Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
В Л А Д И К А В К А З С К И Й   Н А У Ч Н Ы Й   Ц Е Н Т Р
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 20, выпуск 1 январь–март, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2018

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 3–9

УДК **517.98**

О СУММЕ УЗКОГО И C-КОМПАКТНОГО ОПЕРАТОРОВ

Н. М. Абасов, М. А. Плиев

Памяти профессора Ганиева И. Г.

В работе рассматриваются узкие линейные операторы, заданные на пространстве Банаха — Канторовича и принимающие значение в банаховом пространстве. Установлено, что сумма двух операторов $S+T$, где S — узкий оператор, а T — (bo)-непрерывный C-компактный оператор, также является узким оператором. Основными техническими инструментами, используемыми для доказательства этого результата, являются: разбиение элемента решеточно-нормированного пространства на дизъюнктные осколки и апроксимация C-компактного оператора конечномерными операторами.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11391.

Ключевые слова: банахово пространство, пространство Банаха — Канторовича, узкий оператор, (bo)-непрерывный оператор, C-компактный оператор.

Узкие операторы, как самостоятельный объект исследования, впервые были рассмотрены в работе [1]. Однако некоторые частные результаты об этих операторах были известны и ранее (подробный исторический обзор можно найти в монографии [2]). Линейные узкие операторы в векторных решетках и решеточно-нормированных пространствах изучались в [3–5]. Позже некоторые результаты о линейных узких операторах были распространены на более общий случай ортогонально аддитивных отображений [6–9]. Следует отметить, что алгебраическая структура множества узких операторов остается плохо понятой и на сегодняшний день. В общем случае сумма двух узких операторов узким оператором не является [10]. В [11] доказана узость суммы узкого оператора и непрерывного оператора конечного ранга, заданных на порядково полной безатомной векторной решетке со значениями в банаховом пространстве. В настоящей заметке показано, что в случае линейных операторов, заданных на пространстве Банаха — Канторовича над порядково полной безатомной векторной решеткой и принимающих значения в банаховом пространстве, сумма узкого оператора и (bo)-непрерывного C-компактного оператора также является узким оператором.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 18-51-41016 (Абасов Н. М.) и № 17-51-12064 (Плиев М. А.).

1. Предварительные сведения

Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию, обозначения и ввести требуемые понятия. Необходимые сведения о векторных решетках и решеточно-нормированных пространствах можно найти в монографии [12].

Пусть V — векторное пространство над полем действительных чисел и E — действительная архимедова векторная решетка. Отображение $|\!\cdot\!| : V \to E_+$ называется *векторной нормой*, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $|v| \geqslant 0$; $|v| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ $(v \in V)$;

2) $|v_1 + v_2| \leqslant |v_1| + |v_2|$ $(v_1, v_2 \in V)$;

3) $|\lambda v| = |\lambda||v|$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ v \in V)$.

Векторная норма называется *разложимой*, если

4) для любых $e_1, e_2 \in E_+$ и $x \in V$ из представления $|x| = e_1 + e_2$ следует существование $x_1, x_2 \in V$ таких, что $x = x_1 + x_2$ и $|x_k| = e_k$ $(k := 1, 2)$.

Тройка $(V, |\!\cdot\!|, E)$ (далее (V, E), $(V, |\!\cdot\!|)$ или даже V для краткости) называется *решеточно-нормированным пространством*, если $|\!\cdot\!|$ — это E-значная векторная норма, заданная на V. Если векторная норма $|\!\cdot\!|$ разложима, то пространство V также называется *разложимым.*

Будем говорить, что сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ *(bo)-сходится* к элементу $v \in V$ и писать $v = bo\text{-}\lim v_\alpha$, если существует убывающая сеть $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в E_+ такая, что $\inf_{\gamma\in\Gamma}(e_\gamma) = 0$ и для любого $\gamma \in \Gamma$ существует индекс $\alpha(\gamma) \in \Delta$ такой, что $|v - v_{\alpha(\gamma)}| \leqslant e_\gamma$ для любого $\alpha \geqslant \alpha(\gamma)$. Сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ называется *(bo)-фундаментальной*, если сеть $(v_\alpha - v_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\Delta\times\Delta}$ (bo)-сходится к нулю. Решеточно-нормированное пространство называется *(bo)-полным*, если каждая (bo)-фундаментальная сеть (bo)-сходится к элементу этого пространства. Разложимое, (bo)-полное решеточно-нормированное пространство называется *пространством Банаха — Канторовича.*

Пусть X — нормированное пространство. Линейный оператор $T : V \to X$ называется *(bo)-непрерывным*, если любую (bo)-сходящуюся сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ в V оператор переводит в сходящуюся по норме сеть $(Tv_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ в X.

Элемент u решеточно-нормированного пространства (V, E) называется *осколком* элемента $v \in V$, если $|u| \perp |v - u|$. Будем писать $v = \bigsqcup_{i=1}^n v_i$, если $v = \sum_{i=1}^n v_i$ и $v_i \perp v_j$, $i \neq j$. Для $n = 2$ будем писать $v = v_1 \sqcup v_2$. В этом случае осколки v_1, v_2 элемента v называются *взаимно дополнительными.* Множество всех осколков элемента v обозначается через $\mathfrak{F}_v$.

Множество $D \subset V$ называется *ограниченным по норме*, если существует $e \in E_+$ такой, что неравенство $|v| \leqslant e$ выполняется для всех элементов $v \in D$. Пусть теперь $T : V \to X$ — нормированное пространство. Линейный оператор $T : V \to X$ называется *AM-компактным*, если образ $T(D)$ любого ограниченного по норме множества $D \subset V$ предкомпактен в X; *C-компактным*, если для любого $v \in V$ множество $T(\mathfrak{F}_v)$ предкомпактно в X.

Пусть X — векторное пространство. Линейное отображение $T : V \to X$ называется *оператором конечного ранга*, если $T(V)$ — конечномерное подпространство в X.

Пусть X — банахово пространство и S — линейный оператор из V в X. Оператор S называется *узким*, если для любых $v \in V$, $\varepsilon > 0$ найдется пара u, w взаимно дополнительных осколков элемента v таких, что $\|S(u - w)\| < \varepsilon$.

Для подмножеств H и K векторного пространства X будем использовать следующее обозначение: $H + K := \{v + u : v \in H;\ u \in K\}$. Сумму $H + \ldots + H$ n-копий множества H будем обозначать через nH.

1. Результаты

Наша цель — показать, что сумма узкого и порядково непрерывного C-компактного оператора является узким оператором. Приведем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные результаты.

Лемма 1 [4, теорема 4.12]. *Пусть V — пространство Банаха — Канторовича над порядково полной, безатомной векторной решеткой E, X — банахово пространство. Тогда каждый линейный AM-компактный (bo)-непрерывный оператор $T : V \to X$ является узким.*

Замечание 1. Отметим, что лемма 1 остается верной, если условие AM-компактности оператора заменить на более слабое условие C-компактности, так как в [4] при доказательстве теоремы 4.12, по существу, используется только C-компактность.

Следующая лемма является ключевой.

Лемма 2. *Пусть V — пространство Банаха — Канторовича над порядково полной, безатомной векторной решеткой E, X — банахово пространство, $v \in V$ и $T : V \to X$ — (bo)-непрерывный C-компактный оператор. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $v = \bigsqcup_{i=1}^n v_i$ такое, что для любой пары v_i^1, v_i^2 взаимно дополнительных осколков элемента v_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, справедливо неравенство $\|T(v_i^1 - v_i^2)\| < \varepsilon$.*

$\lhd$ Предположим, что утверждение леммы неверно. Это означает, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого разбиения $v = \bigsqcup_{i=1}^n v_i$, $n \in \mathbb{N}$, найдутся номер $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ и такая пара $v_{i_0}^1, v_{i_0}^2$ взаимно дополнительных осколков элемента v_{i_0}, что справедливо неравенство $\left\|T(v_{i_0}^1 - v_{i_0}^2)\right\| \geqslant \varepsilon$. Покажем, что отсюда следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется набор $v_1, \dots, v_k$ попарно дизъюнктных осколков элемента v такое, что для любого $1 \leqslant i \leqslant k$ существует пара v_i^1, v_i^2 взаимно дополнительных осколков v_i такая, что $\|T(v_i^1 - v_i^2)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Докажем это утверждение по индукции. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для $k > 1$ и покажем, что тогда оно справедливо и для $k + 1$. Пусть $v_1, \dots, v_k$ — набор попарно дизъюнктных осколков элемента v, для которых выполняется индукционное предположение, и пусть $u = v - \bigsqcup_{i=1}^k v_i$. Если найдутся взаимно дополнительные осколки u_1 и u_2 элемента u такие, что $\|Tu_1 - Tu_2\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, то в качестве v_{k+1} возьмем элемент u. В противном случае найдется осколок v_{i_0} с номером $1 \leqslant i_0 \leqslant k$ такой, что существуют взаимно дополнительные осколки $v_{i_0}^1$ и $v_{i_0}^2$ элемента v_{i_0}, для которых выполняется неравенство $\left\|T(v_{i_0}^1 - v_{i_0}^2)\right\| \geqslant \varepsilon$. Не уменьшая общности, можем полагать, что $i_0 = k$. Согласно лемме 1 T является узким оператором. Последнее означает, что для v_k и для любого $\delta > 0$ найдутся взаимно дополнительные осколки g и h элемента v_k такие, что $\|T(g - h)\| < \delta$. Используя разложимость векторной нормы пространства V и лемму о двойном разбиении в векторной решетке (см. [12, п. 1.3.3.3]), найдем такие попарно дизъюнктные осколки g_1, g_2 и h_1, h_2 элементов g и h соответственно, что

$$g = g_1 \sqcup g_2; \quad h = h_1 \sqcup h_2; \quad v_k^1 = g_1 \sqcup h_1; \quad v_k^2 = g_2 \sqcup h_2.$$

Кроме того, справедливы оценки

$$\|T(g_1 + h_1 - g_2 - h_2)\| = \|T(v_k^1 - v_2^2)\| \geqslant \varepsilon;$$

$$\|T(g_1 + g_2 - h_1 - h_2)\| = \|T(g - h)\| < \delta.$$

Далее имеем

$$\varepsilon \leqslant \|T(g_1 + h_1 - g_2 - h_2)\| = \|T(g_1 + g_2 - g_2 + h_1 - h_1 + h_1 - g_2 - h_2)\|$$
$$\leqslant \|T(g_1 + g_2 - h_1 - h_2)\| + 2\|T(h_1 - g_2)\| < \delta + 2\|T(h_1 - g_2)\|;$$

$$\varepsilon \leqslant \|T(g_1+h_1-g_2-h_2)\| = \|T(g_1+h_1+h_2-h_2-g_2-g_1+g_1-h_2)\|$$
$$\leqslant \|T(h_1+h_2-g_1-g_2)\| + 2\|T(h_2-g_1)\| < \delta + 2\|T(h_2-g_1)\|;$$

Отсюда в силу произвольности $\delta > 0$ получаем, что

$$\|T(h_2-g_1)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}; \quad \|T(h_1-g_2)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим

$$u_k = h_2+g_1; \quad u_{k+1} = h_1+g_2; \quad u_k^1 = h_2; \quad u_k^2 = g_1; \quad u_{k+1}^1 = h_1; \quad u_{k+1}^2 = g_2.$$

Тогда $v_1, \dots, v_{k-1}, u_k, u_{k+1}$ — набор попарно дизъюнктных осколков элемента v, обладающих требуемыми свойствами, и справедливость индукционного перехода установлена. Положим $Z_v = \{u-w : u, w \in (F)_v,\ u \perp w\}$. Используя C-компактность оператора T, получаем, что $K_v := \overline{T(Z_v)}$ — компактное подмножество. Положим $B = \{x \in X : \|x\| < \frac{\varepsilon}{4}\}$. В силу компактности множества K_v найдутся номер $n \in \mathbb{N}$ и окрестность нуля B_1 в X такие, что $K_v + B_1 \subset nB$.

Возьмем теперь окрестность нуля $H \subset B$ и конечный набор $x_1, \dots, x_m$ элементов множества K_v таких, что $nH \subset B_1$ и $K_v \subset \bigcup_{i=1}^m (x_i + H)$. Пусть, кроме того, $l = nm$. Согласно вышеприведенным рассуждениям найдется набор $v_1, \dots, v_l$ попарно дизъюнктных осколков элемента v и набор пар v_i^1, v_i^2 взаимно дополнительных осколков элементов v_i, где $1 \leqslant i \leqslant l$, такой что $\|T(v_i^1 - v_i^2)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Так как $\{T(v_i^1 - v_i^2) : 1 \leqslant i \leqslant mn\} \subset \bigcup_{k=1}^m (x_k + H)$, то найдется номер $k_0 \leqslant m$ такой, что $\operatorname{card}\{i \leqslant l : T(v_i^1 - v_i^2) \in x_{k_0} + H\} \geqslant n$. Без ограничения общности можем полагать, что $T(v_i^1 - v_i^2) \in x_{k_0} + H$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Так как $\|T(v_i^1 - v_i^2)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $H \subset B = \{x \in X : \|x\| < \frac{\varepsilon}{4}\}$, то $\|x_{k_0}\| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$, откуда следует, что $x_{k_0} \notin B$. Пусть теперь $h = \sum_{i=1}^n (v_i^1 - v_i^2)$. Так как осколки v_i попарно дизъюнктны, то $h \in Z_v$. Пусть $x = Th = \sum_{i=1}^n T(v_i^1 - v_i^2) \in K_v$. Далее имеем

$$x \in nx_{k_0} + nH \subset nx_{k_0} + B_1.$$

Тогда $nx_{k_0} \in K_v - B_1 = K_v + B_1 \subset nH$ и отсюда выводим, что $x_{k_0} \in H$. Получили противоречие. $\rhd$

Следующее вспомогательное утверждение хорошо известно (см. [2, лемма 10.20]).

Лемма 3. *Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — семейство векторов конечномерного нормированного пространства X и пусть $(\lambda_i)_{i=1}^n$ — набор действительных чисел такой, что $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда существует набор действительных чисел $(\theta_i)_{i=1}^n$, где $\theta_i \in \{0,1\}$, такой, что*

$$\Big\| \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \theta_i) x_i \Big\| \leqslant \frac{\dim(X)}{2} \max_i \|x_i\|.$$

Лемма 4. *Пусть V — пространство Банаха — Канторовича над порядково полной, безатомной векторной решеткой E, X — банахово пространство, $S : V \to X$ — линейный узкий оператор и $T : V \to X$ — (bo)-непрерывный, C-компактный оператор конечного ранга. Тогда оператор $R = S + T$ также является узким.*

$\lhd$ Возьмем произвольный элемент $v \in V$ и $\varepsilon > 0$. Применяя лемму 2, можно найти такое разбиение $v = \bigsqcup_{i=1}^n v_i$ элемента v на дизъюнктные осколки, что для любой пары v_i^1, v_i^2 взаимно дополнительных осколков элемента v_i выполняется $\|T(v_i^1 - v_i^2)\| < \frac{\varepsilon}{2\dim(\overline{T(V)})}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Используя теперь узость оператора S, для каждого осколка v_i подберем пару взаимно дополнительных осколков u_i, w_i такую, что $\|S(u_i - w_i)\| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Положим $x_i = T(u_i - w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и пусть $\lambda_i = \frac{1}{2}$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Согласно лемме 3 можем записать

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \theta_i)x_i\Big\| = \frac{1}{2}\Big\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big\| \leqslant \frac{\dim(T(V))}{2}\max_i \|x_i\| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \Big\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда существует разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$ на два дизъюнктных подмножества I и J такие, что $\alpha_i = 1$, $i \in I$, и $\alpha_i = -1$, $i \in J$. Положив

$$u = \bigsqcup_{i \in I} u_i \sqcup \bigsqcup_{i \in J} w_i, \quad w = \bigsqcup_{i \in J} u_i \sqcup \bigsqcup_{i \in I} w_i,$$

получаем

$$\begin{aligned} \big\|R(u-w)\big\| &= \big\|(S+T)(u-w)\big\| \leqslant \big\|S(u-w)\big\| + \big\|T(u-w)\big\| \\ = \Big\|\sum_{i\in I} Su_i + \sum_{i\in J} Sw_i - \sum_{i \in J} Su_i - \sum_{i\in I} Sw_i\Big\| &+ \Big\|\sum_{i\in I} Tu_i + \sum_{i\in J} Tw_i - \sum_{i\in J} Tu_i - \sum_{i\in I} Tw_i\Big\| \\ = \Big\|\sum_{i\in I} S(u_i - w_i) + \sum_{i\in J} S(w_i - u_i)\Big\| &+ \Big\|\sum_{i\in I} T(u_i - w_i) - \sum_{i\in J} T(u_i - w_i)\Big\| \\ \leqslant \sum_{i=1}^{n}\big\|S(u_i - w_i)\big\| + \Big\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big\| &< \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, u и w — искомая пара взаимно дополнительных осколков элемента v. $\rhd$

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. *Пусть V — пространство Банаха — Канторовича над порядково полной, безатомной векторной решеткой E, X — банахово пространство, $S : V \to X$ — линейный узкий оператор и $T : V \to X$ — (bo)-непрерывный C-компактный оператор. Тогда оператор $R = S + T$ также является узким.*

$\lhd$ Банахово пространство X мы можем рассматривать как замкнутое линейное подпространство банахова пространства $l_\infty(B_{X^\star})$ функций, ограниченных на компакте. Это можно записать в виде цепочки вложений:

$$X \hookrightarrow X^{\star\star} \hookrightarrow l_\infty(B_{X^\star}),$$

где под символом $\hookrightarrow$ мы понимаем изометрическое вложение, а через $B_{X^\star}$ обозначается единичный шар банахова пространства $X^\star$. Известно, что если H — предкомпактное подмножество $l_\infty(D)$ для некоторого бесконечного множества D и $\varepsilon > 0$, то существует оператор конечного ранга $R \in \mathscr{L}(l_\infty(D))$ такой, что $\|x - Rx\| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in H$ [2, лемма 10.25].

Возьмем произвольный элемент $v \in V$ и $\varepsilon > 0$. Так как T — это C-компактный оператор, то $K = T(\mathscr{F}_v)$ — предкомпактное множество в X и, следовательно, в $l_\infty(B_{X^\star})$. Тогда найдется линейный непрерывный оператор конечного ранга $R \in \mathscr{L}(l_\infty(B_{X^\star}))$ такой, что $\|w - Rw\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $w \in K$. Ясно, что $G = R \circ T$ — линейный (bo)-непрерывный C-компактный оператор конечного ранга. Согласно лемме 4 найдутся взаимно дополнительные осколки v_1, v_2 элемента v такие, что $\|(S + G)(v_1 - v_2)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned}\|(S+T)(v_1-v_2)\| &= \|S(v_1-v_2)+T(v_1-v_2)+G(v_1-v_2)-G(v_1-v_2)\|\\ &\leqslant \|(S+G)(v_1-v_2)\|+\|T(v_1-v_2)-G(v_1-v_2)\|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\|T(v_1-v_2)-R(T(v_1-v_2))\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \rhd\end{aligned}$$

Замечание 2. Отметим, что теорема 1 не выводится непосредственно из леммы 2, без использования леммы 4, в силу того, что размерность пространства образов оператора T должна быть постоянной величиной, так как она задает исходную оценку, относительно которой подбирается требуемое семейство попарно дизъюнктных осколков.

Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное чтение текста и ценные замечания, позволившие улучшить качество статьи.

Литература

1. *Popov M. M., Plichko A. M.* Symmetric function spaces on atomless probability spaces: Diss. Math. (Rozprawy Mat.).—1990.—Vol. 306.—P. 1–85.
2. *Popov M., Randrianantoanina B.* Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices.— De Gruyter, 2013.—(De Gruyter Stud. in Math. Vol. 45).
3. *Maslyuchenko O., Mykhaylyuk V., Popov M.* A lattice approach to narrow operators // Positivity.— 2009.—Vol. 13.—P. 459–495. DOI: 10.1007/s11117-008-2193-z.
4. *Pliev M.* Narrow operators on lattice-normed spaces // Open Math.—2011.—Vol. 9, № 6.—P. 1276–1287. DOI: 10.2478/s11533-011-0090-3.
5. *Abasov N., Megahed A. M., Pliev M.* Dominated operators from lattice-normed spaces to sequence Banach lattices // Annals of Funct. Anal.—2016.—Vol. 7, № 4.—P. 646–655. DOI: 10.1215/20088752-3660990.
6. *Pliev M., Popov M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity.—2014.—Vol. 18, № 4.—P. 641–667. DOI: 10.1007/s11117-013-0268-y.
7. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M., and Sobchuk O.* Dividing measures and narrow operators // Stud. Math.—2015.—Vol. 231.—P. 97–116. DOI: 10.4064/sm7878-2-2016.
8. *Pliev M.* Domination problem for narrow orthogonally additive operators // Positivity.—2017.—Vol. 21, № 1.—P. 23–33. DOI: 10.1007/s11117-016-0401-9.
9. *Плиев М. А., Фан С.* Узкие ортогонально аддитивные операторы в решеточно-нормированных пространствах // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 1.—P. 174–184. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.117.
10. *Mykhaylyuk V., Popov M.* On sums of narrow operators on Köthe function space // J. Math. Anal. Appl.—2013.—Vol. 404.—P. 554–561. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.03.008.
11. *Humenchuk H. I.* On the sum of narrow and finite-rank orthogonally additive operator // Ukrainian Math. J.—2016.—Vol. 67, № 12.—P. 1831–1837. DOI: 10.1007/s11253-016-1193-6.
12. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—2003.—М: Наука, 2003.—619 с.

Статья поступила 8 ноября 2017 г.

Плиев Марат Амурханович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела функц. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `plimarat@yandex.ru`;

Абасов Нариман Магамедович
МАИ — Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет),
доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 121552, Москва, ул. Оршанская, 3
E-mail: `abasovn@mail.ru`

ON THE SUM OF NARROW AND C-COMPACT OPERATORS

Abasov N. M., Pliev M. A.

We consider narrow linear operators defined on a Banach–Kantorovich space and taking value in a Banach space. We prove that the sum $S+T$ of two operators is narrow whenever S is a narrow operator and T is a (bo)-continuous C-compact operator. For the proof of the main result we use the method of decomposition of an element of a lattice-normed space into a sum of disjoint fragments and an approximation of a C-compact operator by finite-rank operators.

Key words: Banach space, Banach–Kantorovich space, narrow operator, (bo)-continuous operator, C-compact operator.

References

1. *Popov M. M., Plichko A. M. Symmetric function spaces on atomless probability spaces*: Diss. Math. (Rozprawy Mat.), 1990, vol. 306, pp. 1–85.
2. *Popov M., Randrianantoanina B. Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices*, De Gruyter, 2013. De Gruyter Stud. in Math., vol. 45.
3. *Maslyuchenko O., Mykhaylyuk V., Popov M.* A lattice approach to narrow operators, *Positivity*, 2009, vol. 13, pp. 459–495. DOI: 10.1007/s11117-008-2193-z.
4. *Pliev M.* Narrow operators on lattice-normed spaces, *Open Math.*, 2011, vol. 9, no. 6, pp. 1276–1287. DOI: 10.2478/s11533-011-0090-3.
5. *Abasov N., Megahed A. M., Pliev M.* Dominated operators from lattice-normed spaces to sequence Banach lattices, *Annals of Funct. Anal.*, 2016, vol. 7, no. 4, pp. 646–655. DOI: 10.1215/20088752-3660990.
6. *Pliev M., Popov M.* Narrow orthogonally additive operators, *Positivity*, 2014, vol. 18, no. 4, pp. 641–667. DOI: 10.1007/s11117-013-0268-y.
7. *Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M., and Sobchuk O.* Dividing measures and narrow operators, *Stud. Math.*, 2015, vol. 231, pp. 97–116. DOI: 10.4064/sm7878-2-2016.
8. *Pliev M.* Domination problem for narrow orthogonally additive operators, *Positivity*, 2017, vol. 21, no. 1, pp. 23–33. DOI: 10.1007/s11117-016-0401-9.
9. *Pliev M. A., Fang X.* Narrow orthogonally additive operators in lattice-normed spaces, *Siberian Math. J.*, 2017, vol. 58, no. 1, pp. 134–141. DOI: 10.1134/S0037446617010177.
10. *Mykhaylyuk V., Popov M.* On sums of narrow operators on Köthe function space, *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 404, pp. 554–561. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.03.008.
11. *Humenchuk H. I.* , On the sum of narrow and finite-rank orthogonally additive operator, *Ukrainian Math. J.*, 2016, vol. 67, no. 12, pp. 1831–1837. DOI: 10.1007/s11253-016-1193-6.
12. *Kusraev A. G. Dominated Operators*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2000, 446 p.

Received 8 November, 2017

Pliev Marat Amurhanovich
Southern Mathematical Institute — the Affiliate
of Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Senior Researcher*
22 Markus street, Vladikavkaz, 362027, Russia
E-mail: plimarat@yandex.ru;

Abasov Nariman Magamedovich
MAI — Moscow Aviation Institute
(National Research University), *Associate Professor*
3 Orshanskaya street, Moscow, 121552, Russia
E-mail: abasovn@mail.ru

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 10–20

УДК **517.9**

ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ, ВОЗМУЩЕННЫЕ ОПЕРАТОРАМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО СДВИГА[1]

О. Г. Авсянкин, А. М. Ковальчук

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассматривается оператор B, представляющий собой сумму двух слагаемых. Первое слагаемое — это парный многомерный интегральный оператор, ядра которого однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений пространства $\mathbb{R}^n$, а второе слагаемое — сходящийся по операторной норме ряд, составленный из многомерных операторов мультипликативного сдвига с комплексными коэффициентами. На ядра и коэффициенты оператора B накладываются некоторые дополнительные условия, обеспечивающие его ограниченность в пространстве суммируемых функций. Основная цель работы заключается в исследовании обратимости оператора B. Для решения этой задачи применяется специальный метод, позволяющий осуществить редукцию многомерного парного оператора к бесконечной последовательности одномерных парных операторов B_m, где $m \in \mathbb{Z}_+$. Показано, что оператор B обратим в том и только в том случае, когда обратимы все операторы B_m, где m пробегает все значения от нуля до некоторого конечного числа m_0. В свою очередь, операторы B_m сводятся к интегрально-разностным операторам свертки, теория которых хорошо известна. Все это позволило для рассматриваемого оператора B определить символ, который представляет собой пару функций $(\beta_1(m,\xi), \beta_2(m,\xi))$, заданных на множестве $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$. Если символ является невырожденным, то естественным образом определяются вещественное число ν и целые числа $\varkappa_m$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, называемые индексами. Основной результат работы — критерий обратимости в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ многомерного парного оператора B. Согласно этому критерию, оператор B обратим тогда и только тогда, когда его символ является невырожденным, а все его индексы равны нулю.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11392.

Ключевые слова: парный оператор, интегральный оператор, однородное ядро, мультипликативный сдвиг, обратимость, сферические гармоники.

Введение

В настоящее время имеется немало работ, посвященных многомерным интегральным операторам, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений $SO(n)$. Для таких операторов получены критерии обратимости и нётеровости, описаны порождаемые этими операторами банаховы алгебры, найдены условия применимости проекционного метода (см., например, [1–4] и цитированные в них источники). В работе [5] была построена и исследована C^*-алгебра, полученная присоединением к C^*-алгебре операторов с однородными ядрами всех операторов мультипликативного сдвига. Это направление получило развитие в статьях [6, 7], где рассматривались интегральные операторы с однородными ядрами, возмущенные операторами одностороннего мультипликативного сдвига.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00094-А.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [5–7]. В ней рассматриваются парные операторы вида $A_1P + A_2Q$, где

$$(A_j\varphi)(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_{j\ell}\varphi(x/\delta_{j\ell}) + \int_{\mathbb{R}^n} k_j(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad j = 1, 2,$$

а P и Q — операторы умножения на характеристические функции внутренней и внешней частей единичного шара соответственно. При этом предполагается, что функция $k_j(x,y)$ однородна степени $(-n)$ и инвариантна относительно всех вращений (точная постановка задачи будет дана ниже). Для оператора A_1P+A_2Q в работе построен символ, в терминах которого получен критерий обратимости этого оператора.

Ниже использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство;

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}; \quad x' = x/|x|;$$
$$x \cdot y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n; \quad S_{n-1} = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| = 1\big\};$$

$\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел; $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$; $Y_{m\mu}(\sigma)$ — сферические гармоники порядка m; $d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m:

$$d_n(m) = (n + 2m - 2)\frac{(n+m-3)!}{m!(n-2)!};$$

$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\xi t}\,dt$ — преобразование Фурье функции f.

1. Предварительные сведения

В пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассмотрим интегрально-разностный оператор свертки

$$(V\psi)(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell\psi(t - \tau_\ell) + \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\psi(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

в предположении, что $h \in L_1(\mathbb{R})$, $\tau_\ell \in \mathbb{R}$, $\alpha_\ell \in \mathbb{C}$ и $\sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell| < \infty$. Обозначим через P_+ (P_-) оператор умножения на характеристическую функцию положительной (отрицательной) полуоси. Введем парный оператор

$$C = V_1P_+ + V_2P_-, \tag{2}$$

где V_1 и V_2 — операторы вида (1). Теория парных операторов вида (2) хорошо известна (см. [8, гл. 7]). Символом оператора C называют пару функций $(v_1(\xi), v_2(\xi))$, где

$$v_j(\xi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_{j\ell}\exp(i\tau_{j\ell}\xi) + \widehat{h}_j(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(Функция $v_j(\xi)$ является символом оператора V_j.) Если

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} |v_j(\xi)| > 0, \quad j = 1, 2, \tag{3}$$

то отношение $v_1(\xi)/v_2(\xi)$ можно представить в виде

$$\frac{v_1(\xi)}{v_2(\xi)} = \alpha(\xi) + \widehat{h}(\xi),$$

где $\alpha(\xi)$ — невырожденная почти периодическая функция, разлагающаяся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, и $h \in L_1(\mathbb{R})$ [8, с. 217–218]. Определим индексы $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\varkappa \in \mathbb{Z}$ равенствами

$$\gamma = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2b}\Delta\big[\arg\alpha(\xi)\big]\Big|_{-b}^{b}, \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi}\Delta\Big[\arg\Big(1+\alpha^{-1}(\xi)\widehat{h}(\xi)\Big)\Big]\Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Предложение 1 [8, с. 251]**.** *Для того чтобы оператор C вида* (2) *был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (3) *и равнялись нулю индексы γ и $\varkappa$.*

2. Постановка задачи и основной результат

2.1. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (здесь и далее предполагается, что $n \geqslant 2$) и удовлетворяет следующим условиям:

1°. однородность степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n}k(x,y) \quad (\forall\,\alpha > 0);$$

2°. инвариантность относительно группы вращений $SO(n)$, т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y) \quad (\forall\,\omega \in SO(n));$$

3°. суммируемость, т. е.

$$\kappa := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1,y)||y|^{-n/p}\,dy < \infty, \quad e_1 = (1,0,\ldots,0).$$

Известно (см. [1, с. 70]), что оператор K ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n)$, причем $\|K\| \leqslant \kappa$. Далее, для каждого $\delta > 0$ определим оператор мультипликативного сдвига U_δ формулой $(U_\delta\varphi)(x) = \delta^{-n/p}\varphi(x/\delta)$, и рассмотрим оператор

$$A = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell U_{\delta_\ell} + K, \tag{5}$$

где K — оператор вида (4), $a_\ell \in \mathbb{C}$ и $\sum_{\ell=1}^{\infty}|a_\ell| < \infty$. Так как $\|U_{\delta_\ell}\| = 1$, то оператор A ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим парный оператор

$$B = A_1P + A_2Q, \tag{6}$$

где A_1 и A_2 — операторы вида (5), а P и Q — операторы умножения на характеристические функции внутренней и внешней частей единичного шара соответственно. Наша цель — получить необходимые и достаточные условия обратимости оператора B.

2.2. Для того чтобы получить критерий обратимости оператора B вида (6), рассмотрим в $L_p(\mathbb{R}^n)$ уравнение, порожденное этим оператором:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{1\ell}\delta_{1\ell}^{-n/p}(P\varphi)(x/\delta_{1\ell}) + \int\limits_{|y|<1} k_1(x,y)\varphi(y)\,dy + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{2\ell}\delta_{2\ell}^{-n/p}(Q\varphi)(x/\delta_{2\ell}) + \int\limits_{|y|>1} k_2(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x). \quad (7)$$

Так как функция $k_j(x,y)$ удовлетворяет условию 2°, то существует такая функция $k_{0j}(r,\rho,t)$, что $k_j(x,y) = k_{0j}(|x|,|y|,x'\cdot y')$ [9, с. 36]. Учитывая это, перейдем в уравнении (7) к сферическим координатам $x = r\sigma$, $y = \rho\theta$. Затем умножим обе части уравнения на $r^{(n-1)/p}$ и после преобразований получим уравнение

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{1\ell}\delta_{1\ell}^{-1/p}(\widetilde{P}\Phi)\left(\frac{r}{\delta_{1\ell}}\,\sigma\right) + \int\limits_0^1\int\limits_{S_{n-1}} \frac{1}{r}\,D_1\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\,d\rho\,d\theta + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{2\ell}\delta_{2\ell}^{-1/p}(\widetilde{Q}\Phi)\left(\frac{r}{\delta_{2\ell}}\,\sigma\right) + \int\limits_1^{\infty}\int\limits_{S_{n-1}} \frac{1}{r}\,D_2\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\,d\rho\,d\theta = F(r\sigma), \quad (8)$$

где

$$\Phi(r\sigma) = \varphi(r\sigma)r^{(n-1)/p}, \quad F(r\sigma) = f(r\sigma)r^{(n-1)/p},$$
$$D_j(\rho,t) = k_{0j}(1,\rho,t)\rho^{(n-1)/p'}, \quad j=1,2, \quad (9)$$

$\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ — аналоги проекторов P и Q в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n) = \{\Phi(r\sigma) : \Phi(r\sigma)r^{-(n-1)/p} \in L_p(\mathbb{R}^n)\}$. Умножая обе части уравнения (8) на сферические гармоники $Y_{m\mu}(\sigma)$, интегрируя по единичной сфере и применяя формулу Функа — Гекке [9, с. 43], получим бесконечную диагональную систему одномерных уравнений

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{1\ell}\delta_{1\ell}^{-1/p}(\mathbf{P}\Phi_{m\mu})\left(\frac{r}{\delta_{1\ell}}\right) + \int\limits_0^1 \frac{1}{r}\,D_{1m}\left(\frac{\rho}{r}\right)\Phi_{m\mu}(\rho)\,d\rho + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{2\ell}\delta_{2\ell}^{-1/p}(\mathbf{Q}\Phi_{m\mu})\left(\frac{r}{\delta_{2\ell}}\right) + \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{r}\,D_{2m}\left(\frac{\rho}{r}\right)\Phi_{m\mu}(\rho)\,d\rho = F_{m\mu}(r), \quad (10)$$

где $r \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 1,2,\ldots,d_n(m)$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ — операторы умножения на характеристические функции интервалов $(0,1)$ и $(1,\infty)$ соответственно,

$$\Phi_{m\mu}(r) = \int\limits_{S_{n-1}} \Phi(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)\,d\sigma, \quad F_{m\mu}(r) = \int\limits_{S_{n-1}} F(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)\,d\sigma,$$

$$D_{jm}(\rho) = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left((n-1)/2\right)}\int\limits_{-1}^{1} D_j(\rho,t)P_m(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}dt. \quad (11)$$

Здесь $P_m(t)$ — многочлены Лежандра (см., например, [9, с. 41]).

В пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$ рассмотрим операторы

$$(R_j g)(r) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\delta_{j\ell}^{-1/p} g\left(\frac{r}{\delta_{j\ell}}\right), \quad r \in \mathbb{R}_+, \tag{12}$$

$$(K_{jm} g)(r) = \int_0^\infty \frac{1}{r} D_{jm}\left(\frac{\rho}{r}\right) g(\rho)\, d\rho, \quad r \in \mathbb{R}_+, \tag{13}$$

где $j = 1, 2$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и положим $A_{jm} = R_j + K_{jm}$. Тогда оператор B_m $(m \in \mathbb{Z}_+)$, формирующий левую часть уравнения (10), имеет вид

$$B_m = A_{1m}\mathbf{P} + A_{2m}\mathbf{Q}. \tag{14}$$

2.3. Определим изоморфизм $W_p\colon L_p(\mathbb{R}_+) \to L_p(\mathbb{R})$ формулой

$$(W_p g)(t) = e^{-t/p} g(e^{-t}).$$

Нетрудно проверить, что оператор $V_{jm} = W_p A_{jm} W_p^{-1}$ $(j = 1, 2,\ m \in \mathbb{Z}_+)$ задается в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ формулой

$$(V_{jm}\psi)(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\psi(t + \ln\delta_{j\ell}) + \int_{-\infty}^{\infty} h_{jm}(t-s)\psi(s)\, ds, \tag{15}$$

где

$$h_{jm}(t) = D_{jm}(e^t)e^{t/p'} \in L_1(\mathbb{R}). \tag{16}$$

Тогда оператор

$$C_m = W_p B_m W_p^{-1} \tag{17}$$

определяется в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ равенством

$$C_m = V_{1m}P_+ + V_{2m}P_-, \tag{18}$$

где V_{1m} и V_{2m} — операторы вида (15). Таким образом, оператор C_m является парным интегрально-разностным оператором свертки (см. § 1). Символом этого оператора является пара функций $(c_{1m}(\xi), c_{2m}(\xi))$ вида

$$c_{jm}(\xi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\exp(-i\xi\ln\delta_{j\ell}) + \widehat{h}_{jm}(\xi) = \alpha_j(\xi) + \widehat{h}_{jm}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

где

$$\alpha_j(\xi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\delta_{j\ell}^{-i\xi}. \tag{19}$$

Выразим функцию $\widehat{h}_{jm}(\xi)$ через ядро $k_j(x, y)$ оператора K_j вида (4). Учитывая (16), имеем

$$\widehat{h}_{jm}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{jm}(t)e^{i\xi t}\, dt = \int_0^\infty D_{jm}(\rho)\rho^{-1/p+i\xi}\, d\rho.$$

Далее, последовательно применяя равенство (11), формулу Каталана (см., например, [9, с. 20]) и равенство (9), получим

$$\widehat{h}_{jm}(\xi) = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left((n-1)/2\right)} \int\limits_0^\infty \rho^{-1/p+i\xi}\,d\rho \int\limits_{-1}^1 D_j(\rho,t)P_m(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}\,dt$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_{S_{n-1}} D_j(\rho, e_1\cdot\theta)P_m(e_1\cdot\theta)\rho^{-1/p+i\xi}\,d\rho\,d\theta = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_j(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}\,dy,$$

где $P_m(t)$ — многочлены Лежандра.

Учитывая сказанное, назовем *символом* оператора B вида (6) пару функций $(\beta_1(m,\xi), \beta_2(m,\xi))$, заданных на множестве $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}$ равенствами

$$\beta_j(m,\xi) = \alpha_j(\xi) + \sigma_j(m,\xi),$$

где функция $\alpha_j(\xi)$ определяется формулой (19) и

$$\sigma_j(m,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_j(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}\,dy, \quad j=1,2.$$

Заметим, что при любом фиксированном значении $m\in\mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$\beta_j(m,\xi) = c_{jm}(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{20}$$

Символ оператора B назовем *невырожденным*, если

$$\inf_{\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}} |\beta_j(m,\xi)| > 0, \quad j=1,2. \tag{21}$$

В этом случае почти периодические функции $\alpha_j(\xi)$ также будут невырожденными (см. [8, с. 218]), т. е. будет выполнено условие

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} |\alpha_j(\xi)| > 0, \quad j=1,2. \tag{22}$$

2.4. Пусть символ оператора B является невырожденным. Тогда

$$\frac{\beta_1(m,\xi)}{\beta_2(m,\xi)} = \alpha(\xi) + \widehat{h}_m(\xi),$$

где $\alpha(\xi) = \alpha_1(\xi)/\alpha_2(\xi)$, а h_m — некоторая функция из $L_1(\mathbb{R})$. Подчеркнем, что почти периодическая функция $\alpha(\xi)$ не зависит от m. Это позволяет определить индексы $\nu\in\mathbb{R}$ и $\varkappa_m\in\mathbb{Z}$ следующим образом:

$$\nu = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2b}\Delta\big[\arg\alpha(\xi)\big]\Big|_{-b}^{b}, \quad \varkappa_m = \frac{1}{2\pi}\Delta\Big[\arg\Big(1+\alpha^{-1}(\xi)\widehat{h}_m(\xi)\Big)\Big]\Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (22) *и* $\nu=0$. *Тогда найдется такое число* $m_0\in\mathbb{Z}_+$, *что для любого* $m>m_0$ *оператор* B_m *вида* (14) *обратим.*

$\lhd$ Представим оператор B_m в виде

$$B_m = R_1\mathbf{P} + R_2\mathbf{Q} + K_{1m}\mathbf{P} + K_{2m}\mathbf{Q},$$

где R_j и K_{jm} задаются формулами (12) и (13) соответственно. Рассмотрим оператор $\mathscr{R}_1 P_+ + \mathscr{R}_2 P_- = W_p(R_1\mathbf{P} + R_2\mathbf{Q})W_p^{-1}$, где

$$(\mathscr{R}_j\psi)(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\psi(t + \ln\delta_{j\ell}), \quad j = 1, 2.$$

Символом этого оператора является пара функций $(\alpha_1(\xi), \alpha_2(\xi))$. В силу предложения 1 оператор $\mathscr{R}_1 P_+ + \mathscr{R}_2 P_-$ обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R})$. Тогда оператор $R_1\mathbf{P} + R_2\mathbf{Q}$ обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$.

Известно (см. [6, с. 10]), что $\lim_{m\to\infty} \|K_{jm}\| = 0$. Значит найдется такое $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, что для всех $m > m_0$ справедливо неравенство

$$\|K_{1m}\mathbf{P} + K_{2m}\mathbf{Q}\| < \left\|(R_1\mathbf{P} + R_2\mathbf{Q})^{-1}\right\|^{-1}.$$

Тогда оператор B_m, где $m > m_0$, обратим. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (22) *и* $\nu = 0$, *а* m_0 — *число, определенное в лемме* 1. *Оператор* B *вида* (6) *обратим в пространстве* $L_p(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда обратимы в* $L_p(\mathbb{R}_+)$ *все операторы* B_m, $m = 0, 1, \ldots, m_0$.

$\lhd$ В пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n) = \{\Phi(r\sigma) : \Phi(r\sigma)\, r^{-(n-1)/p} \in L_p(\mathbb{R}^n)\}$ рассмотрим оператор $\widetilde{B}$, определяемый левой частью уравнения (8). Запишем его в виде

$$\widetilde{B} = (\widetilde{R}_1 + \widetilde{K}_1)\widetilde{P} + (\widetilde{R}_2 + \widetilde{K}_2)\widetilde{Q},$$

где операторы $\widetilde{K}_j$ и $\widetilde{R}_j$ задаются формулами

$$(\widetilde{K}_j\Phi)(r\sigma) = \int_0^{\infty}\int_{S_{n-1}} \frac{1}{r} D_j\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\, d\rho\, d\theta,$$

$$(\widetilde{R}_j\Phi)(r\sigma) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{j\ell}\delta_{j\ell}^{-1/p}\Phi\left(\frac{r}{\delta_{j\ell}}\,\sigma\right),$$

а $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ — операторы умножения на характеристические функции внутренней и внешней частей единичного шара соответственно.

Очевидно, что оператор B обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда оператор $\widetilde{B}$ обратим в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$.

Определим в $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$ проектор P_N равенством

$$(P_N\Phi)(r\sigma) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{\mu=1}^{d_n(m)} \Phi_{m\mu}(r)Y_{m\mu}(\sigma),$$

и обозначим через Q_N дополнительный проектор. Заметим, что проекторы P_N и $\widetilde{P}$ коммутируют между собой. Далее, с помощью формулы Функа — Гекке непосредственно проверяется, что $P_N\widetilde{K}_jQ_N = 0$ и $Q_N\widetilde{K}_jP_N = 0$. Кроме того, очевидны равенства $P_N\widetilde{R}_jQ_N = 0$ и $Q_N\widetilde{R}_jP_N = 0$. Положим

$$\widetilde{T} = \widetilde{R}_1\widetilde{P} + \widetilde{R}_2\widetilde{Q}.$$

Тогда $\widetilde{B} = \widetilde{T} + \widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q}$. В силу вышесказанного справедливы равенства

$$P_N\widetilde{T}Q_N = 0, \quad Q_N\widetilde{T}P_N = 0, \quad P_N\widetilde{B}Q_N = 0, \quad Q_N\widetilde{B}P_N = 0.$$

Учитывая это, запишем матричное равенство

$$\begin{pmatrix} P_N & Q_N \\ Q_N & P_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B} & 0 \\ 0 & \widetilde{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_N & Q_N \\ Q_N & P_N \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \widetilde{T} + P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N & 0 \\ 0 & \widetilde{T} + Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Докажем, что оператор $\widetilde{T}$ обратим в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$. В п. 2.2 было показано, что уравнение (8), порожденное оператором $\widetilde{B}$, сводится к бесконечной диагональной системе (10). В частности, уравнение $(\widetilde{T}\Phi)(r\sigma) = F(r\sigma)$ сводится к системе

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{1\ell}\delta_{1\ell}^{-1/p}(\mathbf{P}\Phi_{m\mu})\left(\frac{r}{\delta_{1\ell}}\right) + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{2\ell}\delta_{2\ell}^{-1/p}(\mathbf{Q}\Phi_{m\mu})\left(\frac{r}{\delta_{2\ell}}\right) = F_{m\mu}(r), \quad (24)$$

где $r \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 1, 2, \ldots, d_n(m)$. Левая часть каждого уравнения системы (24) порождается не зависящим от m оператором $\mathbf{T} = R_1\mathbf{P} + R_2\mathbf{Q}$, где R_j определяются равенством (12). Очевидно, что оператор $\widetilde{T}$ обратим в $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда оператор $\mathbf{T}$ обратим в $L_p(\mathbb{R}_+)$. Заметим, что символом оператора $\mathbf{T}$ является пара функций $(\alpha_1(\xi), \alpha_2(\xi))$ вида (19).

Поскольку выполнено условие (22) и $\nu = 0$, то в силу предложения 1 парный разностный оператор $W_p\mathbf{T}W_p^{-1}$ обратим в $L_p(\mathbb{R})$, а значит оператор $\mathbf{T}$ обратим в $L_p(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, оператор $\widetilde{T}$ обратим в $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$.

Так как оператор $\widetilde{T}$ обратим, то из матричного равенства (23) следует, что оператор $\widetilde{B}$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы операторы $\widetilde{T} + P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N$ и $\widetilde{T} + Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N$. Покажем, что последний оператор обратим при достаточно большом значении N.

В [1, с. 80–81] показано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $h_{jN}(\rho, t)$ вида

$$h_{jN}(\rho, t) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \sum_{m=0}^{N} d_n(m)h_{jm}(\rho)P_m(t), \quad j = 1, 2,$$

где $P_m(t)$ — многочлены Лежандра, такая, что оператор $\widetilde{H}_{jN}$ вида

$$(\widetilde{H}_{jN}\Phi)(r\sigma) = \int_0^{\infty} \int_{S_{n-1}} \frac{1}{r}\, h_{jN}\left(\frac{\rho}{r}, \sigma \cdot \theta\right) \Phi(\rho\theta)\, d\rho\, d\theta$$

удовлетворяет неравенству

$$\big\|\widetilde{K}_j - \widetilde{H}_{jN}\big\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n))} < \varepsilon. \quad (25)$$

При этом всегда можно считать, что $N > m_0$. Непосредственно устанавливается равенство $Q_N\widetilde{H}_{jN}Q_N = 0$, из которого следует, что

$$\widetilde{T} + Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P} + \widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N = \widetilde{T} + Q_N\big((\widetilde{K}_1 - \widetilde{H}_{1N})\widetilde{P} + (\widetilde{K}_2 - \widetilde{H}_{2N})\widetilde{Q}\big)Q_N.$$

Так как оператор $\widetilde{T}$ обратим, то в силу (25) можно добиться выполнения неравенства

$$\big\|Q_N\big((\widetilde{K}_1-\widetilde{H}_{1N})\widetilde{P}+(\widetilde{K}_2-\widetilde{H}_{2N})\widetilde{Q}\big)Q_N\big\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n))}<\|\widetilde{T}^{-1}\|^{-1}_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^n))},$$

из которого вытекает обратимость оператора $\widetilde{T}+Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N$.

Таким образом, оператор $\widetilde{B}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\widetilde{T}+P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N$. Обратимость последнего, в силу равенства

$$\widetilde{T}+P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N=P_N\widetilde{B}P_N+Q_N\widetilde{T}Q_N,$$

равносильна обратимости оператора $P_N\widetilde{B}\big|_{\operatorname{Im}P_N}$ [1, с. 6]. Ясно, что уравнение, порождаемое оператором $P_N\widetilde{B}\big|_{\operatorname{Im}P_N}$ сводится к конечной системе вида (10), где $m=0,1,\dots,N$. Таким образом, необходимым и достаточным условием обратимости оператора $\widetilde{B}$ является обратимость в $L_p(\mathbb{R}_+)$ всех операторов B_m, где $m=0,1,\dots,N$. Учитывая лемму 1, получаем, что оператор B обратим тогда и только тогда, когда обратимы все операторы B_m, где $m=0,1,\dots,m_0$. $\rhd$

Замечание 1. Отметим, что использование в записях «неопределенного» числа m_0 весьма неудобно. Поэтому ниже мы пишем, что $m\in\mathbb{Z}_+$.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор* B *вида* (6) *был обратим в пространстве* $L_p(\mathbb{R}^n)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия:* 1) *неравенство* (21); 2) $\nu=0$; 3) $\varkappa_m=0$ *для всех* $m\in\mathbb{Z}_+$.

$\lhd$ *Необходимость.* Очевидно, что обратимость оператора B в $L_p(\mathbb{R}^n)$ влечет обратимость в $L_p(\mathbb{R}_+)$ всех операторов B_m, где $m\in\mathbb{Z}_+$. Тогда из равенства (17) вытекает обратимость в $L_p(\mathbb{R})$ всех операторов C_m, $m\in\mathbb{Z}_+$. Используя теперь равенство (20) и предложение 1, убеждаемся в справедливости условий теоремы.

Достаточность. Если выполнены условия теоремы, то, последовательно применяя равенство (20), предложение 1 и равенство (17), получаем, что все операторы B_m, $m\in\mathbb{Z}_+$, обратимы в $L_p(\mathbb{R}_+)$. Кроме того, из (21) следует выполнение неравенства (22). Тогда в силу леммы 2 оператор B обратим в $L_p(\mathbb{R}^n)$. $\rhd$

Из этой теоремы легко получается критерий обратимости оператора A вида (5). Так как $A=AP+AQ$, то $\beta_1(m,\xi)=\beta_2(m,\xi):=a(m,\xi)$, где

$$a(m,\xi)=\sum_{\ell=1}^{\infty}a_\ell\delta_\ell^{-i\xi}+\int\limits_{\mathbb{R}^n}k(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}\,dy.$$

Так как $\beta_1(m,\xi)/\beta_2(m,\xi)\equiv1$, то $\nu=0$ и $\varkappa_m=0$ для всех $m\in\mathbb{Z}_+$. Тогда из теоремы 1 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Для того чтобы оператор* A *вида* (5) *был обратим в пространстве* $L_p(\mathbb{R}^n)$, *необходимо и достаточно, чтобы его символ* $a(m,\xi)$ *удовлетворял условию*

$$\inf_{\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}}|a(m,\xi)|>0.$$

Литература

1. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators.—Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2001.—427 p.
2. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* О псевдоспектрах многомерных интегральных операторов с однородными степени $-n$ ядрами // Сиб. мат. журн.—2003.—Т. 44, № 6.—С. 1199–1216.
3. *Авсянкин О. Г., Перетятькин Ф. Г.* Об ограниченности и компактности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами // Изв. вузов. Математика.—2013.—№ 11.—С. 64–68.
4. *Авсянкин О. Г.* Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами и коэффициентами, осциллирующими на бесконечности // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 9.—С. 1174–1181.
5. *Авсянкин О. Г.* О C^*-алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига // Докл. РАН.—2008.—Т. 419, № 6.—С. 727–728.
6. *Авсянкин О. Г.* О многомерных интегральных операторах с однородными ядрами, возмущенных операторами одностороннего мультипликативного сдвига // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, № 1.—С. 5–13. DOI: 10.23671/VNC.2013.1.10501.
7. *Авсянкин О. Г.* Проекционный метод для интегральных операторов с однородными ядрами, возмущенных односторонними мультипликативными сдвигами // Изв. вузов. Математика.—2015.—№ 2.—С. 10–17.
8. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
9. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1984.—208 с.

Статья поступила 15 июня 2017 г.

Авсянкин Олег Геннадиевич
Южный федеральный университет,
профессор каф. дифференц. и интегральных уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: avsyanki@math.rsu.ru

Ковальчук Алиса Марковна
Южный федеральный университет,
магистр кафедры дифференц. и интегральных уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: alica759@mail.ru

PAIRED INTEGRAL OPERATORS WITH HOMOGENEOUS KERNELS PERTURBATED BY OPERATORS OF MULTIPLICATIVE SHIFT

Avsyankin O. G., Koval'chuk A. M.

In the space $L_p(\mathbb{R}^n)$, where $1 \leqslant p \leqslant \infty$, we consider an operator B, which is the sum of two terms. The first term is a paired multidimensional integral operator, whose kernels are homogeneous of degree $(-n)$ and invariant with respect to the rotation group of $\mathbb{R}^n$-space, and the second term is a series, convergent in the operator norm, composed of multidimensional multiplicative shift operators with complex coefficients. We impose some additional conditions on the kernels and coefficients of the operator B, and these conditions ensure the boundedness of this operator in the space of summable functions. The main aim of the paper is to study the invertibility of the operator B. To solve this problem we use a special method that allows the reduction of the multidimensional paired operator to an infinite sequence of one-dimensional paired operators B_m, where $m \in \mathbb{Z}_+$. It is shown that the operator B is invertible if and only if all the operators B_m are invertible, where m runs through all values from zero to some finite number m_0. In turn, the operators B_m reduce to integral-difference convolution operators whose theory is well known. All this allowed us to determine the symbol of the operator B. This symbol represents the pair of functions $(\beta_1(m,\xi), \beta_2(m,\xi))$, defined on the set $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$. If the symbol is non-degenerate, then we define in a natural way a real number ν and integers $\varkappa_m$, where $m \in \mathbb{Z}_+$. Numbers ν and $\varkappa_m$ are called indices. The main result of the work is the invertibility criterion of the multidimensional paired operator B in the space $L_p(\mathbb{R}^n)$. According to this criterion, the operator B is invertible if and only if its symbol is non-degenerate, and all its indices are zero.

Key words: paired operator, integral operator, homogeneous kernel, multiplicative shift, invertibility, spherical harmonics.

References

1. *Karapetiants N., Samko S. Equations with Involutive Operators*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2001, 427 p.
2. *Avsyankin O. G., Karapetyants N. K.* On the pseudospectra of multidimensional integral operators with homogeneous kernels of degree $(-n)$, *Siberian Math. J.*, 2003 vol. 44, no 6, pp. 935–950. DOI: 10.1023/B:SIMJ.0000007469.86630.6b.
3. *Avsyankin O. G., Peretyat'kin F. G.* Boundedness and compactness of multidimensional integral operators with homogeneous kernels, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 57–60. DOI: 10.3103/S1066369X13110054.
4. *Avsyankin O. G.* Multidimensional integral operators with homogeneous kernels and with coefficients oscillating at infinity, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 9, pp. 1165–1172.
5. *Avsyankin O. G.* On the C^*-algebra generated by multidimensional integral operators with homogeneous kernels and multiplicative translations, *Doklady Mathematics*, 2008, vol. 77, no. 2, pp. 298–299.
6. *Avsyankin O. G.* On multidimensional integral operators with homogeneous kernels, perturbated by one-sided multiplicative shift operators, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [*Vladikavkaz Math. J.*], 2013, vol. 15, no. 1, pp. 5–13 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2013.1.10501.
7. *Avsyankin O. G.* Projection method for integral operators with homogeneous kernels perturbed by one-sided multiplicative shifts, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 2, pp. 7–13. DOI: 10.3103/S1066369X15020024.
8. *Gohberg I. C., Feldman I. A. Uravneniya v Svertkah i Proekcionnye Metody ikh Resheniya* [*Convolution Equations and Projection Methods of Their Solution*], Moskow, Nauka, 1971, 352 p.
9. *Samko S. G. Gipersingulyarnye Integraly i ikh Prilozheniya* [*Hypersingular Integrals and Their Applications*], Rostov-on-Don: RSU, 1984, 208 p.

Received 15 June, 2017

Avsyankin Oleg Gennadievich
Vorovich Institute of Mathematic, Mechanic and Computer Science,
of the Southern Federal University,
Professor of the Department of Differential and Integral Equations
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia
E-mail: `avsyanki@math.rsu.ru`

Koval'chuk Alica Markovna
Vorovich Institute of Mathematic, Mechanic and Computer Science,
of the Southern Federal University,
Student of the Department of Differential and Integral Equations
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia
E-mail: `alica759@mail.ru`

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 21–29

УДК **517.98**

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ИДЕАЛЬНЫХ F-ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

А. А. Алимов, В. И. Чилин

Посвящается памяти профессора
Иномжона Гуламджановича Ганиева

Известно, что на любой коммутативной алгебре фон Неймана $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ каждое дифференцирование тождественно равно нулю. В то же время, на коммутативной алгебре $\mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ всех комплексных измеримых функций, заданных на неатомическом пространстве с мерой (Ω,μ), всегда существуют ненулевые дифференцирования. При этом каждое дифференцирование на $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$, принимающее значения в нормированном идеальном подпространстве $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$, обязательно является нулевым. Аналогичный факт остается верным и для квазинормированных идеальных подпространств $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$.

Естественно возникает вопрос о существовании ненулевых дифференцирований, определенных на $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$, со значениями в F-нормируемом идеальном пространстве $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$, т. е. идеальном пространстве, снабженном монотонной F-нормой. Мы даем необходимые и достаточные условия для полных F-нормируемых идеальных пространств X, обеспечивающие наличие ненулевых дифференцирований $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to X$. В частности, показано, что в случае порядковой полунепрерывности F-нормы $\|\cdot\|_X$ каждое дифференцирование $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to (X, \|\cdot\|_X)$ является нулевым. В то же время, наличие неатомического идемпотента $0 \neq e \in X$, $\mu(e) < \infty$, для которого топология сходимости по мере в $e \cdot X$ совпадает с топологией, порожденной F-нормой, обеспечивает существование ненулевого дифференцирования из $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ в X. Примерами таких F-нормируемых идеальных пространств служат алгебры $\mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ для неатомических измеримых пространств (Ω,μ), наделенные F-нормой $\|f\|_\Omega = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}d\mu$. Для таких F-пространств имеется не менее континуума попарно различных ненулевых дифференцирований из $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ в $(\mathscr{L}_0(\Omega,\mu), \|\cdot\|_\Omega)$.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11393.

Ключевые слова: дифференцирование, идеальное пространство, F-норма.

1. Введение

Известно, что любое дифференцирование на C^*-алгебре $\mathscr{B}$ всегда непрерывно по норме [11, 4.1.3], и в случае, когда алгебра $\mathscr{B}$ коммутативна, на ней нет ненулевых дифференцирований. В частности, для коммутативных алгебр фон Неймана $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ всех комплексных существенно ограниченных измеримых функций, заданных на измеримом пространстве с мерой $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$, любое дифференцирование на $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ тождественно равно нулю. В то же время, на коммутативных $*$-алгебрах $\mathscr{L}_0(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ всех комплексных измеримых функций, заданных на неатомическом пространстве с мерой $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$, существует не менее континуума попарно различных ненулевых дифференцирований [1, 2].

В случае коммутативных AW^*-алгебр $\mathscr{B} = C(Q(\nabla), \mathbb{C})$ критерием существования ненулевых дифференцирований $\delta\colon \mathscr{B} \to C_\infty(Q(\nabla), \mathbb{C})$ служит отсутствие свойства σ-дистрибутивности у полной булевой алгебры ∇ всех проекторов из $\mathscr{B}$ [9] (здесь $Q(\nabla)$ — стоуновский компакт, отвечающий полной булевой алгебре ∇ и $C(Q(\nabla), \mathbb{C})$ (соответственно, $C_\infty(Q(\nabla), \mathbb{C})$) — комплексификация алгебры $C(Q(\nabla), \mathbb{R})$ всех непрерывных действительных функций $f : Q(\nabla) \to \mathbb{R}$ (соответственно, комплексификация алгебры всех непрерывных функций $f : Q(\nabla) \to [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах)).

Следующим шагом в изучении свойств дифференцирований, заданных на алгебре $\mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ и принимающих значения в алгебре $\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, стало исследование существования ненулевых дифференцирований, у которых область значений содержится в нормируемых идеальных подпространствах (НИП) $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. В работе [5] доказано, что любое такое дифференцирование обязательно является нулевым. Затем в работе [3] аналогичный результат был получен уже для квазинормируемых идеальных подпространств $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

Каждое квазинормируемое пространство является метризуемым топологическим векторным пространством, имеющим ограниченную окрестность нуля (см., например, [7, гл. 1, § 3]). В то же время имеются важные примеры идеальных подпространств $X \subseteq \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ с метризуемой векторной топологией, не имеющих ограниченную окрестность нуля. Таковыми, в частности, являются F-нормируемые идеальные подпространства в $\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, т. е. идеальные пространства, снабженные монотонной F-нормой. Примерами таких пространств служат сами алгебры $\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, наделенные F-нормой $\|f\|_\Omega = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\, d\mu$, порождающей топологию сходимости по мере [7, гл. 2, § 2], а также алгебры log-интегрируемых измеримых функций

$$\mathscr{L}_{\log}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \left\{ f \in \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu) : \int \log(1 + |f|)\, d\mu < \infty \right\}$$

с F-нормой $\|f\|_{\log} = \int_\Omega \log(1 + |f|) d\mu$ [6]. Это означает, что в случае неатомического пространства с мерой $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ существуют ненулевые дифференцирования, заданные на алгебре $\mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ и принимающие значения в F-нормируемом идеальным подпространстве $(\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu), \|\cdot\|_\Omega)$ [1]. Как уже выше упоминалось, для таких пространств с мерой и НИП $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ уже не существует ненулевых дифференцирований $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \to X$.

Вопрос о нахождении критерия для существования ненулевых дифференцирований, определенных на $\mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ и принимающих значения в F-нормируемых идеальных пространствах, до сих пор оставался открытым. В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия для полных F-нормируемых идеальных пространств $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, обеспечивающие наличие ненулевых дифференцирований $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \to X$.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{K}$ — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ либо действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ — *Магарамское пространство с мерой*, т. е. $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ есть такое пространство с мерой, что

(i) μ — счетно аддитивная функция, определенная на σ-алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств множества Ω со значениями в расширенной полупрямой $[0; \infty]$;

(ii) если $F \subset E \in \mathscr{A}$ и $\mu(E) = 0$, то $F \in \mathscr{A}$;

(iii) для любого множества $E \in \mathscr{A}$ ненулевой меры существует такое множество $F \in \mathscr{A}$, что $F \subset E$ и $0 < \mu(F) < \infty$;

(iv) булева алгебра ∇_μ всех классов μ-почти всюду равных множеств из $\mathscr{A}$ порядково полна.

В этом случае полная булева алгебра ∇_μ имеет разделяющее семейство конечных вполне аддитивных мер (такие булевы алгебры называются *мультинормированными* [8, 1.2.10]). В мультинормированной булевой алгебре ∇_μ всегда существует разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы $\mathbf{1}$, для которого каждая булева алгебра $e_i \cdot \nabla_\mu = \{g \in \nabla_\mu : g \leqslant e_i\}$ имеет строго положительную конечную счетно аддитивную меру, $i \in I$ [8, 1.2.1].

Обозначим через $\mathscr{L}_0(\mathbb{K}) = \mathscr{L}_0(\mathbb{K})(\nabla_\mu) = \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)(\mathbb{K})$ $*$-алгебру всех классов эквивалентности равных μ-почти всюду комплексных (действительных) функций, определенных на $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, а через $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{K}) = \mathscr{L}_\infty(\mathbb{K})(\nabla_\mu) = \mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)(\mathbb{K})$ — коммутативную банахову $*$-алгебру всех комплексных (действительных) существенно ограниченных измеримых функций, заданных на $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, снабженную равномерной нормой. Ясно, что самосопряженная часть $\mathscr{L}_0^h(\mathbb{C}) = \{f \in \mathscr{L}_0(\mathbb{C}) : f = \overline{f}\}$ $*$-алгебры $\mathscr{L}_0(\mathbb{C})$ (соответственно, $\mathscr{L}_\infty^h(\mathbb{C}) = \mathscr{L}_\infty(\mathbb{C}) \cap \mathscr{L}_0^h(\mathbb{C})$) совпадает с $\mathscr{L}_0(\mathbb{R})$ (соответственно, с $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})$). При этом булева алгебра ∇_μ отождествляется с полной булевой алгеброй всех идемпотентов в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$.

При естественном определении частичного порядка в $\mathscr{L}_0(\mathbb{R})$ алгебра $\mathscr{L}_0(\mathbb{R})$ является расширенной порядково полной векторной решеткой [8, 1.4.2]. Для любого элемента $f \in \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ определим его носитель с помощью равенства

$$s(f) = \mathbf{1} - \sup\big\{e \in \nabla_\mu :\, e \cdot f = 0\big\}.$$

Ясно, что $s(f) \in \nabla_\mu$ и $s(q) = q$ для любого $q \in \nabla_\mu$. Кроме того, идемпотент $q \in \nabla_\mu$ является носителем для $f \in \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ в том и только в том случае, когда $q \cdot f = f$, и из равенств $e \cdot f = f$, $e \in \nabla_\mu$, следует, что $e \geqslant q$.

Для произвольного непустого подмножества $M \subset \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ его носитель $s(M)$ определяется равенством $s(M) = \sup\{s(f) \colon f \in M\}$.

Ненулевое линейное подпространство X в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ называется идеальным пространством (сокращенно ИП), если из $f \in X$, $g \in \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ и неравенства $|g| \leqslant |f|$ следует, что $g \in X$. Если X — ИП в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ и $s(X) = \mathbf{1}$, то X называют фундаментальным идеальным пространством в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$.

Нетрудно видеть, что ненулевое линейное подпространство X в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ является идеальным пространством тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}_\infty \cdot X = X$.

Пусть X — произвольное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ называется F-нормой, если верны следующие свойства:

(i) $\|x\| > 0$ для всех $x \neq 0$;

(ii) $\|\alpha x\| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$ и всех скаляров $\alpha \in \mathbb{K}$ с $|\alpha| \leqslant 1$;

(iii) $\lim_{\alpha\to 0} \|\alpha x\| = 0$ для всех $x \in X$;

(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in X$.

Если $\|\cdot\|$ есть F-норма на X, то функция $d(x, y) = \|x - y\|$ определяет трансляционно инвариантную метрику на линейном пространстве X, порождающую метрическую топологию на X, относительно которой X есть топологическое линейное пространство (см., например, [7, гл. 1, § 2]). Если $(X, \|\cdot\|)$ является полным метрическим пространством, то пара $(X, \|\cdot\|)$ называется F-пространством.

Говорят, что F-норма $\|\cdot\|$ на идеальном пространстве $X \subseteq \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ монотонна, если из соотношений $f, g \in X$, $|g| \leqslant |f|$ следует, что $\|g\| \leqslant \|f\|$. F-нормированным идеальным пространством (идеальным F-пространством) в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ называется идеальное пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, снабженное монотонной F-нормой (соответственно, полной монотонной F-нормой).

3. Дифференцирования на $\mathscr{L}_\infty$ со значениями в F-нормированных идеальных пространствах

Линейный оператор $\delta : \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ называется *дифференцированием*, если

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) \quad \text{при всех} \quad x, y \in \mathscr{L}_\infty.$$

Носитель дифференцирования δ есть идемпотент $s(\delta) = \sup\{s(\delta(f)) : f \in \mathscr{L}_\infty\}$. В случае, когда образ дифференцирования δ содержится в идеальном пространстве X, всегда верно неравенство $s(\delta) \leqslant s(X)$ (ср. [5, теорема 3.4]).

Отметим также, что из [1, § 2, предложение 2.3] вытекает справедливость следующих равенств: $\delta(e) = 0$ и $\delta(e \cdot f) = e \cdot \delta(f)$ для любых $e \in \nabla_\mu$, $f \in \mathscr{L}_\infty$.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие для существования ненулевых дифференцирований из $\mathscr{L}_\infty$ в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ (см. [1, 9]).

Теорема 3.1. *Для булевой алгебры ∇_μ следующие условия эквивалентны:*

(i) существует ненулевое дифференцирование из $\mathscr{L}_\infty$ в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$;

(ii) мультинормируемая булева алгебра ∇_μ не является атомической.

Следует заметить, что существуют фундаментальные идеальные пространства X в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, не совпадающие с $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, для которых имеются ненулевые дифференцирования $\delta : \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ с образом, лежащим в X (см. [5, пример 5.1]).

Пусть e — ненулевой идемпотент из алгебры $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, т. е. $e \in \nabla_\mu$. Будем говорить, что ИП X в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ является *e-расширенным*, если $e \cdot X = e \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$. В этом случае всегда справедливо включение $e \in X$. В ситуации, когда булева алгебра ∇_μ является непрерывной, т. е. не имеет атомов, идеальное пространство $X = \mathscr{L}_\infty$ не является e-расширенным для любого ненулевого $e \in \nabla_\mu$.

Согласно [5, теорема 3.3], имеет место следующее утверждение:

Утверждение 3.2. *Если X — ИП в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ и $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ — ненулевое дифференцирование с образом $\delta(\mathscr{L}_\infty)$, лежащим в X, то $s(\delta) \cdot X = s(\delta) \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$.*

Из теоремы 3.1 и утверждения 3.2 вытекает

Следствие 3.3. *Пусть X — идеальное пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$. Если существует ненулевое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$, то X является $s(\delta)$-расширенным, при этом булева алгебра $s(\delta) \cdot \nabla_\mu$ не является атомической.*

$\lhd$ Согласно утверждению 3.2 имеем, что $s(\delta) \cdot X = s(\delta) \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, в частности, $e := s(\delta) \in X$. Ясно, что сужение δ_e дифференцирования δ на $e \cdot \mathscr{L}_\infty = \mathscr{L}_\infty(e \cdot \nabla_\mu)$ есть ненулевое дифференцирование со значениями в $e \cdot X = e \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K}) = \mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$. В силу теоремы 3.1 булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ не является атомической. $\rhd$

Обозначим через ν меру Лебега на отрезке $[0, 1]$ и через $\mathscr{A}_\nu$ — σ-алгебру всех измеримых по Лебегу подмножеств из $[0, 1]$. Пусть ∇_ν — полная булева алгебра всех классов ν-почти всюду равных множеств из $\mathscr{A}_\nu$. Если ∇_μ — непрерывная булева алгебра (т. е. не имеет атомов), то в силу [4, гл. 2, следствие 7.6] существуют такие ненулевой элемент $e \in \nabla_\mu$, $\mu(e) = 1$, правильная булева подалгебра $\nabla_0(e)$ в булевой алгебре $e \cdot \nabla_\mu$ и изоморфизм φ из булевой алгебры ∇_ν на булеву алгебру $\nabla_0(e)$, что $\mu(\varphi(g)) = \nu(g)$ для всех $g \in \nabla_\nu$ (напомним, что булева подалгебра $\nabla_0(e)$ в булевой алгебре $e \cdot \nabla_\mu$ называется *правильной*, если точные верхние и нижние грани любого подмножества из $\nabla_0(e)$ одинаковые в $\nabla_0(e)$ и в $e \cdot \nabla_\mu$).

Заметим, что в случае, когда ∇_μ — неатомическая булева алгебра, всегда существует такой ненулевой элемент $e \in \nabla_\mu$, что булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ непрерывна [12, гл. 3, § 2, теорема 8]. Это означает, что для любой неатомической булевой алгебры ∇_μ всегда найдутся такие ненулевой элемент $e \in \nabla_\mu$ и правильная булева подалгебра ∇_0 в булевой алгебре $e \cdot \nabla_\mu$, что $e \cdot \nabla_\mu$ есть непрерывная булева алгебра, а булева подалгебра ∇_0 изоморфна булевой алгебре ∇_ν.

Пусть $0 \neq e \in \nabla_\mu$ и ∇_0 — правильная булева подалгебра в булевой алгебре $e \cdot \nabla_\mu$. Обозначим через $\mathscr{S}(\mathbb{K})(\nabla_0)$ множество всех тех $f \in \mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$, для которых спектральные идемпотенты $\{\operatorname{Re} f \leqslant \lambda\}$, $\{\operatorname{Im} f \leqslant \lambda\}$ принадлежат ∇_0 для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Известно, что $\mathscr{S}(\mathbb{K})(\nabla_0)$ есть $*$-подалгебра в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$ и $\mathscr{S}(\mathbb{K})(\nabla_0) = \mathscr{L}_0(\mathbb{K})(\nabla_0)$.

Следствие 3.4. *Если X — идеальное пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ и $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ — ненулевое дифференцирование с образом, лежащим в X, то существуют такие ненулевой идемпотент $e \in X$ и правильная булева подалгебра ∇_0 в булевой алгебре $e \cdot \nabla_\mu$, что $e \cdot \nabla_\mu$ есть непрерывная булева алгебра, $\mathscr{S}(\mathbb{K})(\nabla_0) = \mathscr{L}_0(\mathbb{K})(\nabla_0) \subseteq X$ и $*$-алгебра $\mathscr{S}(\mathbb{K})(\nabla_0)$ $*$-изоморфна $*$-алгебре $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})(\nabla_\nu)$.*

$\lhd$ Доказательство вытекает из следствия 3.3. $\rhd$

С помощью следствия 3.3 устанавливается также следующее достаточное условие, обеспечивающее отсутствие ненулевых дифференцирований на $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{K})$, принимающих значения в F-нормированных идеальных пространствах.

Теорема 3.5. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — F-нормированное идеальное пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, в котором $\|n \cdot f\|_X \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ для каждого $0 < f \in X$. Тогда любое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$ является нулевым.*

$\lhd$ Предположим, что существует ненулевое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$. В силу следствия 3.3 найдется такой ненулевой идемпотент $e \in X$, что ИП X e-расширенно и булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ не является атомической, в частности, существует счетное дизъюнктное разбиение $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ идемпотента e, для которого $e_n \neq 0$ при всех n. Используя сходимость $\|k \cdot e_n\|_X \uparrow \infty$ при $k \to \infty$, выберем номер k_n так, чтобы $\|k_n \cdot e_n\|_X > n$. Так как $e \cdot X = e \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, то найдется такое $0 < f \in e \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K}) \subseteq X$, для которого $e_n \cdot f = k_n \cdot e_n$. Имеем

$$n < \|k_n \cdot e_n\|_X = \|e_n \cdot f\|_X \leqslant \|f\|_X$$

для всех натуральных чисел n, что невозможно. Из полученного противоречия вытекает отсутствие дифференцирований $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$. $\rhd$

Дадим иллюстрацию к теореме 3.5 на примере F-нормированного идеального пространства log-интегрируемых измеримых функций

$$\mathscr{L}_{\log}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \left\{ f \in \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu) : \int \log(1 + |f|)\, d\mu < \infty \right\}$$

с F-нормой $\|f\|_{\log} = \int_\Omega \log(1 + |f|)\, d\mu$ [6]. Если $0 < f \in \mathscr{L}_{\log}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, то

$$\big\|n \cdot f\big\|_{\log} = \int\limits_\Omega \log(1 + |n \cdot f|)\, d\mu \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, в силу теоремы 3.5, любое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_{\log}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ является нулевым.

В то же время, если рассмотреть F-нормированное идеальное пространство $\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, наделенное F-нормой $\|f\|_\Omega = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\, d\mu$, то согласно теореме 3.1, в случае атомического пространства с мерой $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, не существуют ненулевые дифференцирования на алгебре $\mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, принимающие значения в $(\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu), \|\cdot\|_\Omega)$. При этом $\|n\cdot f\|_\Omega = \int_\Omega \frac{|n\cdot f|}{1+|n\cdot f|}\,d\mu \leqslant 1$ для любых элементов $f \in \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ и натуральных чисел n. Это означает, что достаточное условие $\|n\cdot f\|_X \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ для каждого $0 < f \in X$ из теоремы 3.5 не является необходимым для отсутствия ненулевых дифференцирований $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, принимающих значения в F-нормированных идеальных пространствах.

Выделим класс F-нормированных идеальных пространств $(X, \|\cdot\|_X) \subseteq \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, для которых верна теорема 3.5. Говорят, что F-нормированное идеальное пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ имеет *порядково полунепрерывную F-норму*, если из условий

$$0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}, \quad f_n \in X, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{n\geqslant 1}\|f_n\|_X < \infty$$

следует существование такого $0 \leqslant f \in X$, что $f_n \uparrow f$.

Если F-нормированное идеальное пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ имеет порядково полунепрерывную норму, $0 < f \in X$ и $\sup_{n\geqslant 1}\|n\cdot f\|_X < \infty$, то существует такое $0 \leqslant g \in X$, что $n\cdot f \uparrow g$, что влечет равенства $g = 0$ и $f = 0$. Из полученного противоречия вытекает, что любое F-нормированное идеальное пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ с порядково полунепрерывной нормой удовлетворяет условиям теоремы 3.5. Поэтому верна следующая

Теорема 3.6. *Если $(X, \|\cdot\|_X)$ — F-нормированное идеальное пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, имеющее порядково полунепрерывную F-норму, то любое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$ является нулевым.*

4. Критерий существования ненулевых дифференцирований со значениями в идеальных F-пространствах

В этом разделе устанавливается основной результат настоящей работы, дающий необходимые и достаточные условия для идеальных F-пространств $X \subseteq \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, обеспечивающие существование ненулевых дифференцирований $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$.

Напомним определение (o)-топологии в частично упорядоченном множестве $(Z, \leqslant)$. Говорят, что сеть $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset Z$ *(o)-сходится* к элементу $z \in Z$ $\big($обозначение: $z_\alpha \xrightarrow{(o)} z\big)$, если существуют такие сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ в Z, что $x_\alpha \leqslant z_\alpha \leqslant y_\alpha$ для всех $\alpha \in A$ и $x_\alpha \uparrow z$, $y_\alpha \downarrow z$.

Сильнейшая из топологий t в Z, для которых (o)-сходимость сетей влечет их сходимость в топологии t, называется *(o)-топологией* в $(Z, \leqslant)$, которая обозначается через $t_o(Z)$. Если $Z = \mathscr{L}_0(\mathbb{R})$, $\mu(\Omega) < \infty$, то (o)-топология $t_o(\mathscr{L}_0(\mathbb{R}))$ метризуема и сходимость последовательностей в этой топологии совпадает со сходимостью по мере [7, гл. 3, § 9].

Пусть $(X, \|\cdot\|_X) \subseteq \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ — идеальное F-пространство. Обозначим через $t(X^h)$ векторную топологию в $X^h = \{f \in X : \overline{f} = f\}$, порождаемую F-нормой $\|\cdot\|_X$. Дословно повторяя доказательство теоремы VII.2.1 из [7, гл. 7, § 2], получим, что сходимость по F-норме $\|f_n - f\|_X \to 0$, $f_n, f \in X^h$, влечет существование подпоследовательности $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, (o)-сходящейся к f. Следовательно, верно следующее сравнение топологий $t(X^h)$ и $t_o(X^h)$.

Утверждение 4.1. *Если X — идеальное F-пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, то $t_o(X^h) \leqslant t(X^h)$.*

Нам понадобится следующее свойство топологии $t(X^h)$.

Утверждение 4.2. *Если $(X, \|\cdot\|_X)$ — идеальное F-пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, $e \in \nabla_\mu$, то $e\cdot X^h = \{e\cdot f : f \in X^h\}$ есть $t(X^h)$-полное подпространство в X^h.*

$\lhd$ Пусть $f_n, f \in X$ и $\|f_n - f\|_X \to 0$. Тогда

$$\big\|\overline{f_n} - \overline{f}\,\big\|_X = \big\||\overline{f_n} - \overline{f}\,|\big\|_X = \big\||f_n - f|\big\|_X = \big\|f_n - f\big\|_X \to 0.$$

Это означает, что X^h есть замкнутое подмножество в $(X, \|\cdot\|_X)$, и поэтому $(X^h, \|\cdot\|_X)$ является полным метрическим пространством. Следовательно, для полноты $e \cdot X^h \subset X^h$ достаточно установить $t(X^h)$-замкнутость множества $e \cdot X^h$.

Если $e \cdot f_n = f_n \in e \cdot X^h$, $f \in X^h$ и $\|f_n - f\|_X \to 0$, то, как отмечалось выше, существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, которая (o)-сходится к f. Следовательно, $f_{n_k} = e \cdot f_{n_k} \xrightarrow{(o)} e \cdot f$, что влечет равенство $f = e \cdot f$, и поэтому $f \in e \cdot X^h$. $\rhd$

Для идемпотента $e = [E] \in X \cap \nabla_\mu$, $\mu(E) < \infty$, обозначим через $t(e \cdot X^h)$ топологию в $e \cdot X^h$, индуцируемую топологией $t(X^h)$ из X^h, а через $t_\mu(e \cdot X^h)$ — топологию сходимости по мере в идеальном пространстве $e \cdot X^h$, индуцируемую из $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$.

Следующая теорема дает критерий существования ненулевых дифференцирований со значениями в идеальных F-пространствах.

Теорема 4.3. *Для идеального F-пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ следующие условия эквивалентны:*

(i) существует ненулевое дифференцирование из $\mathscr{L}_\infty$ в X;

(ii) существует такой ненулевой идемпотент $e = [E] \in X$, $\mu(E) < \infty$, что булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ не является атомической и топология $t(e \cdot X^h)$ совпадает с топологией сходимости по мере $t_\mu(e \cdot X^h)$.

$\lhd$ $(i) \implies (ii)$: Если существует ненулевое дифференцирование из $\mathscr{L}_\infty$ в X, то согласно следствию 3.3 найдется такой ненулевой идемпотент $e = [E] \in X$, $\mu(E) < \infty$, что $e \cdot X^h = \mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)$. В силу утверждения 4.1 имеем, что $t_o(e \cdot X^h) \leqslant t(e \cdot X^h)$. Поскольку $\mu(E) < \infty$, то (o)-топология $t_o(e \cdot X^h) = t_o(\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)$ метризуема и сходимость последовательностей в (o)-топологии $t_o(e \cdot X^h)$ совпадает со сходимостью по мере [7, гл. 3, § 9]. Это означает, что $t_\mu(e \cdot X^h) \leqslant t(e \cdot X^h)$. Так как топологические векторные пространства $(\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu), \|\cdot\|_X)$ и $(\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu), \|\cdot\|_E)$ являются F-пространствами, то из [10, ч. 1, гл. 2, следствие 2.12 (d)] следует, что $t_\mu(e \cdot X^h) = t(e \cdot X^h)$.

$(ii) \implies (i)$: Предположим, что существует такой ненулевой идемпотент $e = [E] \in X$, $\mu(E) < \infty$, для которого булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ не является атомической и топология $t(e \cdot X^h)$ совпадает с топологией сходимости по мере $t_\mu(e \cdot X^h)$. Поскольку метризуемое топологическое векторное пространство $(e \cdot X^h, t(e \cdot X^h))$ полно (см. утверждение 4.2), то $e \cdot X^h$ есть замкнутое подпространство в $(\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu), t_\mu(\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)))$. Осталось заметить, что $\mu(E) < \infty$, $e \cdot \nabla_\mu \subset e \cdot X^h$ и, в силу идеальности пространства $e \cdot X^h$, верно включение $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu) \subset e \cdot X^h$. Следовательно, $t_\mu(e \cdot X^h)$-замыкание подпространства $e \cdot X^h$ содержит $t_\mu(e \cdot X^h)$-замыкание подпространства $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)$. Последнее замыкание совпадает с $\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)$. Это означает, что $e \cdot X^h = \mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)$ (соответственно, $e \cdot X = \mathscr{L}_0(\mathbb{C})(e \cdot \nabla_\mu)$), т. е. идеальное F-пространство X является e-расширенным.

Так как булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ не является атомической, то согласно теореме 3.1 существует ненулевое дифференцирование δ_1 из $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$ со значениями в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$. Определим линейное отображение $\delta\colon \mathscr{L}_\infty(\mathbb{K}) \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, полагая $\delta(f) = \delta_1(e \cdot f)$, $f \in \mathscr{L}_\infty(\mathbb{K})$. Ясно, что δ есть ненулевое дифференцирование из $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{K})$ в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu) \subset X$. $\rhd$

Литература

1. *Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A.* Non-trivial derivations on commutative regular algebras // Extracta Math.—2006.—Vol. 21, № 2.—P. 107–147.
2. *Ber A. F.* Derivations on commutative regular algebras // Sib. Adv. Math.—2011.—Vol. 21, № 3.—P. 161–169. DOI: 10.3103/S1055134411030011.
3. *Бер А. Ф., Левитина Г. Б., Чилин В. И.* Дифференцирования со значениями в квазинормируемых бимодулях локально измеримых операторов // Мат. тр.—2014.—Т. 17, № 1.—С. 3–18.
4. *Bennet C., Sharpley R.* Interpolation of Operators.—N. Y.: Acad. Press Inc., 1988.
5. *Левитина Г. Б., Чилин В. И.* Дифференцирования на идеалах в коммутативных AW^*-алгебрах // Мат. тр.—2013.—Т. 16, № 1.—С. 63–88.
6. *Dykema K., Sukochev F., Zanin D.* Algebras of log-integrable functions and operators.—10 Sep 2015.—11 p.—arXiv:1509.03360v1 [math.OA].
7. *Kalton N. J., Peck N. T., Roberts James W.* An F-space sampler.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.—(London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 89).
8. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.
9. *Кусраев А. Г.* Автоморфизмы и дифференцирования в расширенной комплексной f-алгебре // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 97–107.
10. *Рудин У.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.
11. *Sakai S.* C^*-Algebras and W^*-Algebras.—N. Y.: Springer-Verlag, 1971.
12. *Vladimirov D. A.* Boolean Algebras in Analysis.—Dordrecht: Springer, 2002.—604 p.—(Math. Appl.; vol. 540.)
13. *Vulikh B. Z.* Introduction to the theory of partially ordered spaces.—Groningen: Wolters-Noordhoff Sci. Publ. Ltd., 1967.—387 p.

Статья поступила 7 декабря 2017 г.

Алимов Акром Акбарович
Ташкентский исламский университет,
проректор, доцент кафедры естественных наук
УЗБЕКИСТАН, 100011, Ташкент, Абдулла Кодирий, 11
E-mail: `alimovakrom63@yandex.ru`

Чилин Владимир Иванович
Национальный университет Узбекистана,
профессор кафедры алгебры и функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 100174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: `vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz`

DERIVATIONS WITH VALUES IN AN IDEAL F-SPACES OF MEASURABLE FUNCTIONS

Alimov A. A., Chilin V. I.

It is known that any derivation on a commutative von Neumann algebra $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ is identically equal to zero. At the same time, the commutative algebra $\mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ of complex measurable functions defined on a non-atomic measure space (Ω,μ) admits non-zero derivations. Besides, every derivation on $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ with the values in an ideal normed subspace $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ is equal to zero. The same remains true for an ideal quasi-normed subspace $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$.
Naturally, there is the problem of describing the class of ideal F-normed spaces $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ for which there is a non-zero derivation on $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ with the values in X. We give necessary and sufficient conditions for a complete ideal F-normed spaces X to be such that there is a non-zero derivation $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to X$. In particular, it is shown that if the F-norm on X is order semicontinuous, each derivation $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to X$ is equal to zero. At the same time, existence of a non-atomic idempotent $0 \neq e \in X$, $\mu(e) < \infty$ for which the measure topology in $e \cdot X$ coincides with the topology generated by the F-norm implies the existence of a non-zero derivation $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to X$. Examples of such ideal F-normed spaces are algebras

$\mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ with non-atomic measure spaces (Ω,μ) equipped with the F-norm $\|f\|_\Omega = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}d\mu$. For such ideal F-spaces there is at least a continuum of pairwise distinct non-zero derivations $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to (\mathscr{L}_0(\Omega,\mu), \|\cdot\|_\Omega)$.

Key words: derivation, an ideal space, F-norm.

References

1. *Ber A. F., Chilin V. I., and Sukochev F. A.* Non-trivial derivations on commutative regular algebras. *Extracta Math.*, 2006, vol. 21, no. 2, pp. 107–147.
2. *Ber A. F.* Derivations on commutative regular algebras, *Sib. Adv. Math.*, 2011, vol. 21, no. 3, pp. 161–169. DOI: 10.3103/S1055134411030011.
3. *Ber A. F., Chilin V. I. and Levitina G. B.* Derivations with values in quasi-normed bimodules of locally measurable operators, *Sib. Adv. Math.*, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 169–178. DOI: 10.3103/S1055134415030025.
4. *Bennet C., Sharpley R. Interpolation of Operators.* Academic Press, Inc., 1988.
5. *Chilin V. I., Levitina G. B.* Derivations on ideals in commutative AW^*-algebras, *Sib. Adv. Math.*, 2014, vol. 24, no. 1, pp. 26–42. DOI: 10.3103/S1055134414010040.
6. *Dykema K., Sukochev F., and Zanin D. Algebras of Log-Integrable Functions and Operators.* ArXiv: 1509.03360v1 [math.OA]. 10 Sep 2015. 11 p.
7. *Kalton N. J., Peck N. T., and Roberts James W. An F-Space Sampler.* Cambridge, Cambridge University Press, 1984. London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 89.
8. *Kusraev A. G. Dominated Operators.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000. Math. and its Appl., vol. 519.
9. *Kusraev A. G.* Automorphisms and derivations on a universally complete complex f-algebra, *Siberian Mathematical Journal*, 2006, vol. 47, no. 1, pp. 77–85. DOI: 10.1007/s11202-006-0010-0.
10. *Rudin W. Functional Analysis.* New York, McGraw-Hill Book Company, 1973.
11. *Sakai S. C^*-Algebras and W^*-Algebras.* New York, Springer-Verlag, 1971.
12. *Vladimirov D. A. Boolean Algebras in Analysis.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2002. Math. and its Appl., vol. 540.
13. *Vulikh B. Z. Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces.* New York, Gordon and Breach, 1967.

Received 7 December, 2017

Alimov Akrom Akbarovich
Tashkent Islamic University,
Vice-Rector, Associate Professor
11 Abdulla Kodiriy Ave., Tashkent, 100011, Uzbekistan
E-mail: alimovakrom63@yandex.ru

Chilin Vladimir Ivanovich
National University of Uzbekistan, *Professor*
Vuzgorodok, Tashkent, 100011, Uzbekistan
E-mail: vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 30–37

УДК **517.98**

THE UNIQUENESS OF THE SYMMETRIC STRUCTURE IN IDEALS OF COMPACT OPERATORS

B. R. Aminov, V. I. Chilin

This paper is dedicated to the memory of Professor
Inomjon Gulomjonovich Ganiev

Let H be a separable infinite-dimensional complex Hilbert space, let $\mathscr{L}(H)$ be the C^*-algebra of bounded linear operators acting in H, and let $\mathscr{K}(H)$ be the two-sided ideal of compact linear operators in $\mathscr{L}(H)$. Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a symmetric sequence space, and let $\mathscr{C}_E := \{x \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) : \{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in E\}$ be the proper two-sided ideal in $\mathscr{L}(H)$, where $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ are the singular values of a compact operator x. It is known that $\mathscr{C}_E$ is a Banach symmetric ideal with respect to the norm $\|x\|_{\mathscr{C}_E} = \|\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\|_E$.
A symmetric ideal $\mathscr{C}_E$ is said to have a unique symmetric structure if $\mathscr{C}_E = \mathscr{C}_F$, that is $E = F$, modulo norm equivalence, whenever $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ is isomorphic to another symmetric ideal $(\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$. At the Kent international conference on Banach space theory and its applications (Kent, Ohio, August 1979), A. Pelczynsky posted the following problem:
(P) Does every symmetric ideal have a unique symmetric structure?
This problem has positive solution for Schatten ideals $\mathscr{C}_p$, $1 \leqslant p < \infty$ (J. Arazy and J. Lindenstrauss, 1975). For arbitrary symmetric ideals problem (P) has not yet been solved. We consider a version of problem (P) replacing an isomorphism $U : (\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E}) \to (\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ by a positive linear surjective isometry. We show that if F is a strongly symmetric sequence space, then every positive linear surjective isometry $U : (\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E}) \to (\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ is of the form $U(x) = u^*xu$, $x \in \mathscr{C}_E$, where $u \in \mathscr{L}(H)$ is a unitary or antiunitary operator. Using this description of positive linear surjective isometries, it is established that existence of such an isometry $U : \mathscr{C}_E \to \mathscr{C}_F$ implies that $(E, \|\cdot\|_E) = (F, \|\cdot\|_F)$.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11394.

Mathematical Subject Classification (2010): 46L52, 46B04.

Key words: symmetric ideal of compact operators, uniqueness of a symmetric structure, positive isometry.

1. Introduction

Let $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ be a Banach lattice of all sequences $a = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ of real numbers convergent to zero, where $\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$ ($\mathbb{N}$ is the set of natural numbers). If $a = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$, then a non-increasing rearrangement $a^* = \{\xi_n^*\}$ of a sequence a is a sequence $\{|\xi_n|\}$ in decreasing order.

A non-zero linear subspace $E \subset c_0$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called *symmetric sequence space*, if the conditions $b \in E$, $a \in c_0$, $a^* \leqslant b^*$, imply that $a \in E$ and $\|a\|_E \leqslant \|b\|_E$.

Let H be a complex separable infinite-dimensional Hilbert space and let $\mathscr{L}(H)$ be an C^*-algebra of all bounded linear operators acting in H. We denote by $\mathscr{K}(H)$ (respectively, $\mathscr{F}(H)$) the two-sided ideal in $\mathscr{L}(H)$ of all compact (respectively, finite rank) linear operators. It is well known that $\mathscr{F}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{I} \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$ for any proper two-sided ideal $\mathscr{I}$ in $\mathscr{L}(H)$ (see, for example, [10, Proposition 2.1]).

If $(E, \|\cdot\|_E)$ is a symmetric sequence space, then the set $\mathscr{C}_E := \{x \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) : \{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in E\}$ is a proper two-sided ideal in $\mathscr{L}(H)$, where $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ are the singular values of x (i.e. the eigenvalues of $(x^*x)^{1/2}$ in decreasing order) [10, Theorem 2.5]. In addition, $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ is a Banach space with respect to the norm $\|x\|_{\mathscr{C}_E} = \|\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\|_E$ [14, Ch. 3, § 3.5]. In this case we say that $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ is a *symmetric ideal* (cf. [12, Ch. III]).

It is said that $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ to have *a unique symmetric structure*, if whenever $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ is isomorphic to another symmetric ideal $(\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$, then necessarily, $\mathscr{C}_E = \mathscr{C}_F$, i.e. $E = F$, with equivalent norms.

In Kent Conference (International Conference on Banach Space Theory and its Applications, Kent, Ohio, August 1979), A. Pelczynsky raised the following problem:

(P): Does every symmetric ideal have a unique symmetric structure?

In [3] it is proved that symmetric ideals $\mathscr{C}_p = \mathscr{C}_{l_p}$, $1 \leqslant p < \infty$, have unique symmetric structure. In addition, J. Arazy proved (see [4, Corollary 5.9]) the following

Theorem 1. *If a symmetric sequence space E does not contain a subspace isomorphic to c_0 and a space E does not contain a complemented subspace isomorphic to l_2, then $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ has a unique symmetric structure.*

Using the Theorem 1 it is easy to prove that for the Lorentz ideals the problem (P) is solved positively for $q \neq 2$ (see Section 2 below). If $q = 2$, then answer is also positive (O. Sadovskaya and F. Sukochev (unpublished)). At the same time, for arbitrary ideals the problem (P) has not yet been solved.

In this paper we consider the version of problem (P) (we call the problem (P^+)) in the case when isomorphism $U : (\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E}) \to (\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ is replaced by positive linear bijective isometry. We solve the problem (P^+) in the class of strongly symmetric ideals of compact operators.

2. Preliminaries

Let $p, q \in [1; \infty)$, and let

$$l_{p,q} = \left\{ a = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \ \|a\|_{p,q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n^*)^q \left(n^{\frac{q}{p}} - (n-1)^{\frac{q}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

be the Lorentz sequence space. It is known that $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ is a symmetric sequence space $(1 \leqslant q \leqslant p < \infty)$, in addition,

$$l_{p,p} = l_p = \left\{ \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0,\ \|\{\xi_n\}\|_{p,p} = \|\{\xi_n\}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

If $1 < p < q < \infty$, then $\|\cdot\|_{p,q}$ is a complete quasinorm on the vector lattice $l_{p,q}$; moreover, on $l_{p,q}$ there exists a norm $\|\cdot\|_{(p,q)}$, which equivalent to the quasinorm $\|\cdot\|_{p,q}$, such that $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ is a symmetric sequence space [5, Ch. 4, § 4].

The following important property of the Lorentz sequence space is proved in the paper [7].

Theorem 2. *If $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, then every infinite-dimensional closed subspace in $l_{p,q}$ has a closed subspace that is isomorphic to l_q.*

Consider the Lorentz symmetric ideal in $\mathscr{L}(H)$ defined by the equality

$$C_{p,q} = \{x \in \mathscr{K}(H) : \{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p,q}\},$$

equipped with the norm $\|x\|_{p,q} = \|\{s_n(x)\}\|_{p,q}$, $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ (respectively, $\|x\|_{p,q} = \|\{s_n(x)\}\|_{(p,q)}$, if $1 < p < q < \infty$).

Using Theorems 1 and 2, we can give a positive solution of the problem (P) for symmetric ideal $(C_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$, $q \neq 2$.

Theorem 3. *Let $1 < p, q < \infty$, $q \neq 2$. If $(C_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ is isomorphic to symmetric ideal $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$, then $C_{p,q} = \mathscr{C}_E$, i. e. $E = l_{p,q}$, with equivalent norms.*

$\lhd$ It is known that the Lorentz sequences space $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ (respectively, $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$) is reflexive if $1 < p, q < \infty$. And the conjugate space $(l_{p,q})^*$ is isomorphic to $l_{r,s}$, where $1 < r, s < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1$ (see, for example, [5, Ch. 4, § 4, Theorem 4.7]). By Theorems 5.6, 5.11 [11] we have that the Lorentz symmetric ideal $(C_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$, $1 < p, q < \infty$, is reflexive too, in addition, the conjugate space $(C_{p,q})^*$ is isomorphic to $C_{r,s}$, where $1 < r, s < \infty$, and $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1$. Consequently, $(C_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$, $1 < p, q < \infty$, does not contain a subspace isomorphic to c_0. Using now Theorems 1, 2, and the inequality $q \neq 2$, we have a positive solution of the problem (P). $\rhd$

Let $S_{p,q}$ denote the closed subspace of $C_{p,q}$ consisting of all block diagonal matrices $x = \operatorname{diag}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ with x_k a $k \times k$-matrix for all k. By Corollary 5.8 [4] in the case when $S_{p,q}$ is not isomorphic to $C_{p,q}$ the Banach symmetric ideal $C_{p,q}$ has a unique symmetric structure. In an unpublished paper of O. Sadovskaya and F. Sukochev it is proved that $S_{p,q}$ it is not embedded in Banach spaces $C_{p,q}$, in particular, $S_{p,q}$ is not isomorphic to $C_{p,q}$ for all $1 < p, q < \infty$. Therefore, in the case $q = 2$, the Theorem 3 is true too.

Since the Banach spaces $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ and $(l_{r,s}, \|\cdot\|_{r,s})$ are isomorphic if and only if $p = r$, $q = s$ (see [10]), Theorem 3 implies the following isomorphic classification of Banach symmetric ideal $(C_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$.

Corollary 1. *Let $1 < p, q, r, s < \infty$. The Banach spaces $(C_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ and $(C_{r,s}, \|\cdot\|_{r,s})$ are isomorphic if and only if $p = r$, $q = s$.*

It should be noted that the Banach space $C_{2,2} = C_2$ is a separable Hilbert space and it is isomorphic to $l_2 = l_{2,2}$, in particular, C_2 has local unconditional structure. For all other variants of the values of the parameters p, q the Lorentz symmetric ideal $(C_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ has not local unconditional structure [13]. Since a Banach lattice has a locally unconditional structure, it follows that spaces $l_{p,q}$ and $C_{p,q}$ are not isomorphic, if $1 \leqslant p, q < \infty$, $p \neq 1$ and $q \neq 2$, or $p \neq 2$.

Define in $\mathscr{K}(H)$ (respectively, in c_0) the Hardy–Littlewood–Polya partial order $x \prec\prec y$ (respectively, $\{\xi\}_{n=1}^{\infty} \prec\prec \{\eta\}_{n=1}^{\infty}$), if

$$\sum_{n=1}^{k} s_n(x) \leqslant \sum_{n=1}^{k} s_n(y) \quad \left(\text{respectively, } \sum_{n=1}^{k} \xi_n^* \leqslant \sum_{n=1}^{k} \eta_n^*\right) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

It is clear that $x \prec\prec y \Leftrightarrow \{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \prec\prec \{s_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$.

The Hardy–Littlewood–Polya partial order has the following important property

Proposition 1 [9, Proposition 2.1]. *If $x, y \in \mathscr{K}(H)$, $x = x^*$, $y \geqslant 0$, and $-y \leqslant x \leqslant y$, then $x \prec\prec y$.*

A symmetric ideal (a symmetric sequence space) $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ (respectively, $(E, \|\cdot\|_E)$) is called *a strongly symmetric ideal* (respectively, *a strongly symmetric sequences space*) if the condition $x \prec\prec y$, $x, y \in \mathscr{C}_E$ (respectively, $a \prec\prec b$, $a, b \in E$) implies that $\|x\|_{\mathscr{C}_E} \leqslant \|y\|_{\mathscr{C}_E}$ (respectively, $\|a\|_E \leqslant \|b\|_E$). It is clear that a symmetric ideal $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ is a strongly symmetric ideal if and only if a symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E))$ is a strongly symmetric sequence space.

The Proposition 1 implies the following.

Corollary 2. *Let $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ be a strongly symmetric ideal. If $x, y \in \mathscr{C}_E$, $y \geqslant 0$, $x^* = x$ and $-y \leqslant x \leqslant y$, then $\|x\|_{\mathscr{C}_E} \leqslant \|y\|_{\mathscr{C}_E}$.*

3. Description of positive isometries of symmetric ideals

In this section we give a description of positive linear bijective isometry $U : (\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E}) \to (\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$, when $\mathscr{C}_F$ is a strongly symmetric ideal.

The following Proposition establishes positivity of the inverse mapping of positive surjective isometry.

Proposition 2. *Let $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ be a symmetric ideal and let $(\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ be a strongly symmetric ideal. Let $U\colon \mathscr{C}_E \to \mathscr{C}_F$ be a positive linear surjective isometry. Then an isometry U^{-1} is also positive.*

$\lhd$ Let $x \in \mathscr{C}_E$ and $U(x) \geqslant 0$. Since U is a positive surjective mapping it follows that $U(y^*) = U(y)^*$ for all $y \in \mathscr{C}_E$. Hence $x^* = x$. Let x_+ and x_- be a positive and negative parts of an operator x. It is clear that $x_+, x_- \in \mathscr{C}_E$. If $x_+ = 0$, then $U(x) \leqslant 0$. Consequently, $U(x) = 0$, which implies $x = 0$.

Let now $x_+ \neq 0$. Set $y_1 = U(x_+)$ and $y_2 = U(x_-)$. We have that

$$y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0 \quad \text{and} \quad y = y_1 - y_2 = U(x) \geqslant 0.$$

In addition,

$$y_1 + y_2 = U(|x|) \quad \text{and} \quad \|U(|x|)\|_{\mathscr{C}_F} = \|\,|x|\,\|_{\mathscr{C}_E} = \|x\|_{\mathscr{C}_E}.$$

Using mathematical induction, we show that

$$\|x_+ + kx_-\|_{\mathscr{C}_E} = \|y_1 + ky_2\|_{\mathscr{C}_F} \leqslant \|x\|_{\mathscr{C}_E} \tag{1}$$

for all $k \in \mathbb{N}$. If $k = 1$, then the inequality (1) is obvious. Suppose that it is true for $k = n$. Then

$$-(y_1 + ny_2) \leqslant (y_1 - y_2) - ny_2 = y_1 - (n+1)y_2 \leqslant y_1 + ny_2.$$

By Proposition 1 we have that $y_1 - (n+1)y_2 \prec\prec y_1 + ny_2$. Since $(\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ is a strongly symmetric ideal it follows that (see Corollary 2)

$$\|y_1 - (n+1)y_2\|_{\mathscr{C}_F} \leqslant \|y_1 + ny_2\|_{\mathscr{C}_F} \leqslant \|x\|_{\mathscr{C}_E}.$$

Thus

$$\begin{aligned} \|y_1 + (n+1)y_2\|_{\mathscr{C}_F} &= \|x_+ + (n+1)x_-\|_{\mathscr{C}_E} = \|\,|x_+ - (n+1)x_-|\,\|_{\mathscr{C}_E} \\ &= \|x_+ - (n+1)x_-\|_{\mathscr{C}_E} = \|y_1 - (n+1)y_2\|_{\mathscr{C}_F} \leqslant \|x\|_{\mathscr{C}_E}. \end{aligned}$$

Therefore the inequality (1) holds for all $k \in \mathbb{N}$. Since

$$k\|x_-\|_{\mathscr{C}_E} \leqslant \|x_+ + kx_-\|_{\mathscr{C}_E} \leqslant \|x\|_{\mathscr{C}_E} \quad \text{for all} \quad k \in \mathbb{N},$$

it follows that $\|x_-\|_{\mathscr{C}_E} = 0$, that is $x \geqslant 0$. $\rhd$

Remark 1. The proof of Proposition 2 is analogous to the proof of Theorem 1 in [1], where the positivity of the inverse mapping for isometries of Banach lattices is established.

Theorem 4. *Let $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ be a symmetric ideal and let $(\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ be a strongly symmetric ideal. Let $U\colon \mathscr{C}_E \to \mathscr{C}_F$ be a positive linear surjective isometry. Then $U(p)$*

(respectively, $U^{-1}(e)$) is an one-dimensional projection for any one-dimensional projection $p \in \mathscr{F}(H)$ (respectively, $e \in \mathscr{F}(H)$).

$\lhd$ Suppose that $U(p) = y$ is not a rank 1 operator. Since $y \geqslant 0$, $y \in \mathscr{C}_F$ it follows that there exist pairwise orthogonal one-dimensional projections $q_1, q_2 \in \mathscr{F}(H)$ and positive numbers λ_1, λ_2 such that $0 < \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \leqslant y$. By Proposition 2 we have that

$$0 < U^{-1}(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2) \leqslant U^{-1}(y) = p.$$

If $U^{-1}(q_i) = x_i$, then $0 < \lambda_i x_i \leqslant p$, $i = 1, 2$. Since p is an one-dimensional projection, it follows that $\lambda_i x_i = \gamma_i p$ for some $\gamma_i > 0$. Consequently, $q_i = U(x_i) = U(\frac{\lambda_i}{\gamma_i} p) = \frac{\lambda_i}{\gamma_i} y$, $i = 1, 2$, which is impossible, because $q_1 q_2 = 0$.

Therefore, $U(p) = \lambda q$ for some one-dimensional projection q and positive number λ.

Now using the inequalities

$$1 = \|p\|_{\mathscr{C}_E} = \|U(p)\|_{\mathscr{C}_F} = \lambda \|q\|_{\mathscr{C}_F} = \lambda,$$

we have that $\lambda = 1$. Consequently, $U(p) = q$.

Similarly $U^{-1}(e)$ is an one-dimensional projection for any one-dimensional projection $e \in \mathscr{F}(H)$. $\rhd$

Corollary 3. *Let $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$, $(\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ and $U\colon \mathscr{C}_E \to \mathscr{C}_F$ be the same as in Theorem 4. Then $U(\mathscr{F}(H)) = \mathscr{F}(H)$.*

A linear bijective mapping $\varphi\colon \mathscr{L}(H) \to \mathscr{L}(H)$ is called an *Jordan isomorphism*, if $\varphi(x^2) = (\varphi(x))^2$ and $\varphi(x^*) = (\varphi(x))^*$ for all $x \in \mathscr{L}(H)$. If $\varphi\colon \mathscr{L}(H) \to \mathscr{L}(H)$ is an Jordan isomorphism, then there exists an unitary or an antiunitary operator $u \in \mathscr{L}(H)$ such that $\varphi(x) = u^* x u$ for all $x \in \mathscr{L}(H)$ (see, for example, [6, Ch. 3, § 3.2.1]).

Let H be a k-dimensional complex Hilbert space. In this case $\mathscr{L}(H) = \mathscr{K}(H)$. If $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ is a symmetric sequence space, then the set

$$\mathscr{C}_E(k) := \{x \in \mathscr{K}(H) : \ \{s_1(x), \dots, s_k(x), 0, \dots\} \in E\} = \mathscr{L}(H)$$

is a k-dimensional simmetric space with respect to the norm

$$\|x\|_{\mathscr{C}_E(k)} = \|\{s_1(x), \dots, s_k(x), 0, \dots\}\|_E.$$

Using the description of all positive linear surjective isometries of strongly symmetric spaces $E(M, \tau)$ in the case a finite von Neumann algebra M and a finite trace τ [8, Theorem 3.1], we have the following

Theorem 5. *Let $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ be a symmetric sequence space with a strongly symmetric norm. Let $U\colon \big(\mathscr{C}_E(k), \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E(k)}\big) \to \big(\mathscr{C}_E(k), \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E(k)}\big)$ be a positive linear surjective isometry. Then there exists an Jordan isomorphism $\varphi\colon \mathscr{L}(H) \to \mathscr{L}(H)$ such that $U(x) = \varphi(x)$ for all $x \in \mathscr{C}_E(k) = \mathscr{L}(H)$. In particular, $U(x)U(y) = U(y)U(x)$ if and only if $xy = yx$.*

The following Theorem gives a description of positive linear bijective isometries $U : (\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E}) \to (\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$, when $\mathscr{C}_F$ is a strongly symmetric ideal.

Theorem 6 (cf. [2, 16])**.** *Let $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ be a symmetric ideal and $(\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ be a strongly symmetric ideal. Let $U\colon \mathscr{C}_E \to \mathscr{C}_F$ be a positive linear surjective isometry. Then there exists an unitary or antiunitary operator $u \in \mathscr{L}(H)$ such that $U(x) = u^* x u$ for all $x \in \mathscr{C}_E$.*

$\lhd$ By Proposition 2 we have that an inverse isometry U^{-1} is also a positive map. Let $p, e, q, f \in \mathscr{F}(H)$ be an one-dimensional projections such that $U(p) = q$, $U(e) = f$ (see Theorem 4). If $p \cdot e = 0$, then by Theorem 5 we have that $q \cdot f = 0$.

Let $\{p_n\}_{n=1}^k \subset \mathscr{F}(H)$ be a pairwise orthogonal one-dimensional projections and $x = \sum_{n=1}^k \lambda_n p_n \in \mathscr{F}(H)$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, \dots, k$. Since $U(p_n) \cdot U(p_m) = 0$, $n \neq m$, $n, m = 1, \dots, k$, it follows that

$$U(x^2) = U\left(\sum_{n=1}^k \lambda_n^2 p_n\right) = \sum_{n=1}^k \lambda_n^2 U(p_n) = U(x)^2$$

and

$$tr(U(x)) = \sum_{n=1}^k \lambda_n tr(U(p_n)) = \sum_{n=1}^k \lambda_n = tr(x).$$

Therefore $U(x^2) = U(x)^2$ and $tr(U(x)) = tr(x)$ for all $x^* = x \in \mathscr{F}(H)$. In addition, U is a bijection of the set $\mathscr{P}(H)$ of all one-dimensional projections.

If $p, e, q, f \in \mathscr{P}(H)$ and $U(p) = q$, $U(e) = f$, then

$$\begin{aligned} 2tr(pe) &= tr(pe) + tr(ep) = tr\left((p+e)^2 - p - e\right) tr\left(U\left((p+e)^2\right)\right) - 2 \\ &= tr\left(U\left((p+e)^2\right)\right) - 2 = tr\left((q+f)^2\right) - 2 = 2tr(qf). \end{aligned}$$

Consequently, $tr(pe) = tr(U(p)U(e))$ for all $p, e \in \mathscr{P}(H)$. Now using Theorem 3.2.8 [6, Ch. 3, § 3.2] we get that there exists an unitary or antiunitary operator u such that $U(p) = u^* p u$ for all $p \in \mathscr{P}(H)$. Thus $U(x) = u^* x u$ for all $x \in \mathscr{F}(H)$.

Let $0 \leqslant x \in \mathscr{C}_E$ and $0 \leqslant x_n \in \mathscr{F}(H)$ be such a sequence that $x_n \uparrow x$. Since $U\colon \mathscr{C}_E \to \mathscr{C}_E$ is an order isomorphism (see Proposition 2) it follows that $u^* x_n u = U(x_n) \uparrow U(x)$. Consequently, $U(x) = u^* x u$ for all $x \in \mathscr{C}_E$. $\rhd$

4. Pelchinsky problem with respect positive isometries

Consider now the following version of problem (P):

(P^+): Let $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ and $(\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ are symmetric ideals and let there exists a positive isometry $U : (\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E}) \to (\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$. Is it true that then $(E, \|\cdot\|_E) = (F, \|\cdot\|_F)$?

Below we give a solution of the problem (P^+) for the class of strongly symmetric ideals of compact operators.

Theorem 7. *Let $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ be a symmetric ideal and let $(\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ be a strongly symmetric ideal. Let $U\colon \mathscr{C}_E \to \mathscr{C}_F$ be a positive linear surjective isometry. Then $(E, \|\cdot\|_E) = (F, \|\cdot\|_F)$.*

$\lhd$ By Theorem 6 there exists an unitary or an antiunitary operator $u \in \mathscr{L}(H)$ such that $U(x) = u^* x u$ for all $x \in \mathscr{C}_E$. Fix an orthonormal basis $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ in a separable Hilbert space H. Let $p_n \in \mathscr{P}(H)$, $p_n(\psi_n) = \psi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Consider real subspace $G_E = \{x = \sum_{n=1}^\infty \xi_n p_n : \xi_n \in \mathbb{R}, x \in \mathscr{C}_E\}$ in the space $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$. It is clear that $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in E$ and $\|x\|_{\mathscr{C}_E} = \|\{\xi_n\}\|_E$ for all $x = \sum_{n=1}^\infty \xi_n p_n \in G_E$. Consequently, the correspondence $G_E \ni x \leftrightarrow \{\xi_n\} \in E$ identifies the Banach spaces $(G_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ and $(E, \|\cdot\|_E)$.

Since u is an unitary or antiunitary operator it follows that $\upsilon_n = u^* \psi_n u$, $n \in \mathbb{N}$, is an orthonormal basis in a Hilbert space H. Let $q_n \in \mathscr{P}(H)$, $q_n(\upsilon_n) = \upsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$. Set $G_F = \left\{x = \sum_{n=1}^\infty \eta_n q_n : \eta_n \in \mathbb{R}, x \in \mathscr{C}_F\right\}$. It is clear that the correspondence $G_F \ni x \leftrightarrow \{\eta_n\} \in F$ identifies the Banach spaces $(G_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ and $(F, \|\cdot\|_F)$. Since $G_F = u^* G_E u$ we get that $(E, \|\cdot\|_E) = (F, \|\cdot\|_F)$. $\rhd$

References

1. *Abramovich Yu. A.* Isometries of norm latties // Convex Anal. and Related Problems.—1988.—Vol. 43 (60).—P. 74–80 (in Russian).
2. *Aminov B. R., Chilin V. I.* Isometries of perfect norm ideals of compact operators // Studia Math.—2018.—Vol. 241 (1).—P. 87–99. DOI: 10.4064/sm170306-19-4.
3. *Arazy J., Lindenstrauss J.* Some linear topological properties of the spaces C_p of operators on Hilbert space // Composite Math.—1975.—Vol. 30.—P. 81–111. DOI: 10.1016/0022-1236(81)90052-5.
4. *Arazy J.* Basic sequences, embeddings, and the uniqueness of the symmetric structure in unitary matrix spaces // J. Func. Anal.—1981.—Vol. 40.—P. 302–340.
5. *Bennet C., Sharpley R.* Interpolation of Operators.—Acad. Press, INC, 1988.—483 p.
6. *Bratteli O., Robinson D. W.* Operator Algebras and Quantum Statistical Mechaniks.—N. Y.–Heidelber–Berlin: Springer-Verlag, 1979.
7. *Carothers N., Dilworth S.* Subspaces of $L_{p,q}$ // Proc. Amer. Math. Soc.—1988.—Vol. 104, № 2.—P. 537–545.
8. *Chilin V. I., Medzhitov A. M., and Sukochev F. A.* Isometries of non-commutative Lorentz spaces // Math. Z.—1989.—Vol. 200.—P. 527–545.
9. *Chilin V., Krygin A., and Sukochev F.* Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators // Integr. Equat. Oper. Theory.—1992.—Vol. 15.—P. 186–226.
10. *Chilin V. I., Sadovskaya O. V.* Isomorphic classification of spaces of Lorentz sequences // Uzbek Math. J.—2017.—№ 3.—P. 169–173 (in Russian).
11. *Dodds P. G., Dodds T. K., and Pagter B.* Noncommutative Köthe duality // Trans. Amer. Math. Soc.—1993.—Vol. 339 (2).—P. 717–750. DOI: 10.2307/2154295.
12. *Gohberg I. C., Krein M. G.* Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1969.—(Translations of Math. Monographs; Vol. 18).
13. *Lewis D. R.* An isomorphic characterization of the Schmidt class // Composito Mathematica.—1975.—Vol. 30 (3).—P. 293–297.
14. *Lord S., Sukochev F., and Zanin D.* Singular Traces. Theory and Applications.—Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2013.
15. *Simon B.* Trace Ideals and their Applications / 2nd ed.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005.—(Math. Surveys and Monographs; Vol. 120).
16. *Sourour A.* Isometries of norm ideals of compact operators // J. Funct. Anal.—1981.—Vol. 43.—P. 69–77. DOI: 10.1016/0022-1236(81)90038-0.

Received 29 November, 2017

Aminov Behzod Rasulovich
National University of Uzbekistan, *Phd student*
Vuzgorodok, Tashkent, 100174, Uzbekistan
E-mail: `aminovbehzod@gmail.com`

Chilin Vladimir Ivanovich
National University of Uzbekistan, *Professor*
Vuzgorodok, Tashkent, 100174, Uzbekistan
E-mail: `vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz`

ЕДИНСТВЕННОСТЬ СИММЕТРИЧНОЙ СТРУКТУРЫ В ИДЕАЛАХ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аминов Б. Р., Чилин В. И.

Пусть H — сепарабельное бесконечномерное комплексное гильбертово пространство, $\mathscr{L}(H)$ — C^*-алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в H, $\mathscr{K}(H)$ — двусторонний идеал в $\mathscr{L}(H)$ всех компактных операторов. Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — симметричное пространство последовательностей, $\mathscr{C}_E := \{x \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) : \{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in E\}$ — собственный двусторонний идеал в $\mathscr{L}(H)$, порожденный $(E, \|\cdot\|_E)$, где $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сингулярные числа компактного оператора x. Известно, что $\mathscr{C}_E$ — банахов симметричный идеал относительно нормы $\|x\|_{\mathscr{C}_E} = \|\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\|_E$.

Говорят, что симметричный идеал $\mathscr{C}_E$ имеет единственную симметричную структуру, если наличие изоморфизма из $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ на другой симметричный идеал $(\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ обязательно влечет равенство $\mathscr{C}_E = \mathscr{C}_F$, т. е. $E = F$, с точностью до эквивалентных норм. На международной конференции по теории банаховых пространств и их приложений (Kent, Ohio, August 1979), А. Пельчинский поставил следующую проблему:
(P): Каждый ли симметричный идеал имеет единственную симметричную структуру?
Эта проблема получила положительное решение в работе J. Arazy и J. Lindenstrauss (1975) для идеалов Шаттена $\mathscr{C}_p$, $1 \leqslant p < \infty$. В случае произвольных симметричных идеалов проблема (P) до сих пор не решена. Мы рассматриваем вариант проблемы (P), заменяя наличие изоморфизма $U : (\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E}) \to (\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ на существование положительной линейной сюръективной изометрии. Мы показываем, что в случае строго симметричного пространства последовательностей F, каждая положительная линейная сюръективная изометрия $U : (\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E}) \to (\mathscr{C}_F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_F})$ имеет следующий вид: $U(x) = u^*xu$ для всех $x \in \mathscr{C}_E$, где $u \in \mathscr{L}(H)$ есть унитарный или антиунитарный оператор. Используя это описание положительных линейных сюръективных изометрий, доказывается, что наличие такой изометрии $U : \mathscr{C}_E \to \mathscr{C}_F$ влечет равенство $(E, \|\cdot\|_E) = (F, \|\cdot\|_F)$.

Ключевые слова: симметричный идеал компактных операторов, единственность симметричной структуры, положительная изометрия.

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 38–49

УДК **517.98**

2-LOCAL DERIVATIONS ON ALGEBRAS OF MATRIX-VALUED FUNCTIONS ON A COMPACTUM

Sh. A. Ayupov, F. N. Arzikulov

This paper is dedicated to the memory
of Professor Inomjon Gulomjonovich Ganiev

The present paper is devoted to 2-local derivations. In 1997, P. Ŝemrl introduced the notion of 2-local derivations and described 2-local derivations on the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on the infinite-dimensional separable Hilbert space H. After this, a number of paper were devoted to 2-local maps on different types of rings, algebras, Banach algebras and Banach spaces. A similar description for the finite-dimensional case appeared later in the paper of S. O. Kim and J. S. Kim. Y. Lin and T. Wong described 2-local derivations on matrix algebras over a finite-dimensional division ring. Sh. A. Ayupov and K. K. Kudaybergenov suggested a new technique and have generalized the above mentioned results for arbitrary Hilbert spaces. Namely they considered 2-local derivations on the algebra $B(H)$ of all linear bounded operators on an arbitrary Hilbert space H and proved that every 2-local derivation on $B(H)$ is a derivation. Then there appeared several papers dealing with 2-local derivations on associative algebras. In the present paper 2-local derivations on various algebras of infinite dimensional matrix-valued functions on a compactum are described. We develop an algebraic approach to investigation of derivations and 2-local derivations on algebras of infinite dimensional matrix-valued functions on a compactum and prove that every such 2-local derivation is a derivation. As the main result of the paper it is established that every 2-local derivation on a $*$-algebra $C(Q, M_n(F))$ or $C(Q, \mathscr{N}_n(F))$, where Q is a compactum, $M_n(F)$ is the $*$-algebra of infinite dimensional matrices over complex numbers (real numbers or quaternoins) defined in section 1, $\mathscr{N}_n(F)$ is the $*$-subalgebra of $M_n(F)$ defined in section 2, is a derivation. Also we explain that the method developed in the paper can be applied to Jordan and Lie algebras of infinite dimensional matrix-valued functions on a compactum.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11396.

Mathematical Subject Classification (2010): 46L57, 46L40.

Key words: derivation, 2-local derivation, associative algebra, C^*-algebra, von Neumann algebra.

Introduction

The present paper is devoted to 2-local derivations on algebras. Recall that a 2-local derivation is defined as follows: given an algebra A, a map $\Delta : A \to A$ (not linear in general) is called a 2-local derivation if for every x, $y \in A$, there exists a derivation $D_{x,y} : A \to A$ such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$ and $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$.

In 1997, P. Šemrl introduced the notion of 2-local derivations and described 2-local derivations on the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on the infinite-dimensional separable Hilbert space H. A similar description for the finite-dimensional case appeared later in [7]. In the paper [8] 2-local derivations have been described on matrix algebras over finite-dimensional division rings.

In [5] the authors suggested a new technique and have generalized the above mentioned results of [10] and [7] for arbitrary Hilbert spaces. Namely they considered 2-local derivations on the algebra $B(H)$ of all linear bounded operators on an arbitrary (no separability is assumed) Hilbert space H and proved that every 2-local derivation on $B(H)$ is a derivation. After it is also published a number of papers devoted to 2-local derivations on associative algebras.

In the present paper we also suggest another technique and apply to various associative algebras of infinite dimensional matrix-valued functions on a compactum. As a result we will have that every 2-local derivation on such an algebra is a derivation. As the main result of the paper it is established that every 2-local derivation on a $*$-algebra $C(Q, M_n(F))$ or $C(Q, \mathcal{N}_n(F))$, where Q is a compactum, $M_n(F)$ is the $*$-algebra of infinite dimensional matrices over complex numbers (real numbers or quaternoins) defined in Section 1, $\mathcal{N}_n(F)$ is the $*$-subalgebra of $M_n(F)$ defined in Section 2, is a derivation. Also we explain that the method developed in the paper can be applied to Jordan and Lie algebras of infinite dimensional matrix-valued functions on a compactum.

We conclude that there are a number of various associative algebras of infinite dimensional matrix-valued functions on a compactum every 2-local derivation of which is a derivation. The main results of this paper are new. The method of proving of these results presented in this paper is universal and can be applied to associative, Lie and Jordan algebras. Its respective modification allows to prove similar problem for Jordan and Lie algebras of infinite dimensional matrix-valued functions on a compactum. In this sense our method is useful.

1. Preliminaries

Let M be an associative algebra.

Definition. A linear map $D : M \to M$ is called a derivation, if $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ for every two elements $x, y \in M$.

A map $\Delta : M \to M$ is called a 2-local derivation, if for every two elements $x, y \in M$ there exists a derivation $D_{x,y} : M \to M$ such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$, $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$.

It is known that each derivation D on a von Neumann algebra M is an inner derivation, that is there exists an element $a \in M$ such that

$$D(x) = ax - xa, \quad x \in M.$$

Therefore for a von Neumann algebra M the above definition is equivalent to the following one: A map $\Delta : M \to M$ is called a 2-local derivation, if for every two elements $x, y \in M$ there exists an element $a \in M$ such that $\Delta(x) = ax - xa$, $\Delta(y) = ay - ya$.

Let throughout the paper n be an arbitrary infinite cardinal number, Ξ be a set of indices of the cardinality n. Let $\{e_{ij}\}$ be a set of matrix units such that e_{ij} is a $n \times n$-dimensional matrix, i. e. $e_{ij} = (a^{\alpha\beta})_{\alpha\beta\in\Xi}$, the (i, j)-th component of which is 1, i. e. $a_{ij} = 1$, and the rest components are zeros.

Let $\{m_\xi\}$ be a set of $n \times n$-dimensional matrixes and $m_\xi = (m_\xi^{\alpha\beta})_{\alpha\beta\in\Xi}$ for every ξ. Then by $\sum_\xi m_\xi$ we denote the matrix whose components are sums of the corresponding components of matrixes of the set $\{m_\xi\}$, i. e.

$$\sum_\xi m_\xi = \left(\sum_\xi m_\xi^{\alpha\beta}\right)_{\alpha\beta\in\Xi}.$$

Here, the maximal quantity of nonzero summands of the sum $\sum_\xi m_\xi^{\alpha\beta}$ is countable.

Let throughout the paper F is the field of complex numbers $\mathbb{C}$ (real numbers $\mathbb{R}$ or quaternion body $\mathbb{H}$) and

$$M_n(F) = \Bigg\{ \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{ij} e_{ij} : (\forall\, i,j : \lambda^{ij} \in F)(\exists\, K \in \mathbb{R}) \\ (\forall\, n \in \mathbb{N})\Big(\forall\, \{e_{kl}\}_{kl=1}^n \subseteq \{e_{ij}\}\Big) \quad \Bigg\| \sum_{kl=1}^n \lambda^{kl} e_{kl} \Bigg\| \leqslant K \Bigg\},$$

where $\|\sum_{kl=1}^n \lambda^{kl} e_{kl}\|$ the norm of the matrix $\sum_{kl=1}^n \lambda^{kl} e_{kl}$ in the finite dimensional C^*-algebra, generated by $\{e_{kl}\}_{kl=1}^n$. It is easy to see that $M_n(F)$ is a vector space over F.

In $M_n(F)$ we introduce an associative multiplication as follows: if

$$x = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{ij} e_{ij}, \quad y = \sum_{i,j\in\Xi} \mu^{ij} e_{ij}$$

are elements of $M_n(F)$ then

$$xy = \sum_{i,j\in\Xi} \Bigg[\sum_{\xi\in\Xi} \lambda^{i\xi} \mu^{\xi j} e_{ij} \Bigg].$$

With respect to this operation $M_n(F)$ becomes an associative algebra and $M_n(F) \cong B(l_2(\Xi))$, where $l_2(\Xi)$ is a Hilbert space over F with elements $\{x_i\}_{i\in\Xi}$, $x_i \in F$ for all $i \in \Xi$, $B(l_2(\Xi))$ is the associative algebra of all bounded linear operators on the Hilbert space $l_2(\Xi)$. Then $M_n(F)$ is a von Neumann algebra of infinite $n \times n$-dimensional matrices over F if $F = \mathbb{C}$ (see [2]) and $M_n(F)$ is a real von Neumann algebra if $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{H}$.

Recall that a Hilbert space H is an infinite dimensional inner product space which is a complete metric space with respect to the metric generated by the inner product [1, Section 1.5].

Similarly, if we take the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on an arbitrary Hilbert space H and if $\{q_i\}$ is an arbitrary maximal orthogonal set of minimal projections of $B(H)$, then $B(H) = \sum_{ij}^{\oplus} q_i B(H) q_j$ (see [4]).

Let throughout the paper X be a hyperstonean compactum, $C(X)$ denote the algebra of all F-valued continuous functions on X and

$$\mathscr{M} = \Bigg\{ \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{ij}(x) e_{ij} : \big(\forall\, i,j : \lambda^{ij}(x) \in C(X)\big)\big(\exists\, K \in \mathbb{R}\big) \\ \big(\forall\, m \in \mathbb{N}\big)\big(\forall\, \{e_{kl}\}_{kl=1}^m \subseteq \{e_{ij}\}\big) \Bigg\| \sum_{kl=1,\dots,m} \lambda^{kl}(x) e_{kl} \Bigg\| \leqslant K \Bigg\},$$

where $\|\sum_{kl=1,\dots,m} \lambda^{kl}(x) e_{kl}\|$ is the norm of $\sum_{kl=1,\dots,m} \lambda^{kl}(x) e_{kl}$ in the C^*-algebra $C(X, \overline{M_n(\mathbb{C})})$, where $\overline{M_n(\mathbb{C})}$ the finite dimensional C^*-algebra, generated by $\{e_{kl}\}_{kl=1}^m$. It is clear that $\overline{M_n(\mathbb{C})} \cong M_n(\mathbb{C})$ and

$$C\big(X, \overline{M_n(\mathbb{C})}\big) = C(X) \otimes \overline{M_n(\mathbb{C})}.$$

The set $\mathscr{M}$ is a vector space with point-wise algebraic operations. The map $\|\cdot\| : \mathscr{M} \to \mathbb{R}_+$ defined as

$$\|a\| = \sup_{\{e_{kl}\}_{kl=1}^n \subseteq \{e_{ij}\}} \Bigg\| \sum_{kl=1}^n \lambda^{kl}(x) e_{kl} \Bigg\|,$$

is a norm on the vector space $\mathscr{M}$, where $a \in \mathscr{M}$ and $a = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{ij}(x)e_{ij}$.

In $\mathscr{M}$ we introduce an associative multiplication as follows: if

$$x = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{ij}(x)e_{ij}, \quad y = \sum_{i,j\in\Xi} \mu^{ij}(x)e_{ij}$$

are elements of $\mathscr{M}$ then

$$xy = \sum_{i,j\in\Xi} \left[\sum_{\xi} \lambda^{i\xi}(x)\mu^{\xi j}(x)e_{ij}\right] \in \mathscr{M}.$$

With respect to this multiplication $\mathscr{M}$ becomes an associative algebra and $\mathscr{M}$ is a real or complex von Neumann algebra of type I_n by Theorem 5 in [4].

Let M be a C^*-algebra, $\Delta : M \to M$ be a 2-local derivation. Now let us show that Δ is homogeneous. Indeed, for each $x \in M$, and for $\lambda \in \mathbb{C}$ there exists a derivation $D_{x,\lambda x}$ such that $\Delta(x) = D_{x,\lambda x}(x)$ and $\Delta(\lambda x) = D_{x,\lambda x}(\lambda x)$. Then

$$\Delta(\lambda x) = D_{x,\lambda x}(\lambda x) = \lambda D_{x,\lambda x}(x) = \lambda\Delta(x).$$

Hence, Δ is homogeneous. At the same time, for each $x \in M$, there exists a derivation D_{x,x^2} such that $\Delta(x) = D_{x,x^2}(x)$ and $\Delta(x^2) = D_{x,x^2}(x^2)$. Then

$$\Delta\big(x^2\big) = D_{x,x^2}\big(x^2\big) = D_{x,x^2}(x)x + xD_{x,x^2}(x) = \Delta(x)x + x\Delta(x).$$

In [6] it is proved that every Jordan derivation on a semi-prime algebra is a derivation. Since M is semi-prime (i. e. $aMa = \{0\}$ implies that $a = \{0\}$), the map Δ is a derivation if it is additive. Therefore, to prove that the 2-local derivation $\Delta : M \to M$ is a derivation it is sufficient to prove that $\Delta : M \to M$ is additive in the proof of Theorem 1.

2. 2-local derivations on some associative algebras of matrix-valued functions

Let Q be a compactum. Then the algebra $C(Q)$ of all continuous complex number-valued functions on Q is a C^*-algebra and by Theorem 1.17.2 in [9] the second dual space $C(Q)^{**}$ is a commutative von Neumann algebra. Hence there exists a hyperstonean compactum X such that $C(Q)^{**} \cong C(X)$. If we take the $*$-algebra $C(Q, M_n(\mathbb{C}))$ of all continuous maps of Q to $M_n(\mathbb{C})$, then we may assume that $C(Q, M_n(\mathbb{C})) \subseteq \mathscr{M}$. In this case the set $\{e_{ij}\}$ of constant functions belongs to $C(Q, M_n(\mathbb{C}))$ and the weak closure of $C(Q, M_n(\mathbb{C}))$ in $\mathscr{M}$ coincides with $\mathscr{M}$. Hence by separately weakly continuity of multiplication every derivation of $C(Q, M_n(\mathbb{C}))$ has a unique extension to a derivation on $\mathscr{M}$ [9, Lemma 4.1.4]. Therefore, if Δ is a 2-local derivation on $C(Q, M_n(\mathbb{C}))$, then for every two elements x, $y \in C(Q, M_n(\mathbb{C}))$ there exists a derivation $D_{x,y} : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$, $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$, i. e. $D_{x,y}$ is a derivation of $\mathscr{M}$ (not only of $C(Q, M_n(\mathbb{C}))$). The following theorem is the key result of this section.

Theorem 1. *Let Δ be a 2-local derivation on $C(Q, M_n(\mathbb{C}))$. Then Δ is a derivation.*

We first prove some lemmas necessary for the proof of Theorem 1.

By the above arguments for every 2-local derivation Δ on $C(Q, M_n(F))$ and for each $x \in C(Q, M_n(F))$ there exist $a \in \mathscr{M}$ such that

$$\Delta(x) = ax - xa.$$

Put
$$e_{ij} := \sum_{\xi,\eta\in\Xi} \lambda^{\xi\eta} e_{\xi\eta},$$
where for all ξ, η, if $\xi = i$, $\eta = j$ then $\lambda^{\xi\eta} = \mathbf{1}$, otherwise $\lambda^{\xi\eta} = 0$, and $\mathbf{1}$ is unit of the algebra $C(Q)$. Let $\{a(ij)\} \subset \mathscr{M}$ be a subset such that
$$\Delta(e_{ij}) = a(ij)e_{ij} - e_{ij}a(ij).$$
for all i, j, let $a^{ij}e_{ij}, a^{ij} \in C(Q)$ be the (i,j)-th component of the element $e_{ii}a(ji)e_{jj}$ of $\mathscr{M}$ for all pairs of different indices i, j and let $\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}$ be the matrix with all such components, the diagonal components of which are zeros.

Lemma 1. *For each pair i, j of different indices the following equality is valid*
$$\triangle(e_{ij}) = \sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ij} - e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta} + a(ij)_{ii}\, e_{ij} - e_{ij}a(ij)_{jj}, \tag{1}$$
where $a(ij)^{ii}$, $a(ij)^{jj}$ are functions in $C(Q)$ which are the coefficients of the Peirce components $e_{ii}a(ij)e_{ii}$, $e_{jj}a(ij)e_{jj}$.

$\lhd$ Let k be an arbitrary index different from i, j and let $a(ij, ik) \in \mathscr{M}$ be an element such that
$$\Delta(e_{ik}) = a(ij, ik)e_{ik} - e_{ik}a(ij, ik) \quad \text{and} \quad \Delta(e_{ij}) = a(ij, ik)e_{ij} - e_{ij}a(ij, ik).$$
Then
$$\begin{aligned} e_{kk}\Delta(e_{ij})e_{jj} &= e_{kk}\big(a(ij, ik)e_{ij} - e_{ij}a(ij, ik)\big)e_{jj} = e_{kk}a(ij, ik)e_{ij} - 0 \\ &= e_{kk}a(ik)e_{ij} - e_{kk}e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{jj} = e_{kk}a_{ki}e_{ij} - e_{kk}e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{jj} \\ &= e_{kk}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ij} - e_{kk}e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{jj} = e_{kk}\left(\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ij} - e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}\right)e_{jj}. \end{aligned}$$
Similarly,
$$e_{kk}\Delta(e_{ij})e_{ii} = e_{kk}\left(\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ij} - e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}\right)e_{ii}.$$
Let $a(ij, kj) \in \mathscr{M}$ be an element such that
$$\Delta(e_{kj}) = a(ij, kj)e_{kj} - e_{kj}a(ij, kj) \quad \text{and} \quad \Delta(e_{ij}) = a(ij, kj)e_{ij} - e_{ij}a(ij, kj).$$
Then
$$\begin{aligned} e_{ii}\Delta(e_{ij})e_{kk} &= e_{ii}\big(a(ij, kj)e_{ij} - e_{ij}a(ij, kj)\big)e_{kk} \\ &= 0 - e_{ij}a(ij, kj)e_{kk} = 0 - e_{ij}a(kj)e_{kk} = 0 - e_{ij}a_{jk}e_{kk} \\ &= e_{ii}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ij}e_{kk} - e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{kk} = e_{ii}\left(\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ij} - e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}\right)e_{kk}. \end{aligned}$$
Also similarly we have
$$e_{jj}\Delta(e_{ij})e_{kk} = e_{jj}\left(\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ij} - e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}\right)e_{kk},$$

$$e_{ii}\Delta(e_{ij})e_{ii} = e_{ii}\left(\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ij} - e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}\right)e_{ii},$$

$$e_{jj}\Delta(e_{ij})e_{jj} = e_{jj}\left(\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ij} - e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}\right)e_{jj}.$$

Hence the equality (1) is valid. $\rhd$

We take elements of the sets $\{\{e_{i\xi}\}_\xi\}_i$ and $\{\{e_{\xi j}\}_\xi\}_j$ in pairs $(\{e_{\alpha\xi}\}_\xi, \{e_{\xi\beta}\}_\xi)$ such that $\alpha \neq \beta$. Then using the set $\{(\{e_{\alpha\xi}\}_\xi, \{e_{\xi\beta}\}_\xi)\}$ of such pairs we get the set $\{e_{\alpha\beta}\}$.

Let $x_o = \{e_{\alpha\beta}\}$ be a set $\{v^{ij}e_{ij}\}_{ij}$ such that for all i, j if $(\alpha,\beta) \neq (i,j)$ then $v_{ij} = 0 \in C(Q)$ else $v_{ij} = \mathbf{1} \in C(Q)$. Then $x_o \in C(Q, M_n(\mathbb{C}))$. Fix different indices i_o, j_o. Let $c \in \mathscr{M}$ be an element such that

$$\Delta(e_{i_oj_o}) = ce_{i_oj_o} - e_{i_oj_o}c \quad \text{and} \quad \Delta(x_o) = cx_o - x_oc.$$

Put $c = \sum_{i,j\in\Xi} c^{ij}e_{ij} \in \mathscr{M}$ and $\bar{a} = \sum_{i\neq j} a^{ij}e_{ij} + \sum_{i\in\Xi} a^{ii}e_{ii}$, where $a^{ii}e_{ii} = c^{ii}e_{ii}$ for every $i \in \Xi$.

Lemma 2. *Let ξ, η be arbitrary different indices, and let $b = \sum_{i,j\in\Xi} b^{ij}e_{ij} \in \mathscr{M}$ be an element such that*

$$\Delta(e_{\xi\eta}) = be_{\xi\eta} - e_{\xi\eta}b \quad \textit{and} \quad \Delta(x_o) = bx_o - x_ob.$$

Then $c^{\xi\xi} - c^{\eta\eta} = b^{\xi\xi} - b^{\eta\eta}$.

$\lhd$ We have that there exist $\bar\alpha$, $\bar\beta$ such that $e_{\xi\bar\alpha}, e_{\bar\beta\eta} \in \{e_{\alpha\beta}\}$ (or $e_{\bar\alpha\eta}, e_{\xi\bar\beta} \in \{e_{\alpha\beta}\}$, or $e_{\bar\alpha,\bar\beta} \in \{e_{\alpha\beta}\}$), and there exists a chain of pairs of indices $(\hat\alpha, \hat\beta)$ in Ω, where $\Omega = \{(\check\alpha, \check\beta) : e_{\check\alpha,\check\beta} \in \{e_{\alpha\beta}\}\}$, connecting pairs $(\xi, \bar\alpha)$, $(\bar\beta, \eta)$, i. e.

$$(\xi,\bar\alpha),\ (\bar\alpha,\ \xi_1),\ (\xi_1,\eta_1),\ \ldots,\ (\eta_2,\bar\beta),\ (\bar\beta,\eta).$$

Then

$$c^{\xi\xi} - c^{\bar\alpha\bar\alpha} = b^{\xi\xi} - b^{\bar\alpha\bar\alpha}, \quad c^{\bar\alpha\bar\alpha} - c^{\xi_1\xi_1} = b^{\bar\alpha\bar\alpha} - b^{\xi_1\xi_1},$$
$$c^{\xi_1\xi_1} - c^{\eta_1\eta_1} = b^{\xi_1\xi_1} - b^{\eta_1\eta_1}, \quad \ldots, \quad c^{\eta_2\eta_2} - c^{\bar\beta\bar\beta} = b^{\eta_2\eta_2} - b^{\bar\beta\bar\beta}, \quad c^{\bar\beta\bar\beta} - c^{\eta\eta} = b^{\bar\beta\bar\beta} - b^{\eta\eta}.$$

Hence

$$c^{\xi\xi} - b^{\xi\xi} = c^{\bar\alpha\bar\alpha} - b^{\bar\alpha\bar\alpha}, \quad c^{\bar\alpha\bar\alpha} - b^{\bar\alpha\bar\alpha} = c^{\xi_1\xi_1} - b^{\xi_1\xi_1},$$
$$c^{\xi_1\xi_1} - b^{\xi_1\xi_1} = c^{\eta_1\eta_1} - b^{\eta_1\eta_1}, \quad \ldots, \quad c^{\eta_2\eta_2} - b^{\eta_2\eta_2} = c^{\bar\beta\bar\beta} - b^{\bar\beta\bar\beta}, \quad c^{\bar\beta\bar\beta} - b^{\bar\beta\bar\beta} = c^{\eta\eta} - b^{\eta\eta}.$$

and $c^{\xi\xi} - b^{\xi\xi} = c^{\eta\eta} - b^{\eta\eta}$, $c^{\xi\xi} - c^{\eta\eta} = b^{\xi\xi} - b^{\eta\eta}$.

Therefore $c^{\xi\xi} - c^{\eta\eta} = b^{\xi\xi} - b^{\eta\eta}$. $\rhd$

Lemma 3. *Let x be an element of the algebra $C(Q, M_n(\mathbb{C}))$. Then*

$$\Delta(x) = \bar{a}x - x\bar{a},$$

where $\bar{a}$ is defined as above.

$\lhd$ Let $d(ij) \in \mathscr{M}$ be an element such that

$$\Delta(e_{ij}) = d(ij)e_{ij} - e_{ij}d(ij) \quad \text{and} \quad \Delta(x) = d(ij)x - xd(ij)$$

and $i \neq j$. Then

$$\Delta(e_{ij}) = d(ij)e_{ij} - e_{ij}d(ij) = e_{ii}d(ij)e_{ij} - e_{ij}d(ij)e_{jj} + (1-e_{ii})d(ij)e_{ij} - e_{ij}d(ij)(1-e_{jj})$$
$$= a(ij)_{ii}e_{ij} - e_{ij}a(ij)_{jj} + \sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ij} - e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}$$

for all i, j by Lemma 1.

Since

$$e_{ii}d(ij)e_{ij} - e_{ij}d(ij)e_{jj} = a(ij)_{ii}e_{ij} - e_{ij}a(ij)_{jj}$$

we have

$$(1-e_{ii})d(ij)e_{ii} = \sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ii}, \quad e_{jj}d(ij)(1-e_{jj}) = e_{jj}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}$$

for all different i and j.

Let $b = \sum_{i,j\in\Xi} b^{ij}e_{ij} \in \mathscr{M}$ be an element such that

$$\Delta(e_{ij}) = be_{ij} - e_{ij}b \quad \text{and} \quad \Delta(x_o) = bx_o - x_ob.$$

Then $b^{ii} - b^{jj} = c^{ii} - c^{jj}$ by Lemma 2. We have $b^{ii} - b^{jj} = d(ij)^{ii} - d(ij)^{jj}$ since

$$be_{ij} - e_{ij}b = d(ij)e_{ij} - e_{ij}d(ij).$$

Hence

$$c^{ii} - c^{jj} = d(ij)^{ii} - d(ij)^{jj}, \quad c^{jj} - c^{ii} = d(ij)^{jj} - d(ij)^{ii}.$$

Therefore we have

$$e_{jj}\Delta(x)e_{ii} = e_{jj}(d(ij)x - xd(ij))e_{ii}$$
$$= e_{jj}d(ij)(1-e_{jj})xe_{ii} + e_{jj}d(ij)e_{jj}xe_{ii} - e_{jj}x(1-e_{ii})d(ij)e_{ii} - e_{jj}xe_{ii}d(ij)e_{ii}$$
$$= e_{jj}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}xe_{ii} - e_{jj}x\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ii} + e_{jj}d(ij)e_{jj}xe_{ii} - e_{jj}xe_{ii}d(ij)e_{ii}$$
$$= e_{jj}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}xe_{ii} - e_{jj}x\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ii} + c^{jj}e_{jj}xe_{ii} - e_{jj}xe_{ii}c^{ii}e_{ii}$$
$$= e_{jj}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}xe_{ii} - e_{jj}x\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ii} + e_{jj}\left(\sum_{\xi} a^{\xi\xi}e_{\xi\xi}\right)xe_{ii} - e_{jj}x\left(\sum_{\xi} a^{\xi\xi}e_{\xi\xi}\right)e_{ii}$$
$$= e_{jj}\sum_{\xi,\eta\in\Xi} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}xe_{ii} - e_{jj}x\sum_{\xi,\eta\in\Xi} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ii} = e_{jj}(\bar{a}x - x\bar{a})e_{ii}.$$

Let $d(ii)$, $v, w \in \mathscr{M}$ be elements such that

$$\Delta(e_{ii}) = d(ii)e_{ii} - e_{ii}d(ii) \quad \text{and} \quad \Delta(x) = d(ii)x - xd(ii),$$

$$\Delta(e_{ii}) = ve_{ii} - e_{ii}v, \quad \Delta(e_{ij}) = ve_{ij} - e_{ij}v,$$

$$\Delta(e_{ii}) = we_{ii} - e_{ii}w, \quad \Delta(e_{ji}) = we_{ji} - e_{ji}w.$$

Then we deduce

$$(1-e_{ii})a(ij)e_{ii} = (1-e_{ii})ve_{ii} = (1-e_{ii})d(ii)e_{ii},$$
$$e_{ii}a(ji)(1-e_{ii}) = e_{ii}w(1-e_{ii}) = e_{ii}d(ii)(1-e_{ii}).$$

By Lemma 1

$$\Delta(e_{ij}) = a(ij)e_{ij} - e_{ij}a(ij) = \sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ij} - e_{ij}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta} + a(ij)^{ii}e_{ij} - e_{ij}a(ij)^{jj}$$

and

$$(1-e_{ii})a(ij)e_{ii} = \sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ii}.$$

Similarly

$$e_{ii}a(ji)(1-e_{ii}) = e_{ii}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}.$$

Taking all this into account, we derive the following chain of equalities:

$$\begin{gathered} e_{ii}\Delta(x)e_{ii} = e_{ii}(d(ii)x - xd(ii))e_{ii} \\ = e_{ii}d(ii)(1-e_{ii})xe_{ii} + e_{ii}d(ii)e_{ii}xe_{ii} - e_{ii}x(1-e_{ii})d(ii)e_{ii} - e_{ii}xe_{ii}d(ii)e_{ii} \\ = e_{ii}a(ji)(1-e_{ii})xe_{ii} + e_{ii}d(ii)e_{ii}xe_{ii} - e_{ii}x(1-e_{ii})a(ij)e_{ii} - e_{ii}xe_{ii}d(ii)e_{ii} \\ = e_{ii}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}xe_{ii} - e_{ii}x\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ii} + e_{ii}d(ii)e_{ii}xe_{ii} - e_{ii}xe_{ii}d(ii)e_{ii} \\ = e_{ii}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}xe_{ii} - e_{ii}x\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ii} + c^{ii}e_{ii}xe_{ii} - e_{ii}xc^{ii}e_{ii} \\ = e_{ii}\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}xe_{ii} - e_{ii}x\sum_{\xi\neq\eta} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ii} + e_{ii}\left(\sum_{\xi} a^{\xi\xi}e_{\xi\xi}\right)xe_{ii} - e_{ii}x\left(\sum_{\xi} a^{\xi\xi}e_{\xi\xi}\right)e_{ii} \\ = e_{ii}\sum_{\xi,\eta\in\Xi} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}xe_{ii} - e_{ii}x\sum_{\xi,\eta\in\Xi} a^{\xi\eta}e_{\xi\eta}e_{ii} = e_{ii}(\bar{a}x - x\bar{a})e_{ii}. \end{gathered}$$

It follows that

$$\Delta(x) = \bar{a}x - x\bar{a}$$

for all $x \in C(Q, M_n(\mathbb{C}))$. $\triangleright$

Proof of Theorem 1. By Lemma 3 $\Delta(e_{ii}) = \bar{a}e_{ii} - e_{ii}\bar{a} \in \mathscr{M}$. Hence

$$\sum_{\xi} a^{\xi i}e_{\xi i} - \sum_{\xi} a^{i\xi}e_{i\xi} \in \mathscr{M}.$$

Then

$$e_{ii}\left(\sum_{\xi} a^{\xi i}e_{\xi i} - \sum_{\xi} a^{i\xi}e_{i\xi}\right) = a^{ii}e_{ii} - \sum_{\xi} a^{i\xi}e_{i\xi} \in \mathscr{M}$$

and

$$\left(\sum_{\xi} a^{\xi i}e_{\xi i} - \sum_{\xi} a^{i\xi}e_{i\xi}\right)e_{ii} = \sum_{\xi} a^{\xi i}e_{\xi i} - a^{ii}e_{ii} \in \mathscr{M}.$$

Therefore, $\sum_{\xi} a^{\xi i}e_{\xi i}$, $\sum_{\xi} a^{i\xi}e_{i\xi} \in \mathscr{M}$, i. e. $\bar{a}e_{ii}, e_{ii}\bar{a} \in \mathscr{M}$. Hence $e_{ii}\bar{a}x, x\bar{a}e_{ii} \in \mathscr{M}$ for each i. Let

$$V = \left\{ \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{ij}e_{ij} : \{\lambda^{ij}\}_{i,j\in\Xi} \subset C(X) \right\}.$$

Then $\bar{a}x, x\bar{a} \in V$ for each element $x = \{x^{ij}e_{ij}\} \in C(Q, M_n(\mathbb{C}))$, i. e.

$$\sum_{\xi} a^{i\xi}x^{\xi j}e_{ij}, \sum_{\xi} x^{i\xi}a^{\xi j}e_{ij} \in C(Q)e_{ij}$$

for all i, j. Thus, for all $x, y \in C(Q, M_n(\mathbb{C}))$ we have that the elements $\bar{a}x$, $x\bar{a}$, $\bar{a}y$, $y\bar{a}$, $\bar{a}(x+y)$, $(x+y)\bar{a}$ belong to V. Hence

$$\Delta(x+y) = \Delta(x) + \Delta(y)$$

by Lemma 3.

Similarly for all x, $y \in C(Q, M_n(\mathbb{C}))$ we have

$$(\bar{a}x + x\bar{a})y = \bar{a}xy - x\bar{a}y \in \mathscr{M}, \quad \bar{a}xy = \bar{a}(xy) \in V.$$

Then $x\bar{a}y = \bar{a}xy - (\bar{a}x - x\bar{a})y$ and $x\bar{a}y \in V$. Therefore

$$\bar{a}(xy) - (xy)\bar{a} = \bar{a}xy - x\bar{a}y + x\bar{a}y - xy\bar{a} = (\bar{a}x - x\bar{a})y + x(\bar{a}y - y\bar{a}).$$

Now it can be easily seen that

$$\Delta(xy) = \Delta(x)y + x\Delta(y)$$

by Lemma 3. By Section 1 Δ is homogeneous. Hence, Δ is a linear operator and a derivation. The proof is complete. $\triangleright$

If we take the $*$-algebra $C(Q, M_n(F))$, $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{H}$, then we can similarly prove the following theorem.

Theorem 2. *Let Δ be a 2-local derivation on $C(Q, M_n(F))$. Then Δ is a derivation.*

To prove Theorem 2, we need to repeat the proof of Theorem 1 with very minor modification.

Let $\sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$ be the following set

$$\Bigg\{ \sum_{i,j \in \Xi} \lambda^{ij}e_{ij} : (\forall\, i, j : \ \lambda^{ij} \in F)\, (\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, n_o \in \mathbb{N})$$

$$(\forall\, n \geqslant m \geqslant n_o) \quad \left\| \sum_{i=m}^{n} \left[\sum_{k=1,\dots,i-1} \left(\lambda^{ki}e_{ki} + \lambda^{ik}e_{ik}\right) + \lambda^{ii}e_{ii} \right] \right\| < \varepsilon \Bigg\}.$$

where $\|\cdot\|$ is a norm of a matrix. Then $\sum_{ij}^{o} Fe_{ij} \subset M_n(F)$.

Theorem 3. *$\sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$ is a C^*-algebra with respect to the algebraic operations and the norm in $M_n(F)$ (see [3]).*

$\triangleleft$ We have $\sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$ is a normed subspace of the algebra $M_n(F)$.

Let (a_n) be a sequence of elements in $\sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$ such that (a_n) norm converges to some element $a \in M_n(F)$. We have $e_{ii}a_n e_{jj} \to e_{ii}ae_{jj}$ at $n \to \infty$ for all i and j. Hence $e_{ii}ae_{jj} \in e_{ii}M_n(F)e_{jj}$ for all i, j. Let

$$b^n = \sum_{i=n}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{i} (e_{i-1,i-1}ae_{kk} + e_{kk}ae_{i-1,i-1}) + e_{ii}ae_{ii} \right]$$

and

$$c_m^n = \sum_{i=n}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{i} (e_{i-1,i-1}a_m e_{kk} + e_{kk}a_m e_{i-1,i-1}) + e_{ii}a_m e_{ii} \right],$$

for any n. Then $c_m^n \to b^n$ as $m \to \infty$. It should be proven that (b^n) is a fundamental sequence.

Let $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ and fix n. Then there exist m_o such that for all $m > m_o$

$$\left\| b^n - c_m^n \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Hence for every $n_o > n$ and $m > m_o$

$$\left\| \left(\sum_{k=n_o}^{\infty} e_{kk} \right) (b^n - c_m^n) \left(\sum_{k=n_o}^{\infty} e_{kk} \right) \right\| = \left\| b^{n_o} - c_m^{n_o} \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

At the same time, since $a_m \in \sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$, there exists $n_1 > n_o$ such that for all $l > p > n_1$ we have

$$\left\| c_m^l - c_m^p \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Therefore for all $l > p > n_1$ the following relations hold:

$$\left\| b^l - b^p \right\| = \left\| b^l - c_m^l + c_m^l - c_m^p + c_m^p - b^p \right\|$$
$$\leqslant \left\| b^l - c_m^l \right\| + \left\| c_m^l - c_m^p \right\| + \left\| c_m^p - b^p \right\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Since ε is arbitrarily chosen, (b^n) is fundamental. Therefore $a \in \sum_{ij}^{o} e_{ii} M_n(F) e_{jj}$. Since the sequence (a_n) is arbitrarily chosen, $\sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$ is a Banach space.

Let $\sum_{i,j \in \Xi} a_{ij}$, $\sum_{i,j \in \Xi} b_{ij}$ be arbitrary elements of the Banach space $\sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$. Let $a_m = \sum_{kl=1}^{m} a_{kl}$, $b_m = \sum_{kl=1}^{m} b_{kl}$ for all natural numbers m. We have the sequence (a_m) converges to $\sum_{i,j \in \Xi} a_{ij}$ and the sequence (b_m) converges to $\sum_{i,j \in \Xi} b_{ij}$ in $\sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$. Also for all n and m $a_m b_n \in \sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$. Then for any n the sequence $(a_m b_n)$ converges to $\sum_{i,j \in \Xi} a_{ij} b_n$ as $m \to \infty$. Hence $\sum_{i,j \in \Xi} a_{ij} b_n \in \sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$. Note that $\sum_{ij}^{o} Fe_{ij} \subseteq M_n(F)$. Therefore, for any $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ there exists n_o such that

$$\left\| \sum_{i,j \in \Xi} a_{ij} b_{n+1} - \sum_{i,j \in \Xi} a_{ij} b_n \right\| \leqslant \left\| \sum_{i,j \in \Xi} a_{ij} \right\| \left\| b_{n+1} - b_n \right\| \leqslant \varepsilon$$

for any $n > n_o$. Hence the sequence $(\{a_{ij}\} b_n)$ converges to $\sum_{i,j \in \Xi} a_{ij} \sum_{i,j \in \Xi} b_{ij}$ as $n \to \infty$. Since $\sum_{ij}^{o} e_{ii} M_n(F) e_{jj}$ is a Banach space, $\sum_{i,j \in \Xi} a_{ij} \sum_{i,j \in \Xi} b_{ij} \in \sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$. Now, the relation $\sum_{ij}^{o} Fe_{ij} \subseteq M_n(F)$, implies that $\sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$ is a C*-algebra. $\rhd$

Since Fe_{ii} is a simple C^*-algebra for all i, the proof of Theorem 8 in implies that [3] the C^*-algebra $\sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$ is simple.

Let $\mathscr{N}_n(F) = \sum_{ij}^{o} Fe_{ij}$. Then $C(Q, \mathscr{N}_n(F))$ is a real or complex C^*-algebra, where ($F = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ or $\mathbb{H}$) and $C(Q, \mathscr{N}_n(F)) \subseteq \mathscr{M}$. Hence similar to Theorems 1, 2 we can prove the following theorem.

Theorem 4. *Let Δ be a 2-local derivation on $C(Q, \mathscr{N}_n(F))$. Then Δ is a derivation.*

It is known that the set $\mathscr{M}_{sa}$ of all self-adjoint elements (i. e. $a^* = a$) of $\mathscr{M}$ forms a Jordan algebra with respect to the multiplication $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. The following problem can be similarly solved.

PROBLEM 1: Develop a Jordan analog of the method applied in the proof of Theorem 1 and prove that every 2-local derivation Δ on the Jordan algebra $\mathscr{M}_{sa}$ or $C(Q, M_n(F)_{sa})$ or $C(Q, \mathscr{N}_n(F)_{sa})$ is a derivation.

It is known that the set $\mathscr{M}_k = \{a \in \mathscr{M} : a^* = -a\}$ forms a Lie algebra with respect to the multiplication $[a, b] = ab - ba$. So it is natural to consider the following problem.

Problem 2: Develop a Lie analog of the method applied in the proof of Theorem 1 and prove that every 2-local derivation Δ on the Lie algebra $\mathscr{M}_k$ or $C(Q, M_n(F)_k)$ or $C(Q, \mathscr{N}_n(F)_k)$ is a derivation.

The authors thank K. K. Kudaybergenov for many stimulating conversations on the subject.

References

1. *Akhiezer N. I., Glazman I. M.* Theory of Linear Operators in Hilbert Space.—N. Y.: Dover Publ., Inc., 1993.—[Transl. from the Russian].
2. *Arzikulov F. N.* Infinite order and norm decompositions of C^*-algebras // Int. J. Math. Anal.—2008.—Vol. 2, № 5.—P. 255–262.
3. *Arzikulov F. N.* Infinite norm decompositions of C^*-algebras // Oper. Theory Adv. Appl.—Basel: Springer AG, 2012.—Vol. 220.—P. 11–21. DOI: 10.1186/s40064-016-3468-7.
4. *Arzikulov F. N.* Infinite order decompositions of C^*-algebras // SpringerPlus.—2016.—Vol. 5 (1).—P. 1–13. DOI: 10.1186/s40064-016-3468-7.
5. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* 2-local derivations and automorphisms on $B(H)$ // J. Math. Anal. Appl.—2012.—Vol. 395.—P. 15–18. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.04.064.
6. *Bresar M.* Jordan derivations on semiprime rings // Proc. Amer. Math. Soc.—1988.—Vol. 104.—P. 1003–1006. DOI: 10.2307/2047580.
7. *Kim S. O., Kim J. S.* Local automorphisms and derivations on M_n // Proc. Amer. Math. Soc.—2004.—Vol. 132.—P. 1389–1392. DOI: 10.1090/S0002-9939-03-07171-5.
8. *Lin Y., Wong T.* A note on 2-local maps // Proc. Edinb. Math. Soc.—2006.—Vol. 49.—P. 701–708. DOI: 10.1017/S0013091504001142.
9. *Sakai S.* C^*-Algebras and W^*-Algebras.—Berlin etc: Springer-Verlag, 1971.
10. *Šemrl P.* Local automorphisms and derivations on $B(H)$ // Proc. Amer. Math. Soc.—1997.—Vol. 125.—P. 2677–2680. DOI: 10.1090/S0002-9939-97-04073-2.

Received February 6, 2017

Ayupov Shavkat Abdullayevich
Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences,
Director of the V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics
Do'rmon yo'li Street, Tashkent, 1000125, Uzbekistan
E-mail: sh_ayupov@mail.ru

Arzikulov Farhodjon Nematjonovich
Andizhan State University
Docent of the Department of Mathematics
University Street, Andizhan, 710020, Uzbekistan
E-mail: arzikulovfn@rambler.ru

2-ЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА АЛГЕБРАХ МАТРИЧНО-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОМПАКТЕ

Аюпов Ш. А., Арзикулов Ф. Н.

В 1997 г. P. Ŝemrl ввел понятие 2-локального дифференцирования и описал 2-локальные дифференцирования на алгебре $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H. После этого, ряд работ был посвящен 2-локальным дифференцированиям на разных типах колец, алгебр, банаховых алгебр и банаховых пространств. Аналогичное описание для конечномерного случая появилось позднее в работе С. О. Кима и Дж. С. Кима. Й. Лин и Т. Вонг описали 2-локальные дифференцирования на матричных алгебрах над конечномерным делимым кольцом. Ш. А. Аюпов и К. К. Кудайбергенов предложили новую технику и обобщили упомянутые выше результаты для произвольных гильбертовых пространств. А именно, они рассмотрели 2-локальные дифференцирования на алгебре $B(H)$ всех линейных ограниченных операторов

в произвольном гильбертовом пространстве H и доказали, что всякое 2-локальное дифференцирование на $B(H)$ является дифференцированием. После этого опубликован ряд работ, посвященных 2-локальным дифференцированиям на ассоциативных алгебрах.
В настоящей работе описаны 2-локальные дифференцирования на различных алгебрах бесконечномерных матрично-значных функций на компакте. Мы развиваем алгебраический подход к исследованию дифференцирований и 2-локальных дифференцирований на алгебрах бесконечномерных матрично-значных функций на компакте и доказываем, что каждое такое 2-локальное дифференцирование является дифференцированием. В качестве основного результата работы установлено, что каждое 2-локальное дифференцирование на $*$-алгебре $C(Q, M_n(F))$ или $C(Q, \mathcal{N}_n(F))$, где Q — компакт, $M_n(F)$ — $*$-алгебра бесконечномерных матриц над комплексными числами (вещественными числами или кватернионами), $\mathcal{N}_n(F)$ — $*$-подалгебра в $M_n(F)$ является дифференцированием. Также поясняется, что разработанный в данной работе метод может быть применен к йордановым и лиевым алгебрам бесконечномерных матрично-значных функций на компакте.

Ключевые слова: дифференцирование, 2-локальное дифференцирование, ассоциативная алгебра, C^*-алгебра, алгебра фон Неймана.

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 50–60

УДК **517.9; 539.3**

О СВОЙСТВАХ ДИСПЕРСИОННОГО МНОЖЕСТВА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

А. О. Ватульян, В. О. Юров

На основе анализа операторного спектрального пучка с двумя параметрами исследованы дисперсионные соотношения для цилиндрического неоднородного по радиальной координате волновода с импедансными граничными условиями на внешней границе. Граничные условия позволяют моделировать условия свободной и жестко закрепленной внешней границы, а также промежуточные варианты, где напряжения и перемещения границы линейно связаны с помощью двух параметров. В осесимметричной постановке сформулирована спектральная задача в виде матричного дифференциального оператора 4 порядка относительно компонент векторов напряжений и смещений. Изучен ряд свойств, описывающих общую структуру дисперсионного множества. Сформулированы две спектральные задачи, из точек спектра которых аналитически продолжаются два семейства дисперсионных кривых, отличающиеся собственными функциями. Получены формулы, отражающие связь точек спектра с параметрами, входящими в граничные условия на внешней границе. На основе метода возмущений исследована структура кривых этих семейств. Доказанное в статье свойство разрешимости неоднородной задачи применено для построения асимптотического приближения компонент дисперсионного множества в области длинных волн. В низкочастотном диапазоне в частном случае построена явная зависимость угла наклона линейного участка первой дисперсионной кривой от одного из параметров граничных условий. При этом даже слабая связь касательных напряжений и продольных перемещений приводит к изменениям, при которых асимптотика не справедлива. Изложены схемы численного построения компонент дисперсионных кривых на основе метода пристрелки. Представлены результаты вычислительных экспериментов для двух видов радиальной неоднородности. Выявлены точки дисперсионного множества, не меняющие своего положения в зависимости от параметров в граничных условиях.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11397.

Ключевые слова: дисперсионные соотношения, цилиндрический волновод, импедансные граничные условия, неоднородность.

1. Введение

Исследование распространения волн в неоднородных волноводах, погруженных в упругую среду, имеет приложения к акустическим методам диагностики конструкций ответственного назначения и также к биомеханике крупных кровеносных сосудов. Задачи о волнах сводятся к отысканию нетривиальных решений краевых задач с двумя спектральными параметрами, которые образуют дисперсионное множество. Для однородных волноводов это множество подробно изучено в литературе. В частности, для цилиндрического однородного волновода дисперсионное уравнение строится в явном виде через цилиндрические функции [1, 2]. Особенности строения дисперсионного множества в случае неоднородного волновода изучены в меньшей степени и опираются как на теорию операторных спектральных пучков [3–5], так и на численные и асимптотические методы [5]. Полиномиальные операторные пучки с общих позиций изучались в [6].

Погруженные в среду волноводы часто изучаются с применением конечноэлементных (КЭ) пакетов. Так, в работе [7] изучается распространение волн в полом цилиндре, погруженном в бесконечную среду, которая моделируется комбинацией цилиндрического слоя из конечных элементов и цилиндрического слоя элементов, задающих поведение искомых функций на бесконечности. Получены дисперсионные кривые как осесимметричных, так и неосесимметричных волновых форм, достаточно внимания уделено вопросам КЭ-сходимости. В [8] для моделирования внешней среды, контактирующей с волноводом произвольного сечения, используется поглощающая область, в которой поглощение растет с удалением от волновода. В частности, поглощающая область обладает той же массой и упругими свойствами, что и окружающая среда, но мнимые части ее комплексных модулей постепенно увеличиваются.

2. Постановка задачи

Рассмотрим волны в неоднородном по радиальной координате полом цилиндрическом волноводе в условиях осесимметричного деформирования. Внутренняя граница волновода $r = a$ свободна от нагрузок, на внешней $r = b$ сформулированы импедансные граничные условия, моделирующие контакт с упругой средой: $b\sigma_r(b) + c_1 u_r(b) = 0$, $b\sigma_{rz}(b) + c_2 u_z(b) = 0$.

Осесимметричная форма уравнений движения в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{1}$$

Определяющие соотношения в изотропном случае задаются следующими формулами:

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_\varphi = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\ \sigma_z = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь u_r, u_z — компоненты вектора перемещений, σ_r, σ_{rz}, σ_φ, σ_z — компоненты тензора напряжений Коши, λ, μ — параметры Ламе, которые зависят от радиальной координаты. Будем искать решение уравнений (1)–(2) в полом цилиндре со свободной внутренней границей и с описанными выше импедансными граничными условиями на внешней границе (они связывают радиальные и касательные напряжения на внешней границе с ее перемещениями) в виде бегущих волн с частотой ω и волновым числом k, это означает, что все компоненты физических полей пропорциональны множителю $\exp(i(kz - \omega t))$.

Введем следующие безразмерные параметры и переменные: $\xi_0 = \frac{a}{b}$ — обезразмеренный внутренний радиус, $\mu_0 = (1 - \xi_0)^{-1} \int_{\xi_0}^{1} \mu(x)\,dx$ — осредненный по толщине стенки цилиндра модуль сдвига, $u_r = bU_1$, $u_z = ibU_3$, $\sigma_r = \mu_0 T_1$, $\sigma_{rz} = i\mu_0 T_3$, $\kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 b^2}{\mu_0}$, $\gamma = kb$, $\lambda = \mu_0 g_1$, $\mu = \mu_0 g_2$, $g_1 + 2g_2 = G$.

С целью исследования произвольной неоднородности, связанной с переменностью упругих свойств, сформулируем краевую задачу относительно амплитуд и представим возникающую спектральную задачу в виде матричного дифференциального уравнения первого порядка (3) с импедансными граничными условиями (4)

$$\mathbf{X}' = \left(\mathbf{A}_0 - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \gamma \mathbf{A}_1 + \gamma^2 \mathbf{A}_2 \right) \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = (U_1, U_3, T_1, T_3)^T, \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
&T_1(\xi_0)=0, \quad T_1(1)=-\alpha U_1(1), \quad \alpha \geqslant 0,\\
&T_3(\xi_0)=0, \quad T_3(1)=-\beta U_3(1), \quad \beta \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Матрица коэффициентов оператора (3) представлена в виде квадратичного пучка от спектральных параметров κ, γ, где

$$
\mathbf{A}_0=\begin{pmatrix} \frac{-g_1}{xG} & 0 & \frac{1}{G} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g_2}\\ \frac{4g_2(g_1+g_2)}{x^2G} & 0 & -\frac{2g_2}{xG} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x}, \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{01}=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix} 0 & \frac{g_1}{G} & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{2g_2g_1}{xG} & 0 & 1\\ -\frac{2g_2g_1}{xG} & 0 & -\frac{g_1}{G} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{4g_2(g_1+g_2)}{G} & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Отметим, что выбранные в качестве неизвестных в векторном уравнении физические величины позволяют получить систему с вещественной матрицей, с компонентами, не содержащими производных от материальных функций $g_1(x)$, $g_2(x)$. Это позволяет анализировать с единых позиций непрерывные и кусочно-разрывные законы неоднородности. Задача состоит в нахождении таких соотношений (дисперсионных) между спектральными параметрами κ, γ, при которых существуют нетривиальные решения спектральной задачи (3), (4). Прежде всего отметим, что случай $\alpha=\beta=0$ (свободная внешняя граница) исследован ранее (однородный случай в [1, 2], где дисперсионные соотношения строятся явно через цилиндрические функции), случай переменных свойств изучен в [9], где составлен алгоритм исследования неоднородного по радиальной координате волновода со свободными границами и получена асимптотика дисперсионной кривой, выходящей из начала координат. Подобным образом исследованы волновые процессы в предварительно напряженном цилиндре в [10].

3. Общая структура дисперсионного множества

При помощи анализа спектральной задачи (3), (4) сформулируем следующие свойства.

1. При $\kappa=0$, $\gamma\neq 0$ существует счетный набор комплексных корней, которые располагаются четверками: γ, $-\gamma$, $\bar{\gamma}$, $-\bar{\gamma}$ на комплексной плоскости $\mathrm{Re}(\gamma)$, $\mathrm{Im}(\gamma)$.

2. При $\gamma=0$ существует счетный набор нетривиальных решений, задача разделяется на две подзадачи, различающиеся кинематикой нетривиальных (однородных) решений.

Задача 1.

$$
\begin{cases} U_3'=\frac{1}{g_2}T_3, \quad T_3'=-\kappa^2U_3-\frac{1}{x}T_3;\\ T_3(\xi_0)=0, \quad T_3(1)=-\beta U_3(1). \end{cases} \tag{5}
$$

Задача 2.

$$
\begin{cases} U_1'=\frac{-g_1}{xG}U_1+\frac{1}{G}T_1, \quad T_1'=\left(\frac{G}{x^2}-\frac{g_1^2}{x^2G}-\kappa^2\right)U_1-\frac{2g_2}{xG}T_1;\\ T_1(\xi_0)=0, \quad T_1(1)=-\alpha U_1(1). \end{cases} \tag{6}
$$

Нетрудно заметить, что задачи (5), (6) всегда имеют тривиальные решения. Пусть K_1 есть множество собственных значений $\kappa_1\geqslant 0$ задачи (5), при которых она имеет нетривиальное решение, и K_2 есть множество собственных значений $\kappa_2\geqslant 0$ задачи (6) соответственно. Введем множество $\mathrm{K}=\mathrm{K}_1\cup\mathrm{K}_2$. Заметим, что у множеств K_1, K_2 могут быть одинаковые элементы, которые порождают кратные корни (в дальнейшем этот случай не рассматривается, поскольку кратные ситуации легко разрушаются шевелением параметров задачи).

Ниже отметим свойства введенных множеств.

Свойство 1. Если $\beta = 0$, то K_1 содержит нулевой элемент.

$\lhd$ Действительно, задача (5) при $\beta = 0$, $\kappa = 0$ имеет ненулевое решение $T_3 = 0$, $U_3 = 1$. $\rhd$

Свойство 2. Если $\kappa_1 \in \mathrm{K}_1$ и U_3, T_3 — нетривиальные решения задачи (5), то U_3, T_3 удовлетворяют следующему соотношению:

$$\kappa_1^2 = \left(\beta U_3^2\left(1\right) + \int\limits_{\xi_0}^{1} \frac{xT_3^2}{g_2}\,dx\right) \Bigg/ \int\limits_{\xi_0}^{1} xU_3^2\,dx. \tag{7}$$

$\lhd$ Запишем второе уравнение из (5) в следующем виде: $\frac{(T_3x)'}{x} = -\kappa_1^2 U_3$. Далее умножим обе его части на U_3x и проинтегрируем по отрезку $[\xi_0, 1]$. Интегрируя по частям и заменяя U_3' выражением из первого уравнения в (5), получим соотношение (7). $\rhd$

Следствие 1. *Пусть $\kappa_1 \in \mathrm{K}_1$. Тогда $\kappa_1 > 0$ при $\beta \neq 0$.*

Свойство 3. Если $\kappa_2 \in \mathrm{K}_2$ и U_1, T_1 — нетривиальные решения задачи (6), то U_1, T_1 удовлетворяют следующему соотношению:

$$\kappa_2^2 = \frac{\alpha U_1^2}{(1)} + \int\limits_{\xi_0}^{1} \frac{4g_2\left(g_1+g_2\right)}{xG}\,U_1^2\,dx + \int\limits_{\xi_0}^{1} \frac{xT_1^2}{G}\,dx \int\limits_{\xi_0}^{1} xU_1^2\,dx. \tag{8}$$

$\lhd$ Умножим второе уравнение в (6) на U_1x и проинтегрируем по отрезку $[\xi_0, 1]$. Интегрируя по частям и заменяя U_1' выражением из (6), получим

$$-\alpha U_1^2\left(1\right) - \int\limits_{\xi_0}^{1} \frac{xT_1^2}{G}\,dx + \int\limits_{\xi_0}^{1} \left(\frac{g_1}{G} + \frac{2g_2}{G} - 1\right) T_1U_1\,dx = \int\limits_{\xi_0}^{1} \frac{4g_2\left(g_1+g_2\right)}{xG} U_1^2\,dx - \kappa_2^2 \int\limits_{\xi_0}^{1} xU_1^2\,dx.$$

Учитывая, что третье слагаемое в левой части этого равенства равно нулю, получим соотношение (8). $\rhd$

Следствие 2. *Пусть $\kappa_2 \in \mathrm{K}_2$. Тогда $\kappa_2 > 0$ для любого α.*

$\lhd$ Предположим противное, т. е. что $\kappa_2 = 0$ и $\kappa_2 \in \mathrm{K}_2$. Но при $\kappa_2 = 0$ задача (6) для любого α имеет только тривиальное решение и, следовательно, $\kappa_2 \notin \mathrm{K}_2$. $\rhd$

Свойство 4. Пусть $\kappa_1 \in \mathrm{K}_1$ и $\kappa_2 \in \mathrm{K}_2$. Тогда из точек $(\kappa = \kappa_1,\ \gamma = 0)$ $(\kappa = \kappa_2,\ \gamma = 0)$ аналитически продолжаются вещественные кривые дисперсионного множества. В монографии [4] это свойство доказано для слоя путем построения разложений в ряды, а в рассмотренном случае обоснование аналогично.

Свойство 5. Для неоднородной задачи (9), (10):

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}, \qquad \text{где}\ \ \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \kappa^2\mathbf{A}_{01} + \gamma\mathbf{A}_1 + \gamma^2\mathbf{A}_2; \tag{9}$$

$$\begin{cases} T_1\left(\xi_0\right) = 0, \quad T_1\left(1\right) + \alpha U_1\left(1\right) + R_1\left(1\right) = 0, \qquad \alpha \geqslant 0; \\ T_3\left(\xi_0\right) = 0, \quad T_3\left(1\right) + \beta U_3\left(1\right) + R_3\left(1\right) = 0, \qquad \beta \geqslant 0, \end{cases} \tag{10}$$

которая при $R_1(1)=0$, $R_3(1)=0$ и $\mathbf{F}=0$ вырождается в задачу (3), (4), имеет место условие разрешимости (11), где U_1, U_3, T_1, T_3 — решения задачи (3), (4):

$$R_1(1)\,U_1(1)+R_3(1)\,U_3(1)=\int\limits_{\xi_0}^{1}(f_1T_1+f_2T_3-f_3U_1-f_4U_3)\,x\,dx. \tag{11}$$

◁ Пусть $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$ — обычное скалярное произведение векторов. Введем

$$(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\int\limits_{\xi_0}^{1}\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}x\,dx.$$

Умножим векторное уравнение (9) на пробный вектор $\mathbf{Y}$ справа, используя введенное умножение, а затем в левой части осуществим интегрирование по частям:

$$(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})\,x\big|_{\xi_0}^{1}-\int\limits_{\xi_0}^{1}\left(\mathbf{X},(x\mathbf{Y})'\right)dx=\left(\mathbf{X},\mathbf{A}^T\mathbf{Y}\right)+(\mathbf{F},\mathbf{Y}). \tag{12}$$

Потребуем, чтобы вектор $\mathbf{Y}$ являлся решением сопряженного уравнения

$$-(x\mathbf{Y})'=x\mathbf{A}^T\mathbf{Y}. \tag{13}$$

Для формулировки соответствующих граничных условий для $\mathbf{Y}$ рассмотрим первое слагаемое в (12) с учетом граничных условий (10):

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})\,x\big|_{\xi_0}^{1}&=\Big[U_1(1)\,(Y_1(1)-\alpha Y_3(1))+U_3(1)\,(Y_2(1)-\beta Y_4(1))\\&-R_1(1)\,Y_3(1)-R_3(1)\,Y_4(1)\Big]-\Big[U_1(\xi_0)\,Y_1(\xi_0)\,\xi_0+U_3(\xi_0)\,Y_2(\xi_0)\,\xi_0\Big].\end{aligned}$$

Подчиним $\mathbf{Y}$ следующим граничным условиям (14), для которых при $R_1(1)=0$, $R_3(1)=0$ и $\mathbf{F}=0$ справедливо равенство $(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})\,x\big|_{\xi_0}^{1}=(\mathbf{F},\mathbf{Y})$,

$$Y_1(\xi_0)=0,\quad Y_2(\xi_0)=0,\quad Y_1(1)-\alpha Y_3(1)=0,\quad Y_2(1)-\beta Y_4(1)=0. \tag{14}$$

Заметим, что решение задачи (13), (14) связано с решением (3), (4) следующим образом:

$$Y_1(x)=-T_1(x),\quad Y_2(x)=-T_3(x),\quad Y_3(x)=U_1(x),\quad Y_4(x)=U_3(x).$$

С учетом вышеизложенного перепишем (12) и получим условие разрешимости (11). ▷

Свойство 6. При любом фиксированном γ $\frac{\partial\kappa^2}{\partial\beta}>0$ и $\frac{\partial\kappa^2}{\partial\alpha}>0$.

◁ Докажем первое утверждение. Продифференцируем задачу (3), (4) по β при фиксированном параметре γ, получим неоднородную краевую задачу относительно $\frac{\partial U_1}{\partial\beta}$, $\frac{\partial U_3}{\partial\beta}$, $\frac{\partial T_1}{\partial\beta}$, $\frac{\partial T_3}{\partial\beta}$. Используя свойство 5 и учитывая вид правых частей $f_3=-\frac{\partial\kappa^2}{\partial\beta}U_1$, $f_4=-\frac{\partial\kappa^2}{\partial\beta}U_3$, $R_3(1)=U_3(1)$, $R_1(1)=0$, получим, что $\frac{\partial\kappa^2}{\partial\beta}=U_3^2(1)\left(\int_{\xi_0}^1 xU_1^2+xU_3^2dx\right)^{-1}$. Аналогичным образом получим, что $\frac{\partial\kappa^2}{\partial\alpha}=U_1^2(1)\left(\int_{\xi_0}^1 xU_1^2+xU_3^2dx\right)^{-1}$. Правые части в этих соотношениях являются строго положительными величинами, что и доказывает свойство 6. ▷

Асимптотический анализ. Исследуем структуру дисперсионных кривых в окрестности линии $\gamma = 0$. Пусть $\varkappa_0 \in \mathrm{K}$ и не является кратным собственным значением, т. е. не принадлежит одновременно K_1 и K_2. Будем искать разложение вида $\varkappa^2 = \varkappa_0^2 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \ldots$, а решение задачи (3), (4) будем отыскивать в виде регулярного разложения по γ:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \gamma\mathbf{X}_1 + \gamma^2\mathbf{X}_2 + o\left(\gamma^2\right). \tag{15}$$

Сформируем задачи при одинаковых степенях γ:

$$\mathbf{X}'_0 = \left(\mathbf{A}_0 - \varkappa_0^2\mathbf{A}_{01}\right)\mathbf{X}_0, \tag{16}$$

$$\mathbf{X}'_1 = \left(\mathbf{A}_0 - \varkappa_0^2\mathbf{A}_{01}\right)\mathbf{X}_1 + \mathbf{F}_1, \quad \text{где } \mathbf{F}_1 = \left(\mathbf{A}_1 - a_1\mathbf{A}_{01}\right)\mathbf{X}_0, \tag{17}$$

$$\mathbf{X}'_2 = \left(\mathbf{A}_0 - \varkappa_0^2\mathbf{A}_{01}\right)\mathbf{X}_2 + \mathbf{F}_2, \quad \text{где } \mathbf{F}_2 = \left(\mathbf{A}_1 - a_1\mathbf{A}_{01}\right)\mathbf{X}_1 + \left(\mathbf{A}_2 - a_2\mathbf{A}_{01}\right)\mathbf{X}_0. \tag{18}$$

Отметим, что задача (16) с точностью до индексов описывается (5), (6), системы (17), (18) как и (16) разделяются на две подсистемы и определены тем же дифференциальным оператором $L = \frac{d}{dx} - \mathbf{A}_0 + \varkappa_0^2\mathbf{A}_{01}$ и имеют правые части. Вектор $\mathbf{F}_i = (f_{1i}, f_{2i}, f_{3i}, f_{4i})^T$ зависит от решений предыдущих задач.

Свойство 7. Задачи (17), (18) имеют решение, если выполнены условия разрешимости:

$$\int\limits_{\xi_0}^{1} \left[f_{4i}U_{30} - f_{2i}T_{30}\right] x\,dx = 0, \quad \text{если } \varkappa_0 \in \mathrm{K}_1, \tag{19}$$

$$\int\limits_{\xi_0}^{1} \left[f_{3i}U_{10} - f_{1i}T_{10}\right] x\,dx = 0, \quad \text{если } \varkappa_0 \in \mathrm{K}_2. \tag{20}$$

$\lhd$ Доказательство основано на использовании (11) применительно к (17), (18). $\rhd$

Используем условия разрешимости (19), (20) к задачам при γ^1, для этого определим правые части в (17):

$$\begin{aligned} &f_{11} = \frac{g_1}{G}U_{30}, \quad f_{31} = -\frac{2g_1g_2}{xG}U_{30} + T_{30} - a_1U_{10}, \\ &f_{21} = -U_{10}, \quad f_{41} = -\frac{2g_1g_2}{xG}U_{10} - \frac{g_1}{G}T_{10} - a_1U_{30}. \end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя (21) в условия (19), (20), получим, что $a_1 = 0$ для обоих семейств.

Для задачи при γ^2 аналогично определим неоднородную часть в (18)

$$\begin{aligned} &f_{12} = \frac{g_1}{G}U_{31}, \quad f_{32} = -\frac{2g_1g_2}{xG}U_{31} + T_{31} - a_1U_{11} - a_2U_{10}, \\ &f_{22} = -U_{11}, \quad f_{42} = -\frac{2g_1g_2}{xG}U_{11} - \frac{g_1}{G}T_{11} - a_1U_{31} - a_2U_{30} + \frac{4g_2\left(g_1+g_2\right)}{G}U_{30}. \end{aligned} \tag{22}$$

Подставим (22) в условия (19), (20) и получим выражения (23), (24) для коэффициентов разложений a_2 для семейств задач 1 и 2 соответственно:

$$a_2 = b_3\int\limits_{\xi_0}^{1}\left[U_{11}T_{30} - \frac{2g_1g_2}{xG}U_{11}U_{30} - \frac{g_1}{G}T_{11}U_{30} + \frac{4g_2\left(g_1+g_2\right)}{G}U_{30}^2\right]x\,dx, \tag{23}$$

$$a_2 = b_1\left(\int\limits_{\xi_0}^{1}\left[T_{31}U_{10} - \frac{2g_1g_2}{xG}\,U_{31}U_{10} - \frac{g_1}{G}\,U_{31}T_{10}\right]x\,dx\right), \quad b_j = \left(\int\limits_{\xi_0}^{1}U_{j0}^2 x\,dx\right)^{-1}. \tag{24}$$

Отметим, что знак a_2 определяет случай нормальной ($a_2 > 0$) и аномальной ($a_2 < 0$) дисперсии [4].

Низкочастотная асимптотика. В случае $\beta = 0$ удается установить наличие нетривиального решения в окрестности точки $\kappa = \gamma = 0$. Получим формулу наклона дисперсионной кривой, выходящей из начала координат. Нетривиальное решение задачи при γ^0 имеет вид $U_{10}(x) = T_{10}(x) = T_{30}(x) = 0$, $U_{30}(x) = 1$ и позволяет упростить формулу (23) до следующего вида:

$$a_2 = \frac{2}{1-\xi_0^2}\left(\int\limits_{\xi_0}^{1}\left[\frac{4g_2(g_1+g_2)}{G} - \frac{2g_1g_2}{xG}\,U_{11} - \frac{g_1}{G}\,T_{11}\right]x\,dx\right). \tag{25}$$

В случае постоянных g_1, g_2 можно построить точное решение для U_{11}, T_{11}:

$$\begin{aligned} U_{11}(x) &= \frac{1}{2x}\frac{g_1\left(\alpha\xi_0^2 + x^2\left(2\xi_0^2g_2 - 2g_2 - \alpha\xi_0^2\right)\right)}{2\left(g_1g_2+g_2^2\right)\left(\xi_0^2-1\right) - \alpha\left((g_1+g_2)\,\xi_0^2 + g_2\right)}, \\ T_{11}(x) &= \frac{1}{x^2}\frac{g_1g_2\alpha\left(x^2-\xi_0^2\right)}{2\left(g_1g_2+g_2^2\right)\left(\xi_0^2-1\right) - \alpha\left((g_1+g_2)\,\xi_0^2 + g_2\right)}, \end{aligned} \tag{26}$$

а формула (25) принимает следующий вид:

$$a_2 = t^2 = \frac{g_2\left[2\left(3g_1g_2+2g_2^2\right)\left(\xi_0^2-1\right) - \left((3g_1+2g_2)\,\xi_0^2 + g_1 + 2g_2\right)\alpha\right]}{2\left(g_1g_2+g_2^2\right)\left(\xi_0^2-1\right) - \left((g_1+g_2)\,\xi_0^2+g_2\right)\alpha}. \tag{27}$$

Формула (27) определяет монотонно возрастающую функцию $t(\alpha) = \sqrt{a_2(\alpha)}$. Например, при $\xi_0 = 0.76$, $g_1 = 1.5$, $g_2 = 1$ область значений функции $t(\alpha)$ лежит в достаточно узком диапазоне $[1.612, 1.723]$, $\alpha \in [0,\infty)$.

Численный анализ. С помощью метода пристрелки произведен численный анализ дисперсионного множества. Исходная задача (3), (4) сведена к решению двух вспомогательных задач Коши (3), (28) и (3), (29), которые не содержат параметров граничных условий α, β:

$$U_1(\xi_0) = 1, \quad U_3(\xi_0) = 0, \quad T_1(\xi_0) = 0, \quad T_3(\xi_0) = 0, \tag{28}$$

$$U_1(\xi_0) = 0, \quad U_3(\xi_0) = 1, \quad T_1(\xi_0) = 0, \quad T_3(\xi_0) = 0. \tag{29}$$

Искомое решение разыскивается в виде линейной комбинации (30) решений задач (3), (28) и (3), (29):

$$\mathbf{X} = p_1\mathbf{X}_1 + p_2\mathbf{X}_2. \tag{30}$$

Решение (30) удовлетворяет граничным условиям на внутренней границе, а при удовлетворении граничным условиям на внешней границе получаем линейную алгебраическую систему (31) относительно пристрелочных параметров p_1, p_2:

$$\begin{aligned} p_1\left(T_1^{(1)} + \alpha U_1^{(1)}\right) + p_2\left(T_1^{(2)} + \alpha U_1^{(2)}\right) &= 0, \\ p_1\left(T_3^{(1)} + \beta U_3^{(1)}\right) + p_2\left(T_3^{(2)} + \beta U_3^{(2)}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Решением дисперсионного уравнения $D(\kappa,\gamma)=0$ будем считать набор спектральных параметров (κ,γ), обращающих определитель пристрелочной системы (31) в нуль. При группировке определителя системы (31) для произвольных параметров α, β прослеживается структура дисперсионного множества (32), причем при $\alpha,\beta=0$ условия (4) означают свободную внешнюю границу, случай $\alpha,\beta=\infty$ означает жесткую заделку внешней границы волновода, а случай $\alpha=\infty$, $\beta=0$ соответствует волноводу, находящемуся в жесткой обойме без трения:

$$D(\gamma,\kappa)=S_0+S_\alpha\alpha+S_\beta\beta+S_{\alpha\beta}\alpha\beta=0, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} S_0&=\left(T_1^{(1)}T_3^{(2)}-T_1^{(2)}T_3^{(1)}\right), \quad S_\alpha=\left(U_1^{(1)}T_3^{(2)}-U_1^{(2)}T_3^{(1)}\right),\\ S_\beta&=\left(T_1^{(1)}U_3^{(2)}-T_1^{(2)}U_3^{(1)}\right), \quad S_{\alpha\beta}=\left(U_1^{(1)}U_3^{(2)}-U_1^{(2)}U_3^{(1)}\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Произведем моделирование различных неоднородностей в упрощенном виде, принимая коэффициент Пуассона постоянным: $\nu=0.3$ и принимая $g_1(x)=1.5s(x)$, $g_2(x)=s(x)$. Рассмотрим далее несколько законов неоднородности, выбранных таким образом, чтобы $(1-\xi_0)^{-1}\int_{\xi_0}^1 s(x)\,dx=1$. Таковыми, например, являются

$$s_1(x)=1, \quad s_2(x)=\frac{5\left(1+x^4\right)}{\xi_0^4+\xi_0^3+\xi_0^2+\xi_0+6}, \tag{34}$$

где $s_1(x)$ соответствует однородному материалу, $s_2(x)$ — возрастающему модулю упругости.

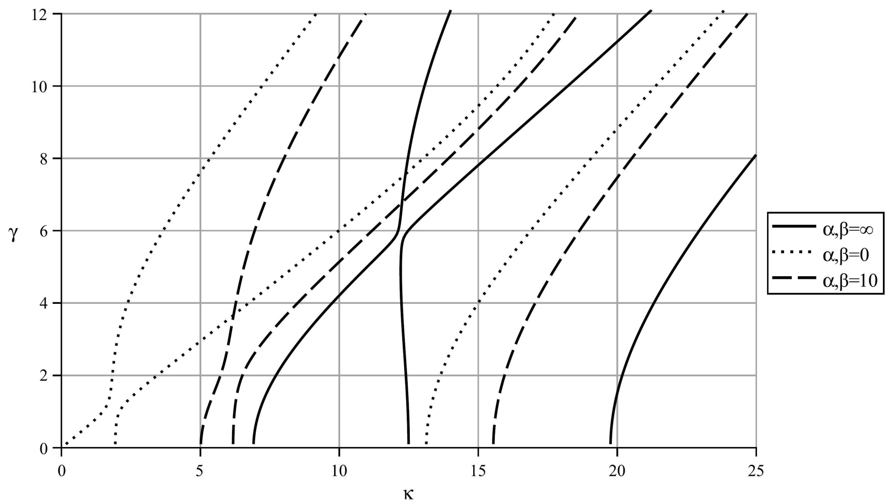

Рис. 1.

На рис. 1 изображена общая структура компонент дисперсионного множества в случаях $\alpha,\beta=0$, $\alpha,\beta=10$ и $\alpha,\beta=\infty$, $s(x)=s_1(x)$. Численный анализ показывает, что при увеличении α, β все компоненты дисперсионного множества сдвигаются вправо вдоль частотной оси в соответствии со свойством 6.

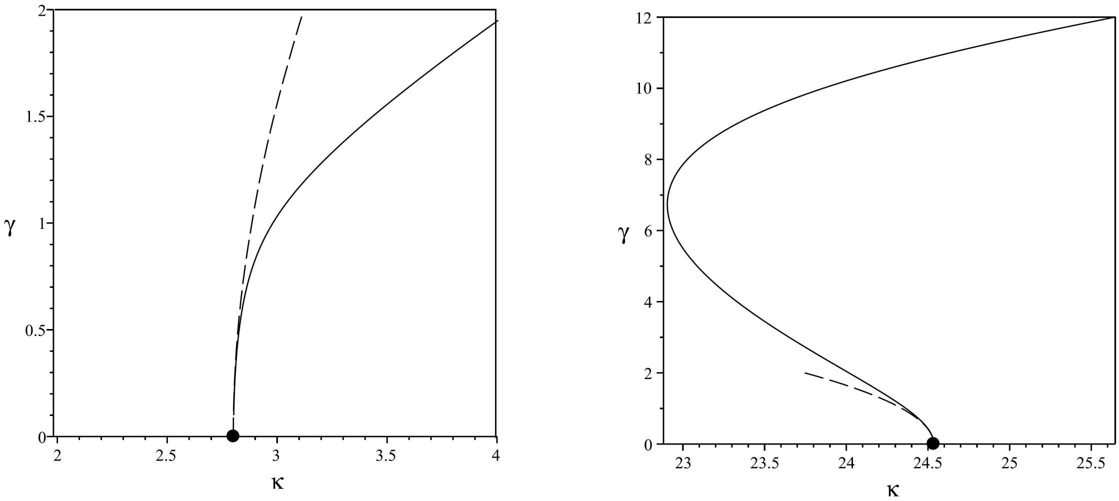

Рис. 2.

На рисунках 2 и 3 проведено сравнение численно полученных дисперсионных ветвей (сплошная линия) с квадратичным приближением ветвей вида $\kappa^2 = \kappa_0^2 + a_2\gamma^2$ (пунктир). Расчеты проведены при следующем наборе параметров $s(x) = s_2(x)$, $\xi_0 = 0.76$, $\alpha = \beta = 1$. Для апробации формул (23) и (24) выбраны такие собственные значения задач (5) и (6), из которых можно продолжить дисперсионные кривые, проявляющие нормальную и аномальную дисперсию; сравнение результатов показало их практическое совпадение в окрестности $\gamma = 0$ в соответствии с (23) и (24).

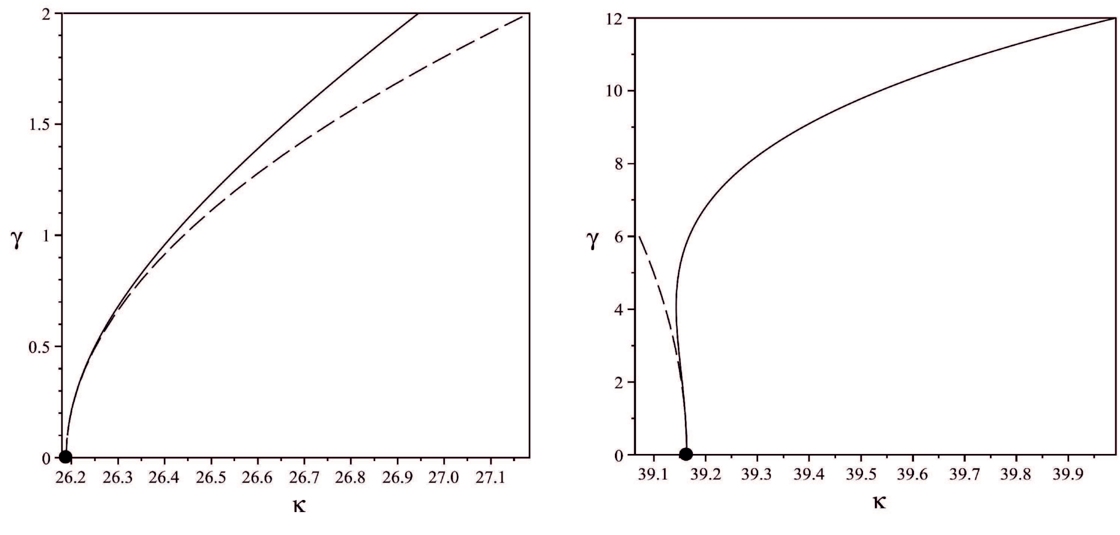

Рис. 3.

Заключение. Исследована структура дисперсионного множества в зависимости от параметров граничных условий α, β. Выявлено наличие ряда точек дисперсионного множества, не меняющихся при изменении параметра α или β. Построены асимптотические приближения дисперсионного множества при малом γ, которые позволяют анализировать стержневые моды, различать случаи нормальной и аномальной дисперсии. Проведена серия расчетов, проведено сравнение с асимптотиками.

Литература

1. *Pochhammer L.* Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // J. Reine Angew. Math.—1876.—Vol. 81.—P. 324–336.
2. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // J. Quart. Pure Appl. Math.—1886.—Vol. 21.—P. 287–298.
3. *Костюченко А. Г., Шкаликов А. А.* Самосопряженные квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи // Функцион. анализ и его прилож.—1983.—Т. 17, вып. 2.—С. 38–61.
4. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.—М.: Наука, 1979.—320 с.
5. *Гетман И. П., Устинов Ю. А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов.—Ростов н/Д.: РГУ, 1993.—144 с.
6. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.—Кишинев: Штиинца, 1986.—260 с.
7. *Jia H., Jing M., Rose J. L.* Guided wave propagation in single and double layer hollow cylinders embedded in infinite media // J. Acoust. Soc. Am.—2011.—Vol. 129, № 2.—P. 691–700. DOI: 10.1121/1.3531807.
8. *Castaings M., Lowe M.* Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media // J. Acoust. Soc. Am.—2008.—Vol. 123, № 2.—P. 696–708. DOI: 10.1121/1.2821973.
9. *Ватульян А. О., Моргунова А. В.* Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами // Акуст. журн.—2015.—№ 3.—С. 295–301.
10. *Ватульян А. О., Юров В. О.* Волновые процессы в полом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений // Прикл. математика и теор. физика.—2016.—Т. 57, № 4.—С. 182–191.

Статья поступила 11 июля 2017 г.

Ватульян Александр Ованесович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
заведующий отделом дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `vatulyan@math.rsu.ru`;

Юров Виктор Олегович
Южный федеральный университет,
магистрант кафедры теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `vitja.jurov@yandex.ru`

ON THE PROPERTIES OF THE DISPERSION SET FOR AN INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL WAVEGUIDE

Vatulyan A. O., Yurov V. O.

On the basis of the analysis of an operator spectral beam with two parameters, the dispersion relations for a cylindrical waveguide, inhomogeneous in the radial coordinate, with impedance boundary conditions on the external boundary are investigated. This boundary conditions permit to simulate free and clamped external boundary conditions as well as intermediate options. The stresses and displacements on the boundary are linearly related by means of two parameters. In the axisymmetric formulation, the spectral problem in the form of matrix differential operator of the 4th order with respect to the stress and displacement vectors components is formulated. A number of properties describing the general structure of the dispersion set are studied. Two spectral problems are formulated with two families of dispersion curves which are analytically continued from the points of the spectrum and differing by their eigenfunctions. Formulae reflecting the connection of the spectrum points with parameters entering the boundary conditions at the outer boundary are obtained. Based on the perturbation method, the structure of the curves of families considered is investigated. The property of solvability of the inhomogeneous problem proved in the article was used to construct an asymptotic approximation of the dispersion set components in the region of long waves. In the low-frequency range, in the particular case, the explicit dependence of the first dispersion curve slope angle on one of the parameters of the boundary conditions is constructed. At that, even a weak relationship between shear stresses and longitudinal displacements leads to changes for which the asymptotic behavior is not valid. On the basis of the shooting method, the schemes of constructing the dispersion curves components are stated. The results of the computational experiments for two kinds of radial inhomogeneity are presented. The dispersion set points that do not change their position depending on the boundary conditions parameters are revealed.

Key words: dispersion relations, cylindrical waveguide, inhomogeneity, impedance boundary conditions.

References

1. *Pochhammer L.* Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder, *J. Reine Angew. Math.*, 1876, vol. 81, pp. 324–336.
2. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar, *J. Quart. Pure Appl. Math.*, 1886, vol. 21, pp. 287–298.
3. *Kostyuchenko A. G., Shkalikov A. A.* Self-adjoint quadratic operator pencils and elliptic problems, *Funct. Anal. Appl.*, 1983, vol. 17, pp. 109–128. DOI: 10.1007/BF01083136.
4. *Vorovich I. I., Babeshko V. A. Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastej* [*Dynamic Mixed Elastic Problems for Nonclassical Regions*], Moscow, Nauka, 1979, 320 p. (in Russian).
5. *Getman I. P., Ustinov Yu. A. Matematicheskaya teoriya neregulyarnykh tverdykh volnovodov* [*Mathematical Theory of Irregular Solid Waveguides*], Rostov-on-Don, Izdat. RGU, 1993, 144 p. (in Russian).
6. *Markus A. S. Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [*Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Sheaf*], Kishinev, Shtiintsa, 1986, 260 p. (in Russian).
7. *Jia H., Jing M., Rose J. L.* Guided wave propagation in single and double layer hollow cylinders embedded in infinite media, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2011, vol. 129, pp. 691–700. DOI: 10.1121/1.3531807.
8. *Castaings M., Lowe M.* Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, vol. 123, pp. 696–708. DOI: 10.1121/1.2821973.
9. *Vatul'yan A. O., Morgunova A. V.* Study of the dispersion properties of cylindrical waveguides with variable properties, *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, pp. 265. DOI: 10.1134/S1063771015020141.
10. *Vatul'yan A. O., Yurov V. O.* Wave processes in a hollow cylinder in an inhomogeneous prestress field, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, pp. 731–739. DOI: 10.1134/S0021894416040180.

Received Jule 11, 2017

Vatulyan Alexandr Ovanesovich
Southern Mathematical Institute — the Affiliate
of Vladikavkaz Science Center of the RAS,
The Head of the Department of Differential Equations
22 Markus Street, Vladikavkaz, 362027, Russia;
Southern Federal University,
The Head of the Department of Elasticity Theory
8 a Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, 344090, Russia
E-mail: vatulyan@math.rsu.ru
ORCID: 0000-0003-0444-4496

Yurov Victor Olegovich
Southern Federal University
Post-Graduate Student of the Department of Elasticity Theory
8 a Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, 344090, Russia
E-mail: vitja.jurov@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-4689-4068

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 61–68

УДК **517.98**

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ JBW-ФАКТОРОВ

М. М. Ибрагимов, К. К. Кудайбергенов,
Ж. Х. Сейпуллаев

Посвящается памяти профессора
Иномжона Гуламджановича Ганиева

Одной из интересных задач теории операторных алгебр является геометрическая характеризация пространств состояний йордановых операторных алгебр. В середине 80-х гг. прошлого века появилась работа Я. Фридмана и Б. Руссо, в которой были введены гранево симметричные пространства, основной целью введения которых является геометрическая характеризация предсопряженных пространств JB*-троек, допускающих алгебраическую структуру. Многие из свойств, требуемых в этих характеризациях, являются естественными предположениями для пространств состояний физических систем. Такие пространства рассматриваются как геометрическая модель для состояний квантовой механики. Я. Фридман и Б. Руссо показали, что предсопряженное пространство для комплексных алгебры фон Неймана и более общих JB*-троек является нейтральным сильно гранево симметричным пространством. В связи с этим Я. Фридман и Б. Руссо в основном изучали нейтральные гранево симметричные пространства, и в этих пространствах получили результаты, которые были раньше известны для предсопряженных пространств. В 2004 г. М. Нейл и Б. Руссо дали геометрические характеризации предсопряженных пространств комплексных JBW*-троек в классе гранево симметричных пространств. В тоже время описание вещественных JBW*-троек остается открытым вопросом.

Настоящая работа посвящена исследованию предсопряженных пространств вещественных JBW-факторов. Доказано, что предсопряженное пространство вещественного JBW-фактора является сильно гранево симметричным пространством в том и только в том случае, когда он либо абелев, либо является спин-фактором.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11398.

Ключевые слова: банахово пространство, гранево симметричное пространство, JBW-алгебра, JBW-фактор, грань.

Введение

Исследования гранево симметричных пространств связаны с геометрической характеризацией предсопряженных пространств JBW*-троек, допускающих алгебраическую структуру, и восходят к работам Я. Фридмана и Б. Руссо [1, 2]. Аксиомы, требуемые в этих характеризациях, являются естественными предположениями для пространств состояний физических систем. Такие пространства рассматриваются как геометрические модели для состояний квантовой механики. Естественно, что предсопряженные пространства для комплексных алгебр фон Неймана и более общих JBW*-троек являются нейтральными сильно гранево симметричными пространствами [3].

В работе [4] были даны геометрическая характеризация комплексных гильбертовых пространств и комплексных спин-факторов, а также дано описание JBW*-троек рангов 1 и 2, факторов Картана типа 1 и 4. Позже Я. Фридман и Б. Руссо в работе [5] получили описание атомических гранево симметричных пространств, и было показано, что нейтральное, сильно гранево симметричное пространство изометрически изоморфно предсопряженному пространству одного из факторов Картана типа 1–6. М. Нейл и Б. Руссо в [6] нашли геометрические условия, при которых гранево симметричное пространство является изометричным предсопряженному пространству JBW*-тройки. В работе [7] доказано, что предсопряженное вещественной части алгебры фон Неймана является сильно гранево симметричным пространством в том и только в том случае, когда оно есть прямая сумма абелевой алгебры и алгебры типа I_2.

Настоящая работа посвящена исследованию предсопряженных пространств вещественных JBW-факторов. Доказано, что предсопряженное пространство вещественного JBW-фактора является сильно гранево симметричным пространством в том и только в том случае, когда он абелев или спин-фактор.

1. Предварительные сведения

В этом параграфе мы даем необходимые сведения о гранево симметричных пространствах и вещественных JBW-факторах (подробно см. [2, 8]).

Пусть Z — нормированное пространство. Элементы $x, y \in Z$ называются *ортогональными,* обозначение $x\Diamond y$, если

$$\|x+y\| = \|x-y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Для подмножества S пространства Z положим

$$S^{\Diamond} = \{x \in Z : \ x\Diamond y \ (\forall\, y \in S)\}$$

и назовем $S^{\Diamond}$ *ортогональным дополнением* к S. Выпуклое подмножество F единичного шара $Z_1 = \{x \in Z : \ \|x\| \leqslant 1\}$ называется *гранью*, если включение $\lambda y + (1-\lambda)z \in F$, где $y, z \in Z_1$, $\lambda \in (0,1)$, влечет $y, z \in F$. Грань F из Z_1 называется *выставленной по норме*, если

$$F = F_u = \{x \in Z_1 : \ u(x) = 1\}$$

для некоторого $u \in Z^*$ с $\|u\| = 1$. Элемент $u \in Z^*$ называется *проективной единицей*, если $\|u\| = 1$ и $u(y) = 0$ при всех $y \in F_u^{\Diamond}$ (см. [1]).

Выставленная по норме грань F_u из Z_1 называется *симметричной гранью*, если существует линейная изометрия S_u из Z на Z такая, что $S_u^2 = I$, и множество неподвижных точек которой в точности совпадает с топологической прямой суммой замыкания $\overline{\operatorname{span}}\, F_u$ линейной оболочки грани F_u и ее ортогонального дополнения $F_u^{\Diamond}$.

Пространство Z называется *слабо гранево симметричным пространством* (WFS-*пространством*), если каждая выставленная по норме грань из Z_1 симметрична (см. [1]).

Проективная единица u из Z^* называется *геометрическим трипотентом*, если F_u является симметричной гранью и $S_u^* u = u$ для симметрии S_u соответствующей к F_u.

WFS-пространство Z называется *сильно гранево симметричным пространством* (SFS-*пространством*), если для каждой выставленной по норме грани F_u из Z_1 и каждого $v \in Z^*$ с $\|v\| = 1$ и $F_u \subset F_v$ мы имеем $S_u^* v = v$, где S_u — симметрия, соответствующая F_u (см. [1]).

Пример 1. Известно [3], что гильбертово пространство H является SFS-пространством. Всякий элемент $u \in H$ с нормой $\|u\| = 1$ является геометрическим трипотентом и $F_u = \{u\}$. Кроме того, симметрия S_u, соответствующая грани F_u, определяется следующим образом:

$$S_u(\lambda u + x) = \lambda u - x, \quad \lambda u + x \in \overline{\operatorname{span}}\,\{u\} \oplus u^{\perp} = H.$$

Банахово пространство A над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ называется *йордановой банаховой алгеброй* (JB-*алгеброй*), если в A введена операция умножения $x \circ y$ $(x, y \in A)$, удовлетворяющая условиям (см. [8]):

1) $x \circ y = y \circ x$ для любых $x, y \in A$;

2) $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$ для любых $x, y \in A$;

3) $\lambda(x \circ y) = (\lambda x) \circ y$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x, y \in A$;

4) $x^2 \circ (y \circ x) = (x^2 \circ y) \circ x$ для любых $x, y \in A$;

5) $\|x^2\| = \|x\|^2$ для любых $x \in A$;

6) $\|x^2\| \leqslant \|x^2 + y^2\|$ для любых $x, y \in A$.

JB-алгебра A называется JBW-*алгеброй*, если она обладает предсопряженным пространством, т. е. существует такое нормированное пространство A_*, что $(A_*)^* = A$. Элементы $x, y \in A$ называются *совместными* $(x \leftrightarrow y)$, если $x \circ (x \circ y) = x^2 \circ y$. Множество $Z(A) = \{x \in A : \ x \leftrightarrow y, \, \forall\, y \in A\}$ называется *центром* A. Если $Z(A) = \{\lambda \mathbf{1}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, то A называется JBW-фактором. Проекторы e и f из JBW-алгебры A называются *связанными через симметрию*, если существует такая симметрия s, что $ses = f$.

JBW-алгебра A имеет

1) тип I, если в ней существует точный абелев проектор;

2) тип II, если она содержит точный модулярный проектор и не содержит ненулевых абелевых проекторов;

3) тип III, если она не содержит ненулевых модулярных проекторов.

Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$, $x, y \in H$. Рассмотрим декартово произведение $A = \mathbb{R} \times H = \{(\alpha, x) : \ \alpha \in \mathbb{R}, x \in H\}$ и определим в A произведение

$$(\alpha, x) \circ (\beta, y) = (\alpha\beta + \langle x, y\rangle, \alpha y + \beta x),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in H$. Норму в A определим по формуле

$$\|(\alpha, x)\| = |\alpha| + \|x\|_2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ x \in H.$$

С этим произведением и нормой алгебра A является JBW-фактором с единицей $\mathbf{1} = (1, 0)$, который называется *спин-фактором* (см. [8]).

Заметим, что $(\mathbb{R} \times H, \|\cdot\|)^* = (\mathbb{R} \times H, \|\cdot\|_\infty)$, где $\|(\beta, y)\|_\infty = \max\{|\beta|, \|y\|_2\}$. Двойственность между A и его сопряженным A^* задается формулой

$$\langle(\alpha, x), (\beta, y)\rangle = \alpha\beta + \langle x, y\rangle.$$

Отметим, что в работе [9] изучены геометрические свойства конуса положительных элементов в абстрактном спин-факторе. Установлена равносильность алгебраической ортогональности и ортогональности по Роберу.

2. Основной результат

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть A_* — предсопряженное пространство к JBW-фактору A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) A_* *является SFS-пространством*;

2) $A = \mathbb{R}$ *или* A *— спин-фактор.*

$\lhd$ Доказательство теоремы вытекает из нижеследующих лемм 1–3. $\rhd$

Лемма 1. *Пусть A — спин-фактор. Тогда каждый геометрический трипотент $u \in A$ имеет один из следующих видов:*

а) $u = (\pm 1, 0)$;

б) $u = (0, a)$, *где* $\|a\|_2 = 1$;

в) $u = \left(\pm\frac{1}{2}, a\right)$, *где* $\|a\|_2 = \frac{1}{2}$.

$\lhd$ Пусть A — спин-фактор и $u \in A$, где $u = (\alpha, a), \|u\| = 1$. Так как $\|u\| = 1$, то достаточно рассмотреть следующие возможные три случая:

Случай 1. Если $|\alpha| = 1$, то $u = (\pm 1, 0)$. Пусть $u = (1, 0)$ и $\langle u, (\beta, y)\rangle = 1$, где $(\beta, y) \in A_{*1}$. Тогда

$$1 = \langle (1, 0), (\beta, y)\rangle = \beta.$$

Отсюда вытекает, что выставленная по норме грань F_u единичного шара A_{*1}, соответствующая u, имеет вид

$$F_u = \{(1, y) : \ y \in H, \ \|y\|_2 \leqslant 1\}.$$

Таким образом, $\overline{\operatorname{span}}\, F_u = A$ и $F_u^\diamond = \{0\}$. Поэтому $\langle u, F_u^\diamond\rangle = 0$, и u является проективной единицей. Так как $\overline{\operatorname{span}}\, F_u = A$, то отображение $S_u = I$ является изометрией на A_* соответствующей выставленной по норме грани F_u. Следовательно, $S_u^*(u) = u$. Значит, проективная единица u является геометрическим трипотентом. При $u = (-1, 0)$ рассуждения аналогичны.

Случай 2. Если $\|a\|_2 = 1$, то $u = (0, a)$. Пусть $\langle u, (\beta, y)\rangle = 1$, где $(\beta, y) \in A_{*1}$. Тогда

$$1 = \langle (0, a), (\beta, y)\rangle = \langle a, y\rangle.$$

Поэтому $y = a$ и выставленная по норме грань F_u единичного шара A_{*1}, соответствующая u, имеет вид

$$F_u = \{(\beta, a) : \ |\beta| \leqslant 1\}.$$

Отсюда $\overline{\operatorname{span}}\, F_u = \operatorname{span}\{(\pm 1, a)\}$. Пусть $(\gamma, z) \in F_u^\diamond$. Тогда по определении ортогональности получим

$$\max\{|\beta + \gamma|, \|a + z\|_2\} = \max\{|\beta - \gamma|, \|a - z\|_2\} = 1 + \max\{|\gamma|, \|z\|_2\}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\gamma = 0$ и $z = 0$. Это означает, что $F_u^\diamond = \{0\}$. Поэтому $\langle u, F_u^\diamond\rangle = 0$, и u является проективной единицей. Определим в A отображение S_u^* следующим образом:

$$S_u^*(\beta, y) = (\beta, S_a^* y),$$

где S_a^* — симметрия в гильбертовом пространстве H, соответствующая a (см. пример 1). Тогда из двойственности следует, что S_u, сопряженное к S_u^*, является изометрией на A_*, соответствующая выставленной по норме грани F_u такой, что $S_u^2 = I$, при этом, множество всех неподвижных точек для S_u совпадает с $\overline{\operatorname{span}}\, F_u \oplus F_u^\diamond$. Так как

$$S_u^*(u) = S_u^*(\alpha, a) = (\alpha, S_a^* a) = (\alpha, a) = u,$$

то проективная единица u является геометрическим трипотентом.

Случай 3. Пусть $|\alpha| \neq 1, \|a\|_2 \neq 1$ и $\langle u, (\beta, y)\rangle = 1$, где $(\beta, y) \in A_{*1}$. Тогда

$$1 = \alpha\beta + \langle a, y\rangle \leqslant |\alpha||\beta| + |\langle a, y\rangle| \leqslant |\alpha||\beta| + \|a\|_2\|y\|_2 \leqslant |\alpha| + \|a\|_2 = 1.$$

Отсюда $\|y\|_2 = |\beta| = 1$. Пусть $\beta = 1$. Тогда выставленная по норме грань F_u имеет вид

$$F_u = \{(1, y):\ \|y\|_2 = 1\}.$$

Если $(\gamma, z) \in F_u^\diamond$, то по определению ортогональности имеем

$$\max\{|1+\gamma|, \|y+z\|_2\} = \max\{|1-\gamma|, \|y-z\|_2\} = 1 + \max\{|\gamma|, \|z\|_2\}.$$

Нетрудно видеть, что $z = -\gamma y$. Это означает, что

$$F_u^\diamond = \{(\gamma, z):\ z = -\gamma y\}.$$

Покажем, что $\langle u, F_u^\diamond\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \frac{1}{2}$, $\|a\|_2 = \frac{1}{2}$.

Действительно, из равенства $\alpha\gamma - \gamma\langle a, y\rangle = 0$ вытекает, что $\alpha = \langle a, y\rangle$. Поэтому из $\alpha + \langle a, y\rangle = 1$ имеем $\alpha = \frac{1}{2}$.

С другой стороны, $|\alpha| + \|a\|_2 = 1$, и поэтому $\|a\|_2 = \frac{1}{2}$. Значит, элемент $u = \left(\frac{1}{2}, a\right)$, $\|a\|_2 = \frac{1}{2}$, является проективной единицей.

Из равенств

$$\langle 2a - y, 2a - y\rangle = 4(\|a\|_2)^2 - 4\langle a, y\rangle + (\|y\|_2)^2 = 4\cdot\frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{2} + 1 = 0$$

вытекает, что $y = 2a$. Поэтому

$$F_u = \left\{(1, 2a):\ \|a\|_2 = \frac{1}{2}\right\}.$$

Следовательно, $\overline{\operatorname{span}}\, F_u = \operatorname{span}\{(1, 2a)\}$ и $F_u^\diamond = \left\{(\gamma, -2\gamma a):\ \|a\|_2 = \frac{1}{2}\right\}$.

Теперь, определив на A отображение S_u^*, как и в случае 2, получим, что $S_u^*(u) = u$. Это означает, что проективная единица u является геометрическим трипотентом.

Аналогично рассуждая при $\beta = -1$ имеем, что $u = \left(-\frac{1}{2}, a\right)$, $\|a\|_2 = \frac{1}{2}$, является геометрическим трипотентом. $\rhd$

Лемма 2. *Если A — спин-фактор, то A_* является SFS-пространством.*

$\lhd$ Из доказательства леммы 1 вытекает, что для всякого F_u из A_{*1} существует изометрия S_u такая, что $S_u^2 = I$, и множество всех неподвижных точек которой совпадает с $\overline{\operatorname{span}}\, F_u \oplus F_u^\diamond$. Поэтому A_* является WFS-пространством. Кроме того, так как всякая проективная единица $u \in A$ является геометрическим трипотентом, то в силу теоремы 1 из [10] следует, что WFS-пространство A_* является SFS-пространством. $\rhd$

Лемма 3. *Если A — JBW-фактор типа* I_n $(n \geqslant 3)$ *или* II *или* III, *то A_* не является WFS-пространством.*

$\lhd$ Если A — JBW-фактор типа I_n $(n \geqslant 3)$, то по определению существуют ненулевые связанные через симметрии взаимно ортогональные проектоы $e_1, e_2, e_3 \in A$.

Если A — JBW-фактор типа II или III, то в силу [8, гл. I, предложение 2.10] также существуют ненулевые связанные через симметрии взаимно ортогональные проектор $e_1, e_2, e_3 \in A$.

Положим $u = e_1 + e_2 - e_3$ и $e_4 = \mathbf{1} - e_1 - e_2 - e_3$. Пусть $A = \bigoplus\limits_{i,j=1}^{4} e_iAe_j$ — разложение Пирса алгебры A.

Достаточно рассмотреть два возможных случая:

Случай 1. Пусть $e_4 = 0$. Тогда S_u^* — сопряженное к симметрии S_u действует на $\bigoplus\limits_{i,j=1}^{3} e_iAe_j$ по правилу

$$S_u^* : \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & -x_{13} \\ -x_{21} & x_{22} & -x_{23} \\ -x_{31} & -x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Случай 2. Пусть $e_4 \neq 0$. Тогда S_u^* действует на $\bigoplus\limits_{i,j=1}^{4} e_iAe_j$ по правилу

$$S_u^* : \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & -x_{13} & -x_{14} \\ -x_{21} & x_{22} & -x_{23} & -x_{24} \\ -x_{31} & -x_{32} & x_{33} & -x_{34} \\ -x_{41} & -x_{42} & -x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Возьмем элемент

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \bigoplus_{i,j=1}^{4} e_iAe_j,$$

при $e_4 = 0$, последние строка и столбец отсуствуют. Тогда

$$S_u^*(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\|x\| = 3$ и $\|S_u^*(x)\| = 2$. Это означает, что S_u^* не является изометрией на A. Следовательно, S_u также не является изометрией. Значит, выставленная по норме грань F_u не является симметричной. Поэтому A_* не является WFS-пространством. $\triangleright$

Литература

1. *Friedman Y., Russo B.* A geometric spectral theorem // Quart. J. Math. Oxford.—1986.—Vol. 37 (2).—P. 263–277. DOI: 10.1093/QMATH/37.3.263.
2. *Friedman Y., Russo B.* Affine structure of facially symmetric spaces // Math. Proc. Camb. Philos. Soc.—1989.—Vol. 106 (1).—P. 107–124. DOI: 10.1017/S030500410006802X.
3. *Friedman Y., Russo B.* Some affine geometric aspects of operator algebras // Pacif. J. Math.—1989.—Vol. 137 (1).—P. 123–144. DOI: 10.2140/pjm.1989.137.123.
4. *Friedman Y., Russo B.* Geometry of the dual ball of the spin factor // Proc. Lon. Math. Soc. III Ser.—1992.—Vol. 65 (1).—P. 142–174. DOI: 10.1112/plms/s3-65.1.142.

5. *Friedman Y., Russo B.* Classification of atomic facially symmetric spaces // Canad. J. Math.—1993.—Vol. 45 (1).—P. 33–87. DOI: 10.4153/CJM-1993-004-0.
6. *Neal M., Russo B.* State space of JB*-triples // Math. Ann.—2004.—Vol. 328 (4).—P. 585–624. DOI: 10.1112/plms/s3-65.1.142.
7. *Ибрагимов М. М., Кудайбергенов К. К., Сейпуллаев Ж. Х.* Гранево симметричные пространства и предсопряженные эрмитовой части алгебр фон Неймана // Изв. вузов. Математика.—2018.—№ 5.—С. 33–40.
8. *Аюпов Ш. А.* Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.—Ташкент: Фан, 1986.—124 с.
9. *Коробова К. В., Худалов В. Т.* О порядковой структуре абстрактного спиин-фактора // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, вып. 1.—С. 46–57.
10. *Ядгоров Н. Ж.* Слабо и сильно гранево симметричные пространства // Докл. АН РУз.—1996.—Т. 5.—С. 6–8.

Статья поступила 5 декабря 2017 г.

Ибрагимов Мухтар Мамутович
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха,
доцент кафедры функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 230113, Нукус, ул. Академика Ч. Абдирова, 1
E-mail: `mukhtar_nukus@mail.ru`

Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха,
заведующий кафедрой функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 230113, Нукус, ул. Академика Ч. Абдирова, 1
E-mail: `karim2006@mail.ru`

Сейпуллаев Жумабек Хамидуллаевич
Институт математики им. В. И. Романовского АН НУз, *докторант*
УЗБЕКИСТАН, 100170, Ташкент, ул. Мирзо Улугбека, 81
E-mail: `jumabek81@mail.ru`

GEOMETRIC CHARACTERIZATION OF REAL JBW-FACTORS

Ibragimov M. M., Kudajbergenov K. K., Sejpullaev Zh. H.

One of the interesting problems in the theory of operator algebras is the geometric characterization of the state spaces of Jordan operator algebras. In the mid-1980s, Y. Friedman and B. Russo introduced the co-called facially symmetric spaces. The main purpose of introducing them is the geometric characterization of predual spaces of JB*-triples that admit an algebraic structure. Many of the properties required in these characterizations are natural assumptions for the state spaces of physical systems. Such spaces are considered as a geometric model for states of quantum mechanics. Y. Fridman and B. Russo showed that the predual space of a complex von Neumann algebra and more general JBW*-triple is a neutral strongly facially symmetric space. In this connection, Y. Friedman and B. Russo mainly studied neutral facially symmetric spaces, and in these spaces they obtained results that were previously known for the aforementioned predual spaces. In 2004, M. Neal and B. Russo gave geometric characterizations of the predual spaces of complex JBW*-triples in the class of facially symmetric spaces. At the same time, the description of real JBW*-triples remains an open question. The present paper is devoted to the study of predual spaces of real JBW-factors. It is proved that the predual space of a real JBW-factor is a strongly facially symmetric space if and only if it either is abelian or is a spin-factor.

Key words: Banach space, facially symmetric space, JBW-algebra, JBW-factor, face.

References

1. *Friedman Y., Russo B.* A geometric spectral theorem, *Quart. J. Math. Oxford*, 1986, vol. 37, no. 2, pp. 263–277. DOI: 10.1093/QMATH/37.3.263.
2. *Friedman Y., Russo B.* Affine structure of facially symmetric spaces, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1989, vol. 106, no. 1, pp. 107–124. DOI: 10.1017/S030500410006802X.
3. *Friedman Y., Russo B.* Some affine geometric aspects of operator algebras, *Pacif. J. Math.*, 1989, vol. 137, no. 1, pp. 123–144. DOI: 10.2140/pjm.1989.137.123.
4. *Friedman Y., Russo B.* Geometry of the dual ball of the spin factor, *Proc. Lon. Math. Soc.*, 1992, vol. 65, no. 3, pp. 142–174. DOI: 10.1112/plms/s3-65.1.142.
5. *Friedman Y., Russo B.* Classification of atomic facially symmetric spaces, *Canad. J. Math.*, 1993, vol. 45, no. 1, pp. 33–87. DOI: 10.4153/CJM-1993-004-0.
6. *Neal M., Russo B.* State space of JB^*-triples, *Math. Ann.*, 2004, vol. 328, no. 4, pp. 585–624. DOI: 10.1112/plms/s3-65.1.142.
7. *Ibragimov M. M., Kudayberegenov K. K., Seypullaev J. X.* Facially symmetric spaces and preduals of a hermitian part of von Neumann algebras, *Izvestija vuzov. Matematika* [*Russian Math.*], 2018, no. 5, pp. 33–40 (in Russian).
8. *Ayupov Sh. A. Classification and Representation of Ordered Jordan Algebras*, Tashkent, Fan, 1986, 121 p. (in Russian).
9. *Korobova K. B., Xudalov V. T.* On ordered structure of abstract spin-factor, Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal [Vladikavkaz Math. J.], 2004, vol. 6, no. 1, pp. 46–57 (in Russian).
10. *Yadgorov N. J.* Weakly and strongly facially symmetric spaces, *Dokl. AN RUz*, 1996, no. 5, pp. 6–8 (in Russian).

Received December 5, 2017

Ibragimov Mukhtar Mamutovich
Karakalpak state university named after Berdakh,
Docent of the Department Functional analysis
1 Academician Ch. Abdirov str., Nukus, 230113, Uzbekistan
E-mail: `mukhtar_nukus@mail.ru`

Kudaybergenov Karimberegn Kadirbergenovich
Karakalpak state university named after Berdakh,
Head of the Department Functional analysis
1 Academician Ch. Abdirov str., Nukus, 230113, Uzbekistan
E-mail: `karim2006@mail.ru`
ORCID: 0000-0003-0311-9683

Seipullaev Jumabek Xamidullaevich
V. I. Romanovski Institute of Mathematics, *Doctorant*
81 Mirzo Ulughbek str., Tashkent, 100170, Uzbekistan
E-mail: `jumabek81@mail.ru`

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 69–85

УДК **517.98**

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЕ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В КВАЗИБАНАХОВОЙ РЕШЕТКЕ[1]

А. Г. Кусраев, Б. Б. Тасоев

Светлой памяти Ганиева И. Г.

Цель настоящей статьи — дать обзор некоторых новых идей и недавних результатов в теории интегрирования скалярных функций относительно векторной меры, а также общих теорем о функциональном представлении квазибанаховых решеток. Приводится набросок чисто порядкового интеграла типа Канторовича — Райта скалярных функций относительно векторной меры, заданной на δ-кольце и принимающей значения в порядково σ-полной векторной решетке. Также представлено интегрирование типа Бартла — Данфорда — Шварца по мере, определенной на δ-кольце со значениями в квазибанаховой решетке. В контексте банаховых решеток решающую роль играют пространства интегрируемых и слабо интегрируемых функций относительно векторной меры. При решении задачи о функциональном представлении квазибанаховых решеток, подход, основанный на двойственности, не работает, но существуют два естественных кандидата для пространства слабо интегрируемых функций: максимальное квазибанахово расширение и область определения наименьшего расширения интегрального оператора. Используя эту идею, можно построить новые пространства слабо интегрируемых функций, которые играют существенную роль в задаче о функциональном представлении квазибанаховых решеток. В частности, показано, что при изучении квазибанаховых решеток, когда метод двойственности не применим, интеграл Канторовича — Райта оказывается более гибким инструментом, чем интеграл Бартла — Данфорда — Шварца.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11399.

Ключевые слова: квазибанахова решетка, положительная векторная мера, интеграл Канторовича — Райта, интеграл Бартла — Данфорда — Шварца, оператор интегрирования, пространство интегрируемых функций, пространство слабо интегрируемых функций.

1. Введение

В последние двадцать пять лет интегрирование по мере со значениями в банаховой решетке вызывает возрастающий интерес. Пространства интегрируемых и слабо интегрируемых скалярных функций относительно векторной меры обладают интересными порядковыми и метрическими свойствами и интенсивно изучались многими авторами. Найдены новые приложения в таких важных задачах, как функциональное представление абстрактных банаховых решеток, оптимальная область определения линейного оператора, мажорация и факторизация операторов, спектральное интегрирование и т. п., см. обзорную статью Курберы и Риккера [17], монографию Окады, Риккера и Санчеса

[1] Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-51-12064 ННИО_а.

Переса [43], недавние работы Калабуга, Дельгадо, Хуана, Санчеса Переса [12, 20–23, 27], а также указанные в них источники.

Так как многие функциональные пространства являются квазибанаховыми, естественно желание распространить векторное интегрирование на случай меры со значениями в квазибанаховой решетке. Принципиальная трудность состоит в невозможности применить соображения, основанные на двойственности, как это делается в подходах Гельфанда, Петтиса и Льюиса [37, 38]. Санчес Перес и Традасете [45] предложили вариант интеграла типа Бартла — Данфорда — Шварца, не используя двойственный подход. Существенный недостаток этого подхода в том, что в нем отсутствует аналог слабой интегрируемости, он сильно зависит от порядковой непрерывности квазинормы и предполагает, что постоянные функции интегрируемы.

В цикле работ авторов [33–35] намечены три новых подхода: во-первых, развитие «чисто порядкового» интегрирования типа Канторовича — Райта как естественного и полезного двойника «топологического» интегрирования Бартла — Данфорда — Шварца; во-вторых, построение пространства слабо интегрируемых функций с помощью порядковой конструкции, используя, например, область определения наименьшего расширения оператора интегрирования (см. Алипрантис и Бёркиншо [10, теорема 1.30]) или же максимальное квазибанахово расширение (в смысле Абрамовича [1]) пространства интегрируемых функций; в третьих, привлечение к исследованию соответствующих пространств интегрируемых и слабо интегрируемых функций идей и методов теории квазибанаховых пространств (см., Кэлтон [29, 31]).

Цель настоящей статьи — дать краткий обзор упомянутых подходов, а также некоторых недавних результатов об интегрировании по векторной мере и общих теорем о представлении порядково σ-полных векторных решеток и квазибанаховых решеток.[1] Статья организована следующим образом. В § 2 приводится необходимый минимум сведений о квазибанаховых решетках. § 3 содержит набросок теории интегрирования Канторовича — Райта скалярных функций относительно положительной меры со значениями в порядково σ-полной векторной решетке, определенной на δ-кольце множеств. Параллельная теория векторного интегрирования Бартла — Данфорда — Шварца представлена в § 4. В § 5 вводятся слабо интегрируемые функции относительно положительной векторной меры на основе конструкции наименьшего расширения оператора интегрирования. В § 6 приводятся результаты о представлении порядково σ-полных векторных решеток и квазибанаховых решеток в виде векторной решетки классов эквивалентности интегрируемых или слабо интегрируемых функций по векторной мере.

Используются стандартные обозначения и терминология из теории векторных и банаховых решеток, принятые в книгах Алипрантиса и Бёркиншо [10] и Мейе-Ниберга [42]. Все векторные решетки предполагаются действительными. Знак $:=$ обозначает «равняется по определению», а $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных и действительных чисел соответственно.

2. Квазибанаховы решетки

В этом параграфе представлены краткие сведения о квазибанаховых решетках, в частности, конструкция максимального квазинормированного расширения.

[1] Статья представляет собой развернутое изложение пленарного доклада, сделанного на IV международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», посвященной памяти профессора Н. К. Карапетянца (апрель 2017 г., Ростов-на-Дону).

Определение 1. *Квазинормированным пространством* принято называть пару $(X, \|\cdot\|)$, где X — вещественное или комплексное векторное пространство и $\|\cdot\|$ — квазинорма, т. е. функция из X в $\mathbb{R}$, для которой выполняются условия:

(1) $\|x\| \geqslant 0$ для всех $x \in X$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для всех $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;

(3) существует $1 \leqslant C \in \mathbb{R}$ такое, что $\|x + y\| \leqslant C(\|x\| + \|y\|)$ для всех $x, y \in X$.

Если, сверх того, для некоторого $0 < p \leqslant 1$ выполняется неравенство

(4) $\|x + y\|^p \leqslant \|x\|^p + \|y\|^p$ для всех $x, y \in X$,

то $\|\cdot\|$ называют *p-нормой*, а $(X, \|\cdot\|)$ — *p-нормированным пространством*.

Наименьшая константа C в (3) называется *квазитреугольной константой*, или *квазитреугольным множителем*, или *модулем вогнутости* квазинормы.

Определение 2. Говорят, что две квазинормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ *эквивалентны*, если существует константа $A \geqslant 1$ такая, что $A^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant A\|x\|_1$ для всех $x \in X$.

Из фундаментальной теоремы Аоки — Ролевича следует, что всякая квазинорма $\|\cdot\|$ эквивалентна p-норме $\|\cdot\|$ для некоторого $0 < p \leqslant 1$ (см. Малигранда [39, теорема 1.2], Пич [8, 6.2.5]). Квазинорма $\|\cdot\|$ индуцирует метрическую топологию на X; метрику можно определить формулой $d(x, y) = \|x - y\|^p$. Именно эта топология имеется в виду, когда говорят о метрической сходимости или сходимости по квазинорме.

Определение 3. *Квазибанаховым пространством* (*p-нормированным пространством*) называют метрически полное квазинормированное (p-нормированное) пространство.

Основные результаты теории банаховых пространств такие, как теоремы об открытом отображении и замкнутом графике, справедливы в контексте квазибанаховых пространств, см. Кэлтон [31]. Имеется также вариант критерия полноты Рисса — Фишера, см. Малигранда [39, теорема 1.1].

Определение 4. Квазибанахово (квазинормированное, p-банахово) пространство $(X, \|\cdot\|)$ называется *квазибанаховой решеткой* (соответственно, квазинормированной решеткой, p-банаховой решеткой), если X одновременно является векторной решеткой и квазинорма монотонна в том смысле, что для любых $x, y \in X$ неравенство $|x| \leqslant |y|$ влечет $\|x\| \leqslant \|y\|$.

Предложение 1. *В любой квазинормированной решетке решеточные операции непрерывны по квазинорме и конус положительных элементов замкнут. Более того, если возрастающая (убывающая) сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ сходится по квазинорме к элементу $x \in X$, то $x = \sup_{\alpha \in A} x_\alpha$ (соответственно, $x = \inf_{\alpha \in A} x_\alpha$).*

Из предложения 1 следует, что пополнение квазинормированной решетки X является квазибанаховой решеткой, содержащей X в качестве векторной подрешетки. Кроме того, имеет место порядковый аналог критерия полноты Рисса — Фишера.

Теорема 1. *Пусть $X := (X, \|\cdot\|)$ — квазинормированная решетка с квазитреугольной константой $C \geqslant 1$. Равносильны следующие утверждения:*

(1) X — квазибанахова решетка;

(2) для любой последовательности $(x_k)_{k=1}^\infty$ в X_+ такой, что $\sum_{k=1}^\infty C^k \|x_k\| < \infty$, существует $\sum_{k=1}^\infty x_k \in X$;

(3) для любой последовательности $(x_k)_{k=1}^\infty$ в X_+, для которой $\sum_{k=1}^\infty C^k \|x_k\| < \infty$, существует элемент $x \in X$ такой, что $x = o\text{-}\sum_{k=1}^\infty x_k := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n x_k$.

Напомним, что последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ в векторной решетке X называют *равномерно сходящейся* к элементу $x \in X$, если существуют $0 < u \in X$ и последовательность действительных чисел $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ такие, что $\varepsilon_n \downarrow 0$ и $|x_n - x| \leqslant \varepsilon_n u$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Как и в банаховой решетке (см. [7, теорема VII.2.1]), метрическая сходимость в квазибанаховой решетке полностью определяется порядком.

Теорема 2. *Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ в квазибанаховой решетке X сходится по квазинорме к элементу $x \in X$ тогда и только тогда, когда для всякой её подпоследовательности $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ существует подпоследовательность $(x_{n_{k_l}})_{l=1}^{\infty}$, сходящаяся равномерно к x.*

Из теоремы 2 следует, что каждый положительный оператор из квазибанаховой решетки в квазинормированную решетку непрерывен, а любые две квазинормы, превращающие векторную решетку в квазибанахову решетку, эквивалентны.

В некоторых вопросах требуется более тесная связь между квазинормой и порядком, чем монотонность, см. ниже определения 5, 6 и 7.

Определение 5. Квазибанахову решетку $(X, \|\cdot\|)$ (как и квазинорму $\|\cdot\|$) называют *порядково непрерывной*, если соотношение $x_\alpha \downarrow 0$ влечет $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ для любой сети $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в X. Если в этом определении сети заменяются последовательностями, то говорят о порядковой σ-непрерывности.

Теорема 3. *Для квазибанаховой решетки X эквивалентны утверждения:*

(1) *X порядково непрерывна;*

(2) *каждая возрастающая порядково ограниченная последовательность в X_+ сходится;*

(3) *X порядково σ-полна и порядково σ-непрерывна.*

Определение 6. Говорят, что квазибанахова решетка $(X, \|\cdot\|)$ *обладает слабым свойством Фату*, если существует константа $K > 0$, называемая *слабой константой Фату*, такая, что для всякой возрастающей сети (x_α), имеющей супремум $x \in X$, выполняется соотношение $\|x\| \leqslant K \sup_\alpha \|x_\alpha\|$. Если в этом определении заменить сети последовательностями, то говорят о *слабом σ-свойстве Фату*. Если, же $K = 1$, то $\|x\| = \sup_\alpha \|x_\alpha\|$ и в этом случае говорят, что X обладает *свойством Фату* или *σ-свойством Фату*.

Определение 7. Квазинормированная решетка $(X, \|\cdot\|)$ *обладает свойством Леви* (*σ-свойством Леви*), если существует $\sup_\alpha x_\alpha$ (соответственно $\sup_n x_n$) для каждой возрастающей сети (x_α) (соответственно, последовательности (x_n)) в X_+ при условии, что $\sup_\alpha \|x_\alpha\| < \infty$ (соответственно, $\sup_n \|x_n\| < \infty$).

Каждая квазинормированная решетка со свойством Леви является порядково полной квазибанаховой решеткой со слабым свойством Фату.

В следующем определении порядково полную квазинормированную решетку X отождествляем с порядково плотным идеалом в ее универсальном пополнении X^u.

Определение 8. *Максимальным квазинормированным расширением* порядково полной квазинормированной решетки $(X, \|\cdot\|)$ называют пару $(X^\varkappa, \|\cdot\|_\varkappa)$, где

$$\|\hat{x}\|_\varkappa := \sup\big\{\|x\| : x \in X,\ 0 \leqslant x \leqslant |\hat{x}|\big\} \quad (\hat{x} \in X^u);$$
$$X^\varkappa := \{\hat{x} \in X^u :\ \|\hat{x}\|_\varkappa < \infty\}.$$

Легко видеть, что $\|\cdot\|_\varkappa : X^\varkappa \to \mathbb{R}$ — квазинорма с той же квазитреугольной константой C, что и у $\|\cdot\|$. Более того, $\|\cdot\|_\varkappa$ будет p-нормой, если такова $\|\cdot\|$.

Предложение 2. *Если X — порядково полная квазинормированная решетка, то имеют место утверждения:* (а) *$X^\varkappa$ обладает свойством Леви в том и только в том случае, когда X обладает слабым свойством Фату;* (б) *если X обладает слабым свойством Фату, то $X^\varkappa$ обладает свойствами Леви и Фату.*

Определение 9. Квазинормированную решетку X называют *интервально полной*, если каждый порядковый интервал в X полон, т. е. каждая порядково ограниченная последовательность Коши в X сходится к элементу X.

Теорема 4. *Максимальное квазинормированное расширение $(X^{\varkappa}, \|\cdot\|_{\varkappa})$ порядково полной квазинормированной решетки $(X, \|\cdot\|_X)$ со слабым σ-свойством Фату есть квазибанахова решетка тогда и только тогда, когда X интервально полна.*

Замечание 1. Выдающийся вклад в геометрическую теорию квазибанаховых пространств внес Кэлтон, см. обзоры [28, 29, 31]. В частности, систематическое изучение квазибанаховых решеток начинается с работы Кэлтона [29], см. также Куартеро и Триана [13], Шульга [51]. Максимальное нормированное расширение нормированной решетки, а также соответствующий вариант теоремы 4 принадлежат Абрамовичу [1, определение на с. 8 и теорема 3]. В этом случае теорема 4 верна без предположения о слабом σ-свойстве Фату. Нам неизвестно можно ли опустить это условие в общем случае. Максимальное квазинормированное расширение $X^{\varkappa}$ можно определить и в той ситуации, когда X не обязательно порядково полна. Полное изложение материала данного параграфа см. в [35].

3. Интеграл Канторовича — Райта

Интегрирование относительно меры со значениями в векторной решетке имеет свои корни в спектральной теории, в представлении линейных операторов с помощью интеграла по спектральной мере. Теория порядкового интеграла действительных функций относительно счетно аддитивных векторных мер со значениями в порядково полной векторной решетке была развита Канторовичем [3, 4]. Решающий вклад в эту теорию внес Райт [49, 50]. Существующая литература не очень обширна; некоторые аспекты теории отражены в книге [5, гл. 6]. В этом параграфе мы коротко приведем конструкцию и некоторые свойства интеграла Канторовича — Райта для положительных векторных мер. Подробности можно найти в [33].

Пусть X — порядково σ-полная векторная решетка, Ω — непустое множество и $\mathscr{P}(\Omega)$ — семейство всех подмножеств Ω. *Кольцом* (подмножеств Ω) называется подсемейство $\mathscr{R} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ такое, что $A \setminus B \in \mathscr{R}$ и $A \cup B \in \mathscr{R}$ для всех $A, B \in \mathscr{R}$, а *δ-кольцо* — это кольцо, замкнутое относительно счетных пересечений. Пусть $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ обозначает семейство подмножеств $A \subset \Omega$ такое, что $A \cap B \in \mathscr{R}$ для всех $B \in \mathscr{R}$:

$$\mathscr{R}^{\mathrm{loc}} := \{A \in \mathscr{P}(\Omega) : \ A \cap B \in \mathscr{R} \text{ для всех } B \in \mathscr{R}\}. \tag{3.1}$$

Если $\mathscr{R}$ — δ-кольцо, то семейство $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ является σ-алгеброй и $\mathscr{R} \subset \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$.

Определение 10. Функция $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ называется *мерой*, если $\mu(\varnothing) = 0$ и для каждой последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathscr{R}$ такой, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ порядково сходится к элементу $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$; символически,

$$\mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\biggr) = o\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) := \bigvee_{n=1}^{\infty} \biggl(\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\biggr).$$

Тройку $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ называют *пространством с векторной мерой*, если Ω — непустое множество, $\mathscr{R}$ — δ-кольцо подмножеств Ω и $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ мера.

Определение 11. Говорят, что множество $A \in \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ *пренебрежимо* (или, более точно, *μ-пренебрежимо*), если $\mu(B \cap A) = 0$ для всех $B \in \mathscr{R}$.

Скажем, что свойство $P(\cdot)$ выполняется для *почти всех* $\omega \in \Omega$ или *почти всюду* (коротко μ-п.в.) на Ω, если множество $\{\omega \in \Omega : P(\omega)$ не выполняется$\}$ μ-пренебрежимо. Мы можем предполагать, не ограничивая общность, что δ-кольцо $\mathscr{R}$ содержит все пренебрежимые множества и $\mu(A) = 0$ для любого пренебрежимого множества $A \in \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$. Подмножество $A \subset \Omega$ *копренебрежимо*, если $\Omega \setminus A$ пренебрежимо.

Определение 12. Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *$\mathscr{R}$-простой*, если она допускает представление $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$, где множества $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{R}$ попарно не пересекаются и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (полагаем по определению $\chi_{\varnothing} = 0$).

Множество $S(\mathscr{R})$ всех $\mathscr{R}$-простых функций является векторной решеткой. Для $\mathscr{R}$-простой функции $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ определим интеграл $\int f d\mu$ по формуле

$$I_\mu^o(f) := \int f\, d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k).$$

Определение 13. Будем говорить, что $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримая действительная функция f, определенная на копренебрежимом подмножестве Ω, *интегрируема*, если существует последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ $\mathscr{R}$-простых функций такая, что $0 \leqslant f_n \uparrow f$ μ-п.в. и $\bigvee_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$ существует в X_+. В этом случае положим по определению

$$I_\mu^o(f) := \int f\, d\mu := o\text{-}\!\int f\, d\mu := \bigvee_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Произвольная $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримая функция f *интегрируема*, если таковы f^+ и f^-. Интеграл функции f определяется формулой $I_\mu^o(f) = I_\mu^o(f^+) - I_\mu^o(f^-)$. Легко показать, что интеграл I_μ^o корректно определен, см. [33, лемма 2.10].

Обозначим через $\mathscr{L}^0(\mu) := \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ множество всех действительных $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримых функций, определенных на копренебрежимых подмножествах Ω. Скажем, что две функции $f, g \in \mathscr{L}^0(\mu)$ эквивалентны и будем писать $f \sim g$, если $f(\omega) = g(\omega)$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$. Пусть $L^0(\mu) := L^0(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ обозначает множество классов эквивалентности в $\mathscr{L}^0(\mu)$ по отношению $\sim$. Для функции $f \in \mathscr{L}^0(\mu)$ символом $\tilde{f}$ обозначается соответствующий класс эквивалентности в $L^0(\mu)$. Линейная структура и упорядочение в $L^0(\mu)$ определяются обычным образом, используя поточечные операции и отношение порядка, см. Фремлин [25, § 241].

Пусть $\mathscr{L}_o^1(\mu) := \mathscr{L}_o^1(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ — часть $\mathscr{L}^0(\mu)$, состоящая из μ-интегрируемых функций. Символом $L_o^1(\mu) := L_o^1(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ обозначим множество всех классов эквивалентности функций из $\mathscr{L}_o^1(\mu)$. Определим оператор $I_\mu^o : L_o^1(\mu) \to X$ по формуле $I_\mu^o(\tilde{f}) := I_\mu^o(f)$ для всех $f \in \mathscr{L}_o^1(\mu)$.

Определение 14. Говорят, что мера $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ *локализуема*, если для любого семейства $\mathscr{A} \subset \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ существует $B \in \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ такой, что (i) $A \setminus B$ μ-пренебрежимо для всех $A \in \mathscr{A}$ и (ii) если $C \in \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ и $A \setminus C$ μ-пренебрежимо для всех $A \in \mathscr{A}$, то $B \setminus C$ также μ-пренебрежимо.

Предложение 3. *Справедливы следующие утверждения:*
(1) $L^0(\mu)$ *порядково σ-полная векторная решетка;*
(2) $L_o^1(\mu)$ *порядково плотный идеал в* $L^0(\mu)$*;*
(3) $L^0(\mu)$ *порядково полна тогда и только тогда, когда мера μ локализуема.*

Теоремы о сходимости из теории интеграла Лебега также верны для интеграла Канторовича — Райта. Доказательство следующей теоремы может быть проведено рассуждениями, приведенными в [49, предложение 3.3] и [5, теорма 6.1.4].

Теорема 5. *Пусть X — порядково σ-полная векторная решетка и $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ — мера. Тогда $L^1_o(\mu)$ порядково σ-полная векторная решетка, а I^o_μ строго положительный порядково σ-непрерывный линейный оператор из $L^1_o(\mu)$ в X.*

Замечание 2. Райт изучал в [49] интегрирование относительно σ-аддитивной меры μ со значениями в $X \cup \{\infty\}$, определенной на σ-алгебре. Если положить $\mathscr{R} := \{A \in \Sigma : \mu(A) \in X\}$, то $\mathscr{R}$ будет δ-кольцом, а ограничение μ на $\mathscr{R}$ — мерой в смысле определения 10. Интегрируемая по Райту функция будет интегрируемой в смысле определения 13, но обратное, вообще говоря, неверно.

Замечание 3. Райт в [49, теорема 4.1] установил следующий вариант теоремы Рисса о представлении: *для линейного положительного оператора T из пространства непрерывных функций $C(K)$ на компакте K в порядково полную векторную решетку X существует единственная порядково ограниченная счетно аддитивная квазирегулярная мера $\mu : Bor(K) \to X_+$ такая, что $T(f) = o\text{-}\int_K f\,d\mu$ для всех $f \in C(K)$. Квазирегулярность μ* означает, что условие регулярности $\mu(F) = \inf\{\mu(U) : U$ открыто, $F \subset U\}$ выполняется лишь для замкнутых $F \subset K$.

Замечание 4. Свойства пространства $L^1_o(\mu)$ изучены недостаточно. В [5, теорема 6.1.10] показано, что $L^1_o(\mu)$ будет порядково полной векторной решеткой, а $I^o_\mu : L^1_o(\mu) \to X$ — оператором Магарам, тогда и только тогда, когда мера $\mu : \mathscr{R} \to X$ является *наполненной* (определение см. в [5, 6.1.9] и [50, определение 3.1]). Отсюда следует, что для наполненной меры имеет место теорема Радона — Никодима [5, теорема 6.1.11 (2)], установленная Райтом в [50, теорема 4.1]; в частности, векторная решетка $L^1_o(\mu)$ решеточно изоморфна полосе $\mu^{\perp\perp}$, см. [5, 6.1.11 (3)].

Замечание 5. Еще одно важное приложение обнаружил Хейдон [26, теорема 6H]: *любая инъективная банахова решетка X линейно изометрична и решеточно изоморфна $L^1_o(\mu)$ для наполненной положительной локализуемой меры μ со значениями в порядково полном AM-пространстве с единицей, если определить норму $\|f\| := \|I^\mu_o(|f|)\|_\infty$ $(f \in L^1_o(\mu))$.* Булевозначный подход см. в [6, теорема 4.4]

4. Интеграл Бартла — Данфорда — Шварца

Бартл, Данфорд и Шварц [11] ввели интегрирование относительно σ-аддитивной векторной меры, определенной на σ-алгебре множеств со значениями в произвольном банаховом пространстве (см. монографию Данфорда и Шварца [2, гл. IV, § 10]). Позднее, Люис [37] предложил альтернативный подход, основанный на теории двойственности. В работах Люиса [38], Масани и Ниеми [40, 41] теория была распространена на векторные меры, определенные на δ-кольцах множеств. В книге Клюванека и Ноулза [32] изучалось пространство $L^1(\mu)$ для меры μ со значениями в локально выпуклом пространстве. Теория интегрирования скалярных измеримых функций относительно меры со значениями в произвольном F-пространстве была развита в работах Ролевича [44, § III.6], Турпина [47] и [48, гл. 7], Томаса [46].

В этом параграфе рассмотрим интегрирование типа Бартла — Данфорда — Шварца относительно положительной меры со значениями в квазибанаховой решетке, определенной на δ-кольце множеств. Подробное изложение имеется в работе [34], расширяющей теорию интегрирования, которую предложили Санчес Перес и Традасете в [45]. Как и в § 3, Ω — непустое множество, $\mathscr{R}$ — δ-кольцо подмножеств Ω, $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ — σ-алгебра, определенная формулой (3.1), и $X := (X, \|\cdot\|)$ — квазибанахова решетка.

Определение 15. Отображение $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ называется мерой (или τ-мерой), если $\mu(\varnothing) = 0$ и для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathscr{R}$ такой, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ топологически сходится и выполняется

$$\mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\biggr) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{4.1}$$

Будем говорить, что $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ — *τ-измеримое пространство*, если Ω — непустое множество, $\mathscr{R}$ — δ-кольцо подмножеств Ω, и $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ — τ-мера. Будем опускать τ, если из контекста ясно о какой мере идет речь (ср. определение 10).

Замечание 6. Таким образом, если X — порядково σ-полная квазибанахова решетка, то σ-аддитивность меры со значениями в X имеет двоякий смысл: ряд в (4.1) либо порядково сходится в соответствии с определением 10, либо сходится топологически в соответствии с определением 15, причем сходимость безусловная ввиду положительности μ. Из предложения 1 следует, что топологическая σ-аддитивность влечет порядковую σ-аддитивность. Разумеется, если квазинорма в X порядково непрерывна, то эти два разных понятия σ-аддитивности совпадают. В этом параграфе мера понимается в соответствии с определением 15.

Определение 16. Для данной меры $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ μ-пренебрежимые множества, векторная решетка простых функций $S(\mathscr{R})$ и интегральный оператор $I_\mu^\tau : S(\mathscr{R}) \to X$ определяются в точности так же, как и в определениях 11 и 12.

Определение 17. Скажем, что $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримая действительная функция f, определенная на копренебрежимом подмножестве Ω, интегрируема, если существует последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ $\mathscr{R}$-простых функций такая, что $0 \leqslant f_n \uparrow f$ μ-п.в. и существует $\lim_n \int f_n \, d\mu$ в $(X, \|\cdot\|)$. В этом случае обозначим

$$I_\mu^\tau(f) := \tau\text{-}\int f \, d\mu := \lim_n \int f_n \, d\mu.$$

Определенная μ-п. в. $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримая функция f *интегрируема*, если таковы f^+ и f^-. При этом полагаем по определению $I_\mu^\tau(f) := I_\mu^\tau(f^+) - I_\mu^\tau(f^-)$.

Можно показать, что $I_\mu^\tau(f)$ корректно определен, т. е. не зависит от выбора возрастающей последовательности простых функций, сходящихся к f μ-п.в.

В контексте определения 17 множество $\mathscr{L}^0(\mu)$, отношение эквивалентности $\sim$ и порядково σ-полная векторная решетка $L^0(\mu)$ имеют тот же смысл, что и в параграфе 3. Пусть $\mathscr{L}_\tau^1(\mu)$ обозначает подмножество $\mathscr{L}^0(\mu)$, состоящее из топологически интегрируемых функций, а $L_\tau^1(\mu)$ — множество классов эквивалентности функций из $\mathscr{L}_\tau^1(\mu)$. Легко видеть, что оператор топологического интегрирования $I_\mu^\tau : \tilde{f} \mapsto \int f \, d\mu$, действующий из $L_\tau^1(\mu)$ в X, линеен и строго положителен. Последнее означает, что оператор I_μ^τ положителен и равенство $I_\mu^\tau(|\tilde{f}|) = 0$ влечет $f = 0$ μ-п.в.

Замечание 7. Пусть X — порядково σ-полная квазибанахова решетка. Зафиксируем τ-меру $\mu : \mathscr{R} \to X_+$. Если функция f интегрируема в смысле определения 17, то согласно предложению 1 f также интегрируема в смысле определения 13 и $I_\mu^\tau(f) = I_\mu^o(f)$. В то же время, для данной функции $f \in \mathscr{L}_\tau^1(\mu)$ ее классы эквивалентности в $\mathscr{L}_\tau^1(\mu)$ и $\mathscr{L}_o^1(\mu)$ совпадают. Следовательно, $L_\tau^1(\mu)$ можно считать векторной подрешеткой $L_o^1(\mu)$.

Определение 18. Пространством *топологически* интегрируемых (или, короче, *τ-интегрируемых*) функций называется векторная решетка $L_\tau^1(\mu)$, наделенная квазинормой

$$\|f\|_\tau := \|I_\mu^\tau(|f|)\|_X = \biggl\| \int |f| \, d\mu \biggr\|_X \quad \bigl(f \in L_\tau^1(\mu)\bigr).$$

Из линейности и строгой положительности I_μ^τ следует, что $\|\cdot\|_\tau$ есть квазинорма с квазитреугольной константой, не превосходящей такой же константы для $\|\cdot\|$.

Теорема 6. *Квазинормированное пространство $(L_\tau^1(\mu), \|\cdot\|_\tau)$ является супер порядково полной порядково непрерывной квазибанаховой решеткой и порядково плотным идеалом в $L^0(\mu)$. Интегральный оператор I_μ^τ из $L_\tau^1(\mu)$ в X порядково непрерывен и строго положителен.*

Определение 19. Пространством *порядково* интегрируемых (или, короче, *o-интегрируемых*) функций называется векторная решетка $L_o^1(\mu)$ с квазинормой

$$\|f\|_o := \|I_\mu^o(|f|)\|_X := \left\| \int |f|\, d\mu \right\|_X \quad \big(f \in L_o^1(\mu)\big).$$

Из линейности и строгой положительности I_μ^o следует, что $\|\cdot\|_o$ есть квазинорма с квазитреугольной константой, не превосходящей такой же константы для $\|\cdot\|$. В следующей теореме собраны некоторые важные свойства пространств $L_o^1(\mu)$ и $L_\tau^1(\mu)$.

Теорема 7. *Пусть X — порядково σ-полная квазибанахова решетка с квазитреугольной константой C. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$L_o^1(\mu)$ порядково плотный идеал в $L^0(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu)$;*

(2) *$(L_o^1(\mu), \|\cdot\|_o)$ порядково σ-полная квазибанахова решетка с квазитреугольной константой, не превосходящей C;*

(3) *если X p-нормируема для некоторого $0 < p \leqslant 1$, то и $L_o^1(\mu)$ p-нормируема;*

(4) *$(L_\tau^1(\mu), \|\cdot\|_\tau)$ порядково супер порядково полная непрерывная квазибанахова подрешетка и порядково плотный идеал в $(L_o^1(\mu), \|\cdot\|_o)$;*

(5) *если X порядково непрерывна, то $L_o^1(\mu) = L_\tau^1(\mu)$ и $I_\mu^o = I_\mu^\tau$.*

Замечание 8. Бартл, Данфорд и Шварц [11] установили вариант теоремы Рисса о представлении для линейных ограниченных операторов из $C(K)$ в банахово пространство X: *для любого слабо компактного линейного оператор $T : C(K) \to X$ существует единственная счетно аддитивная мера $\mu : Bor(K) \to X$ такая, что $Tf = I_\mu^\tau(f)$ для всех $f \in C(K)$*. Более общие результаты получены Томасом и Кэльтоном, см. [30, введение и теорема 4.3].

Замечание 9. Важное и интересное направление приложений векторного интегрирования связано с существованием оптимальной области оператора. Для оператора из некоторого класса, действующего между функциональными пространствами, максимальное пространство (*оптимальная область*), на которую может быть распространен оператор при сохранении класса и образа, часто представляется в виде $L_\tau^1(\mu)$, где μ — векторная мера, связанная с этим оператором, см. Окада, Риккер и Санчес Перес [43]. Здесь наряду с $L_\tau^1(\mu)$ полезно использовать $L_o^1(\mu)$.

5. Слабо интегрируемые функции

В контексте банаховых решеток ключевую роль играют пространства $L^1(\mu)$ и $L_w^1(\mu)$ соответственно интегрируемых и слабо интегрируемых функций относительно векторной меры μ, см. Курбера [15], Курбера и Риккер [16], Дельгадо и Хуан [21], Калабуг, Дельгадо, Хуан и Санчес Перес [12]. Пространства $L^1(\mu)$ и $L_w^1(\mu)$ служат порядково плотными идеалами в $L^0(\mu)$; более того, они банаховы, причем $L^1(\mu)$ — замкнутое подпространство $L_w^1(\mu)$ (см. Масани и Ниеми [41, теоремы 4.5, 4.7, 4.10]).

Работая с векторными решетками или квазибанаховыми решетками, определение $L^1_w(\mu)$, основанное на двойственности, более не применимо, но естественной кандидатурой на роль пространства слабо интегрируемых функций служит область определения наименьшего расширения оператора интегрирования.

Пусть E, F — векторные решетки, F порядково полна и G — порядковый идеал в E. Рассмотрим положительный оператор $S : G \to F$ и обозначим через $\hat{G}$ совокупность всех $x \in E$ таких, что множество $\{S(g) : g \in G,\, 0 \leqslant g \leqslant |x|\}$ порядково ограничено в F. Тогда $\hat{G}$ порядково плотный идеал в E и можем положить по определению

$$\hat{S}x := \sup\{Sg : g \in G,\, 0 \leqslant g \leqslant x\} := \sup\{S(g \wedge x) : g \in G\} \quad (x \in \hat{G}_+).$$

Оператор $\hat{S} : \hat{G}_+ \to F$ аддитивный и положительно однородный, следовательно, он может быть продолжен разностями на все $\hat{G}$. Полученный оператор, который обозначим снова через $\hat{S}$, продолжает S и не превосходит любого другого положительного продолжения S на $\hat{G}$.

Определение 20. Оператор $\hat{S}$ называется *наименьшим расширением*[2] S относительно E, см. [10, теорема 1.30] и [5, 3.1.3].

Введем теперь две новые квазинормированные решетки слабо интегрируемых функций. Для данной векторной меры $\mu : \mathscr{R} \to X_+$, где X — порядково полная квазибанахова решетка, применим определение 20 для $E := L^0(\mu)$, $F := X$, $G := L^1_o(\mu)$ и $S := I^o_\mu$. Обозначим теперь $\hat{I}^o_\mu := \hat{S}$ и $L^1_{ow}(\mu) := L^1_{ow}(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu) := \hat{G}$ и заметим, что $L^1_o(\mu) \subset L^1_{ow}(\mu) \subset L^0(\mu)$. Аналогично, обозначим через $\hat{I}^\tau_\mu$ наименьшее расширение оператора топологического интегрирования I^τ_μ, и пусть $L^1_{\tau w}(\mu) := L^1_{\tau w}(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ — область определения $\hat{I}^\tau_\mu$.

Определение 21. Векторную решетку $L^1_{ow}(\mu)$ назовем *пространством слабо o-интегрируемых функций* относительно μ. Снабдим $L^1_{ow}(\mu)$ квазинормой

$$\|f\|_{ow} := \left\|\hat{I}^o_\mu(|f|)\right\|_X \quad \left(f \in L^1_{ow}(\mu)\right). \tag{5.1}$$

Определение 22. Пространство слабо τ-интегрируемых функций определим как векторную решетку $L^1_{\tau w}(\mu)$, наделенную квазинормой

$$\|f\|_{\tau w} := \left\|\hat{I}^\tau_\mu(|f|)\right\|_X \quad \left(f \in L^1_{\tau w}(\mu)\right). \tag{5.2}$$

В следующей теореме приведены некоторые важные свойства $L^1_{\tau w}(\mu)$ и $L^1_{ow}(\mu)$.

Теорема 8. *Пусть $X := (X, \|\cdot\|_X)$ — порядково полная квазибанахова решетка с квазитреугольной константой C. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$L^1_{\tau w}(\mu)$ и $L^1_{ow}(\mu)$ порядково плотные идеалы в $L^0(\mu)$;*

(2) *$L^1_{\tau w}(\mu)$ и $L^1_{ow}(\mu)$ квазибанаховы решетки с квазитреугольной константой, не превосходящей C;*

(3) *если X p-нормируема для некоторого $0 < p \leqslant 1$, то таковы $L^1_{\tau w}(\mu)$ и $L^1_{ow}(\mu)$;*

(4) *$L^1_{ow}(\mu)$ порядково плотный идеал в $L^1_{\tau w}(\mu)$ и $\hat{I}^\tau_\mu \leqslant \hat{I}^o_\mu$;*

(5) *интегральный оператор $I^o_\mu : L^1_o(\mu) \to X$ порядково непрерывен тогда и только тогда, когда $L^1_{ow}(\mu) = L^1_{\tau w}(\mu)$ и $\hat{I}^o_\mu = \hat{I}^\tau_\mu$.*

[2] Очевидно, $\hat{S} \leqslant T$ для любого положительного продолжения $T : \hat{G} \to F$ оператора S на все E, см. [10, с. 27]. В то же время, $\hat{G}$ наибольший порядковый идеал в E, на который S допускает положительное продолжение, см. [5, 3.6.1 (4)].

Замечание 10. Другая возможность введения слабо интегрируемых функций связана с понятием максимального квазинормированного расширения. Пусть X — порядково полная квазинормированная решетка и $(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ — пространство с векторной мерой $\mu : \mathscr{R} \to X_+$, локализуемой в смысле [25]. В зависимости от контекста будем считать, что μ счетно аддитивна в смысле порядковой или метрической сходимости. Из теоремы 8 (1, 4) и предложения 3 (3) следует, что $L^0(\mu)$ служит универсальным пополнением каждой из квазибанаховых решеток $L^1_o(\mu)$ и $L^1_\tau(\mu)$. В соответствии с определением 8 можно построить максимальное квазинормированные расширения $(L^1_{o\varkappa}(\mu), \|\cdot\|_{o\varkappa})$ и $(L^1_{\tau\varkappa}(\mu), \|\cdot\|_{\tau\varkappa})$ квазинормированных решеток $L^1_o(\mu)$ и $L^1_\tau(\mu)$ соответственно. В силу теорем 4 и 6 $L^1_{\tau\varkappa}(\mu)$ — квазибанахова решетка, в то время как $L^1_{o\varkappa}(\mu)$ — квазинормированная решетка, которая метрически полна при том дополнительном предположении, что $L^1_o(\mu)$ обладает слабым σ-свойством Фату. Более того, $L^1_{\tau\varkappa}(\mu)$ обладает свойствами Фату и Леви ввиду предложения 2, так как $L^1_\tau(\mu)$ порядково непрерывна. Некоторые свойства квазинормированных решеток $L^1_{o\varkappa}(\mu)$ и $L^1_{\tau\varkappa}(\mu)$ рассмотрены в [35]. Детальное исследование этих функциональных решеток представляется весьма перспективным.

6. Представление квазибанаховых решеток

Важно знать при каких условиях произвольная квазибанахова решетка порядково изометрично квазибанаховому функциональному пространству. Различные аспекты данной проблемы изучались многими авторами. Последние достижения связаны с интегрированием по векторной мере.

В этом параграфе покажем, что порядковый интеграл позволяет установить общий результат о представлении произвольных порядково полных квазибанаховых решеток. Ниже $X := (X, \|\cdot\|)$ — порядково σ-полная квазибанахова решетка и $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ — пространство с векторной мерой $\mu : \mathscr{R} \to X_+$.

Определение 23. Говорят, что дизъюнктное множество $\Gamma \subset X_+$ полно, если $X = \Gamma^{\perp\perp}$. Для данного полного дизъюнктного семейства ненулевых положительных элементов из X, определим X_Γ по формуле

$$X_\Gamma := \left\{ x \in X : \ (\exists\, \nu : \mathbb{N} \to \Gamma)\ |x| = \bigvee_{n=1}^{\infty} \pi_{\nu(n)} |x| \right\},$$

где π_γ — порядковый проектор в X на полосу $X_\gamma := \{\gamma\}^{\perp\perp}$.

Ясно, что X_Γ — порядково плотный идеал в X ввиду включения $\Gamma \subset X_\Gamma$. Сформулируем теперь два результата о представлении.

Теорема 9. *Пусть X — порядково σ-полная векторная решетка и Γ — полное дизъюнктное подмножество X. Тогда существует пространство с векторной мерой $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ такое, что интегральный оператор I^o_μ является решеточным изоморфизмом из $L^1_o(\mu)$ на X_Γ. Если X порядково полна, то мера μ локализуема и наименьшее расширение $\hat{I}^o_\mu$ оператора I^o_μ относительно $L^0(\mu)$ есть решеточный изоморфизм из $L^1_{ow}(\mu)$ на X.*

Теорема 10. *Пусть X — порядково полная квазибанахова решетка. Тогда существует пространство $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ с локализуемой мерой $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ такое, что наименьшее расширение $\hat{I}^o_\mu$ интегрального оператора I^o_μ устанавливает изометричный решеточный изоморфизм из $L^1_{ow}(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu)$ на X. Более того, для каждого полного дизъюнктного множества $\Gamma \subset X_+$ меру μ можно выбрать так, что I^o_μ отображает $L^1_o(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu)$ на X_Γ.*

Согласно замечаниям 6 и 7, теории порядкового и топологического интегралов относительно векторной меры совпадают, когда мера принимает свои значения в порядково непрерывной квазибанаховой решетке. Ниже рассмотрим частный случай меры со значениями в порядково непрерывной части квазибанаховой решетки.

Определение 24. *Порядково непрерывной частью* X_{an} квазибанаховой решетки X называется наибольший порядково непрерывный идеал в X или, более точно, совокупность всех $x \in X$ таких, что для данной сети (x_α) в X из соотношения $|x| \geqslant x_\alpha \downarrow 0$ следует $\|x_\alpha\| \downarrow 0$. Порядково σ-непрерывная часть X_a квазибанаховой решетки X определяется аналогично, как наибольший порядково σ-непрерывный идеал в X, т. е. используя последовательности вместо сетей.

В следующем предложении собраны свойства порядково непрерывной части.

Предложение 4. *Для квазибанаховой решетки X верны утверждения:*

(1) *X_a замкнутая подрешетка X и, в частности, X_a — квазибанахова решетка;*

(2) *$X_{an} \subset X_a$, а если X порядково σ-полна, то $X_a = X_{an}$;*

(3) *если X порядково σ-полна, то для τ-измеримого пространства $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ с X_+-значной мерой справедливы равенства*

$$[L^1_o(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu)]_a = [L^1_o(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu)]_{an} = L^1_\tau(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu).$$

Теорема 11. *Пусть X — порядково полная квазибанахова решетка, порядково непрерывная часть которой X_a порядково плотна в X. Тогда существует τ-измеримое пространство $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ с локализуемой мерой $\mu : \mathscr{R} \to X_a$ такое, что интегральный оператор I^τ_μ является изометрическим решеточным изоморфизмом из $L^1_\tau(\mu)$ на X_a, а его наименьшее расширение $\hat{I}^\tau_\mu$ — изометрическим решеточным изоморфизмом из $L^1_{\tau w}(\mu)$ на X. Более того, $L^1_\tau(\mu) = L^1_o(\mu)$ и $L^1_{\tau w}(\mu) = L^1_{ow}(\mu)$, а также $I^\tau_\mu = I^o_\mu$ и $\hat{I}^\tau_\mu = \hat{I}^o_\mu$.*

Замечание 11. История теоремы 11 начинается с результата, полученного в работе Курбера [15, теорема 8]: *всякая порядково непрерывная банахова решетка со слабой порядковой единицей изометрично и решеточно изоморфна $L^1(\mu)$ для некоторой векторной меры μ, определенной на σ-алгебре.* Этот же автор в своей диссертации [14, с. 22–23] сформулировал утверждение о том, что упомянутый результат верен и для банаховой решетки без слабой порядковой единицы, но для этого необходимо распространить теорию интегрирования на векторные меры, определенных на δ-кольцах. В [14] доказательство лишь намечено; детальное обоснование приведено в работе Дельгадо и Хуана [21, теорема 5]. Обобщение в другом направлении получили Курбера и Риккер [16, теорема 2.5]: *банахова решетка с σ-свойством Фату и со слабой порядковой единицей, принадлежащей ее порядково σ-непрерывной части, представима в виде банаховой решетки $L^1_w(\mu)$ слабо интегрируемых функций по векторной мере μ, определенной на σ-алгебре.* Как установлено в работе Дельгадо и Хуана [21, теорема 10], этот результат также остается в силе, если опустить предположение о наличии слабой порядковой единицы, причем вновь приходится привлекать векторные меры определенные на δ-кольцах, см. также Дельгадо [19] и Калабуг, Дельгадо, Хуан и Санчес Перес [12]. Следующий принципиальных шаг сделали Санечес Перес и Традасете [45, теорема 4.3], распространив результат Курбера [15, теорема 8] на квазибанаховы решетки со слабой порядковой единицей. Теорема 11 завершает эту цепочку обобщений, см. [34, теорема 6.7].

Замечание 12. Теорема 11 является новым результатом даже в контексте банаховых решеток. Можно показать, что $L^1_\tau(\mu)$ совпадает с пространством $L^1(\mu)$ всех интегрируемых функций, в то время как $L^1_{\tau w}(\mu)$ содержится в пространстве $L^1_w(\mu)$ всех слабо интегрируемых функций. Если банахова решетка обладает свойствами Фату и Леви[3],

[3] Свойство Фату (σ-свойство Фату) в работах Калабуга, Дельгадо, Хуана, и Санчеса Переса (см. [12]

то $L^1_{\tau w}(\mu) = L^1_w(\mu)$ и из теоремы 11 получаем результат Калабуга, Дельгадо, Хуан и Санчеса Переса [12, § 6], а также Дельгадо и Хуана [21, теоремы 5 и 9].

Литература

1. *Абрамович Ю. А.* О максимальном нормированном расширении полуупорядоченных нормированных пространств // Изв. вузов. Математика.—1970.—Т. 3.—С. 7–17.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.—xiv+858 с.
3. *Канторович Л. В.* Линейные операторы в полуупорядоченных пространствах // Мат. сб.—1940.—Т. 7, № 49.—С. 209–284.
4. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах—М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
5. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
6. *Кусраев А. Г.* Булевозначный принцип переноса для инъективных банаховых решеток // Сиб. мат. журн.—2015.—Т. 56, № 5.—С. 1111–1129. DOI: 10.17377/smsh.2015.56.511.
7. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—408 с.
8. *Пич А.* Операторные идеалы.—М.: Мир, 1982.—536 с.
9. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* Positive operators // Handbook of the Geometry of Banach Spaces.—Amsterdam: Elsevier Sci., 2001.—Vol. 1.—P. 85–122.
10. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
11. *Bartle R. G., Dunford N., and Schwartz J.* Weak compactness and vector measures // Canad. J. Math.—1955.—Vol. 7.—P. 289–305.
12. *Calabuig J. M., Delgado O., Juan M. A., and Sánchez Pérez E. A.* On the Banach lattice structure of L^1_w of a vector measure on a δ-ring // Collect. Math.—2014.—Vol. 65.—P. 67–85.
13. *Cuartero B., Triana M. A.* (p,q)-Convexity in quasi-Banach lattices and applications // Stud. Math.—1986.—Vol. 84, № 2.—P. 113–124.
14. *Curbera G. P.* El espacio de funciones integrables respecto de una medida vectorial: Ph. D. Thesis.—Sevilla: Univ. of Sevilla, 1992.
15. *Curbera G. P.* Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices // Math. Ann.—1992.—Vol. 293.—P. 317–330.
16. *Curbera G. P., Ricker W. J.* Banach lattices with the Fatou property and optimal domains of kernel operators // Indag. Math. (N. S.).—2006.—Vol. 17.—P. 187–204.
17. *Curbera G. P., Ricker W. J.* Vector measures, integration, applications // Positivity (Trends Math.).—Basel: Birkhäuser, 2007.—P. 127–160.
18. *Curbera G. P., Ricker W. J.* The Fatou property in p-convex Banach lattices // J. Math. Anal. Appl.—2007.—Vol. 328.—P. 287–294. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.04.086.
19. *Delgado O.* L^1-spaces of vector measures defined on δ-rings // Arch. Math.—2005.—Vol. 84.—P. 432–443. DOI: 10.1007/s00013-005-1128-1.
20. *Delgado O.* Optimal extensions for positive order continuous operators on Banach function spaces // Glasgow Math. J.—2014.—Vol. 56.—P. 481–501. DOI: 10.1017/S0017089513000384.
21. *Delgado O., Juan M. A.* Representation of Banach lattices as L^1_w spaces of a vector measure defined on a δ-ring // Bull. Belg. Math. Soc.—2012.—Vol. 19, № 2.—P. 239–256.
22. *Delgado O., Sánchez Pérez E. A.* Strong extensions for q-summing operators acting in p-convex Banach function spaces for $1 \leqslant p \leqslant q$ // Positivity.—2016.—Vol. 20.—P. 999–1014. DOI: 10.1007/s11117-016-0397-1.
23. *Delgado O., Sánchez Pérez E. A.* Optimal extensions for pth power factorable operators // Mediterranean J. of Math.—2016.—Vol. 13.—P. 4281–4303. DOI: 10.1007/s00009-016-0745-1.
24. *Fremlin D. H.* Topological Riesz Spaces and Measure Theory.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1974.—xiv+266 p.
25. *Fremlin D. H.* Measure Theory. Vol. 2. Broad Foundation.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.—672 p.
26. *Haydon R.* Injective Banach lattices // Math. Z.—1974.—Vol. 156.—P. 19–47.
27. *Juan A. M., Sánchez Pérez E. A.* Maurey–Rosenthal domination for abstract Banach lattices // J. Ineq. and Appl.—2013.—Vol. 213, № 213.—P. 1–12.

и др.) понимается как конъюнкция свойств Фату и Леви (σ-свойств Фату и Леви) из определений 6 и 7. Здесь мы следуем Фремлину [24, определения 23A и 23I], см. также Абрамович и Алипрантис [9, определение 7].

28. *Godefroy G.* A glimpse at Nigel Kalton's work // Banach Spaces and their applications in Analysis.—Berlin: W. de Gruyter, 2007.—P. 1–35.
29. *Kalton N. J.* Convexity conditions for non-locally convex lattices // Glasgow Math. J.—1984.—Vol. 25.—P. 141–152.
30. *Kalton N. J.* Isomorphisms between spaces of vector-valued continuous functions // Proc. Edinburgh Math. Soc.—1983.—Vol. 26.—P. 29–48.
31. *Kalton N. J.* Quasi-Banach Spaces / Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss.—Amsterdam: Elsevier, 2003.—P. 1099–1130.—(Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. 2.).
32. *Kluvanek I., Knowles G.* Vector Measures and Control Systems.—North-Holland: Amsterdam, 1976.—191 p.
33. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of vector lattices // J. Math. Anal. Appl.—2017.—Vol. 455.—P. 554–568. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.05.059.
34. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of quasi-Banach lattices // J. Math. Anal. Appl.—2018.—Vol. 462, № 1.—(В печати). DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.02.027.
35. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Maximal quasi-normed extension of quasi-normed lattices // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 3.—С. 41–50. DOI: 10.23671/VNC.2017.3.7111.
36. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—243 p.
37. *Lewis D. R.* Integration with respect to vector measures // Pacific J. Math.—1970.—Vol. 33.—P. 157–165.
38. *Lewis D. R.* On integration and summability in vector spaces // Illinois J. Math.—1972.—Vol. 16.—P. 294–307.
39. *Maligranda L.* Type, cotype and convexity properties of quasi-Banach spaces // Proc. of the International Symposium on Banach and Function Spaces (Oct. 2–4, 2003, Kitakyushu–Japan).—Yokohama: Yokohama Publ., 2004.—P. 83–120.
40. *Masani P. R., Niemi H.* The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. I. Scalar-valued measures on δ-rings // Adv. Math.—1989.—Vol. 73.—P. 204–241.
41. *Masani P. R., Niemi H.* The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. II. Pettis integration // Adv. Math.—1989.—Vol. 75.—P. 121–167.
42. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—xvi+395 p.
43. *Okada S., Ricker W. J., and Sánchez Pérez E. A.* Optimal domain and integral extension of operators acting in function spaces (Oper. Theory Adv. Appl.) Vol. 180.—Basel: Birkhäuser, 2008.
44. *Rolewicz S.* Metric Linear Spaces.—Warszaw: PWN-Polish Sci. Publ., 1972.—287 p.—(Math. Monogr. Vol. 56.).
45. *Sánchez Pérez E. A. and Tradacete P.* Bartle–Dunford–Schwartz integration for positive vector measures and representation of quasi-Banach lattices // J. Nonlin. and Conv. Anal.—2016.—Vol. 17, № 2.—P. 387–402.
46. *Thomas E. G. F.* Vector Integration // Quast. Math.—2012.—Vol. 35.—P. 391–416. DOI: 10.2989/16073606.2012.742230.
47. *Turpin Ph.* Intégration par rapport à une mesure à valeurs dans un espace vectoriel topologique non supposé localement convexe // Intégration vectorielle et multivoque (Colloq., Univ. Caen, Caen, 1975), Exp. № 8, Dép. Math., U. E. R. Sci.—Caen: Univ. Caen, 1975.
48. *Turpin Ph.* Convexités dans les Espaces Vectoriels Topologiques Généraux: Diss. Math.—Vol. 131.—1976.
49. *Wright J. D. M.* Stone-algebra-valued measures and integrals // Proc. London Math. Soc.—1969.—Vol. 19, № 3.—P. 107–122.
50. *Wright J. D. M.* A Radon–Nikodým theorem for Stone algebra valued measures // Trans. Amer. Math. Soc.—1969.—Vol. 139.—P. 75–94.
51. *Szulga J.* (p, r)-convex functions on vector lattices // Proc. Edinburg Math. Soc.—1994.—Vol. 37, № 2.—P. 207–226.

Статья поступила 11 декабря 2017 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич
Владикавказский научный центр РАН, *директор*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный университет,
заведующий кафедрой математического анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: kusraev@smath.ru

Тасоев Батрадз Ботазович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru

INTEGRATION FOR POSITIVE MEASURES WITH VALUES IN QUASI-BANACH LATTICES

Kusraev A. G., Tasoev B. B.

The paper aims to overview some new ideas and recent results in the theory of integration of scalar functions with respect to a vector measure, as well as general theorems on the functional representation of quasi-Banach lattices. We outline a purely order-based Kantorovich–Wright type integral of scalar functions with respect to a vector measure defined on a δ-ring and taking values in a Dedekind σ-complete vector lattice. The parallel Bartle–Dunford–Schwartz type integration with respect to a measure defined on a δ-ring with values in a quasi-Banach lattice is also presented. In the context of Banach lattices a crucial role is played by the spaces of integrable and weakly integrable functions with respect to a vector measure. Dealing with the functional representation of quasi-Banach lattices a duality based approach does not work but there are two natural candidates for a space of weakly integrable functions: maximal quasi-Banach extension and the domain of the smallest extension of the integration operator. Using this idea, one can construct new spaces of weakly integrable functions that play an essential role in the problem of the functional representation of quasi-Banach lattices. In particular, it is shown that, in studying quasi-Banach lattices, when the duality method is inapplicable, the Kantorovich–Wright integral turns out to be more flexible than t more flexible than the Bartle–Dunford–Schwartz integral.

Key words: quasi-Banach lattice, positive vector measure, Kantorovich–Wright integration, Bartle–Dunford–Schwartz integration, integration operator, space of integrable functions, space of weakly integrable functions.

References

1. *Abramovich Ju. A.* On maximal quasi-normed extension of partially ordered normed spaces. *Vestnik leningradskogo universiteta* [*Vestnik of Leningrad State University*], 1970, no. 1, pp. 7–17 (in Russian).
2. *Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part* 1. *General Theory*, New Jersey, John Wiley and Sons Inc., 1988, 858 p.
3. *Kantorovich L. V.* Linear operators in semi-ordered spaces, *Sbornik: Mathematics*, 1940, vol. 7, no. 2, pp. 209–284.
4. *Kantorovich L. V., Vulikh B. Z., Pinsker A. G. Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces*, Moskow, Gostehizdat, 1950, 550 p. (in Russian).
5. *Kusraev A. G. Dominated Operators.* N. Y., Springer-Science+Business Media, 2000, 451 p. DOI: 10.1007/978-94-015-9349-6.
6. *Kusraev A. G.* The boolean transfer principle for injective Banach lattices, *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, no. 5, pp. 888–900. DOI: 10.1134/S0037446615050110.
7. *Vulikh B. Z. Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces.* Noordhoff, 1967, 388 p.
8. *Pietsch A. Operator Ideals*, Amsterdam, North-Holland Publ. Comp., 1980, 451 p.
9. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D. Positive Operators. Handbook of the Geometry of Banach Spaces.* Amsterdam, Elsevier Science, 2001, vol. 1, pp. 85–122.
10. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.* London etc., Acad. Press Inc., 1985, xvi+367 p.
11. *Bartle R. G., Dunford N., Schwartz J.* Weak compactness and vector measures, *Canad. J. Math.*, 1955, vol. 7, pp. 289–305.
12. *Calabuig J. M., Delgado O., Juan M. A., and Sánchez Pérez E. A.* On the Banach lattice structure of L_w^1 of a vector measure on a δ-ring, *Collect. Math.*, 2014, vol. 65, pp. 67–85. DOI: 10.1007/s13348-013-0081-8.

13. *Cuartero B., Triana M. A.* (p, q)-Convexity in quasi-Banach lattices and applications, *Stud. Math.*, 1986, vol. 84, no. 2, pp. 113–124.
14. *Curbera G. P. El espacio de funciones integrables respecto de una medida vectorial: Ph. D. Thesis*, Sevilla, Univ. of Sevilla, 1992.
15. *Curbera G. P.* Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices, *Math. Ann.*, 1992, vol. 293, pp. 317–330.
16. *Curbera G. P., Ricker W. J.* Banach lattices with the Fatou property and optimal domains of kernel operators, *Indag. Math.* (N. S.), 2006, vol. 17, pp. 187–204.
17. *Curbera G. P., Ricker W. J.* Vector measures, integration, applications, *Positivity* (*Trends Math.*), Basel, Birkhäuser, 2007, pp. 127–160.
18. *Curbera G. P., Ricker W. J.* The Fatou property in p-convex Banach lattices, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 328, pp. 287–294. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.04.086
19. *Delgado O.* L^1-spaces of vector measures defined on δ-rings, *Arch. Math.*, 2005, vol. 84, pp. 432–443. DOI: 10.1007/s00013-005-1128-1.
20. *Delgado O.* Optimal extensions for positive order continuous operators on Banach function spaces, *Glasgow Math. J.*, 2014, vol. 56, pp. 481–501. DOI:10.1017/S0017089513000384.
21. *Delgado O., Juan M. A.* Representation of Banach lattices as L^1_w spaces of a vector measure defined on a δ-ring, *Bull. Belg. Math. Soc.*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 239–256.
22. *Delgado O., Sánchez Pérez E. A.* Strong extensions for q-summing operators acting in p-convex Banach function spaces for $1 \leqslant p \leqslant q$, *Positivity*, 2016, vol. 20, pp. 999–1014. DOI: 10.1007/s11117-016-0397-1.
23. *Delgado O., Sánchez Pérez E. A.* Optimal extensions for pth power factorable operators, *Mediterranean J. of Math.*, 2016, vol. 13, pp. 4281–4303. DOI: 10.1007/s00009-016-0745-1.
24. *Fremlin D. H. Topological Riesz Spaces and Measure Theory.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1974, xiv+266 p.
25. *Fremlin D. H. Measure Theory. Vol. 2. Broad Foundation.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2001, 672 p.
26. *Haydon R.* Injective Banach lattices, *Math. Z.*, 1974., vol. 156, pp. 19–47.
27. *Juan A. M., Sánchez Pérez E. A.* Maurey–Rosenthal domination for abstract Banach lattices, *J. Ineq. and Appl.*, 2013, vol. 213, no. 213, pp. 1–12.
28. *Godefroy G.* A glimpse at Nigel Kalton's work, *Banach Spaces and Their Applications in Analysis*, Berlin, W. de Gruyter, 2007, pp. 1–35.
29. *Kalton N. J.* Convexity conditions for non-locally convex lattices, *Glasgow Math. J.*, 1984, vol. 25, pp. 141–152.
30. *Kalton N. J.* Isomorphisms between spaces of vector-valued continuous functions, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1983, vol. 26, pp. 29–48.
31. *Kalton N. J. Quasi-Banach Spaces* / Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss. Amsterdam, Elsevier, 2003, pp. 1099–1130. (Handbook of the Geometry of Banach Spaces, vol. 2.).
32. *Kluvanek I., Knowles G. Vector Measures and Control Systems.* North-Holland, Amsterdam, 1976, 191 p.
33. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of vector lattices, *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, vol. 455, pp. 554–568. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.05.059.
34. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of quasi-Banach lattices, *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, vol. 462, no. 1 (in print). DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.02.027.
35. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Maximal quasi-normed extension of quasi-normed lattices, *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* [*Vladikavkaz Math. J.*], vol. 19, no. 1, pp. 41–50. DOI: 10.23671/VNC.2017.3.7111.
36. *Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.* Berlin etc., Springer-Verlag, 1979, 243 p.
37. *Lewis D. R.* Integration with respect to vector measures, *Pacific J. Math.*, 1970, vol. 33, pp. 157–165.
38. *Lewis D. R.* On integration and summability in vector spaces, *Illinois J. Math.*, 1972, vol. 16, pp. 294–307.
39. *Maligranda L.* Type, cotype and convexity properties of quasi-Banach spaces, *Proc. of the International Symposium on Banach and Function Spaces* (Oct. 2–4, 2003, Kitakyushu–Japan), Yokohama, Yokohama Publ., 2004, pp. 83–120.
40. *Masani P. R., Niemi H.* The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. I. Scalar-valued measures on δ-rings, *Adv. Math.*, 1989, vol. 73, pp. 204–241.
41. *Masani P. R., Niemi H.* The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. II. Pettis integration, *Adv. Math.*, 1989, vol. 75, pp. 121–167.
42. *Meyer-Nieberg P. Banach Lattices.* Berlin etc., Springer, 1991, xvi+395 p.

43. *Okada S., Ricker W. J., and Sánchez Pérez E. A. Optimal domain and integral extension of operators acting in function spaces* (*Oper. Theory Adv. Appl.*), vol. 180, Basel: Birkhäuser, 2008.
44. *Rolewicz S. Metric Linear Spaces*, Warszaw, PWN-Polish Sci. Publ., 1972, 287 p. (Math. Monogr. Vol. 56).
45. *Sánchez Pérez E. A. and Tradacete P.* Bartle–Dunford–Schwartz integration for positive vector measures and representation of quasi-Banach lattices, *J. Nonlin. and Conv. Anal.*, 2016, vol. 17, no. 2, pp. 387–402.
46. *Thomas E. G. F.* Vector integration, *Quast. Math.*, 2012, vol. 35, pp. 391–416. DOI: 10.2989/16073606.2012.742230.
47. *Turpin Ph.* Intégration par rapport à une mesure à valeurs dans un espace vectoriel topologique non supposé localement convexe, *Intégration vectorielle et multivoque* (Colloq., Univ. Caen, Caen, 1975), Exp. no. 8, Dép. Math., U. E. R. Sci., Caen, Univ. Caen, 1975.
48. *Turpin Ph. Convexités dans les Espaces Vectoriels Topologiques Généraux*: Diss. Math., vol. 131, 1976.
49. *Wright J. D. M.* Stone-algebra-valued measures and integrals, *Proc. London Math. Soc.*, 1969, vol. 19, no. 3, pp. 107–122.
50. *Wright J. D. M.* A Radon–Nikodým theorem for Stone algebra valued measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, vol. 139, pp. 75–94.
51. *Szulga J.* (p,r)-convex functions on vector lattices, *Proc. Edinburg Math. Soc.*, 1994, vol. 37, no. 2, pp. 207–226.

Received 11 December, 2017

Kusraev Anatoly Georgievich
Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Chairman*
22 Markus Street, Vladikavkaz, 362027, Russia;
North Ossetian State University,
Head of the Department of Mathematical Analysis
44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz, 362025, Russia
E-mail: `kusraev@smath.ru`
ORCID: 0000-0002-1318-9602

Tasoev Batradz Botazovich
Southern Mathematical Institute — the Affiliate
of Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Researcher*
22 Markus street, Vladikavkaz, 362027, Russia
E-mail: `tasoevbatradz@yandex.ru`

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 86–97

УДК **517.5**

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов

В работе рассматривается задача среднеквадратичного приближения функций комплексного переменного, регулярных в некоторой односвязной области, $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ рядами Фурье по ортогональным системам при наличии неотрицательной интегрируемой в $\mathscr{D}$ весовой функции $\gamma := \gamma(|z|)$, т. е. когда $f \in L_{2,\gamma} := L_2(\gamma(|z|), D)$.
Ранее В. А. Абилов, Ф. В. Абилова и М. К. Керимов в $L_{2,\gamma}$ исследовали вопросы отыскания точных оценок скорости сходимости рядов Фурье функций $f \in L_{2,\gamma}$ и доказали некоторые точные неравенства типа Джексона, вычислили значение колмогоровского n-поперечника некоторых классов функций [9]. При этом широко использовали специальный вид оператора обобщенного сдвига, благодаря которому ввели обобщенный модуль непрерывности m-го порядка и на его основе — классы функций, определяемые заданной монотонно возрастающей на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ мажорантой.
В настоящей работе продолжается исследование указанных авторов, а именно, доказывается точное неравенство Джексона — Стечкина между величиной наилучшего приближения комплексными алгебраическими полиномами функций $f \in L_{2,\gamma}$ и L_p-нормой обобщенного модуля непрерывности. Изучаются аппроксимативные свойства классов функций, у которых L_p-норма обобщенного модуля непрерывности имеет заданную мажоранту.
При некоторых условиях на мажоранте для введенных классов функций в $L_{2,\gamma}$ вычисляются бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечники. Доказывается, что все поперечники совпадают и оптимальными подпространствами являются подпространства алгебраических комплексных полиномов.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11400.

Ключевые слова: весовое пространство Бергмана, обобщенный модуль непрерывности, оператор обобщенного сдвига, n-поперечники.

1. В работе рассматривается среднеквадратичное приближение функций рядами Фурье по ортогональным системам в области комплексного переменного при наличии веса. В области $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ задана неотрицательная измеримая, не эквивалентная нулю функция $\gamma(|z|)$ такая, что существует конечный интеграл

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|z|)\, d\sigma > 0,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, а $d\sigma$ — элемент площади. Функцию $\gamma = \gamma(|z|)$, удовлетворяющую этим условиям назовем весовой функцией.

Будем рассматривать вопросы среднеквадратичных приближений суммами Фурье комплексных функций f, регулярных в односвязной области $\mathscr{D}$, принадлежащих пространству $L_{2,\gamma} := L_2(\gamma(|z|), \mathscr{D})$ с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{L_{2,\gamma}} = \left(\iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|z|)|f(z)|^2 d\sigma\right)^{1/2} < \infty,$$

где $\gamma(|z|)$ — весовая в области $\mathscr{D}$ функция. В случае, когда область $\mathscr{D}$ есть круг $|z| \leqslant R$ $(0 < R < \infty)$ пространство $L_{2,\gamma}$ — весовое пространство Бергмана $B_{2,\gamma}$, введенное в работах [1, 2]. Экстремальные задачи аппроксимации аналитических функций и задачи вычисления значений различных n-поперечников в пространстве $B_{2,\gamma}$ рассмотрены во многих работах (см., например, [3–7] и приведенные в них библиографии).

Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная по области $\mathscr{D}$ система комплексных функций в пространстве $L_{2,\gamma}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(z), \quad c_k(f) = \iint\limits_{(\mathscr{D})} \gamma(|z|)f(z)\overline{\varphi_k(z)}\, dz \tag{1}$$

— суть ряды Фурье функции $f \in L_{2,\gamma}$ по этой системе,

$$S_n(f; z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)\varphi_k(z)$$

— его частичные суммы порядка n. Пусть $\mathscr{P}_n$ — подпространство обобщенных комплексных полиномов вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k\varphi_k(z),$$

где $d_k \in \mathbb{C}$. Тогда, как хорошо известно (см., например, [8], с. 263):

$$E_{n-1}(f) = \inf\left\{\|f - p_n\|_{2,\gamma}^2 : p_n(z) \in \mathscr{P}_n\right\} = \|f - S_n(f)\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2, \tag{2}$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f, определенные в (1).

Рассмотрим теперь функцию

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k(\eta)}h^k, \tag{3}$$

где $h \in (0, 1), (\xi, \eta) \in \mathscr{D} \times \mathscr{D}$, причем равенство в (3) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2(\mathscr{D} \times \mathscr{D}; \gamma(|\xi|)\gamma(|\eta|))$.

Сразу отметим, что в ряде частных случаев можно указать явные выражения для функции $T(\xi, \eta; h)$. Так, например, если $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, $\gamma(|z|) = 1$, то система функций $\varphi_k(z) = \sqrt{(k+1)/\pi}\, z^k$, $k = 0, 1, \ldots$, является ортонормированной (см., например, [8, с. 208]). В этом случае имеем (см., например, [9])

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k(\eta)}h^k = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(\xi\bar{\eta}h)^k = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1 - \xi\bar{\eta}h)^2}.$$

В пространстве $L_{2,\gamma}$ рассмотрим оператор F_h:

$$F_h f(z) = \iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|\zeta|) f(\zeta) T(z,\zeta;1-h)\, d\zeta, \tag{4}$$

который будем называть *оператором обобщенного сдвига*. Оператор F_h обладает следующими свойствами:
1) $F_h(f_1+f_2) = F_h(f_1) + F_h(f_2)$ $(\forall\, f_1, f_2 \in L_{2,\gamma})$;
2) $F_h(\lambda f) = \lambda F_h(f)$ $(\forall\, \lambda \in \mathbb{C})$ $(\forall\, f \in L_{2,\gamma})$;
3) $\|F_h(f)\| \leqslant \|f\|$ $(\forall\, f \in L_{2,\gamma})$;
4) $F_h \varphi_k(z) = (1-h)^n \varphi_k(z)$;
5) $\|F_h(f) - f\| \to 0,\ h \to 0+$.

При помощи оператора обобщенного сдвига F_h для произвольной функции $f \in L_{2,\gamma}$, определим конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h^1 f(z) = f(z) - F_h f(z) = (\mathbb{I} - F_h) f(z),$$

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1} f(z)) = (\mathbb{I} - F_h)^m f(z) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^{(k)} f(z),$$

где $F_h^0 f(z) = \mathbb{I} f(z) = f(z)$, $F_h^{(k)} f(z) = F_h(F_h^{(k-1)} f(z))$, $k = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $L_{2,\gamma}$. Величину

$$\Omega_m(f;t)_{2,\gamma} = \sup\left\{\|\Delta_h^m f(z)\|_{2,\gamma} :\ 0 < h \leqslant t\right\} \tag{5}$$

будем называть *обобщенным модулем непрерывности m-го порядка* функции $f \in L_{2,\gamma}$.

Лемма 1. *Для произвольной функции $f \in L_{2,\gamma}$ справедливо равенство*

$$\Omega_m^2(f;t)_{2,\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-(1-t)^k)^{2m} |c_k(f)|^2. \tag{6}$$

$\lhd$ Прежде всего, заметим, что оператор (4) с учетом (3) представим в виде

$$F_h f(z) = \iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|\zeta|) f(\zeta) T(z,\zeta;1-h)\, d\zeta = \iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|\zeta|) f(\zeta) \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\varphi_k(\zeta)(1-h)^k\right\} d\zeta$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|\zeta|) f(\zeta) \varphi_k(\zeta)\, d\zeta\right) \varphi_k(z)(1-h)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(z)(1-h)^k,$$

используя который последовательно находим

$$\Delta_h f(z) := f(z) - F_h f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(z)\big(1-(1-h)^k\big).$$

Далее, последовательно применяя полученную формулу, при любом $m \in \mathbb{N}$ и $h \in (0,1)$ имеем:

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta\big(\Delta_h^{m-1} f(z)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(z)\big(1-(1-h)^k\big)^m. \tag{7}$$

Применяя равенство Парсеваля к соотношению (7), и в силу того, что система функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ в области $\mathscr{D}\subset\mathbb{C}$ является ортонормированной, запишем

$$\big\|\Delta_h^m f\big\|_{2,\gamma}^2=\sum_{k=0}^{\infty}\Big[1-(1-h)^k\Big]^{2m}\big|c_k(f)\big|^2,\ h\in(0,1),$$

откуда в силу (5) получаем (6). $\rhd$

В работе [9] доказано, что для произвольной функции $f\in L_{2,\gamma}$ при любом $t\in(0,1)$ справедлива оценка

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma}\leqslant\big[1-(1-t)^n\big]^{-m}\Omega_m(f;t)_{2,\gamma},\quad m,n\in\mathbb{N},\tag{8}$$

причем при каждом фиксированном n константа в правой части неравенства (8) не может быть уменьшена. В самом деле, с одной стороны, для произвольной функции $f\in L_{2,\gamma}$ имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f;t)_{2,\gamma}}\leqslant\big[1-(1-t)^n\big]^{-m}.\tag{9}$$

С другой стороны, как следует из равенства (2) для функции $f_0(z)=\varphi_n(z)$, где $\varphi_n(z)$ — n-ый член ортогональной системы $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, имеем $E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma}=|c_n(f_0)|=1$. Для этой же функции из равенства (6) вытекает, что

$$\Omega_m(f_0;t)_{2,\gamma}=\big[1-(1-t)^n\big]^m.$$

Имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f;t)_{2,\gamma}}\geqslant\frac{E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f_0;t)_{2,\gamma}}=\big[1-(1-t)^n\big]^{-m}.\tag{10}$$

Таким образом, сопоставляя неравенства (9) и (10), получаем

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f;t)_{2,\gamma}}=\frac{1}{(1-(1-t)^n)^m},\quad 0<t<1.\tag{11}$$

Полагая в (11) $t=1/n$, имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f;1/n)_{2,\gamma}}=\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-m},$$

откуда сразу вытекает соотношение

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f;1/n)_{2,\gamma}}=\big(1-e^{-1}\big)^{-m}.$$

Всюду далее под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ будем понимать неотрицательную измеримую и суммируемую на $[0,h]$ функцию $q(t)$, не эквивалентную нулевой.

Теорема 1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $0<p\leqslant2$, $0<h<1$, q — *весовая функция на интервале* $(0,h)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma}q(t)\,dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}q(t)\,dt\right)^{1/p}}.\tag{12}$$

$\lhd$ Воспользуемся следующим упрощенным вариантом неравенства Минковского [10, с. 104]:

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\tilde{f}_k(t)|^2\right)^{p/2} dt\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int_0^h |\tilde{f}_k(t)|^p\,dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

верного при всех $0<p\leqslant 2$ и $h\in\mathbb{R}_+$. Полагая в неравенстве (13) $\tilde{f}_k = f_k q^{1/p}$, получаем

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2\right)^{p/2} q(t)\,dt\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int_0^h |f_k(t)|^p q(t)\,dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Используя неравенство (14), равенства (6) и (2) и учитывая очевидное соотношение

$$\inf_{k\geqslant n}\int_0^h \big(1-(1-t)^k\big)^{mp} q(t)\,dt = \int_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{mp} q(t)\,dt,$$

получаем

$$\begin{aligned}
\left\{\int_0^h \Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma} q(t)\,dt\right\}^{1/p} &= \left\{\int_0^h \left(\Omega_m^2(f,t)_{2,\gamma}\right)^{p/2} q(t)\,dt\right\}^{1/p}\\
&\geqslant \left\{\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty}\Big(1-(1-t)^k\Big)^{2m}|c_k(f)|^2\right)^{p/2} q(t)dt\right\}^{1/p}\\
&\geqslant \left\{\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(f)|^2\left(\int_0^h \Big(1-(1-t)^k\Big)^{mp} q(t)\,dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}\\
&\geqslant \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt\right)^{1/p}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(f)|^2\right\}^{1/2}\\
&= \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt\right)^{1/p} E_{n-1}(f)_{2,\gamma}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Из (15) получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (12):

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma} q(t)\,dt\right)^{1/p}} \leqslant \frac{1}{\left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt\right)^{1/p}}. \tag{16}$$

Для получения оценки снизу той же величины по-прежнему полагаем $f_0(z) := \varphi_n(z) \in L_{2,\gamma}$. Поскольку для этой функции

$$E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma} = 1, \quad \Omega_m(f_0,t)_{2,\gamma} = \big(1-(1-t)^n\big)^m, \quad 0<t<1,$$

то имеем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_0,t)_{2,\gamma} q(t)\,dt = \int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{mp} q(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma} q(t)dt\right)^{1/p}} \geqslant \frac{E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_0,t)_{2,\gamma} q(t)\,dt\right)^{1/p}}$$
$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt\right)^{1/p}}. \tag{17}$$

Из сопоставления оценки сверху (16) и оценки снизу (17) получаем требуемое равенство (12), чем и завершаем доказательство теоремы 1. $\rhd$

Из теоремы 1 вытекают следующие утверждения:

Следствие 1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $p=1/m$, $h\in(0,1)$, q — весовая функция на интервале $(0,h)$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\gamma} q(t)\,dt\right)^m} = \left(\int\limits_0^h [1-(1-t)^n] q(t)\,dt\right)^{-m}. \tag{18}$$

В частности, из (18) *при $q(t)\equiv 1$ следует равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left((n+1)\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\gamma}\,dt\right)^m} = \frac{1}{\big\{(n+1)h-1+(1-h)^{n+1}\big\}^m}. \tag{19}$$

Полагая в (19) *$h=1/(n+1)$, получаем*

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\gamma}\,dt\right)^m} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)}, \tag{20}$$

из которого, в свою очередь, следует экстремальное равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\gamma}\,dt\right)^m} = e^m.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Положим $q(t)=n(1-t)^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда при любом $h\in(0,1)$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(n\int\limits_0^h \Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma}(1-t)^{n-1}\,dt\right)^{1/p}} = \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{21}$$

Из (21), *в частности, при* $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, *получаем*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(n\int\limits_0^{1/n} \Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma}(1-t)^{n-1}\,dt\right)^{1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{22}$$

В свою очередь, из (22) *при* $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, *следует равенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(n\int\limits_0^{1/n} \Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\gamma}(1-t)^{n-1}\,dt\right)^{m}} = 2^m\left(\frac{e}{e-1}\right)^{2m}.$$

2. Приведем ряд определений и обозначений, необходимых нам для дальнейшего изложения. Пусть S — единичный шар в пространстве $L_{2,\gamma}$; $\Lambda_n \subset L_{2,\gamma}$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\gamma}$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_{2,\gamma} \to \Lambda_n$ — линейный непрерывный оператор; $\mathscr{L}^{\perp} : L_{2,\gamma} \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\gamma}$. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \sup\big\{\sup\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\gamma}\big\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \inf\big\{\sup\big\{\inf\{\|f-g\|_2 : g \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{M}\big\} : \Lambda_n \subset L_{2,\gamma}\big\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \inf\big\{\inf\big\{\sup\{\|f - \mathscr{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\} : \mathscr{L}L_{2,\gamma} \subset \Lambda_n\big\} : \Lambda_n \subset L_{2,\gamma}\big\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \inf\big\{\sup\{\|f\|_{2,\gamma} : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset L_{2,\gamma}\big\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}^{\perp}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}^{\perp}L_{2,\gamma} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\gamma}\right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным* n*-поперечниками* подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве $L_{2,\gamma}$. Известно [10, 11], что указанные n-поперечники монотонны по n и между ними в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}$ выполняются соотношения:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) \leqslant d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) \leqslant d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}). \tag{23}$$

Введем классы функций, вытекающие из неравенства (8) и утверждения теоремы 1. Пусть $h \in (0,1)$, $m \in \mathbb{N}$. Через $W_{2,\gamma,m}(\Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\gamma}$, обобщенный модуль непрерывности (6) которых удовлетворяет неравенству

$$\Omega_m(f,h)_{2,\gamma} \leqslant \Phi(h),$$

где Φ — неотрицательная, монотонно возрастающая функция на $[0,+\infty)$.

Через $W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m; q, h)$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\gamma}$, при любых $m \in \mathbb{N}$, $h \in (0,1)$ и $0 < p \leqslant 2$ удовлетворяющих условию

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f;t)_{2,\gamma}q(t)\,dt\right)^{1/p} \leqslant 1.$$

Теорема 2. *При любых* $n, m \in \mathbb{N}$ *и* $h \in (0,1)$ *справедливы равенства*

$$\lambda_n\big(W_{2,\gamma,m}(\Phi), L_{2,\gamma}\big) = E_{n-1}\big(W_{2,\gamma,m}(\Phi)\big) = \big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\Phi(h), \tag{24}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$, *а*

$$E_{n-1}\big(W_{2,\gamma,m}(\Phi)\big) = \sup\big\{E_{n-1}(f)_{2,\gamma} : f \in W_{2,\gamma,m}(\Phi)\big\}.$$

$\lhd$ Оценка сверху всех рассматриваемых n-поперечников класса $W_{2,\gamma,m}(\Phi)$ следует из неравенства (8), поскольку

$$\begin{gathered} E_{n-1}\big(W_{2,\gamma,m}(\Phi)\big) = \sup_{f\in W_{2,\gamma,m}(\Phi)} E_{n-1}(f)_{2,\gamma} \\ \leqslant \sup_{f\in W_{2,\gamma,m}(\Phi)} \big\{\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\Omega_m(f,h)_{2,\gamma}\big\} \leqslant \big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\Phi(h). \end{gathered} \tag{25}$$

Отсюда, учитывая соотношения (23) для всех перечисленных n-поперечников, получаем оценку сверху

$$\lambda_n\big(W_{2,\gamma,m}(\Phi)\big) \leqslant \big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\Phi(h). \tag{26}$$

Для получения оценки снизу всех n-поперечников, равных правой части неравенства (26) в $(n+1)$-мерном подпространстве полиномов

$$\mathscr{P}_{n+1} = \left\{p_{n+1}(z) : p_{n+1}(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(z)\right\},$$

введем в рассмотрение шар

$$S_{n+1} := \big\{p_{n+1}(z) \in \mathscr{P}_{n+1} : \|p_{n+1}\|_{2,\gamma} \leqslant \big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\Phi(h)\big\}$$

и покажем, что шар $S_{n+1} \subset W_{2,\gamma,m}(\Phi)$. В самом деле, для произвольного $p_{n+1}(z) \in S_{n+1}$, согласно равенству (6), имеем

$$\begin{gathered} \Omega_m^2(p_{n+1};h)_{2,\gamma} = \sum_{k=0}^{n}\big[1-(1-h)^k\big]^{2m}|a_k(p_{n+1})|^2 \\ \leqslant \big[1-(1-h)^n\big]^{2m}\sum_{k=0}^{n}|a_k(p_{n+1})|^2 = \big[1-(1-h)^n\big]^{2m}\|p_{n+1}\|_{2,\gamma}^2 \\ \leqslant \big[1-(1-h)^n\big]^{2m}\big[1-(1-h)^n\big]^{-2m}\Phi^2(h) = \Phi^2(h). \end{gathered}$$

Таким образом, мы доказали, что для произвольного $p_{n+1} \subset S_{n+1}$ имеет место неравенство $\Omega_m(p_{n+1},h)_{2,\gamma} \leqslant \Phi(h)$, а это означает, что $S_{n+1} \subset W_{2,\gamma,m}(\Phi)$. Но тогда согласно определению бернштейновского n-поперечника и соотношения (23) между n-поперечниками, запишем

$$\lambda_n(W_{2,\gamma,m}(\Phi), L_{2,\gamma}) \geqslant b_n(W_{2,\gamma,m}(\Phi), L_{2,\gamma}) \geqslant b_n(S_{n+1}, L_{2,\gamma}) \geqslant \big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\Phi(h). \tag{27}$$

Утверждение теоремы 2 вытекает из сопоставления оценки сверху (26) и оценки снизу (27). $\rhd$

Отметим, что утверждение теоремы 2 для колмогоровского n-поперечника ранее было доказано в работе [9].

Следствие 3. *В утверждении теоремы* 2 *при* $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, *имеет место асимптотическое равенство*

$$\lambda_n(W_{2,\gamma,m}(\Phi), L_{2,\gamma}) = \left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m}\Phi\left(\frac{1}{n}\right) \sim \big(1-e^{-1}\big)^{-m}\Phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $0 < p \leqslant 2$, $h \in (0,1)$, $q \geqslant 0$ — весовая функция на интервале $(0,h)$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h),L_{2,\gamma}) = E_{n-1}(W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h)) = \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1/p}, \quad (28)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников.

$\lhd$ Оценку сверху всех перечисленных выше n-поперечников получаем из неравенства (16), соотношения (23) и определения класса функций $W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h)$:

$$\lambda_n\big(W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h),L_{2,\gamma}\big) \leqslant d_n\big(W_pL_{2,\gamma}\big(\Omega_m;q,h),L_{2,\gamma}\big) \leqslant E_{n-1}\big(W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h)\big) \leqslant \left(\int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1/p}. \quad (29)$$

Для получения оценок снизу на множестве $\mathscr{P}_n \cap L_{2,\gamma}$ рассмотрим шар

$$\sigma_{n+1} = \left\{ p_{n+1} \subset \mathscr{P}_{n+1} : \|p_{n+1}\|_{2,\gamma} \leqslant \left(\int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1/p} \right\}$$

и докажем включение $\sigma_{n+1} \subset W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h)$.

Для произвольного полинома $p_{n+1} \subset \sigma_{n+1}$ на основании равенства (6) запишем

$$\Omega_m^2(p_{n+1};t)_{2,\gamma} = \sum_{k=0}^n \big(1-(1-t)^k\big)^{2m} |c_k(p_{n+1})|^2 \leqslant \big(1-(1-t)^n\big)^{2m} \sum_{k=0}^n |c_k(p_{n+1})|^2 = \big(1-(1-t)^n\big)^{2m} \|p_{n+1}\|_{2,\gamma}^2$$

или что то же

$$\Omega_m(p_{n+1};t)_{2,\gamma} \leqslant \big(1-(1-t)^n\big)^m \|p_{n+1}\|_{2,\gamma}. \quad (30)$$

Возводя левую и правую части неравенства (30) в степень p, умножая их на весовую функцию q и интегрируя обе части полученного таким образом неравенства по переменной t в пределах от $t=0$ до $t=h$, получаем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(p_{n+1};t)_{2,\gamma} q(t)\,dt \leqslant \|p_{n+1}\|_{2,\gamma}^p \int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{mp} q(t)\,dt \leqslant \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1} \int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt = 1,$$

и, следовательно, включение $\sigma_{n+1} \subset W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h)$ доказано. В силу определения бернштейновского n-поперечника и соотношения (23) между n-поперечниками имеем

$$\lambda_n\big(W_pL_{2,\gamma}\big(\Omega_m;q,h\big),L_{2,\gamma}\big) \geqslant b_n\big(W_pL_{2,\gamma}\big(\Omega_m;q,h\big),L_{2,\gamma}\big) \geqslant b_n(\sigma_{n+1},L_{2,\gamma}) \geqslant \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1/p}. \quad (31)$$

Требуемое равенство (28) получаем из сопоставления оценки сверху (29) и оценки снизу (31), чем и завершаем доказательство теоремы 3. $\rhd$

Литература

1. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* Наилучшие приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве B_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ // Докл. АН.—2006.—Т. 410, № 4.—С. 461–464.
2. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* О наилучшем приближения некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Докл. АН.—2007.—Т. 412, № 4.—С. 466–469. DOI 10.1134/S1064562407010279.
3. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Мат. сб.—2010.—Т. 201, № 8.—С. 3–22. DOI 10.4213/sm7505.
4. *Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С.* Значение n-поперечников и наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. ТулГу. Естеств. науки.—2014.—Вып. 3.—С. 40–57.
5. *Саидусайнов М. С.* О значении поперечников и наилучших линейных методах приближения в весовом пространстве Бергмана // Изв. ТулГу. Естеств. науки.—2015.—Вып. 3.—С. 91–104.
6. *Саидусайнов М. С.* О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Чебышевский сб.—2016.—Т. 17, вып 1.—С. 240–253.
7. *Лангаршоев М. Р.* О наилучших линейных методах приближения и точных значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Укр. мат. журн.—2015.—Т. 67, № 10.—С. 1366–1379.
8. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного.—М.–Л.: Наука, 1964.—440 с.
9. *Абилов В. А., Абилова Ф. В., Керимов М. К.* Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // Журн. выч. математики и мат. физики.—2010.—Т. 50, № 6.—С. 999–1004.
10. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory.—Berlin–Heidelberg–N. Y.–Tokyo: Springer-Verlag, 1985.—287 p.
11. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.—М.: МГУ, 1976.—325 с.

Статья поступила 14 января 2017 г.

Шабозов Мирганд Шабозович
Институт математики им. А. Джураева
АН Республики Таджикистан,
главный научный сотрудник
отдела теории функций и функционального анализа
ТАДЖИКИСТАН, 734063, Душанбе, ул. Айни, 299/4
E-mail: `shabozov@mail.ru`

Саидусайнов Муким Саидусайнович
Таджикский национальный университет,
докторант кафедры функционального
анализа и диф. уравнений
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: `smuqim@gmail.com`

MEAN-SQUARE APPROXIMATION OF COMPLEX VARIABLE FUNCTIONS BY FOURIER SERIES IN THE WEIGHTED BERGMAN SPACE

Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S.

In this paper we consider the problem of mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier series in orthogonal system. The functions f under consideration are assumed to be regular in some simply connected domain $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ and square integrable with a nonnegative weight function $\gamma := \gamma(|z|)$ which is integrable in $\mathscr{D}$, that is, when $f \in L_{2,\gamma} := L_2(\gamma(|z|), D)$.
Earlier, V. A. Abilov, F. V. Abilova and M. K. Kerimov investigated the problems of finding exact estimates of the rate of convergence of Fourier series for functions $f \in L_{2,\gamma}$ [9]. They proved some exact Jackson type inequalities and found the values of the Kolmogorov's n-width for certain classes of functions. In doing so, a special form of the shift operator was widely used to determine the generalized modulus of continuity of mth order and classes of functions defined by a given increasing in $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ majorant. The article continues the research of these authors, namely, the exact Jackson–Stechkin type inequality between the best approximation of a functions $f \in L_{2,\gamma}$ by algebraic complex polynomials and L_p norm of generalized module of continuity is proved; approximative properties of classes of functions are studied for which the L_p norm of the generalized modulus of continuity has a given majorant.
Under certain assumptions on the majorant,the values of Bernstein, Kolmogorov, linear, Gelfand, and projection n-widths for classes of functions in $L_{2,\gamma}$ were calculated. It was proved that all widths are coincide and an optimal subspace is the subspace of complex algebraic polynomials.

Key words: weighted Bergman space, generalized module of continuity, n-width, generalized shift operator.

References

1. *Shabozov M. Sh., Shabozov O. Sh.* Best approximation and the value of the widths of some classes of functions in the Bergman space $B_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, *Doklady Akademii Nauk* [*Dokl. Akad. Nauk*], 2006, vol. 410, no. 4, pp. 461–464 (in Russian).
2. *Shabozov M. Sh., Shabozov O. Sh.* On the best approximation of some classes of analytic functions in the weighted Bergman spaces, *Doklady Akademii Nauk* [*Dokl. Akad. Nauk*], 2007, vol. 412, no. 4, pp. 466–469 (in Russian). DOI 10.1134/S1064562407010279.
3. *Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh.* The widths of classes of analytic functions in a disc, *Matematicheskij sbornik* [*Sbornik: Mathematics*], 2010, vol. 201, no. 8, pp. 3–22 (in Russian). DOI 10.4213/sm7505.
4. *Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S.* The values of n widths and best linear methods of approximation for some analytic classes functions in the weighted Bergman space, *Izvestija Tul'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvennye nauki* [*News of the Tula state university. Natural sciences*], 2014, no. 3, pp. 40–57 (in Russian).
5. *Saidusaynov M. S.* On the Values of widths and the best linear methods of approximation in the weighted Bergman space, *Izvestija Tul'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvennye nauki* [*News of the Tula state university. Natural sciences*], 2015, no. 3, pp. 91–104 (in Russian).
6. *Saidusaynov M. S.* On the best linear method of approximation of some classes analytic functions in the weighted Bergman space, *Chebyshevskij sbornik* [*Chebyshevskii Sb.*], 2016, vol. 17, no. 1, pp. 240–253 (in Russian).
7. *Langarshoev M. R.* On the Best Linear Methods of Approximation and the Exact Values of Widths for Some Classes of Analytic Functions in the Weighted Bergman Space, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2016, vol. 67, no. 10, pp. 1537–1551. DOI 10.1007/s11253-016-1171-z.
8. *Smirnov V. I., Lebedev N. A. Konstruktivnaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo* [*Constructive Theory of Functions of Complex Variables*]. Nauka, Moscow, 1964, 440 p. (in Russian).
9. *Abilov V. A., Abilova F. V., Kerimov M. K.* Sharp estimates for the convergence rate of Fourier series of complex variable functions in $L_2(D, p(z))$, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 6, pp. 946-950. DOI 10.1134/S0965542510060023.
10. *Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory.* Berlin, etc., Springer-Verlag, 1985, 287 p.
11. *Tikhomirov V. M. Nekotorye voprosy teorii priblizhenij* [*Some Questions of Approximation Theory*]. Moscow, Izd. Moscow. Univ., 1976, 325 p.

Received 14 January, 2017

Shabozov Mirgand Shabozovich
Academy of Science Republic of Tajikistan,
Institute of Mathematics named after A. Juraev,
Main Research Worker of the Department
of the Theory of Functions and Functional Analysis
299/1 Ayni St., Dushanbe, 734063, Tajikistan
E-mail: `shabozov@mail.ru`

Saidusaynov Mukim Saidusaynovich
Tajik National University,
Doctorial Candidate of the Department
of Functional Analysis and Differential Equations
17 Rudaky avenue, Dushanbe, 734025, Tajikistan
E-mail: `smuqim@gmail.com`

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 98–102

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ПАМЯТИ ИНОМЖОНА ГУЛАМДЖАНОВИЧА ГАНИЕВА (1959–2017)

18 февраля 2018 г. исполняется год со дня смерти Иномжона Гуламджановича Ганиева, известного узбекского математика, доктора физико-математических наук, профессора. Иномжон Гуламджанович останется в памяти многих людей, и в первую очередь своих близких, друзей, коллег как добрый и отзывчивый человек, искренно любивший и до конца своей жизни преданный математике ученый и организатор науки.

И. Г. Ганиев родился 26 сентября 1959 г. в селе Водил Ферганской области. Его отец — Гуламджан Ганиев и мать — Мархабат Ганиева были учителями сельской школы. В 1977 г. окончил среднюю школу и поступил на математический факультет Ферганского педагогического института. В 1980 г. перевелся на третьей курс Ташкентского государственного университета (ТашГУ).

После окончания университета в 1983 г. поступил в аспирантуру ТашГУ по специальности «функциональный анализ». С первых дней своей научной деятельности он начал изучать теорию векторных мер. Им был получен ряд интересных теорем в этой области, в частности, установлен вариант теоремы Радона — Никодима для векторных мер со значениями в пространстве измеримых функций. Молодого аспиранта заметили академик Тошмухаммад Алиевич Сарымсаков и его ученик профессор Михаил Шулимович Гольдштейн (ныне видный ученый, профессор университета Торонто (Канада)) и всячески поддерживали Иномжона Ганиева в его научных устремлениях. Под влиянием коллектива профессиональных математиков, участников городского семинара по функциональному анализу (Дж. Х. Ходжиев, Р. Н. Ганиходжаев, Н. Н. Ганиходжаев, В. И. Чилин, Ш. А. Аюпов, М. Ш. Гольдштейн, О. Я. Бендерский и др.), возглавляемого академиком АН РУз Т. А. Сарымсаковым, формируется широкий научный кругозор Иномжона Ганиева, проявляются его способности к самостоятельным научным исследованиям.

В 1990 г. Иномжон Ганиев защищает диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «математический анализ» на тему «Интегральное представление линейных операторов».

С 1996 г. под влиянием работ А. Г. Кусраева, С. А. Малюгина и А. Е. Гутмана Иномжон Ганиев начал вести исследования, относящиеся к общей теории решеток Банаха —

Канторовича и их измеримым банаховым расслоениям. Представление решетки Банаха — Канторовича в виде пространства измеримых сечений банаховых расслоений позволяет ему решить целый ряд задач, связанных с теорией векторных мер и с теорией решеток Банаха — Канторовича. В частности, им дано описание модулярной меры со значениями в алгебре измеримых действительных функций в виде измеримого расслоения числовых мер. Такое представление позволило реализовывать L_p-решетки Банаха — Канторовича как измеримые расслоения классических функциональных L_p-пространств, ассоциированных с числовыми мерами. Этот метод значительно упрощает решение многих задач эргодической теории и теории мартингалов в L_p-решетках Банаха — Канторовича.

К этому времени, Иномжон Ганиева начинает активное совместное сотрудничество с профессором В. И. Чилиным, известным своими исследованиями в теории некоммутативных симметричных пространств. В результате их совместной работы появляется серия статей, относящихся к общей теории некоммутативного интегрирования на алгебрах фон Неймана относительно векторнозначных следов.

Полученные здесь результаты стали основой докторской диссертации Иномжона Ганиева на тему «Измеримые расслоения решеток и некоммутативных L_p-пространств и их приложения», защита которой состоялась в 2002 г. в Национальном университете Узбекистана. Научным консультантом был профессор В. И. Чилин. Основные результаты диссертационной работы были опубликованы в книге: Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Наука, 2006. С. 9–49.

В последующие годы И. Г. Ганиевым продолжались исследования, связанные с теорией операторов в пространствах Банаха — Канторовича, в частности, для этих пространств были доказаны вариант теоремы Банаха об обратном операторе и вариант принципа равномерной ограниченности Банаха — Штейнгауза.

Еще один цикл исследований И. Г. Ганиева связан с теорией C^*-алгебр, нормированных над кольцом измеримых функций. Здесь были получены вариант теоремы Гельфанда — Наймарка и дан вариант ГНС-представления.

Педагогическая деятельность Иномжона Ганиева началась в 1987 г. сразу после окончания аспирантуры. Он начинает работать на кафедре «Высшая математика» в одном из крупнейших технических вузов республики Узбекистан — Ташкентском институте инженеров железнодорожного транспорта (ТашИИТ). В те годы заведующий этой кафедры — академик АН РУз Александр Федорович Лаврик — пригласил на работу в ТашИИТ несколько молодых специалистов — выпускников-математиков ТашГУ, среди которых и был Иномжон Ганиев. Став единомышленниками, они способствовали укреплению позиций кафедры, опираясь на ее давние традиции, впитывая опыт старших коллег, совершенствуя методики преподавания математики и развивая научные исследования в различных областях математики и механики.

И. Г. Ганиев надолго связал свою судьбу с кафедрой Высшей математики, начав свою педагогическую деятельность в должности ассистента, с 1990 г. работает доцентом, а с 2003 г. профессором кафедры. С 2007 по 2011 гг. он уже заведовал кафедрой «Высшая математика». Обладая хорошими организаторскими способностями, И. Г. Ганиев, добился высоких результатов в учебно-методической работе кафедры, сумел установить в коллективе теплые отношения, основанные на взаимоуважении и строгой дисциплине.

Иномжон Ганиев принимал участие в работе многих международных научных конференциях. С 2004 по 2011 гг. был постоянным членом оргкомитета на традиционных международных научных конференциях, ежегодно проводимых Южным математическим институтом ВНЦ РАН (г. Владикавказ) и Южным Федеральным университетом (г. Ростов-на-Дону). Он поддерживал теплые научные связи со многими российскими учеными математиками. В этих отношениях важное место принадлежит профессору А. Г. Кусраеву, известному специалисту в области функционального анализа. Он оказал благотворное влияние на формирование Иномжона Ганиев как ученого-математика, обсуждая с ним его научные работы, давая, при этом, полезные советы для дальнейших исследований.

В августе 2011 г. Иномжон Ганиев получил приглашение от международного исламского университета Малайзии (Куала-Лампур) на работу профессором кафедры инженерной науки, где проработал до середины 2016 г.

Во время работы в университете Малайзии И. Г. Ганиев продолжил свои научные исследования и совместно с профессором Ф. Мухамедовым опубликовал ряд работ, в которых, в частности, доказаны различные варианты эргодических теоремы для специальных классов решеток Банаха — Канторовича.

И. Г. Ганиев является автором трех учебников и пяти учебных пособий для вузов и более 80 научных работ, опубликованных в зарубежных и республиканских изданиях. Им подготовлено двое кандидатов физико-математических наук (А. А. Арзиев, З. З. Саддадинова). Значительное влияние он оказал на формирование доктора физико-математических наук К. К. Кудайбергенова.

Иномжон Гуламджанович Ганиев был искренним, добрым и отзывчивым человеком, в отношениях с коллегами и учениками всегда был тактичен и доброжелателен. Он обладал способностью искренне радоваться новым научным идеям и результатам своих коллег и друзей.

Он ушел от нас в самом расцвете сил, полный творческих замыслов и надежд.

Память о Иномжоне Ганиеве, талантливом математике, человеке с добрым, отзывчивым сердцем сохранится навсегда в сердцах всех знавших его людей: родных, друзей, коллег и учеников.

Ш. А. Аюпов, В. И. Чилин, Р. Н. Ганихаджаев,
К. К. Муминов, А. Артикбаев, Б. С. Закиров, А. Алимов,
К. К. Кудайбергенов, Ф. Мухамедов, У. Бекбоев, И. Рахимов.

Список основных научных работ И. Г. Ганиева

1. *Теорема Радона — Никодима для векторных мер со значениями в K-пространствах измеримых функций* // Успехи мат. наук.—1995.—№ 2.—С. 208–210. *Совместно с Сайдалиевым З.*

2. *Дифференцирование векторных мер со значениями в $L^\infty(\Omega, X)$* // Докл. АН РУз.—1998.—№ 3.—С. 11–14.

3. *Измеримые расслоения булевых алгебр* // Узбек. мат. журн.—1998.—№ 3.—С. 18–23.

4. *Измеримые расслоения банаховых решеток* // Узбек. мат. журн.—1998.—№ 5.—С. 14–21.

5. *Измеримые расслоения метризуемых топологических векторных решеток* // Докл. АН РУз.—1999.—№ 4.—С. 8–11.

6. *Упорядоченные $*$-алгеброиды Банаха — Канторовича* // Узбек. мат. журн.—1999.—№ 4.—С. 21–25. Совместно с Чилиным В. И.

7. *О векторных мерах со значениями в пространствах Банаха — Канторовича* // Изв. вузов. Сер. Математика.—1999.—№ 4.—С. 65–67.

8. *Индивидуальная эргодическая теорема для сжатий решеток Банаха — Канторовича $L_p(\nabla, \mu)$* // Изв. вузов. Сер. Математика.—2000.—№ 7.—С. 81–83. Совместно с Чилиным В. И.

9. *Абстрактная характеризация некоммутативных L_p-пространств, ассоциированных с центрозначным следом* // Докл. АН РУз.—2000.—№ 7.—С. 6–8.

10. *Разложения некоммутативных $L_p(M, \Phi)$-пространств, ассоцированных с центрозначным следом* // Узбек. мат. журн.—2000.—№ 4.—С. 8–13.

11. *Измеримые расслоения $*$-алгебр измеримых операторов* // Узбек. мат. журн.—2001.—№ 1.—С. 8–13. *Совместно с Чилиным В. И.*

12.*Martingales in the Banach–Kantorovich s lattices $L_p(\nabla, \mu)$* // Proc. of Int. Conf. Math. and its Appl. in the New Millenium.—Univ. Putra Malaysia, 2001.—С. 52–59.

13. *Измеримые расслоения некоммутативных L_p-пространств, ассоцированных с центрозначным следом* // Мат. тр.—2001.—Т. 4, № 2.—С. 27–41. *Совместно с Чилиным В. И.*

14. *Measurable bundles of compact operators* // Methods Func. Anal. and Topol.—2001.—Vol. 7, № 3.—P. 1–5. *With Kudaybergenov K. K.*

15. *Свойства сходимости по мере на йордановых алгебрах* // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, № 4.—С. 43–50. *Совместно с Каримовым А.*

16. *Измеримые расслоение C^*-алгебр* // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, № 1.—С. 35–39. *Совместно с Чилиным В. И.*

17. *Решеточные гомоморфизмы в решетках Банаха — Канторовича* // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 1.—С. 37–41.

18. *Теорема Банаха об обратном операторе в пространствах Банаха — Канторовича* // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 3.—С. 21–25. *Совместно с Кудайбергеновым К. К.*

19. *Конечномерные модули над кольцом измеримых функций* // Узбек. мат. журн.—2004.—№ 4.—С. 3–9. *Совместно с Кудайбергеновым К. К.*

20. *Измеримые расслоения решеток и их приложения* // Исслед. по функц. анализу и его прил.—М.: Наука, 2006.—С. 9–49.

21. Принцип равномерной ограниченности Банаха — Штейнгауза для операторов в расширенных пространствах Банаха — Канторовича над L^0 // Мат. тр.—2006.—Т. 9, № 1.—С. 21–33. *Совместно с Кудайбергеновым К. К.*

22. *On the «Zero–Two» law for positive contractions in the Banach–Kantorovich lattice*

$L_p(\nabla, \mu)$ // Comment. Math. Univ. Carolinae.—2006.—Vol. 47, № 3.—P. 27–436. *With Mukhamedov F.*

23. *Теорема Гельфанда — Наймарка — Сигала для C^*-алгебр над кольцом измеримых функции* // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, № 2.—С. 33–39. *Совместно с Чилиным В. И., Кудайбергеновым К. К.*

24. *Теорема Гельфанда — Наймарка для коммутативных C^*-алгебр над кольцом измеримых функции* // Изв. вузов. Сер. Математика.—2008.—№ 2.—С. 60–68. *Совместно с Чилиным В. И., Кудайбергеновым К. К.*

25. *Полугруппа операторов в пространствах Банаха — Канторовича* // Узбек. мат. журн.—2009.—№ 2.—С. 60–68. *Совместно с Сададдиновой З. З.*

26. *Vector valued martingale-ergodic and ergodic-martingale theorems* // Stochastic Anal. and Appl.—2012.—Vol. 30, № 5.—P. 916–932 (ISI). *With Shahidy F.*

27. *Weighted ergodic theorems for Banach–Kantorovich lattice L_p* // Lobachevski J. of Math.—2013.—Vol. 34, № 1.—P. 1–10. (With Mukhamedov F.)

28. *The Bochner integral for measurable sections and its properties* // Annal. of Func. Anal.—2013.—Vol. 4, № 1.—P. 1–10. *With S. M. Gharib.*

29. *Vector valued martingale-ergodic and ergodic-martingale theorems* // Stochastic Anal. Appl.—2012.—Vol. 30, № 5.—P. 916–932. *With Shahidi F.*

30. *On weighted ergodic theorems for Banach–Kantorovich lattice $L_p(\nabla, \mu)$* // Lobachevskii J. Math.—2013.—Vol. 34.—P. 1–10. *With Mukhamedov F.*

31. *Measurable bundles of C^*-algebras over ideals* // J. Phys. Conf. Ser.—2013.—Vol. 435. 012004. *With Mukhamedov F.*

32. *The Bochner Integral for Measurable Sections and its Properties* // Ann Funct. Anal.—2013.—Vol. 4 , № 1.—P. 1–10. *With Mahmoud G.*

33. *Measurable bundles of C^*-dynamical systems and its applications* // Positivity.—2014.—Vol. 18.—P. 687–702. *With Mukhamedov F.*

34. *Weighted ergodic theorem for contractions of Orlicz–Kantorovich lattice $L_M(\widehat{\nabla}, \widehat{\mu})$* // Bull. Malay. Math. Sci. Soc.—2015.—Vol. 38.—P. 387–397. *With Mukhamedov F.*

35. *The strong «Zero–Two» law for positive contractions of Banach–Kantorovich L_p-lattices* // Turk. J. Math.—2015.—Vol. 39.—P. 583–594. *With Mukhamedov F., Bekbaev D.*

36. *Conditional expectation operator on the space of measurable sections* // Amer. Inst. Proc.—2015.—Vol. 1660. 090046. *With Mukhamedov F., Shahidi F.*

37. *C^*-algebras over Arens algebras* // Amer. Inst. Proc.—2015.—Vol. 1660. 050051. *With Mukhamedov F., Bekbaev D.*

38. *On a generalized uniform «Zero–Two» law for positive contractions of non-commutative L_1-spaces* // J. Phys.: Conf. Ser.—2016.—Vol. 697. 012003. *With Mukhamedov F., Bekbaev D.*

39. *Convergence of martingales in Orlicz–Kantorovich lattice* // Malaysian J. of Math. Sci.—2016.—Vol. 10.—P. 1–13.

40. *The Gelfand–Naimark theorem for C^*-algebras over Arens algebras* // Malaysian J. of Math. Sci.—2016.—Vol. 10.—P. 205–218. *With Mukhamedov F., Bekbaev D.*

41. *A few remarks on «Zero–Two» law for positive contractions in the Orlicz–Kantorovich spaces* // J. Phys.: Conf. Ser.—2017.—Vol. 819. 012016. *With Mukhamedov F., Bekbaev D.*

42. *Conditional expectations and martingales in noncommutative L_1-spaces associated with center-valued traces* // Acta Math. Sci.—2017.—Vol. 37.—P. 1019–1032. *With Mukhamedov F.*

43. *Abstract characterization of a conditional expectation operator on the space of measurable sections* // Sains Malaysiana.—2017.—Vol. 46.—P. 175–179. *With Mukhamedov F., Hassan T.*

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи в порядке цитирования или по алфавиту. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов ($\approx$ 12 стр. формата А4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 50-18-06;
E-mail: `rio@smath.ru`
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 20

Выпуск 1

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

Подписано в печать 20.03.2018. Дата выхода в свет 29.03.2018.
Формат бумаги $60\times84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 11,97. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель и издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.