guidance for mathematical programs, in particular in the light of the German discussion of TIMSS.

Kurzreferat: In den letzten beiden Jahrzehnten ist in den USA vom National Council of Teachers of Mathematics ein sehr umfassender Diskussionsprozess über Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts initiiert worden. Das jüngste Dokument, die Standards 2000, heben neben inhaltlichen Orientierungen fünf prozessorientierte Ziele des Mathematikunterrichts hervor: Problemlösen, Rationales Argumentieren, Kommunikation, Vernetztes Lernen und Darstellung von Wissen.

ZDM-Classification: D30

1. Mathematikunterricht in der Krise?

Drei sehr unterschiedliche Ereignisse und Entwicklungen der jüngsten Zeit haben den Mathematikunterricht in Deutschland in die öffentliche Diskussion gebracht, wie es die Öffentlichkeit seit der Auseinandersetzung um die "Neue Mathematik" der sechziger Jahre nicht mehr erlebt hat:

1) *Technologische Entwicklung im Bereich Computer Hardware und Software:*
   Mit der heute vorhandenen Software, von Grafik- und Geometrieprogrammen zu Computer-Algebrasystemen, lassen sich alle algorithmisch lösbaren Aufgabenstellungen numerischer oder symbolischer Art der Schulmathematik bewältigen – vom elementaren Rechnen bis zum Differenzieren von Funktionen, vom Lösen einfacher linearer Gleichungen bis zum Matrizenkalkül usw. Für den Mathematikunterricht ergeben sich damit immer dringendere Fragen hinsichtlich seines Inhalts, seiner Zielsetzungen und einer dafür geeigneten didaktisch-methodischen Gestaltung.
2) *Wie viele Jahre Mathematik in der Schule?*
   Nicht selten erleben Schüler Mathematik als inhaltsleere Ansammlung von Rechenregeln, die man nach der letzten Prüfung möglichst schnell vergessen kann. Ein syntaktisches Umformen, dem jegliche semantische Bindung fehlt, ist aber sinnlos. Bezogen auf eine Mathematik, die mit dem Leben nicht viel zu tun hat, löste Heymann (1996) mit seiner provozierenden Frage "Sind sieben Jahre genug?" eine lebhafte Diskussion aus.
3) *TIMSS:*
   Das ernüchternde Abschneiden deutscher Teilnehmer bei der internationalen Studie TIMSS (Baumert und Lehmann, 1997; Baumert, Bos und Lehmann, 1999) zur Leistungsfähigkeit in Mathematik und Naturwissenschaft von Schülerinnen und Schülern in 41 (TIMSS II) bzw. 24 (TIMSS III) Ländern veranlasst zu kritischen Anfragen an den Unterricht in Deutschland. Relative Stärken zeigten die deutschen Schüler in der Reproduktion von Faktenwissen und Anwendung von Routineverfahren aus Arithmetik und Algebra. Leistungsschwächen wurden dagegen bei Problemstellungen sichtbar, die eine sinnvolle Anwendung des Gelernten auf neue inner- und außerfachliche Problemstellungen verlangen, komplexe Verknüpfungen elementarer Operationen erfordern oder mathematisches Modellieren prüfen. Zu kurz kommen in deutschen Schulen insbesondere das selbständige, aktive Problemlösen, das inhaltliche, nicht-standardisierte Argumentieren, das Herstellen von Querverbindungen mathematischer Begriffe untereinander und mit Situationen aus Alltag und Umwelt sowie ein wiederholendes und vertiefendes Aufgreifen weiter zurückliegender Stoffe durch deren Venetzung (kumulatives Lernen).

2. NCTM Standards

Die Empfehlungen des National Councils of Teachers of Mathematics (NCTM) bieten eine kohärente Gesamtsicht und Diskussion der gegenwärtigen Mathematikdidaktik. Sie sind curriculare Orientierungen, die vom Berufsverband der US-amerikanischen Mathematikdidaktiker zum Zweck der Qualitätssicherung, der Formulierung von Zielen und der Forderung nach Änderungen erstellt sind. Die NCTM begleiten mit ihren Veröffentlichungen seit Jahrzehnten Innovationen in der Schulmathematik: Agenda for Action 1980, Curriculum and Evaluation Standards 1989, Principles and Standards for School Mathematics ("Standards 2000").

Der Wert der Standards für die Diskussion in Deutschland besteht weniger in neuen Ideen oder Vorhaben für Innovationen. Die allermeisten Anregungen gibt es auch als Einzelbeiträge schon in der deutschen Mathematikdidaktik. Es ist vielmehr die konsequente Zusammenschau und das Aufzeigen von Längs- und Querverbindungen über alle Klassenstufen innerhalb der Mathematik und zwischen Mathematik und anderen Fächern, was den Wert der Standards ausmacht. Die Grundpositionen werden dabei anschaulich mit Schulbeispielen illustriert und bis hin zu methodischen Anmerkungen und Hilfen konkretisiert. Ihre neueste Fassung vom Oktober 1998 sind die Standards 2000 in vorläufiger Fassung ("discussion draft"), ein Kompendium in der Entwicklung, das über Internet international verfügbar alle Interessierten zu Kommentaren und Verbesserungsvorschlägen einlädt. Die Standards sind kein Produkt ministerieller Vorgaben, sondern sie sind aus dem Diskussionsprozess der betroffenen Didaktiker, Erziehungswissenschaftler und Mathematiker in Schule, Lehrerausbildung und Universität entstandene Leitlinien. Als Resultat eines partizipatorischen Prozesses aller Beteiligten sind sie somit auch ein Beispiel für mehr Demokratie mit Hilfe moderner Medien. Der teilweise kontroverse Diskussionsprozess kann über das Internet detailliert verfolgt werden. Die Standards 2000 sind im WWW verfügbar unter `http://standards-e.nctm.org`, eine Teilübersetzung ins Deutsche unter `http://www.vib-bw.de/tp2/nctm.html`.

Die Standards 2000 sind in zwei Gruppen gegliedert: Fünf Standards haben die Inhalte und die Wissensebene des Mathematikunterricht zum Gegenstand ("Content Standards"), fünf weitere Standards konzentrieren sich auf den Prozess des Wissenserwerbs und -gebrauchs ("Process Standards"). Die fünf "Content Standards"(1. Zahl und Verknüpfung; 2. Muster, Funktionen und Algebra; 3. Geometrie und geometrische Anschauung; 4. Größen und Messen; 5. Datenanalyse, Statistik und Wahrscheinlichkeit) umfassen, was die Schüler wissen sollen, während die "Process Standards" beschreiben, wie und auf welche Weise die Schüler ihr Wissen erlangen und nutzen. Bei den Inhalten fällt auf, dass die Standards stärker als traditionelle Curricula Gebiete wie diskrete Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik hervorheben. Zur Begründung wird angeführt, dass es in der Informationsgesellschaft zu den Zielen der Schule gehört, Schüler auf eine zunehmend technologische und von der Analyse empirischen Datenmaterials beeinflusste Welt vorzubereiten. Wir konzentrieren uns auf die von den Standards diskutierten Prozesse, die mit dem Lernen von Mathematik zu tun haben.

3. Prozessorientierte Ziele der Standards

Mathematik entwickelt sich durch menschliche Aktivitäten: Problemlösen, rationales Begründen, effizientes und präzises Kommunizieren von Sachverhalten, Denken in Zusammenhängen, und Darstellen und Strukturieren von Ideen und Konzepten. Die "Process Standards" weisen auf wichtige Aspekte des Kompetenzzuwachses der Schüler hin. Wenn Schüler Mathematik lernen, entwickeln sie ein wachsendes Repertoire von Problemlösefähigkeiten, ein erweitertes Spektrum an Arbeitstechniken und geistigen Arbeitsstilen, bei dem die Differenziertheit und das Niveau der mathematischen Argumentation wächst. Schüler sollen dabei lernen, sich angemessen in der Sprache der Mathematik auszudrücken und Verbindungen zu anderem Gelernten innerhalb und außerhalb der Mathematik herzustellen.

3.1 Mathematik als Problemlösen

Didaktische Forschung weist darauf hin, dass Menschen nicht neue Konzeptionen lernen, indem sie Einzelteile des Wissens aufbauen. Stattdessen wird konzeptionelles Verstehen gefördert, wenn sich Lernende eher kopfüber auf ein komplexeres Problem stürzen und dabei all das einbringen, was sie an Fakten und Methoden bereits verfügbar haben. Das setzt wohlgemerkt einiges an technischen Fertigkeiten und Vorverständnis vor der Bearbeitung des Problems voraus. Es ist aber nicht produktiv, von Schülern zuerst einen kompletten Kanon von Vorwissen und Voraussetzungen abzuverlangen, bevor sie mit herausfordernden neuen Problemen konfrontiert werden. Auch wenn Schüler beim Abarbeiten einer detaillierten Liste von Voraussetzungen Fakten und Verfahren lernen, sind sie sich dann oft nicht sicher, wann und wie diese anzuwenden sind. Darüberhinaus erleben sie nicht die Befriedigung, die sich aus der Beschäftigung mit komplexen und interessanten Aufgaben ergibt. Problemlösen ist ein Prozess, der verlangt, gegenwärtiges Verständnis zu nutzen, um Strategien anzupassen und zu entwickeln, die sich auf neue Situationen beziehen. Daher fordern die Standards (NCTM, 1998, S. 76):

> Der Mathematikunterricht soll sich auf Problemlösen als Teil mathematischen Verstehens konzentrieren, so dass alle Schüler
> - neues mathematisches Wissen durch ihre Arbeit an Problemen aufbauen;
> - eine Fähigkeit zum Formulieren, Darstellen, Abstrahieren und Verallgemeinern in Situationen innerhalb und außerhalb der Mathematik entwickeln;
> - eine breite Vielfalt von Strategien zum Problemlösen anwenden und diese Strategien neuen Situationen anpassen;
> - ihr eigenes mathematisches Denken beim Problemlösen selbst kontrollieren und reflektieren.

Die Fähigkeit, Probleme zu lösen ist nicht nur ein Zweck sondern vielmehr auch ein wesentliches Ziel der Mathematik. Beim Problemlösungsansatz als Herangehensweise an mathematische Fragestellungen erweitern Schüler ihr mathematisches Verständnis und stärken gleichzeitig ihre Fähigkeit, die ihnen schon bekannte Mathematik auch zu nutzen. Problemlösen heißt sich Einlassen auf Aufgaben, deren Lösungsmethode und Lösungsweg nicht von vornherein bekannt ist. Es verlangt von den Schülern Kreativität. Um eine Lösung zu finden, müssen Schüler ihr Wissen auf unterschiedliche Art einsetzen.

Ein gutes mathematisches Problem hat drei Eigenschaften:

1) Sein Lösungsweg ist nicht von vornherein offensichtlich.
2) Es ist herausfordernd und aus mathematischer Sicht interessant. Es fordert und fördert kreatives Denken.
3) Es knüpft an schon verfügbares Wissen an, so dass vorhandenes Wissen und Fertigkeiten angepasst und erweitert werden.

Gute Probleme ermutigen zur Reflexion und Kommunikation und entstammen entweder der unmittelbaren Lebensumwelt der Schüler oder einem den Schülern verständlichen innermathematischen Kontext. Darüberhinaus ermutigen sie zur Verallgemeinerung von gelernten Regeln und Erkenntnissen.

Aktives Betreiben von Mathematik wird am besten gefördert durch Probleme, die für Schüler motivierend und herausfordernd sind. Wenn Schüler dann merken, dass ihr gegenwärtiges mathematisches Wissen noch unzureichend ist, kann dies ein weiterer Ansporn zum Lernen von Mathematik sein. Gute Problemlöser sind neugierig und wollen das gegebene Problem erkunden, seine Struktur mathematisch darstellen. Sie stellen Vermutungen auf und untersuchen und analysieren ihre Ideen. Ein zweiter Aspekt ist die Anknüpfung an schon vorhandenes Wissen. Um fordernde Probleme zu lösen, muss die Fähigkeit vorhanden sein, vorhandenes Wissen in vielfältigen Situationen anzuwenden. Die Suche nach geeigneten Strategien bildet den dritten Aspekt im Problemlösungsprozess. Gute Problemlöser verfügen über ein Repertoire von Problemlösestrategien, die sie anwenden können, wenn sie mit unbekannten Problemen konfrontiert werden. Schließlich verfügen Problemlöser über Fähigkeiten zur Selbstreflexion und Metakognition. Sie verfügen über Metawissen, können über ihr eigenes Vorgehen nachdenken und kennen ihre eigenen Stärken und Schwächen. Polya (1980) beschreibt die vier Aspekte des Problemlöseprozesses als (1) Verstehen des Problems, (2) Ersinnen eines Plans, (3) Durchführung des Plans und (4) Rückblick. Es ist dabei nützlich, dass Schüler an Problemen arbeiten, die auf vielfältige Weise gelöst werden können. Dadurch wird ein Vergleich von Methoden möglich, ebenso wie das Herstellen von Querbezügen, Diskussionen über Denkprozesse und Strategien und eine Reflexion über vorgeschlagene Vorgehensweisen.

3.2 Mathematik als rationales Begründen und Beweisen

Ein Teil der Faszination der Mathematik und ihrer Überzeugungskraft entstammt der Tatsache, dass einmal bewiesene Sätze ihre Gültigkeit nie verlieren. Obwohl alle Wissensdisziplinen gewisse Bewertungsstandards haben, mit denen sie neue Theorien und Entdeckungen prüfen, so sind diese nirgendwo so gut und explizit formuliert wie in der Mathematik. Systematisches Begründen ist eine der konstitutiven Eigenschaften der Mathematik. Verzichtet der Unterricht auf Begründungen und Beweise, so kann er gleich ganz auf die Mathematik verzichten. Um Schülern Mathematik als einen Weg zum Verstehen der Welt zu vermitteln, ist es unerlässlich, dass bei allen mathematischen Tätigkeiten das Warum betont wird.

> Der Mathematikunterricht (NCTM, 1998, S. 80) soll sich auf das Erlernen rationaler Begründungen und der Konstruktion von Beweisen als Teil des mathematischen Verstehens konzentrieren, so dass alle Schüler
> - Begründen und Beweisen als wesentlichen und bedeutenden Teil der Mathematik anerkennen;
> - mathematische Vermutungen aufstellen und untersuchen;
> - mathematische Argumente und Beweise entwickeln und bewerten;
> - verschiedene Begründungstypen und Beweismethoden geeignet auswählen und einsetzen.

Die Entwicklung des logischen Denkens ist eng an die intellektuelle und sprachliche Entwicklung der Kinder gebunden. Daher müssen Aktivitäten wie Begründen und Beweisen immer altersgerecht erfolgen. Das gilt insbesondere für den erwarteten Formalisierungsgrad der Ausführungen. Erstklässler bemerken, dass sich gerade und ungerade Zahlen abwechseln. Drittklässler vermuten und begründen, dass die Summe von zwei geraden Zahlen wiederum eine gerade Zahl ergibt. Schüler in der 7. Klasse errechnen die Wahrscheinlichkeit eines geraden Produktes, wenn die Resultate des Werfens zweier Würfel multipliziert werden. Und in der 10. Klasse können Schüler beweisen, dass das Quadrat einer ungeraden Zahl immer um eins größer ist als ein Vielfaches von 8. In allen Klassenstufen können sich Schüler – altersgemäß – einem systematischen Denken, Vermuten und Sammeln von Indizien zuwenden, das einer formalen mathematischen Argumentation vorausgeht.

Auch schon in unteren Klassen können Kinder die Vorläufer formaler Begründungen einüben. Fragen wie: *Warum glaubst Du, dass das wahr ist? Denkt jemand, dass diese Antwort richtig ist? Warum?* vermitteln die Erwartung, dass Aussagen begründet oder widerlegt werden müssen. Wenn eine Vermutung stimmt, dann gibt es dafür Gründe. Die Frage nach dem "Warum" bietet Gelegenheit zum Begründen und Beweisen in allen mathematischen Gebieten und sollte durch das ganze Curriculum hinweg immer wieder aufgegriffen werden. Eine wichtige Gelegenheit, mathematisches Begründen einzuüben, besteht in der Bewertung mathematischer Argumente. Schüler müssen dabei lernen, Annahmen zu hinterfragen und sicherzustellen, dass Schlussfolgerungsketten gerechtfertigt sind. In unteren Klassen sind die Begründungen eher informell und die Begründungsketten kurz. Mit zunehmender Altersstufe sollen diese Begründungen auch vermehrt in der formalen Sprache der Mathematik erfolgen.

3.3 Mathematik als Kommunikation

Eine wichtige Sichtweise sieht Mathematik als Angebot von Darstellungsmöglichkeiten und als Kommunikationsmittel abstrakter Sachverhalte (Fischer, 1984). Mathematische Begriffe werden dabei weniger als Bestandteile einer mathematischen Insidersprache zur Erarbeitung theoretisch anspruchsvoller Denkkonzepte erarbeitet, sondern sie werden als Hilfsmittel zur effektiven Verständigung über reale Probleme angesehen. Sie helfen, reale Probleme besser zu strukturieren (Borovcnik, 1992). In einem Unterricht, der an "offener Mathematik" (Fischer) orientiert ist, liegt die Betonung auf dem Prozess der Entwicklung von Begriffen, die zur Lösung eines Problems nachvollzogen werden können.

Kommunikation ist ein wesentlicher Bestandteil von Mathematiklernen. Es ist das Vehikel, durch das Ideen ausgedrückt, mitgeteilt und geklärt werden. Wenn Schüler über Mathematik nachdenken und mathematisch ihren Mitschülern gegenüber argumentieren, dann müssen sie ihre Ideen klar und überzeugend in Worten formulieren. Der dritte prozessorientierte Standard fordert (NCTM, 1998, S. 85):

> Der Mathematikunterricht soll Sprache und Kommunikation nutzen, um das mathematische Verstehen zu fördern, so dass alle Schüler
> - ihr mathematisches Denken organisieren und festigen, um mit anderen zu kommunizieren;
> - mathematische Ideen kohärent und klar gegenüber Mitschülern, Lehrern und anderen ausdrücken;
> - ihr mathematisches Wissen erweitern, indem sie das Denken und die Strategien anderer mit in ihre Überlegungen einbeziehen;
> - die Sprache der Mathematik als ein präzises Mittel für mathematische Aussagen einsetzen.

Schüler können diese Fähigkeiten durch Erfahrung und angeleitete Übung erwerben. Das bedeutet, dass Schüler auch im Mathematikunterricht einen Absatz zur Diskussion einer Lösungsstrategie oder zur Interpretation eines Ergebnisses schreiben. Darüberhinaus bietet das Zuhören zu den Erklärungen anderer die Gelegenheit, das eigene Verständnis zu vertiefen. Gespräche, bei denen mathematische Ideen von verschiedenen Blickwinkeln aus betrachtet werden, bieten allen Teilnehmern die Gelegenheit, ihr eigenes Denken zu schärfen und Zusammenhänge herzustellen. Diese Aktivitäten helfen Schülern eine Sprache zu entwickeln, in der mathematische Ideen ausgedrückt werden und die Präzision der eigenen Sprache eine Wertschätzung erfährt. Daher gibt es einen zweiten Vorteil, wenn der Mathematikunterricht Kommunikation betont: Schüler kommunizieren, um Mathematik zu lernen, und sie lernen, mathematisch zu kommunizieren. Schüler, die in lebhafte Diskussionen verwickelt sind, in denen sie ihre Lösungen rechtfertigen – besonders im Fall von Kontroversen – gewinnen ein besseres mathematisches Verständnis. Sie lernen dabei, die Argumente ihrer Mitschüler zu bedenken und zu bewerten, um dabei ihre eigenen Gedanken zu klären.

Lehrer können über die Schülerkommunikation Einsicht in das Wissensniveau und Verständnis ihrer Schüler gewinnen. Korrekte Ergebnisantworten verstecken mitunter Missverständnisse über mathematische Vorgehensweisen und Eigenschaften. Die Kommunikation von mathematischem Wissen und Fertigkeiten hingegen gewährt Einblick in das, was Schüler internalisiert haben. Kommunikation legt das mathematische Denken offen, so dass Ideen analysiert und diskutiert werden können. Wenn Schüler mathematisch kommunizieren, kann der Lehrer den Grad des Verständnisses und Fortschritts feststellen.

Reichhaltige mathematische Kommunikation findet am ehesten statt bei der Bearbeitung von offen gestellten Problemlöseaufgaben, weniger aber bei Routineaufgaben, deren Lösung in der Anwendung eines bekannten Algorithmus besteht.

3.4 Mathematik als Gebäude vernetzten Wissens

Erwachsene erinnern sich nicht selten an ihren eigenen Mathematikunterricht als eine Ansammlung von Fakten und Rechenverfahren. In ihrer Erinnerung an die eigene Schulzeit berichten sie, dass ihre Mathematikleistungen dann genau an dem Punkt nachließen, als die Menge dieser Fakten und Verfahren einfach zu viel wurde. Diese Erfahrung steht in drastischem Gegensatz dazu, dass Mathematik eine höchst kumulative Wissenschaft ist, deren Erkenntnisse stark aufeinander aufbauen und zueinander bezogen sind. Mathematisches Denken ist Denken in Zusammenhängen. Das Herstellen von Querbezügen zu schon Gelerntem hilft, neues mathematisches Wissen aufzubauen. Ohne das Herstellen von Bezügen müssen Schüler viele isolierte Konzepte und Fertigkeiten erarbeiten und auswendig lernen, anstatt auf dem vorher Erlernten aufzubauen. Schüler lernen und nutzen Mathematik daher besser, wenn ihr Curriculum die Bezüge einzelner mathematischer Ideen immer wieder hervorhebt und betont. Wenn der Unterricht die Verbindungen und den Zusammenhang einzelner Teilgebiete hervorhebt, lernen Schüler nicht nur besser Mathematik, sondern sie erfahren zugleich die Nützlichkeit mathematischer Ideen.

> Der Mathematikunterricht (NCTM, 1998, S. 90) soll Verbindungen zu anderen Lehrstoffen hervorheben, um mathematisches Verstehen zu fördern, so dass alle Schüler
> - Verbindungen und Querbezüge zwischen verschiedenen mathematischen Ideen erkennen und nutzen;
> - verstehen, wie mathematische Ideen aufeinander aufbauen und ein zusammenhängendes Ganzes zu bilden;
> - in aussermathematischen Kontexten Mathematisches erkennen und nutzen.

Eine Konzentration auf Querverbindungen und Zusammenhänge hilft Schülern ein mathematisches Verständnis zu entwickeln und Voraussetzungen für mathematisches Denken zu erwerben. Lehrer müssen dazu Gelegenheiten schaffen, in denen Schüler Querverbindungen sehen, darüber sprechen und sie nutzen. In einem Unterricht, der den kumulativen Charakter der Mathematik betont, erfahren Schüler, dass neue Ideen oft eine Erweiterung des schon zuvor Gelernten darstellen. Daher lernen Schüler ihr Vorwissen zu nutzen, wenn sie vor neuen Problemen stehen.

Ein Unterricht, der Querbezüge innerhalb der Mathematik betont, geht selten schon zum nächsten Thema über, wenn zu einer mathematischen Aufgabe eine einzige Lösung gefunden wurde. Stattdessen wird eine Vielfalt von Zugängen gesucht, die das Ausgangsproblem aus einer anderen Perspektive beleuchten. Wird kumulatives Lernen hervorgehoben und Mathematik als ein Gebiet zusammenhängender Ideen dargestellt, entwickeln Schüler die

Erwartung, dass mathematische Ideen miteinander verwandt sind. Aus dieser Perspektive werden neue Ideen als eine Erweiterung von früher erlernter Mathematik wahrgenommen. In Konsequenz nutzen Schüler das, was sie bereits wissen, um neue Situationen anzugehen. In dieser Ausgangslage sollen sich Schüler routinemäßig fragen: In wieweit ist dieses Problem ähnlich zu Aufgaben, die ich früher schon bearbeitet habe? In wieweit ist es anders?

Problemlösen und Begründen sind oft die Auslöser für das Nachdenken über Querverbindungen. Schüler sollen dazu kommunizieren (diskutieren, schreiben, erklären etc.), um ihr Verständnis von Verbindungen und Zusammenhängen zu demonstrieren. Auch mathematische Darstellungen müssen mit mathematischen Konzepten verbunden werden, damit Schüler mathematisches Wissen aufbauen. Daher ist die Suche nach Verbindungen nicht nur eine Art, Mathematik zu studieren, sondern auch eine Möglichkeit, Schüler dazu zu ermutigen, über Mathematik nachzudenken, einzusetzen und beim Lösen von Problemen anzuwenden.

3.5 Mathematik als Darstellung von Wissen

Mathematische Ideen und Konzepte können auf vielfältige Weise dargestellt werden – durch konkrete physische Modelle, eine Gleichung, einen Graph, eine mentale Vorstellung, ein Symbol wie z.B. eine Variable oder eine Zahl. Der Akt des Darstellens einer Idee setzt eine Artikulierung und eine Klärung der zugrunde liegenden Gedanken voraus und gibt ihnen Struktur, so dass sie bewertet und erweitert werden können. Mathematik beruht auf Hilfsmitteln zur Darstellung ihrer Ideen als einer Sprache zur Kommunikation und zum eigenen Denken. Die Form, in der mathematische Ideen dargestellt sind, hat einen fundamentalen Einfluss auf die Art unseres Verstehens.

Der mathematische Symbolismus und mathematische Darstellungsformen (wie z.B. unser Dezimalsystem) sind zu den bedeutendsten kulturellen Errungenschaften der Menschheit zu zählen Einige Repräsentationsformen der Mathematik – wie z.B. Diagramme, Grafiken, Schaubilder oder symbolische Ausdrücke – werden schon seit langem in der Schule gelehrt. Leider werden sie oft so unterrichtet als seien sie ein Selbstzweck. Dadurch wird das Bewusstsein um ihre Nützlichkeit eingeschränkt. Darstellungen sind wichtige Hilfsmittel, um mathematische Konzepte und Beziehungen zu verstehen, und zwar 1) um sich selbst oder anderen mathematische Ansätze, Argumente und Verständnis klar zu machen 2) um Querbezüge zwischen mathematischen Konzepten zu erkennen, und 3) um Mathematik auf reale Probleme mittels Modellbildung anzuwenden. Gute Darstellungen erfüllen einen doppelten Zweck: sie sind ein Hilfsmittel für unser eigenes Denken und sie helfen zur Kommunikation mit anderen. Daher verlangen die Standards (NCTM, 1998, S. 94):

> Der Mathematikunterricht soll mathematische Darstellungen hervorheben, die das mathematische Verstehen fördern, so dass alle Schüler
> - Darstellungen erstellen und einsetzen, um mathematische Ideen zu organisieren, festzuhalten und anderen mitzuteilen;
> - ein Repertoire mathematischer Darstellungsformen entwickeln, das zweckmäßig, flexibel und passend eingesetzt werden kann;
> - Darstellungen nutzen, um naturwissenschaftliche, soziale und mathematische Phänomene zu modellieren und zu interpretieren.

Mathematische Darstellungen existieren nicht in Isolation. Sie wurden gewöhnlich für bestimmte Zwecke entwickelt und werden auf verschiedene Typen von Situationen und Problemen angewandt, die durch bestimmte mathematische Konzepte miteinander verbunden sind. Das Verständnis einer Darstellung setzt das Wissen um darauf bezogene Gebiete der Mathematik voraus sowie ein Wissen darum, wie die Darstellung für einen bestimmten Zweck genutzt werden kann. Eine Darstellung ist ein Hilfsmittel, ein gegebenes Problem klarer zu durchschauen. Die Tatsache, dass Darstellungen sehr wirksame Hilfsmittel sind, verbirgt manchmal den Blick dafür, wie schwer es war, sie zu entwickeln und wie schwer es auch ist, sie zu verstehen.

Oft gibt es sehr viele Möglichkeiten, ein mathematisches Objekt darzustellen. Diese sind für verschiedene Zwecke unterschiedlich nützlich. Für Schüler ist es wichtig, eine Flexibilität zu entwickeln, um zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu wählen, zu wechseln oder auch neue Darstellungsformen zu schaffen. Verschiedene Darstellungen desselben Phänomens heben oft unterschiedliche Gesichtspunkte hervor. Sie unterstützen verschiedene Grundvorstellungen. Schüler sollen lernen, mathematische Gedanken in einer organisierten Form zu erfassen. Jede Darstellung offenbart einen anderen Denkansatz über das gegebene Problem. Schenkt man verschiedenen Darstellungen Aufmerksamkeit, so setzt man sich gleichzeitig mit mehreren Denkansätzen auseinander.

Eine der nützlichsten Charakteristika der Mathematik ist die Abstraktion von Ideen. Die Einführung von Symbolen und anderen Darstellungsformen entledigt den Problemkontext von für die Analyse unnötigem Beiwerk. Die Einsicht, dass ein bestimmtes Objekt eine bestimmte Darstellung besitzt kann eine Menge wichtiger Informationen über das Objekt beinhalten. Diese Erkenntnis liegt hinter der Bedeutung von Mathematik für Anwendungen in Form von Modellierungen.

Darstellungen zu interpretieren, zu nutzen und zu konstruieren bedarf sorgfältiger Aufmerksamkeit des Lehrers. Einfach verschiedene Darstellungsformen (Grafen, Tabellen, ...) als Mittel an sich zu lehren, ist nicht zu empfehlen. Stattdessen sind sie nützliche Hilfsmittel, um Verständnis aufzubauen und um Informationen und Verstehen anderen mitzuteilen. Lehrer sollten eine Flexibilität in der Wahl und Konstruktion von Darstellungen erlauben, die dem vorliegenden Zweck dienlich sind. Darstellungen sind ein Prozess, durch den mathematische Ideen erhellt werden, nicht aber ein Ziel in sich selbst.

4. Schlussfolgerungen

Die NCTM-Standards 2000 sind ein herausragendes Dokument der gegenwärtigen Diskussion in der Mathematikdidaktik. Manche ihrer Vorgaben und Zielformulierungen sind recht optimistisch formuliert, bezogen auf einen Verstehenshorizont, der *alle* Schüler einbeziehen will. Die Standards sind ein wichtiger Wegweiser für die schulische Lehre von Mathematik zu Beginn des dritten Jahrtausends. Sie versuchen, Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts im Rahmen einer neuen Unterrichtskultur zu sehen, die durch folgende Charakteristika gekennzeichnet ist:

- die Verbindung von Mathematik zur Umwelt und Erlebniswelt der Schüler tritt stärker hervor;
- neue Technologien sind in den Unterricht integriert;
- der Unterricht betont stärker das Handeln der Schüler in Situationen des Problemlösens ("activity-based", "hand-on, minds-on");
- Beziehungen zwischen verschiedenen mathematischen Teilgebieten und Anwendungen von Mathematik werden stärker hervorgehoben und die traditionelle Aufspaltung einzelner mathematischer Teildisziplinen wird teilweise überwunden.

Inhaltlich tritt die neue Unterrichtskultur besonders deutlich hervor beim Stellenwert der Themen Datenanalyse und Statistik. Im Kontext der Diskussion um die Standards sind in den letzten 10 Jahren in Zusammenarbeit von NCTM und der American Statistical Association (ASA) innovative unterrichtliche Zugänge erstellt worden, die im Rahmen des Quantitative Literacy Projects (Landwehr, 1991) unter dem Stichwort "data-driven curriculum" (Burrill, 1996) neue und in einer Informationsgesellschaft zentrale mathematische Gebiete der Mathematik für die Schule erschlossen haben.

5. Literatur

Baumert, J., Lehmann, R. (1997): TIMMS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. – Opladen: Leske und Budrich

Baumert, J., Bos, W.; Lehmann, R. (1999): TIMSS/III: Mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. – Opladen: Leske und Budrich

Borovcnik, M. (1992): Stochastik im Wechselspiel von Intuition und Mathematik. – Mannheim: Bibliographisches Institut

Burrill, G. (1996): Data driven mathematics: a curriculum strand for high school mathematics. – In: The Mathematics Teacher 89, S. 460–465

Fischer, R. (1984): Offene Mathematik und Visualisierung. – In: mathematica didactica 7, S. 139–160

Heymann, H.-W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. – Weinheim: Beltz

Landwehr, J. (1991): Statistics and Probability Topics for Pre-College Students: The Quantitative Literacy Perspective. – In: American Statistical Association (Hrsg.), Proceedings of the Section on Statistics Education. Alexandria, VA: ASA

National Council of Teachers of Mathematics (1989): Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. – Reston, VA: NTCM

National Council of Teachers of Mathematics (1998): Principles and Standards for School Mathematics (Standards 2000) Discussion Draft. – Verfügbar im World Wide Web unter http://standards-e.nctm.org

Polya, G. (1980): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. – Bern: A. Francke Verl.

Autor
Engel, Joachim, Dr., Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Institut für Mathematik und Informatik, Postfach 220, D-71602 Ludwigsburg.
E-mail:engel_joachim@ph-ludwigsburg.de