Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
В Л А Д И К А В К А З С К И Й   Н А У Ч Н Ы Й   Ц Е Н Т Р
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17, выпуск 4 октябрь–декабрь, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2015

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 3–10

УДК **512.543**

НЕКОТОРЫЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП И РАСЩЕПЛЯЕМЫХ РАСШИРЕНИЙ[1]

Д. Н. Азаров

Доказано, что для каждого конечного множества π простых чисел существует полициклическая группа, которая аппроксимируема конечными p-группами для тех и только тех простых чисел p, которые принадлежат множеству π.

Ключевые слова: полициклическая группа, расщепляемое расширение.

1. Введение

Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если для каждого неединичного элемента $a \in G$ существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу, переводящий элемент a в неединичный элемент.

Одним из обобщений этого понятия является свойство аппроксимируемости произвольным фиксированным классом групп. Пусть $\mathscr{K}$ — некоторый класс групп. Группа G называется *аппроксимируемой группами из класса* $\mathscr{K}$ (или, короче, $\mathscr{K}$*-аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1.

Если $\mathscr{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathscr{F}$-аппроксимируемости совпадает с понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также более тонкое свойство $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости, где p — простое число, $\mathscr{F}_p$ — класс всех конечных p-групп.

В своем историческом обзоре [1] Б. Чандлер и В. Магнус свидетельствуют, что понятие финитно аппроксимируемой группы введено А. И. Мальцевым в 1940 г. в его статье «О представлении бесконечных групп матрицами» [2]. Заметим, что в этой работе термин «аппроксимируемость» еще не использовался. Этот термин был введен А. И. Мальцевым в 1949 г. в его работе [3], посвященной нильпотентным группам и алгебрам. На английском языке соответствующий термин был введен Ф. Холлом в 1955 г.

В упомянутой выше работе [2] А. И. Мальцев установил финитную аппроксимируемость произвольной конечно порожденной линейной группы. Отсюда следует, что все свободные группы и все полициклические группы финитно аппроксимируемы. Финитная аппроксимируемость полициклических групп независимо от результата Мальцева была установлена К. Гиршем [4].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки в рамках выполнения НИР по государственному заданию.

Напомним, что группа называется полициклической (сверхразрешимой), если она обладает субнормальным (нормальным) рядом с циклическими факторами. Полициклические группы являются исторически первым содержательным примером финитно аппроксимируемых групп. Вопрос об их $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости не исследован, но в работе А. Л. Шмелькина [5] устанавливается следующее свойство полициклических групп, являющееся промежуточным между $\mathscr{F}$-аппроксимируемостью и $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемостью.

Любая полициклическая группа почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.

Напомним, что группа G называется почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой, если она содержит $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Вопрос об $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости полициклических групп полностью исследован только для некоторых классов полициклических групп, например, для класса конечно порожденных нильпотентных групп и для более широкого класса сверхразрешимых групп. Еще в работе К. Грюнберга [6] была доказана следующая теорема.

Любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p.

Для произвольной конечно порожденной нильпотентной группы соответствующий критерий формулируется следующим образом (см., например, [7]).

Конечно порожденная нильпотентная группа $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все ее элементы конечного порядка являются p-элементами.

Элемент конечного порядка мы называем p-элементом, если его порядок является степенью числа p.

Вопрос об $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости сверхразрешимых групп сводится к аналогичному вопросу для конечно порожденных нильпотентных групп следующим образом.

Если сверхразрешимая группа $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для нечетного простого числа p, то она нильпотентна. Сверхразрешимая группа $\mathscr{F}_2$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все ее элементы конечного порядка являются 2-элементами. В частности, любая сверхразрешимая группа без кручения $\mathscr{F}_2$-аппроксимируема.

Этот результат был получен автором настоящей статьи совместно с Д. И. Молдаванским в работе [8].

По-видимому, единственным результатом общего характера об $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости произвольной полициклической группы на протяжении многих лет продолжает оставаться следующая знаменитая теорема К. Сексенбаева [9].

Если полициклическая группа $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она является нильпотентной группой без кручения.

Для произвольной группы G через π_G будем обозначать множество всех простых чисел p, для которых группа G является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой. Из сформулированных выше результатов Сексенбаева и Грюнберга непосредственно вытекает следующее утверждение.

Для полициклической группы G множество π_G либо конечно, либо совпадает с множеством всех простых чисел.

В связи с этим утверждением здесь будет доказана следующая

Теорема 1. *Для произвольного конечного множества π простых чисел существует полициклическая группа G такая, что $\pi_G = \pi$.*

При исследовании полициклических групп особое значение имеет конструкция расщепляемого расширения. Напомним, что группа P называется расщепляемым расширением группы G с помощью группы T, если G — нормальная подгруппа группы P, T — подгруппа группы P, $P = GT$ и $G \cap T = 1$. Хорошо известно и легко проверяется, что любое расширение с помощью бесконечной циклической группы расщепляемо. Поэтому, если в полициклической группе G рассмотреть субнормальный ряд

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_n = G \tag{1}$$

с циклическими факторами, то для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ группа G_k является либо конечным расширением группы G_{k-1}, либо расщепляемым расширением группы G_{k-1} с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому сформулированные выше результаты Гирша и Шмелькина о полициклических группах могут быть легко доказаны индукцией по n с помощью следующего результата.

Расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathscr{F}$-аппроксимируемой (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой) группы с помощью $\mathscr{F}$-аппроксимируемой (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой) группы само является $\mathscr{F}$-аппроксимируемой (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой) группой.

В части, касающейся $\mathscr{F}$-аппроксимируемости это утверждение доказано А. И. Мальцевым в работе [10]. Вторая половина этой теоремы доказана автором настоящей статьи в работе [11].

Простые примеры показывают, что расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы с помощью $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы не обязано быть $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой. Для такого расщепляемого расширения здесь будет доказано следующее достаточное условие $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости.

Теорема 2. *Пусть P — расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы G с помощью $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы T. Если подгруппа T субнормальна в группе P, то группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой.*

Так как в нильпотентной группе все подгруппы субнормальны, а в конечно порожденной нильпотентной группе без кручения существует нормальный ряд с бесконечными циклическими факторами, то в любой конечно порожденной нильпотентной группе G без кручения существует нормальный ряд вида (1) такой, что для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ группа G_k является расщепляемым расширением группы G_{k-1} с помощью бесконечной циклической субнормальной подгруппы. Поэтому результат Грюнберга о $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости конечно порожденной нильпотентной группы без кручения может быть легко доказан с помощью теоремы 2 индукцией по длине ряда (1).

Поиск необходимого и достаточного условия $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости расщепляемых расширений, по-видимому, является трудной задачей. Об этом свидетельствует тот факт, что соответствующие критерии, полученные для самых простых частных случаев, формулируются и доказываются нетривиально.

Так, например, в работе [12] получен критерий $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости расщепляемого расширения свободной абелевой группы конечного ранга с помощью бесконечной циклической группы. Для его формулировки введем следующие обозначения. Пусть G — свободная абелева группа конечного ранга, φ — автоморфизм группы G. И пусть P — соответствующее автоморфизму φ полупрямое произведение группы G и бесконечной циклической группы $T = (t)$. Это означает, что группа P представляет собой расщепляемое расширение группы G с помощью группы T, и для каждого элемента $g \in G$ имеет место равенство $t^{-1}gt = g\varphi$. Обозначим через $h(x)$ характеристический многочлен автоморфизма φ. В [12] доказано, что группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда число p делит $f(1)$ для любого неприводимого делителя $f(x) \in Z[x]$ многочлена $h(x)$. В случае, когда ранг свободной абелевой группы G равен 2, критерий $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости группы P допускает следующую более простую формулировку.

Теорема 3. *Пусть G — свободная абелева группа ранга 2, φ — автоморфизм группы G, P — соответствующее автоморфизму φ полупрямое произведение группы G и бесконечной циклической группы T. И пусть A — матрица автоморфизма φ в некотором базисе группы G, E — единичная 2×2-матрица. Если $\det(A + E) \neq 0$, то группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда число p делит $\det(A - E)$. Если же $\det(A + E) = 0$, то группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $p = 2$.*

Эта теорема может быть доказана с помощью сформулированного выше критерия $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости полупрямого произведения свободной абелевой группы конечного ранга и бесконечной циклической группы. Независимое доказательство теоремы 3 приведено в разделе 2.

Непосредственным следствием теоремы 3 является следующий результат.

Следствие. *Пусть π — произвольное конечное множество простых чисел, и m — произведение всех чисел из π. Если полупрямое произведение P свободной абелевой группы G ранга 2 и бесконечной циклической группы T задается с помощью автоморфизма φ группы G, имеющего в некотором базисе группы G матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m+2 \end{pmatrix},$$

то $\pi_P = \pi$.

Отсюда следует справедливость теоремы 1. Поэтому в доказательстве нуждаются только теоремы 2 и 3.

2. Доказательство теоремы 3

Пусть G — свободная абелева группа ранга 2, φ — автоморфизм группы G, P — соответствующее автоморфизму φ полупрямое произведение группы G и бесконечной циклической группы $T = (t)$. Тогда P — расщепляемое расширение группы G с помощью группы T, и для каждого элемента $g \in G$ имеет место равенство $t^{-1}gt = g\varphi$. Обозначим через A матрицу автоморфизма φ в некотором базисе группы G, а через E — единичную 2×2-матрицу. Докажем теорему 3, т. е. следующие два утверждения.

1. *Если $\det(A + E) \neq 0$, то группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда число p делит $\det(A - E)$.*

2. *Если $\det(A + E) = 0$, то группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $p = 2$.*

Пусть $\gamma_n(P)$ — n-й член нижнего центрального ряда группы P (где, напомним, $\gamma_1(P) = P$ и $\gamma_{n+1}(P)$ — взаимный коммутант $\gamma_n(P)$ и P).

Покажем, что для любого $n \geqslant 2$ подгруппа $\gamma_n(P)$ совпадает с подгруппой $G(\varphi - id)^{n-1}$, т. е. с образом группы G относительно ее эндоморфизма $(\varphi - id)^{n-1}$, где id — тождественный эндоморфизм группы G. Сразу заметим, что это утверждение мы докажем без предположения о двупорожденности группы G. Для нас здесь существенна только ее коммутативность, которая позволяет использовать стандартные операции сложения и умножения в кольце эндоморфизмов группы G.

Пусть $n \geqslant 2$. Тогда, как легко видеть, $\gamma_n(P) \leqslant G$ и произвольный элемент из подгруппы $\gamma_n(P)(\varphi - id)$ имеет вид

$$a(\varphi - id) = t^{-1}ata^{-1},$$

где $a \in \gamma_n(P)$. Поэтому $\gamma_n(P)(\varphi - id) \subseteq \gamma_{n+1}(P)$. Верно и обратное включение. В самом деле, $\gamma_{n+1}(P)$ порождается элементами вида

$$t^{-k}at^k a^{-1} \quad (a \in \gamma_n(G),\ k \in \mathbb{Z}),$$

и эти элементы принадлежат $\gamma_n(P)(\varphi - id)$, так как для любого элемента $a \in \gamma_n(P)$ и для любого целого положительного числа l

$$t^{-l}at^l a^{-1} = a(\varphi^l - id) = a(id + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^{l-1})(\varphi - id) \in \gamma_n(P)(\varphi - id);$$

$$\begin{aligned} t^l at^{-l}a^{-1} = a(\varphi^{-l} - id) &= a(-\varphi^{-l})(\varphi^l - id) \\ &= a(-\varphi^{-l})(id + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^{l-1})(\varphi - id) \in \gamma_n(P)(\varphi - id). \end{aligned}$$

Таким образом, $\gamma_{n+1}(P) = \gamma_n(P)(\varphi - id)$ при всех $n \geqslant 2$. Аналогично проверяется, что $\gamma_2(P) = G(\varphi - id)$. Из последних двух обстоятельств следует, что для каждого $n \geqslant 2$

$$\gamma_n(P) = G(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}. \tag{2}$$

Хорошо известно, что если эндоморфизм ψ свободной абелевой группы V конечного ранга инъективен, то индекс $[V : V\psi]$ совпадает с модулем определителя матрицы эндоморфизма ψ. Отсюда и из того, что матрица эндоморфизма $(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}$ совпадает с матрицей $(A - E)^{n-1}$, следует, что если число $d = \det(A - E)$ отлично от нуля, то

$$\big[G : G(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}\big] = |\det(A - E)|^{n-1} = |d|^{n-1},$$

и тогда в силу (2) для каждого $n \geqslant 2$

$$[G : \gamma_n(P)] = |d|^{n-1}. \tag{3}$$

Обозначим через $\pi(d)$ множество всех простых делителей числа d, а через π_{P} — множество всех простых чисел p, для которых группа P $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема. Эти обозначения позволяют переформулировать теорему 3 следующим образом.

1. *Если* $\det(A + E) \neq 0$, *то* $\pi_{P} = \pi(d)$.

2. *Если* $\det(A + E) = 0$, *то* $\pi_{P} = \{2\}$.

Для доказательства первой части теоремы проверим сначала, что

$$\det(A + E) \neq 0 \wedge d \neq 0 \Longrightarrow \pi_{P} = \pi(d). \tag{4}$$

В самом деле, пусть $\det(A + E) \neq 0$ и $d \neq 0$. Так как $\det(A \pm E) \neq 0$, то для любого неединичного элемента $h \in G$ имеем $h(\varphi \pm \mathrm{id}) \neq 1$, т. е. $t^{-1}ht \neq h^{\pm 1}$. Поэтому в G нет неединичных циклических подгрупп, инвариантных в P.

Покажем сначала, что $\pi(d) \subseteq \pi_{P}$. Пусть $p \in \pi(d)$. Так как $d \neq 0$, то в силу (3) для каждого $n \geqslant 2$ группа $G_n = G/\gamma_n(P)$ является конечной абелевой группой порядка

$|d|^{n-1}$. Отсюда и из того, что $p \in \pi(d)$, следует, что p^{n-1} делит порядок группы G_n. Поэтому, если F_n — p-компонента группы G_n, то $|F_n| \geqslant p^{n-1}$. Пусть Q_n — произведение всех примарных компонент группы G_n, отличных от F_n. Тогда $G_n/Q_n \simeq F_n$ — конечная p-группа. Так как $Q_n \leqslant G_n = G/\gamma_n(P)$, то $Q_n = L_n/\gamma_n(P)$, где L_n — подгруппа группы G, содержащая $\gamma_n(P)$. Поскольку Q_n характеристична в G_n и G_n инвариантна в $P_n = P/\gamma_n(P)$, то Q_n инвариантна в P_n. Отсюда следует, что L_n инвариантна в P. Так как $\gamma_n(P)$ содержится в L_n, то фактор-группа P/L_n нильпотентна и, кроме того, она является расщепляемым расширением конечной p-группы

$$G/L_n \simeq (G/\gamma_n(P)) \, / \, (L_n/\gamma_n(P)) = G_n/Q_n \simeq F_n$$

с помощью субнормальной бесконечной циклической подгруппы. Поэтому группа P/L_n $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема в силу сформулированной выше теоремы 2. Так как $|G/L_n| = |F_n| \geqslant p^{n-1}$, то индексы подгрупп L_n в группе G не ограничены. Поэтому подгруппа

$$L = \bigcap_{n=2}^{\infty} L_n$$

имеет в G бесконечный индекс. Отсюда и из того, что G — свободная абелева группа ранга 2, следует, что L — циклическая группа, являющаяся, к тому же, инвариантной подгруппой группы P. Но выше отмечалось, что G не содержит неединичных циклических подгрупп инвариантных в P. Поэтому $L = 1$, т. е. P аппроксимируема фактор-группами P/L_n, которые, в свою очередь, $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы. Отсюда следует, что P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой, т. е. $p \in \pi_{_P}$.

Покажем теперь, что $\pi_{_P} \subseteq \pi(d)$. Предположим, что $p \in \pi_{_P}$, и покажем, что тогда $p \in \pi(d)$. Допустим противное, т. е. допустим, что p взаимно просто с d. Пусть ρ — гомоморфизм группы P на конечную p-группу. Так как любая конечная p-группа нильпотентна, то гомоморфизм ρ проходит через естественный гомоморфизм $P \to P/\gamma_n(P)$ для достаточно большого n. Отсюда и из того, что порядок группы $G/\gamma_n(P)$ в силу (3) совпадает с числом $|d|^{n-1}$, взаимно простым с p, следует, что $G\rho = 1$. Это противоречит тому, что $p \in \pi_{_P}$. Таким образом, $\pi_{_P} \subseteq \pi(d)$, и утверждение (4) доказано.

Теперь для доказательства первой части теоремы нам остается проверить, что

$$\det(A+E) \neq 0 \,\wedge\, d = 0 \Longrightarrow \pi_{_P} = \pi(d). \tag{5}$$

Пусть $\det(A+E) \neq 0$ и $d = 0$. Покажем, что $\pi_{_P} = \pi(d)$. Так как $d = 0$, то множество $\pi(d)$ совпадает с множеством всех простых чисел. По сформулированной выше теореме Грюнберга конечно порожденная нильпотентная группа без кручения $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для любого простого числа p. Поэтому доказательство равенства $\pi_{_P} = \pi(d)$ сводится к доказательству нильпотентности группы P. Так как $d = 0$, то эндоморфизм $\varphi - \mathrm{id}$ не инъективен. Отсюда и из того, что $\varphi - \mathrm{id}$ — эндоморфизм свободной абелевой группы G ранга 2 следует, что $G(\varphi - \mathrm{id})$ — циклическая группа. Но в силу (4) $G(\varphi - \mathrm{id}) = \gamma_2(P)$. Поэтому $\gamma_2(P)$ порождается некоторым элементом $h \in G$. Так как $\gamma_2(P)$ нормальна в P, то $t^{-1}ht = h^{\pm 1}$. Покажем, что $t^{-1}ht = h$. Допустим противное. Тогда $t^{-1}ht = h^{-1}$ и $h \neq 1$. Отсюда следует, что эндоморфизм $\varphi + \mathrm{id}$ не инъективен. Но это невозможно, поскольку $\det(A+E) \neq 0$. Таким образом, $t^{-1}ht = h$. Поэтому $\gamma_2(P)$ — центральная подгруппа группы P, и, следовательно, группа P нильпотентна. Утверждение (5) доказано.

Докажем теперь вторую часть теоремы, т. е. следующее утверждение:

$$\det(A+E) = 0 \Longrightarrow \pi_{_P} = \{2\}. \tag{6}$$

Пусть $\det(A+E)=0$. Покажем, что $\pi_P=\{2\}$. Так как $\det(A+E)=0$, то в G существует неединичный элемент h такой, что $t^{-1}ht=h^{-1}$. Обозначим через x элемент группы G, являющийся корнем из h максимальной возможной степени. Так как извлечение корня в G обладает свойством однозначности и $t^{-1}ht=h^{-1}$, то $t^{-1}xt=x^{-1}$. Поэтому циклическая подгруппа X группы G, порожденная элементом x, инвариантна в G. В силу выбора элемента x подгруппа X изолирована в G. Таким образом, X — бесконечная циклическая изолированная подгруппа свободной абелевой группы G ранга 2. Поэтому G/X — бесконечная циклическая группа причем, как отмечалось выше, X инвариантна в P. Мы получаем, таким образом, в группе P нормальный ряд $1\leqslant X\leqslant G\leqslant P$ с циклическими факторами. Следовательно, группа P сверхразрешима, причем она не является нильпотентной, поскольку $t^{-1}ht=h^{-1}$. Поэтому требуемое равенство $\pi_G=\{2\}$ вытекает из следующих двух уже сформулированных выше результатов Д. И. Молдаванского и Д. Н. Азарова: любая сверхразрешимая группа без кручения $\mathscr{F}_2$-аппроксимируема; если сверхразрешимая группа $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для нечетного простого числа p, то она нильпотентна. Утверждение (6) доказано.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть P — расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы G с помощью $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы T, субнормальной в P. Покажем, что группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой.

Рассмотрим сначала частный случай, когда группа G является конечной p-группой. В этом случае индекс $[P:T]$ конечен и является степенью числа p. Так как T — субнормальная подгруппа группы P, то существует последовательность

$$T=P_0\leqslant P_1\leqslant\ldots\leqslant P_n=P$$

такая, что для каждого $k=1,2,\ldots,n$ подгруппа P_{k-1} нормальна в P_k. Очевидно, что P_k/P_{k-1} — конечная p-группа. Хорошо известно и легко проверяется (см., например, [6]), что любое расширение $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы с помощью конечной p-группы само является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой. Поэтому, используя $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемость группы T, индукцией по n легко видеть, что группа P является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой.

Для доказательства теоремы в общем случае достаточно для каждого неединичного элемента $f\in P$ указать нормальную подгруппу N группы P, не содержащую элемент f и такую, что фактор-группа P/N $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема. Если $f\notin G$, то в качестве N можно взять подгруппу G, так как $P/G\cong T$ — $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемая группа. Пусть теперь $f\in G$. Так как группа G является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой, то в ней существует нормальная подгруппа R, не содержащая элемент f и такая, что G/R — конечная p-группа. Пусть теперь V — множество всех групповых слов, тождественно равных 1 в группе G/R. И пусть $V(G)$ — вербальная подгруппа группы G, соответствующая множеству V. Тогда имеет место включение $V(G)\subseteq R$. Кроме того, ввиду локальной конечности любого многообразия, порожденного конечной группой (см., например, [13, гл. 5, п. 2, упр. 8]), группа $G/V(G)$ конечна, и более того, она, очевидно, является p-группой. Так как $V(G)\subseteq R$ и $f\notin R$ то $f\notin V(G)$. Так как подгруппа $V(G)$ вербальна в G и G нормальна в P, то $V(G)$ нормальна в P. При этом фактор-группа $P/V(G)$ представляет собой расщепляемое расширение конечной p-группы $G/V(G)$ с помощью $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы $TV(G)/V(G)\cong T$, причем $TV(G)/V(G)$ субнормальна в

$P/V(G)$. Поэтому в силу рассмотренного выше частного случая группа $P/V(G)$ является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой. Таким образом, $V(G)$ — нормальная подгруппа группы P, не содержащая элемент f и такая, что группа $G/V(G)$ является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой. Поэтому в качестве искомой подгруппы N можно взять $V(G)$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Чандлер Б., Магнус В.* Развитие комбинаторной теории групп.—М.: Мир, 1985.—249 с.
2. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб.—1940.—Т. 8.—С. 405–422.
3. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб.—1949.—Т. 25.—С. 347–366.
4. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc.—1952.—Vol. 27.—P. 81–85.
5. *Шмелькин А. Л.* Полициклические группы // Сиб. мат. журн.—1968.—Т. 9.—С. 234–235.
6. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc.—1957.—Vol. 3 (7), № 25.—P. 29–62.
7. *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп // Изв. вузов. Математика.—2014.—№ 8.—С. 18–29.
8. *Азаров Д. Н., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p-группами // Научн. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.—1999.—Вып. 2.—С. 8–9.
9. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика.—1965.—Т. 4, вып. 3.—С. 79–83.
10. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та.—1958.—Т. 18.—С. 49–60.
11. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сб.—2010.—Т. 11, вып. 3.—С. 11–20.
12. *Aschenbrenner M., Friedl S.* Residual properties of graph manifold groups // Topology Appl.—2011.—Vol. 158 (10).—P. 1179–1191.
13. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.—М.: Наука, 1972.—239 с.

Статья поступила 29 июля 2014 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский государственный университет,
доцент кафедры алгебры и математической логики
РОССИЯ, 153025, Иваново, ул. Ермака, 37
E-mail: azarovdn@mail.ru

SOME RESIDUAL PROPERTIES OF POLYCYCLIC GROUPS AND SPLIT EXTENSIONS

Azarov D. N.

It is proved that for every finite set π of primes there exists a polycyclic group which is a residually finite p-group if and only if the number p belongs to the set π.

Key words: polycyclic group, split extension.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 11–17

УДК **512.5**

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСВЕКЦИИ В НАДГРУППАХ НЕРАСЩЕПИМОГО МАКСИМАЛЬНОГО ТОРА[1]

Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев

Говорят, что подгруппа H полной линейной группы $GL(n,k)$ богата трансвекциями, если она содержит элементарные трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ на всех позициях (i,j), $i \neq j$. В настоящей работе мы доказываем, что если подгруппа H содержит нерасщепимый максимальный тор и элементарную трансвекцию на некоторой одной позиции, то она богата трансвекциями. Доказано также, что если подгруппа H содержит циклическую матрицу-перестановку порядка n и элементарную трансвекцию позиции (i,j) такой, что НОД $(i-j,n)=1$, то подгруппа H богата трансвекциями.

Ключевые слова: надгруппа, промежуточная подгруппа, нерасщепимый максимальный тор, трансвекция, элементарная трансвекция.

Говорят, что подгруппа H полной линейной группы $GL(n,k)$ богата трансвекциями [1], если она содержит элементарные трансвекции $t_{ij}(\alpha)=e+\alpha e_{ij}$ на всех позициях (i,j), $i\neq j$ (для некоторых $\alpha\in k$, $\alpha\neq 0$). В настоящей работе мы доказываем, что если подгруппа H содержит нерасщепимый максимальный тор и элементарную трансвекцию на некоторой одной позиции, то она богата трансвекциями. Нам представляется интересным и следующий результат, доказанный в работе: если подгруппа H содержит циклическую матрицу-перестановку порядка n и элементарную трансвекцию позиции (i,j) такой, что НОД $(i-j,n)=1$, то подгруппа H богата трансвекциями.

Отметим, что первый из сформулированных результатов доказан в [2], однако, доказательство, приведенное в [2] достаточно сложное, и сопровождается громоздкими вычислениями.

1. Формулировка результатов и обозначения. Сформулируем основные результаты работы. Для цикла $\pi=(1\ 2\ \ldots\ n)$ длины n через (π) обозначим матрицу-перестановку порядка n.

Теорема 1. *Пусть подгруппа H, $H\leqslant GL(n,k)$, содержит элементарную трансвекцию $t_{ij}(\xi)$ (для некоторых $i\neq j$, $\xi\neq 0$) и матрицу-перестановку (π) порядка n. Если НОД $(i-j,n)=1$, то подгруппа H богата трансвекциями.*

Теорема 2. *Пусть H — подгруппа полной линейной группы $GL(n,k)$, содержащая нерасщепимый максимальный тор $T=T(d)$, связанный с радикальным расширением $k(\sqrt[n]{d})$ степени n основного поля k нечетной характеристики (минизотропный тор). Если H содержит элементарную трансвекцию, то подгруппа H богата трансвекциями.*

Из теоремы 1 непосредственно вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1, если $t_{21}(\xi)\in H$ или $t_{n,1}(\xi)\in H$, $\xi\neq 0$, то подгруппа H богата трансвекциями.*

[1] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00469.

Следствие 2. *Пусть $n = p$ — простое натуральное число, подгруппа H содержит элементарную трансвекцию $t_{ij}(\xi)$, $i \neq j$, $\xi \neq 0$, и циклическую матрицу-перестановку (π) порядка p. Тогда подгруппа H богата трансвекциями.*

В работе приняты следующие стандартные обозначения: $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ — отрезок натурального ряда, $n \geqslant 2$; $\epsilon_s = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $1 \leqslant s \leqslant n$, — стандартный базис арифметического n-мерного пространства k^n; e_{ij} — матрица у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули; e — единичная матрица порядка n; $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ — элементарная трансвекция, $\alpha \in k$; k — поле нечетной характеристики.

Пусть $\pi = (1\ 2\ \dots\ n)$ — цикл длины n, положим $\sigma = \pi^{k-1} = (1\ 2\ \dots\ n)^{k-1}$, $2 \leqslant k \leqslant n$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-k & n-k+1 & n-k+2 & \dots & n \\ k & k+1 & \dots & n-1 & n & 1 & \dots & k-1 \end{pmatrix}.$$

Для произвольной перестановки ω через (ω) обозначается матрица-перестановка, элементы которой определяются формулой: $(\omega)_{ij} = \delta_{i,\omega(j)}$, где δ_{rs} — символ Кронекера. Нетрудно проверяется формула $(a = (a_{ij}))$

$$((\omega)^{-1} a(\omega))_{ij} = a_{\omega(i)\omega(j)}, \tag{1}$$

$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ — коммутатор элементов x, y.

Для произвольного вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}$ рассмотрим матрицу $c(x)$, элементы которой вычисляются по формулам $(d \in k)$

$$(c(x))_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ dx_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases}$$

Пусть $x^n - d$ — неприводимый многочлен степени n над полем k, $d \in k$. Тогда $e_i = \theta^{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\theta = \sqrt[n]{d}$ образуют стандартный базис радикального расширения $K = k(\sqrt[n]{d})$ степени n поля k. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении ее в $GL(n, k)$. В выбранном базисе тор $T = T(d)$ определяется как матричная группа

$$T = T(d) = \{c(x) : x \in k^n \setminus \bar{0}\}.$$

Заметим, что тор $T = T(d)$ содержит циклическую мономиальную матрицу порядка n (по модулю скалярных матриц). А именно, таковой матрицей является $c(0, 1, 0, \dots, 0)$.

2. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе мы доказываем теорему 1.

Лемма 1. *Пусть $\pi = (1\ 2\ \dots\ n)$ — цикл длины n, далее, $\sigma = \pi^{k-1}$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Тогда*

1) *порядок $|\sigma|$ элемента σ равен*

$$|\sigma| = \frac{n}{(n, k-1)},$$

где $(n, k-1) =$ НОД$(n, k-1)$, причем этот порядок совпадает с наименьшим m, для которого $\sigma^m(1) = 1 :\ |\sigma| = \min\{m : \sigma^m(1) = 1\}$;

2) *для любых $i \neq j$ имеем $i - j \equiv (\sigma(i) - \sigma(j)) (\mathrm{mod}\ n)$;*

3) *имеет место формула*

$$\sigma(i) = \pi^{k-1}(i) = \begin{cases} i+k-1, & 1 \leqslant i \leqslant n-k+1; \\ i+k-1-n, & n-k+2 \leqslant i \leqslant n. \end{cases} \tag{2}$$

$\lhd$ 1) Первая формула справедлива для любого элемента a конечного порядка n. Вторая часть утверждения легко вытекает из того, что

$$\pi^m(1) = 1 \Longleftrightarrow \pi^m = (1).$$

2) Достаточно рассмотреть три случая $1 \leqslant j < i \leqslant n-k+1$, $n-k+2 \leqslant j < i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant n-k+1$, $n-k+2 \leqslant i \leqslant n$. Во всех случаях $i-j \equiv (\sigma(i)-\sigma(j)) (\operatorname{mod} n)$.

3) Формула (2) вытекает из определения перестановки σ. $\rhd$

Замечание 1. В дальнейшем мы предполагаем, что подгруппа H содержит матрицу-перестановку (π).

Предложение 1. *Пусть* $j \geqslant 2$, $k = n-j+2$, $\sigma = \pi^{k-1}$. *Тогда имеет место формула*

$$(\sigma)^{-1} t_{ij}(\alpha)(\sigma) = t_{\sigma(i)1}(\alpha), \tag{3}$$

где $\sigma(j) = 1$, $i-j \equiv (\sigma(i)-1)(\operatorname{mod} n)$. *В частности, если* $t_{ij}(\alpha) \in H$ *для некоторых* $i \neq j$, *то* $t_{r1}(\alpha) \in H$ *для* $r = \sigma(i)$. *Далее, если* $t_{r1}(\alpha) \in H$ *для всех* $r \geqslant 2$ *(и некоторых ненулевых* $\alpha \in k$*), то подгруппа* H *богата трансвекциями. Аналогично, если для некоторого* r, $1 \leqslant r \leqslant n$, *мы имеем* $t_{rj}(\alpha) \in H$ *для всех* $j \neq r$ *(и некоторых ненулевых* $\alpha \in k$*), то подгруппа* H *богата трансвекциями.*

$\lhd$ Достаточно воспользоваться формулами (1) и (2). $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Пусть $t_{ij}(\alpha) \in H$ (для некоторых $i \neq j$, $\alpha \neq 0$) и НОД$(i-j, n) = 1$. Тогда согласно предложению 1 $t_{\sigma(i)1}(\alpha) \in H$, причем $(\sigma(i)-1) \equiv (i-j)(\operatorname{mod} n)$, а потому НОД$(\sigma(i)-1, n) = 1$ (если $j \geqslant 2$, то берем $\sigma = \pi^{k-1}$ и $k-1 = n-j+1$). Таким образом, можно считать, что $t_{k1}(\alpha) \in H$, НОД$(k-1, n) = 1$ (а потому, согласно лемме 1 порядок перестановки $\sigma = \pi^{k-1}$ равен n). Имеем $\sigma(1) = k$, $\sigma^{-1}(k) = 1$, $t_{\sigma(1),1}(\alpha) \in H$ и согласно формуле (1) $t_{\sigma^{-s}(1),\sigma^{-s-1}(1)}(\alpha) \in H$, $0 \leqslant s \leqslant n-2$. Используя известную коммутационную формулу

$$[t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta), \quad i \neq j,\ i \neq r,\ r \neq j, \tag{4}$$

получаем

$$[[\ldots[[t_{\sigma(1),1}(\alpha), t_{1,\sigma^{-1}(1)}(\alpha)], t_{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-2}(1)}(\alpha)], \ldots], t_{\sigma^{-s}(1),\sigma^{-s-1}(1)}(\alpha)]$$

$$= t_{\sigma(1),\sigma^{-s-1}(1)}(\alpha^{s+2}), \quad 0 \leqslant s \leqslant n-2.$$

Отметим, что $\sigma^{-s-1}(1) \neq \sigma(1)$ для всех s, $0 \leqslant s \leqslant n-2$. Поэтому ($\sigma(1) = k$) мы имеем $t_{kj}(\xi) \in H$ для всех $j \neq k$ (и для некоторого $\xi \neq 0$). Тогда согласно предложению 1 подгруппа H богата трансвекциями. $\rhd$

3. Доказательство теоремы 2

В силу предложения 1, теоремы 1 и следствия 1 в дальнейшем мы предполагаем, что $t_{k1}(\alpha) \in H$, $3 \leqslant k \leqslant n-1$, $q = k-1$, $2 \leqslant q \leqslant n-2$, НОД$\,(q,n) = b \geqslant 2$, $q = q_1 \cdot b$, $n = n_1 \cdot b$. Далее, $n_1 \geqslant 2$ (иначе $n \leqslant q$), причем $n_1 = 2$ только в одном случае: когда $n = 2b$ — четно и $k = b+1$. В остальных случаях $n_1 \geqslant 3$.

Определим действие группы $\langle \pi \rangle$, на множестве $I_n \times I_n$ всех позиций квадратной матрицы порядка n. А именно, полагаем $\pi \circ (i,j) = (\pi(i), \pi(j))$.

Лемма 2. *Множество $I_n \times I_n$ представляется в виде объединения n орбит, каждая из которых содержит n элементов (пар):*

$$O_0 = \{(1,1), \dots, (n,n)\}, \quad O_1 = \{(2,1), (3,2), \dots, (n,n-1), (1,n)\},$$

$$O_i = \{(i+1,1),\ (i+2,2),\ (i+3,3), \dots, (n,n-i),\ (1,n-i+1),\ (2,n-i+2), \dots, (i,n)\},$$

где $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Далее, нетрудно видеть, что

$$O_q = \{(r,s) \in I_n \times I_n :\ r - s \equiv (q)(\mathrm{mod}\, n)\},\ 0 \leqslant q \leqslant n-1.$$

Непосредственно из формулы (1) и леммы 2 вытекает следующая

Лемма 3. *Пусть $t_{rs}(\beta) \in H$, где $r-s \equiv q(\mathrm{mod}\, n)$, $1 \leqslant q \leqslant n-1$ (т. е. $(r,s) \in O_q$). Тогда $t_{ij}(\xi) \in H$ для любой позиции $(i,j) \in O_q$ (при некотором $\xi \neq 0$) такой, что $i-j \equiv q(\mathrm{mod}\, n)$. В частности, $t_{q+1,1}(\xi) \in H$.*

Из (4) и леммы 3 вытекает следующая

Лемма 4. *Пусть $t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta) \in H$, $i \neq j$. Тогда $t_{kl}(\gamma) \in H$ для любых k, l, $k - l \equiv (i-j)(\mathrm{mod}\, n)$ (при некотором $\gamma \in k$).*

Замечание 2. В дальнейшем (для удобства вычислений), если один из индексов (i или j) элементарной трансвекции $t_{ij}(*)$ не содержится в I_n, то мы рассматриваем не сами индексы, а их остатки при делении на n. Так, например, запись $t_{2,n+3}(a)$ понимается как $t_{2,3}(a)$.

Лемма 5. *Пусть n произвольно, причем мы дополнительно предполагаем, что, если $n = 2m$, то $k \neq m+1$. Тогда $t_{ql+1,1}(\gamma) \in H$, $1 \leqslant l \leqslant n_1 - 1$.*

$\lhd$ Заметим, что в условиях леммы 5 мы имеем $n_1 \geqslant 3$ и порядок перестановки σ равен n_1. Доказательство леммы проведем аналогично теореме 1. По условию $t_{k1}(\alpha) \in H$. Имеем $\sigma(1) = k$, $\sigma^{-1}(k) = 1$, $t_{\sigma(1),1}(\alpha) \in H$ и согласно формуле (1) $t_{\sigma^{-s}(1),\sigma^{-s-1}(1)}(\alpha) \in H$, $0 \leqslant s \leqslant n_1 - 2$. Используя формулу (4), получаем

$$[[\dots[[t_{\sigma(1),1}(\alpha), t_{1,\sigma^{-1}(1)}(\alpha)], t_{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-2}(1)}(\alpha)], \dots], t_{\sigma^{-(s-1)}(1),\sigma^{-s}(1)}(\alpha)]$$

$$= t_{\sigma(1),\sigma^{-s}(1)}(\alpha^{s+2}), \quad 0 \leqslant s \leqslant n_1 - 2.$$

Отметим, что $\sigma^{-s}(1) \neq \sigma(1)$ для всех s, $0 \leqslant s \leqslant n_1 - 2$ (так как порядок перестановки σ равен n_1). Согласно лемме 1 (2) имеем $\sigma^{-(r-1)}(1) - \sigma^{-r}(1) \equiv (\sigma^1(1) - \sigma^0(1))(\mathrm{mod}\, n) \equiv (k-1)(\mathrm{mod}\, n)$ Осталось заметить, что

$$\begin{aligned}\sigma(1) - \sigma^{-s}(1) &= (\sigma(1) - \sigma^0(1)) + (\sigma^0(1) - \sigma^{-1}(1)) + (\sigma^{-1}(-1) - \sigma^{-2}(1)) \\ &+ \dots + (\sigma^{-(s-1)}(1) - \sigma^{-s}(1)) \equiv (s+1)(k-1)(\mathrm{mod}\, n) \equiv (s+1)q(\mathrm{mod}\, n).\end{aligned}$$

Следовательно (так как $t_{\sigma(1),\sigma^{-s}(1)}(\alpha^{s+2}) \in H$), по лемме 3 мы имеем $t_{q(s+1)+1,1}(\gamma) \in H$, $0 \leqslant s \leqslant n_1 - 2$. Осталось положить $l = s+1$. $\rhd$

Замечание 3. Так как НОД$(q,n)=b\geqslant 2$, то $ql+1$ не делится на b, а потому и на n. Далее, очевидно, что ql не делится на n.

Следствие. *В условиях леммы 5 имеем* $t_{-q+1,1}(\gamma), t_{-2q+1,1}(\gamma)\in H$.

$\lhd$ Напомним, что $n_1\geqslant 3$. Имеем $qn_1\equiv 0(\operatorname{mod} n)$. Отсюда $q(n_1-1)\equiv(-q)(\operatorname{mod} n)$. Но по лемме 5 мы имеем $t_{q(n_1-1)+1,1}(\gamma)\in H$. Тогда по лемме 3 мы имеем $t_{-q+1,1}(\gamma)\in H$. Аналогично $q(n_1-2)\equiv(-2q)(\operatorname{mod} n)$. Но по лемме 5 мы имеем $t_{q(n_1-2)+1,1}(\gamma)\in H$. Снова пользуясь леммой 3, мы получаем $t_{-2q+1,1}(\gamma)\in H$. $\rhd$

Далее, для векторов $\overline{x},\overline{y}\in k^n$ рассмотрим билинейную форму

$$(\overline{x},\overline{y})=(\overline{y},\overline{x})=y_1x_1+dy_nx_2+dy_{n-1}x_3+\ldots+dy_3x_{n-1}+dy_2x_n.$$

С вектором $\overline{\alpha}=(0,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)$ связана матрица — (общая) трансвекция:

$$A=e+\overline{\alpha}^T\cdot\varepsilon_1.$$

Лемма 6 [2, предложение 6]**.** *Пусть* $c^{-1}(\overline{x})=c(\overline{x}')$. *Положим*

$$S=S(\overline{x})=(c^{-1}(\overline{x})-(\overline{x}',\alpha)E)Ac(\overline{x}).$$

Тогда $[S]_{1i}=\delta_{1i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $[S,A]=SAS^{-1}A^{-1}=E+\gamma\cdot\varepsilon_1$, *где* $\overline{\gamma}=(0,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)^T$, $\varepsilon_1=(1,0,\ldots,0)$, *причем* $\gamma=(S-E)\overline{\alpha}^T$. *Далее,*

$$\overline{\gamma}=\big[(\overline{x},\overline{\alpha})c^{-1}(\overline{x})-(\overline{x}',\overline{\alpha})c(\overline{x})-(\overline{x},\overline{\alpha})(\overline{x}',\overline{\alpha})\big]\overline{\alpha}^T. \tag{5}$$

Лемма 7. *Пусть* $2\leqslant k\leqslant n-1$ *и* $t_{k1}(\xi)\in H$, $\xi\neq 0$. *Тогда* $t_{k1}(\lambda)\cdot t_{k+1,1}(\lambda)\in H$ *для некоторого* $\lambda\neq 0$.

$\lhd$ В (5) положим

$$\overline{x}=(1,1,0,0,\ldots,0),\quad c(\overline{x})\longleftrightarrow 1+\theta,\quad \theta^n=d,$$

$$\begin{aligned}(1+\theta)^{-1}&=\frac{1}{1+d(-1)^{n-1}}(1-\theta+\theta^2-\theta^3+\ldots+(-1)^{n-1})\longleftrightarrow x'\\ &=\frac{1}{1+d(-1)^{n-1}}(1,-1,1,-1,\ldots,(-1)^{n-1}).\end{aligned}$$

Далее, положим $A=t_{k1}(\xi)$, $\overline{\alpha}=\xi\cdot\epsilon_k$. Имеем $(\overline{x},\overline{\alpha})=0$, так как $k\leqslant n-1$

$$(\overline{x}',\overline{\alpha})=\frac{d\xi(-1)^{n-k+1}}{1+d(-1)^{n-1}},\quad c(\overline{x})\overline{\alpha}^T=\xi(\varepsilon_k+\varepsilon_{k+1})^T.$$

Отсюда найдем $\overline{\gamma}$ из (5):

$$\overline{\gamma}=-(\overline{x}',\overline{\alpha})c(\overline{x})\overline{\alpha}^T=\lambda(\varepsilon_k+\varepsilon_{k+1})^T,\quad \lambda=-\frac{d\xi^2(-1)^{n-k+1}}{1+d(-1)^{n-1}}.$$

Поэтому из леммы 6 следует, что $E+\gamma\cdot\varepsilon_1=t_{k1}(\lambda)\cdot t_{k+1,1}(\lambda)\in H$. $\rhd$

Предложение 2. $t_{ij}(\lambda)\in H$, $\lambda\neq 0$ *для любых* i, j, $i-j\equiv(2k-1)(\operatorname{mod} n)$.

$\lhd$ Напомним (см. начало параграфа), что мы предполагаем $3\leqslant k\leqslant n-1$. Положим $r=2k$, если $2k\leqslant n$. Если же $2k>n$ (при этом ясно, что $2k<2n$), то полагаем $r=2k-n$ — остаток при делении $2k$ на n, $1\leqslant r\leqslant n$. Тогда $r\neq k$, $r\neq k+1$ и $r\neq 1$

(иначе, если $r = 1$, то $2k - n = 1$; тогда $2k - 1 = n$, а потому НОД $(k-1, 2k-1) = 1 =$ НОД $(k-1, n)$, что противоречит условию). Согласно лемме 3, так как $t_{k1}(\xi) \in H$, то мы имеем $t_{r,k+1}(\gamma) \in H$. Теперь из леммы 7 получаем

$$[t_{r,k+1}(\gamma),\ t_{k1}(\lambda) \cdot t_{k+1,1}(\lambda)] = t_{r1}(\gamma\lambda) \in H,$$

где $r - 1 \equiv (2k-1)(\operatorname{mod} n)$. Осталось воспользоваться леммой 3. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 рассмотрим два возможных случая:

а) $n = 2m$, $k = m+1$, $q = k-1 = m$. Согласно предложению 2 мы имеем $t_{2k,1}(\gamma) \in H$, но $2k - 1 = 2m + 1 \equiv 1(\operatorname{mod} n)$, а потому по лемме 3 $t_{21}(\gamma) \in H$. Согласно следствию 1 из теоремы 1 подгруппа H богата трансвекциями.

б) Пусть n — произвольно, причем, если $n = 2m$, то $k \neq m+1$. Согласно предложению 2 мы имеем $t_{2k,1}(\gamma) \in H$. Или, $t_{2q+2,1}(\gamma) \in H$. Далее, согласно следствию из леммы 5 мы имеем $t_{-2q+1,1}(*) \in H$. Отсюда согласно лемме 3 мы имеем $t_{1,2q+1}(*) \in H$. Следовательно, согласно лемме 4 мы имеем $t_{z+1,1}(\gamma) \in H$, $\quad z = (2q+2) - (2q+1) = 1(\operatorname{mod} n)$. Откуда по лемме 3 мы имеем $t_{21}(\gamma) \in H$. Согласно следствию 1 из теоремы 1 подгруппа H богата трансвекциями. $\rhd$

Авторы выражают благодарность профессору Я. Н. Нужину за внимание к настоящей работе.

Литература

1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Койбаев В. А.* Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Алгебра и анализ.—2009.—Т. 21, № 5.—С. 70–86.
3. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $\mathrm{GL}(2, k)$, содержащие нерасщепимый тор.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—182 с.—(Итоги науки. ЮФУ. Сер. мат. монография. Вып. 2).

Статья поступила 29 октября 2014 г.

Дряева Роксана Юрьевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
аспирант кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: dryaeva-roksana@mail.ru

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;

Южный математический институт ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела функц. анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru

ELEMENTARY TRANSVECTIONS IN THE OVERGROUPS OF A NON-SPLIT MAXIMAL TORUS

Dryaeva R. Y., Koibaev V. A.

A subgroup H of the general linear group $GL(n, k)$ is rich in transvections if H contains elementary transvections $t_{ij}(\alpha)$ at all positions (i, j), $i \neq j$. In this paper we show that if a subgroup H contains a non-split maximal torus and elementary transvection in one position, than H is rich in transvections. It is also proved that if a subgroup H contains a cyclic permutation of order n and elementary transvection at position (i, j) such that numbers $i - j$ and n are coprime, then H is rich in transvections.

Key words: overgroup, intermediate subgroup, non-split maximal torus, transvection, elementary transvection.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 18–43

УДК **517.958**

ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МНОГОМЕРНОГО ЯДРА УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева

Рассматривается интегро-дифференциальная система уравнений вязкоупругости. Прямая задача заключается в определении вектора смещений из начально-краевой задачи для этой системы. Предполагается, что ядро, входящее в интегральный член уравнения, зависит как от временной, так и от пространственной переменной x_2. Для его отыскания задается дополнительное условие относительно первой компоненты вектора смещения при $x_3 = 0$. Обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений для неизвестных функций. Исследование проведено на основе метода шкал банаховых пространств аналитических функций. Доказана теорема локальной разрешимости обратной задачи в классе функций, аналитических по переменной x_2 и непрерывных по t.

Ключевые слова: обратная задача, устойчивость, дельта-функция, коэффициенты Ламе, ядро.

1. Постановка задачи

Рассмотрим при $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $x_3 > 0$ систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_i\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{1.2}$$

$$T_{3j}\big|_{x_3=+0} = -\delta_{1j}\delta'(t)/2, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ — вектор смещений, $\delta'(t)$ — производная дельта-функции Дирака; δ_{ij} — символ Кронекера; T_{ij} — тензор напряжений:

$$T_{ij}(x,t) = \sigma_{ij}[u](x,t) + \int_0^t k(x_2, t-\tau)\sigma_{ij}[u](x,\tau)\,d\tau, \tag{1.4}$$

σ_{ij} — напряжения, для которых согласно закону Гука имеет место представление

$$\sigma_{ij}[u](x,t) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda\,\mathrm{div}\,u. \tag{1.5}$$

Система уравнений (1.1)–(1.5) возникает в теории вязкоупругих сред с переменными плотностью ρ и коэффициентами Ламе λ, μ. В данной работе предполагается, что $\rho =$

$\rho(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$, $\lambda = \lambda(x_3)$ являются функциями одной переменной и принадлежат множеству

$$\Lambda := \Big\{\rho(x_3), \lambda(x_3), \mu(x_3) \in C^2([0,\infty)) : \\ \rho(x_3) > 0,\ \mu(x_3) > 0,\ \lambda(x_3) > 0;\ \rho'(+0) = \mu'(+0) = \lambda'(+0) = 0\Big\}.$$

При сделанных предположениях из равенств (1.1)–(1.5) следует, что $u_1(x,t) \equiv u_1(x_2,x_3,t) \not\equiv 0$, $u_2 \equiv u_3 \equiv 0$ и функция $\lambda(x_3)$ не будет входить в остающиеся уравнения [1]. Обратная задача заключается в определении ядра $k(x_2,t)$, $t > 0$, входящего в (1.1) посредством формулы (1.4), если относительно решения задачи (1.1)–(1.5) известна дополнительная информация

$$u_1(x_2,x_3,t)\big|_{x_3=+0} = g(x_2,t), \quad t > 0, \tag{1.6}$$

$g(x_2,t)$ — заданная функция.

Данная постановка обратной задачи без учета зависимости ядра уравнения k от x_2 была рассмотрена в [2]. При решении применялся принцип сжатых отображений в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами к системе интегральных уравнений, которая является эквивалентной обратной задаче. Доказана теорема глобальной однозначной разрешимости и получена оценка устойчивости решения задачи определения ядра. Для исследования обратной задачи поставленной в этой статье используется метод шкал банаховых пространств аналитических функций, развитый в работах Л. В. Овсянникова [3, 4] и Л. Ниренберга [5]. В. Г. Романов с некоторыми модификациями применял этот метод к решению многомерных коэффициентных обратных задач [6–8]. В работах [9–11] на основе этого метода исследованы обратные задачи определения многомерного ядра в гиперболических уравнениях. Здесь вводится шкала аналитических по x_2 функций и устанавливается локальная теорема существования решения рассматриваемой обратной задачи.

2. Предварительные построения и основной результат

Определим билинейный интегральный оператор L по формуле

$$L\left[k(x_2,t), u(x_2,x_3,t)\right] = u(x_2,x_3,t) + \int_0^t k(x_2,t-\tau)u(x_2,x_3,\tau)\,d\tau.$$

В дальнейшем, для сокращения записи, иногда не будем в операторе L указывать зависимость функций от переменных, подразумевая зависимость первой функции от переменных x_2, t, а второй — от x_2, x_3, t.

Перепишем равенства (1.1)–(1.5) относительно ненулевой компоненты вектора смещений $u_1(x_2,x_3,t)$:

$$\rho(x_3)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu(x_3)L\left[k, \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right]\right) + \mu(x_3)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(L\left[k, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right]\right), \tag{2.1}$$

$$u_1\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{2.2}$$

$$L\left[k, \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right]_{x_3=0} = -\frac{\delta'(t)}{2\mu(0)}. \tag{2.3}$$

Далее индекс «2» у переменной x будет опущен.

Введем в рассмотрение новую переменную y по формуле

$$y = \phi(x_3) := \int\limits_0^{x_3} \frac{d\xi}{\nu(\xi)}, \quad \nu(x_3) := \sqrt{\frac{\mu(x_3)}{\rho(x_3)}}.$$

Через $\phi^{-1}(y)$ обозначим функцию, обратную к $\phi(x_3)$. Пусть

$$v(x,y,t) := \frac{u_1\left(x, \phi^{-1}(y), t\right)}{s(y)}, \quad s(y) := \sqrt{\frac{\nu(+0)\rho(+0)}{\nu\left(\phi^{-1}(y)\right)\rho\left(\phi^{-1}(y)\right)}}.$$

Тогда обратная задача (2.1)–(2.3), (1.6) в терминах вновь введенных функций и переменной y принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = L\left[k, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + q(y)v\right] + \nu^2 \frac{\partial}{\partial x} L\left[k, \frac{\partial v}{\partial x}\right], \quad y > 0, \ (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.4}$$

$$v(x,y,t)|_{t<0} \equiv 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} L\left[k, v\right]_{y=+0} = -\frac{a\delta'(t)}{2}, \tag{2.6}$$

$$v(x,y,t)\big|_{y=+0} = g(x,t), \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

где введены обозначения $q(y) := \frac{s''(y)}{s(y)} - 2\left[\frac{s'(y)}{s(y)}\right]^2$, $a = [\mu(+0)\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}}$. В уравнении (2.4) и далее под ν понимается функция $\nu\left(\phi^{-1}(y)\right)$.

Рассмотрим операторное уравнение относительно функции $v(x,y,t)$

$$L\left[k, v\right] = \exp\left(k(x,0)t/2\right) w(x,y,t).$$

Нетрудно проверить, что v через w выражается по формуле

$$v(x,y,t) = L\left[r, \exp\left(k(x,0)t/2\right) w\right], \tag{2.8}$$

где

$$r(x,t) = -k(x,t) - \int\limits_0^t k(x,t-\tau) r(x,\tau)\, d\tau. \tag{2.9}$$

Относительно функций $w(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ и $r(x,t)$ уравнения (2.4)–(2.7) принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H(x,y)w - \int\limits_0^t h(x,t-\tau) w(x,y,\tau)\, d\tau \\ + \nu^2 \exp(r(x,0)t/2) \frac{\partial}{\partial x} L\left[k, \frac{\partial v}{\partial x}\right], \quad y > 0, \ (x,t) \in \mathbb{R}^2, \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$w(x,y,t)\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{2.11}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=+0} = -\frac{a\delta'(t)}{2} + \frac{a}{4} r(x,0)\delta(t), \tag{2.12}$$

$$w\big|_{y=+0} = L\left[k_0, \quad \tilde{g}(x,t)\right], \tag{2.13}$$

где

$$H(x,y) := q(y) + \frac{r^2(x,0)}{4} - r_t(x,0), \quad h(x,t) := r_{tt}(x,t)\exp\left(r(x,0)t/2\right),$$
$$\tilde{g}(x,t) := \frac{a\delta(t)}{2} + \tilde{g}_0(x,t)\,\theta(t), \quad \tilde{g}_0(x,t) := g_0(x,t)\exp\left(r(x,0)t/2\right),$$
$$k_0(x,t) := k(x,t)\exp\left(r(x,0)t/2\right), \quad r_0(x,t) := r(x,t)\exp\left(r(x,0)t/2\right).$$

В последних уравнениях использовано равенство $k(x,0) = -r(x,0)$, вытекающее из (2.9). В дальнейшем уравнения (2.10)–(2.13) будем рассматривать в совокупности с равенством (2.8).

Решение прямой задачи (2.8), (2.10)–(2.12) представим в виде

$$w(x,y,t) = \frac{a}{2}\,\delta(t-y) + \theta(t-y)\,\tilde{w}(x,y,t), \tag{2.14}$$

где $\tilde{w}(x,y,t)$ — регулярная функция. Тогда, как следует из (2.8), функция v имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} v(x,y,t) = \frac{a}{2}\exp\left(k(x,0)y/2\right)\delta(t-y) \\ +\frac{a}{2}r(x,t-y)\exp\left(k(x,0)y/2\right)\theta(t-y) + \theta(t-y)\tilde{v}(x,y,t), \end{gathered} \tag{2.15}$$

где

$$\tilde{v}(x,y,t) = L_0\left[r, \exp\left(k(x,0)t/2\right)\tilde{w}\right].$$

Оператор L_0 отличается от оператора L лишь тем, что в интеграле в определении L нижний предел равен y.

Подставляя функции (2.14) и (2.15) в уравнения (2.10)–(2.13), воспользуемся методом выделения особенностей. При этом прямые вычисления показывают, что последнее слагаемое в (2.10) принимает вид

$$\begin{gathered} \frac{\nu^2 a}{2}\left(k_{xx}(x,0)\frac{y}{2} + k_x^2(x,0)\frac{y^2}{4}\right)\delta(t-y) \\ +\frac{\nu^2 a}{2}\left[\left(k_{xx}(x,0)\frac{y}{2} + k_x^2(x,0)\frac{y^2}{4}\right)k(x,t-y) + k_x(x,0)k_x(x,t-y)\right]\theta(t-y) \\ +\nu^2\exp\left(r(x,0)t/2\right)\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[k,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(r(x,t-y)\exp\left(k(x,0)y/2\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{v}\right]\theta(t-y). \end{gathered}$$

Заметим, что $w = \tilde{w}$ при $t > y > 0$. При фиксированном $x \in \mathbb{R}$, обозначая $\beta(x,y) := w(x,y,y)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых особенностях, получим дифференциальное уравнение для нахождения $\beta(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\beta(x,y) = \frac{a}{4}H(x,y) + \frac{a\nu^2}{4}\left(k_{xx}(x,0)\frac{y}{2} + k_x^2(x,0)\frac{y^2}{4}\right)$$

с начальным условием

$$\beta(x,0) = -\frac{a}{4}\,r(x,0).$$

Откуда, найдем

$$\beta(x,y) = -\frac{a}{4}r(x,0) + \frac{a\nu^2}{4}\left(k_{xx}(x,0)\frac{y^2}{4} + k_x^2(x,0)\frac{y^3}{12}\right) + \frac{a}{4}\int\limits_0^y H(x,\xi)\,d\xi. \tag{2.16}$$

Следовательно, функции $w(x,y,t)$, $k(x,t)$ в области $t>y>0$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+H(x,y)w-\frac{a}{2}h(x,t-y)+k_{00}(x,y,t)$$
$$-\int\limits_y^t h(x,t-\tau)w(x,y,\tau)\,d\tau+\nu^2\exp\left(r(x,0)t/2\right)\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[k,r_{00}+\frac{\partial\tilde v}{\partial x}\right], \tag{2.17}$$

$$w(x,y,t)\big|_{t=y}=\beta(x,y), \tag{2.18}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=+0}=0, \tag{2.19}$$

$$w\big|_{y=+0}=\frac{a}{2}k_0(x,t)+L\left[k_0,\tilde g_0\right], \tag{2.20}$$

где в уравнении (2.17) введены обозначения

$$k_{00}(x,y,t):=\frac{\nu^2 a}{2}\left[\left(k_{xx}(x,0)\frac{y}{2}+k_x^2(x,0)\frac{y^2}{4}\right)k(x,t-y)+k_x(x,0)k_x(x,t-y)\right], \tag{2.21}$$

$$r_{00}(x,y,t):=\frac{\partial}{\partial x}\Big(r(x,t-y)\exp\left(k(x,0)y/2\right)\Big). \tag{2.22}$$

Требуя непрерывности функций $w(y,t)$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(x,y,t)$ при $y=t=0$ из соотношений (2.18)–(2.20) несложно выразить $r(x,0)$, $r_t(x,0)$ через известные функции:

$$r(x,0)=\frac{4}{a}\,g_0(x,0),\quad r_t(x,0)=-q(0)-\frac{4}{a^2}\,g_0^2(x,0)+\frac{4}{a}\,\tilde g_{0t}(x,0). \tag{2.23}$$

При выводе последних равенств были использованы следующие равенства:

$$k_t(x,t)=-r_t(x,t)-r(x,0)k(x,t)-\int\limits_0^t r_t(x,t-\tau)k(x,\tau)\,d\tau,\quad k_t(x,0)=-r_t(x,0)+r^2(x,0).$$

В дальнейшем будем считать, что вместо $r(x,0)$, $r_t(x,0)$ подставлены их значения с помощью формул (2.23), и что они известные функции. Отсюда следует, что функции $k(x,0)$, $k_x(x,0)$, $k_{xx}(x,0)$, $k_t(x,0)$, а следовательно, и $k_{00}(x,y,t)$, $r_{00}(x,y,t)$ при $t=y$ являются также известными.

Построим систему интегро-дифференциальных уравнений для функций w, $\tilde v$, h, k_0. С помощью формулы Даламбера из равенств (2.17), (2.19), (2.20) вытекает уравнение

$$w(x,y,t)=w_0(x,y,t)+\frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{t-y+\xi}^{t+y-\xi}\Big\{H(x,\xi)w(x,\xi,\tau)-\frac{a}{2}h(x,\tau-\xi)$$
$$+k_{00}(x,\xi,\tau)-\int\limits_0^{\tau-\xi}h(x,\gamma)w(x,\xi,\tau-\gamma)\,d\gamma \tag{2.24}$$
$$+\nu^2\exp\left(r(x,0)\tau/2\right)\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[k,r_{00}+\frac{\partial\tilde v}{\partial x}\right](x,\xi,\tau)\Big\}\,d\tau\,d\xi,\quad x\in\mathbb{R},\ 0<y<t,$$

где

$$w_0(x,y,t)=\frac{1}{2}\bigg\{\frac{a}{2}(k_0(x,t+y)+k_0(x,t-y))+\tilde{g}_0(x,t+y)$$
$$+\int\limits_0^{t+y}k_0(x,\tau)\tilde{g}_0(x,t+y-\tau)\,d\tau+\tilde{g}_0(x,t-y)+\int\limits_0^{t-y}k_0(x,\tau)\tilde{g}_0(x,t-y-\tau)\,d\tau\bigg\}.$$

Переходя в формуле (2.24) к пределу при $t\to y+0$, с учетом условий (2.19), (2.20), находим

$$2\beta(x,y)-w_0(x,y,y+0)=\int\limits_0^y\int\limits_\xi^{2y-\xi}\bigg\{H(x,\xi)w(x,\xi,\tau)-\frac{a}{2}h(x,\tau-\xi)+k_{00}(x,\xi,\tau)$$
$$-\int\limits_0^{\tau-\xi}h(x,\gamma)w(x,\xi,\tau-\gamma)d\gamma+\nu^2\exp\left(r(x,0)\tau/2\right)\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[k,r_{00}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right](x,\xi,\tau)\bigg\}\,d\tau\,d\xi.$$

Дифференцируя по y последнее равенство, получим:

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)-\frac{1}{2}\frac{dw_0}{dy}(x,y,y+0)=\int\limits_0^y\bigg\{H(x,\xi)w(x,\xi,2y-\xi)$$
$$-\frac{a}{2}h(x,2(y-\xi))+k_{00}(x,\xi,2y-\xi)-\int\limits_0^{2(y-\xi)}h(x,\gamma)w(x,\xi,2y-\xi-\gamma)\,d\gamma \tag{2.25}$$
$$+\nu^2\exp\left(r(x,0)(2y-\xi)/2\right)\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[k,r_{00}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right](x,\xi,2y-\xi)\bigg\}\,d\xi.$$

Уравнение для h получается дифференцированием по y равенства (2.25) после замены переменной во втором интеграле $2(y-\xi)$ на ξ':

$$h(x,y)=h_0(x,y)+\frac{2}{a}\int\limits_0^y k_0(x,\xi)\tilde{g}_{0tt}(x,y-\xi)\,d\xi+\frac{1}{a}\int\limits_0^{y/2}\bigg\{H(x,\xi)w_t(x,\xi,y-\xi)$$
$$+k_{00t}(x,\xi,y-\xi)-\frac{1}{2}h(x,y-2\xi)\beta(x,\xi)-\int\limits_0^{y-2\xi}h(x,\tau)\frac{\partial w}{\partial t}(x,\xi,y-\xi-\tau)\,d\tau$$
$$+\nu^2\exp\left(r(x,0)(y-\xi)/2\right)\bigg\{\frac{\partial}{\partial x}L_0\bigg[k(x,y-\xi),\left(r_{00t}+\frac{\partial\tilde{v}_t}{\partial x}\right)(x,\xi,y-\xi)\bigg] \tag{2.26}$$
$$+\frac{r(x,0)}{2}\frac{\partial}{\partial x}L_0\bigg[k(x,y-\xi),\left(r_{00}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right)(x,\xi,y-\xi)\bigg]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\bigg[k(x,y-2\xi)\left(r_{00}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right)(x,\xi,\xi)\bigg]\bigg\}\bigg\}\,d\xi,$$

где

$$h_0(x,y)=k_{0tt}(x,y)+\frac{2}{a}\Big[g_0(x,0)k_{0t}(x,y)+k_0(x,y)\tilde g_{0t}(x,0)+\tilde g_{0tt}(x,y)\Big]$$
$$-\frac{2}{a}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\beta(x,y/2)+\frac{2}{a}H(x,y/2)\beta(x,y/2)+\frac{2}{a}k_{00}(x,y/2,y/2)$$
$$+\frac{2}{a}\nu^2\exp(r(x,0)y/4)\left(r_{00x}(x,y/2,y/2)+\beta_{xx}(x,y/2)\right).$$

Для вычисления функции w_t воспользуемся равенством (2.24). Применяя эквивалентное описание области интегрирования в виде $\{(\xi,\tau):t-y\leqslant\tau\leqslant t+y,\ 0\leqslant\xi\leqslant y-|t-\tau|\}$, дифференцируем (2.24) по t. Вводя замену переменной интегрирования $\tau-t=\xi'$, находим:

$$\begin{aligned}w_t(x,y,t)&=w_{0t}(x,y,t)+\frac{1}{2}\int\limits_{-y}^{y}\Big\{H(x,y-|\xi|)w(x,y-|\xi|,\xi+\tau)\\&-\frac{a}{2}h(x,\xi+t-y+|\xi|)+k_{00}(x,y-|\xi|,t+|\xi|)\\-&\int\limits_0^{t-y+\xi+|\xi|}h(x,\gamma)w(x,y-|\xi|,t+\xi-\gamma)\,d\gamma+\nu^2\exp\left(r(x,0)(\xi+t)/2\right)\\&\times\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[k(x,\xi+t),\left(r_{00}+\frac{\partial\tilde v}{\partial x}\right)(x,y-|\xi|,\xi+t)\right]\Big\}\operatorname{sgn}(\xi)\,d\xi,\end{aligned}\tag{2.27}$$

где

$$w_{0t}=\frac{1}{2}\Big\{\frac{a}{2}(k_{0t}(x,t+y)+k_{0t}(x,t-y))+g_0(x,0)[k_0(x,t+y)+k_0(x,t-y)]+\tilde g_{0t}(x,t+y)$$
$$+\int\limits_0^{t+y}k_0(x,\tau)\tilde g_{0t}(x,t+y-\tau)\,d\tau+\tilde g_{0t}(x,t-y)+\int\limits_0^{t-y}k_0(x,\tau)\tilde g_{0t}(x,t-y-\tau)\,d\tau\Big\}.$$

Для замыкания системы (2.24), (2.26), (2.27) используем следующие очевидные равенства:

$$r_0(x,t)=r(x,0)+r_t(x,0)t+\int\limits_0^t(y-\xi)\left(h(x,\xi)+r(x,0)r_{0t}(x,\xi)-\frac{r^2(x,0)}{4}r_0(x,\xi)\right)d\xi,\tag{2.28}$$

$$r_{0t}(x,t)=r_t(x,0)+\int\limits_0^t\left(h(x,\xi)+r(x,0)r_{0t}(x,\xi)-\frac{r^2(x,0)}{4}r_0(x,\xi)\right)d\xi,\tag{2.29}$$

$$k_0(x,t)=-r(x,0)+\left(\frac{r^2(x,0)}{2}-r_t(x,0)\right)t+\int\limits_0^t(t-\xi)k_{0tt}(x,\xi)\,d\xi,\tag{2.30}$$

$$k_{0t}(x,t)=\frac{r^2(x,0)}{2}-r_t(x,0)+\int\limits_0^t k_{0tt}(x,\xi)\,d\xi,\tag{2.31}$$

$$k_{0tt}(x,t) = -h(x,t) + \left(\frac{r^2(x,0)}{4} - r_t(x,0)\right) k_0(x,t) - \int\limits_0^t h(x,t-\xi) k_0(x,\xi)\, d\xi, \qquad (2.32)$$

вытекающие из введенных выше обозначений для k, r, k_0, r_0, а также равенство (2.15), переписанное в виде:

$$\tilde{v}(x,y,t) = \exp\left(k(x,0)t/2\right) L_0\left[r_0, w\right], \qquad (2.33)$$

которое при дифференцировании по t позволяет вычислить $\tilde{v}_t$:

$$\tilde{v}_t(x,y,t) = \exp\left(k(x,0)t/2\right)\left(\frac{k(x,0)}{2} L_0\left[r_0, w\right] + L_0\left[r_0, w_t\right] + r_0(x,t-y)\beta(x,y)\right). \qquad (2.34)$$

Пусть $c_0(x) := \frac{r^2(x,0)}{4} - r_t(x,0)$. В дальнейшем систему (2.17)–(2.20) будем рассматривать в области

$$D_T = G_T \times R, \quad G_T = \left\{(y,t):\ 0 \leqslant y \leqslant t \leqslant T - y\right\}, \quad T > 0.$$

Введем в рассмотрение банахово пространство $A_s(r)$, $s > 0$, функций $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, аналитических в окрестности начала координат, для которых справедливо соотношение

$$\|\varphi\|_s(r) := \sup_{|x|<r} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{s^\alpha}{\alpha!} \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\varphi(x) \right\| < \infty, \quad r > 0,\ s > 0.$$

В дальнейшем параметр r будет считаться фиксированным, в то время как, параметр s рассматривается как переменный параметр. При этом возникает шкала банаховых пространств $A_s(r)$, $s > 0$. Очевидно следующее свойство: если $\varphi(x) \in A_s(r)$, то $\varphi(x) \in A_{s'}(r)$ для всех $s' \in (0,\ s)$, следовательно, $A_s(r) \subset A_{s'}(r)$, если $s' \in (0,s)$, и справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\varphi(x) \right\|_{s'} \leqslant \alpha^\alpha \frac{\|\varphi\|_s(r)}{(s-s')^\alpha} \qquad (\forall\, \alpha). \qquad (2.35)$$

Так как параметр r фиксирован, будем в дальнейшем опускать его и использовать $\|\varphi\|_s$, A_s вместо $\|\varphi\|_s(r)$ и $A_s(r)$. Через $C_{(y,t)}\left(G_T; A_{s_0}\right)$ обозначим класс функций, непрерывных по переменным (y,t) в области G_T со значениями в A_{s_0}. При фиксированных (y,t) норму функции $f(x,y,t)$ в A_{s_0} будем обозначать через $\|f\|_{s_0}(y,t)$. Норма функции f в $C_{(y,t)}\left(G_T;\ A_{s_0}\right)$ определяется равенством

$$\|f\|_{C_{(y,t)}\left(G_T; A_{s_0}\right)} = \sup_{(y,t)\in G_T} \|f\|_{s_0}(y,t).$$

С целью удобства дальнейших исследований, введем в рассмотрение вектор-функцию φ с компонентами

$$\varphi_1(x,y,t) = w(x,y,t) - \frac{1}{2}\Bigg\{\frac{a}{2}\left(k_0(x,t+y) + k_0(x,t-y)\right)$$

$$+ \int\limits_0^{t+y} k_0(x,\tau)\tilde{g}_0(x,t+y-\tau)\, d\tau + \int\limits_0^{t-y} k_0(x,\tau)\tilde{g}_0(x,t-y-\tau) d\tau\Bigg\},$$

$$\varphi_2(x,y,t)=\tilde v(x,y,t),$$

$$\varphi_3(x,y,t)=w_t(x,y,t)-\frac{1}{2}\Bigg\{\frac{a}{2}(k_{0t}(x,t+y)+k_{0t}(x,t-y))+g_0(x,0)\big[k_0(x,t+y)$$

$$+k_0(x,t-y)\big]+\int\limits_0^{t+y}k_0(x,\tau)\tilde g_{0t}(x,t+y-\tau)d\tau+\int\limits_0^{t-y}k_0(x,\tau)\tilde g_{0t}(x,t-y-\tau)d\tau\Bigg\},$$

$$\varphi_4(x,y,t)=\frac{\partial\tilde v}{\partial t}(x,y,t),$$

$$\varphi_5(x,y)=2h(x,y)-c_0(x)k_0(x,y)-\frac{2}{a}\left[g_0(x,0)k_{0t}(x,y)+k_0(x,y)\tilde g_{0t}(x,0)\right],$$

$$\varphi_6(x,y)=r_0(x,y),\quad \varphi_7(x,y)=r_{0t}(x,y),\quad \varphi_8(x,y)=k_0(x,y),\quad \varphi_9(x,y)=k_{0t}(x,y).$$

Пусть

$$\varphi_1^0(x,y,t)=\frac{1}{2}[\tilde g_0(x,t+y)+\tilde g_0(x,t-y)],\qquad \varphi_3^0(x,y,t)=\frac{1}{2}[\tilde g_{0t}(x,t+y)+\tilde g_{0t}(x,t-y)],$$

$$\varphi_5^0(x,y)=\frac{2}{a}\Big[\tilde g_{0tt}(x,y)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\beta(x,y/2)+H(x,y/2)\beta(x,y/2)+k_{00}(x,y/2,y/2)$$

$$+\nu^2\exp(r(x,0)y/4)\Big(r_{00x}(x,y/2,y/2)+\beta_{xx}(x,y/2)\Big)\Big],$$

$$\varphi_6^0(x,y)=r(x,0)+r_t(x,0)y,\qquad \varphi_7^0(x)=r_t(x,0),$$

$$\varphi_8^0(x,y)=-r(x,0)+\left(\frac{r^2(x,0)}{2}-r_t(x,0)\right)y,\qquad \varphi_9^0(x)=\frac{r^2(x,0)}{2}-r_t(x,0).$$

Исключая из уравнения (2.26) неизвестную функцию $k_{0tt}(x,y)$ (эта функция входит в определение h_0) с помощью (2.32), перепишем систему уравнений (2.24), (2.26)–(2.34) в терминах вектор-функции φ :

$$\begin{gathered}\varphi_1(x,y,t)=\varphi_1^0(x,y,t)+\frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{t-y+\xi}^{t+y-\xi}\Bigg\{H(x,\xi)w(x,\xi,\tau)-\frac{a}{2}h(x,\tau-\xi)+k_{00}(x,\xi,\tau)\\ -\int\limits_0^{\tau-\xi}h(x,\gamma)w(x,\xi,\tau-\gamma)\,d\gamma+\nu^2\exp\left(r(x,0)\tau/2\right)\\ \times\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8(x,\tau)\exp\left(-r(x,0)(\tau)/2\right),\left(r_{00}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)(x,\xi,\tau)\right]\Bigg\}d\tau\,d\xi,\end{gathered}\tag{2.36}$$

$$\begin{gathered}\varphi_3(x,y,t)=\varphi_3^0+\frac{1}{2}\int\limits_{-y}^{y}\Bigg\{H(x,y-|\xi|)w(x,y-|\xi|,\xi+\tau)\\ -\frac{a}{2}h(x,\xi+t-y+|\xi|)+k_{00}(x,y-|\xi|,t+|\xi|)\\ -\int\limits_0^{t-y+\xi+|\xi|}h(x,\gamma)w(x,y-|\xi|,t_\xi-\gamma)\,d\gamma+\nu^2\exp\left(r(x,0)(\xi+t)/2\right)\frac{\partial}{\partial x}L_0\\ \times\left[\varphi_8(x,\xi+t)\exp\left(-r(x,0)(\xi+t)/2\right),\left(r_{00}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)(x,y-|\xi|,\xi+t)\right]\Bigg\}\operatorname{sgn}(\xi)\,d\xi,\end{gathered}\tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}\varphi_5(x,y)&=\varphi_5^0(x,y)+\int\limits_0^y\left(\frac{2}{a}\tilde g_{0tt}(x,y-\xi)-h(x,y-\xi)\right)\varphi_8(x,\xi)\,d\xi\\
&+\frac{1}{a}\int\limits_0^{y/2}\Bigg\{H(x,\xi)w_t(x,\xi,y-\xi)+k_{00t}(x,\xi,y-\xi)-\frac{1}{2}h(x,y-2\xi)\beta(x,\xi)\\
&-\int\limits_0^{y-2\xi}h(x,\tau)w_t(x,\xi,y-\xi-\tau)\,d\tau+\nu^2\exp\left(r(x,0)(y-\xi)/2\right)\\
&\times\Bigg\{\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8(x,y-\xi)\exp\left(-r(x,0)(y-\xi)/2\right),\left(r_{00t}+\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}\right)(x,\xi,y-\xi)\right]\\
&+\frac{r(x,0)}{2}\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8(x,y-\xi)\exp\left(-r(x,0)(y-\xi)/2\right),\left(r_{00}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)(x,\xi,y-\xi)\right]\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi_8(x,y-2\xi)\exp\left(-r(x,0)(y-2\xi)/2\right)\left(r_{00}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)(x,\xi,\xi))\right]\Bigg\}\,d\xi,\end{aligned}\tag{2.38}$$

$$\varphi_6(x,y)=\varphi_6^0(x,y)+\int\limits_0^y(y-\xi)\left(h(x,\xi)+r(x,0)\varphi_7(x,\xi)-\frac{r^2(x,0)}{4}\varphi_6(x,\xi)\right)d\xi,\tag{2.39}$$

$$\varphi_7(x,y)=\varphi_7^0(x)+\int\limits_0^y\left(h(x,\xi)+r(x,0)\varphi_7(x,\xi)-\frac{r^2(x,0)}{4}\varphi_6(x,\xi)\right)d\xi,\tag{2.40}$$

$$\varphi_8(x,y)=\varphi_8^0(x,y)+\varphi_9^0(x)t+\int\limits_0^y(y-\xi)\big(c_0(x)\varphi_8(x,\xi)-L[\varphi_8,h]\big)(x,\xi)\,d\xi,\tag{2.41}$$

$$\varphi_9(x,y)=\varphi_9^0(x)+\int\limits_0^y\big(c_0(x)\varphi_8(x,\xi)-L[\varphi_8,h]\big)\,d\xi,\tag{2.42}$$

где вместо функций φ_2, φ_4 подразумеваются их соответствующие представления (2.33)–(2.34), а

$$\begin{aligned}w(x,y,t)&=\varphi_1(x,y,t)+\frac{1}{2}\Bigg\{\frac{a}{2}(\varphi_8(x,t+y)+\varphi_8(x,t-y))\\
&+\int\limits_0^{t+y}\varphi_8(x,\tau)\tilde g_0(x,t+y-\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{t-y}\varphi_8(x,\tau)\tilde g_0(x,t-y-\tau)\,d\tau\Bigg\},\\
w_t(x,y,t)&=\varphi_3(x,y,t)+\frac{1}{2}\Bigg\{\frac{a}{2}\left(\varphi_9(x,t+y)+\varphi_9(x,t-y)\right)+g_0(x,0)[\varphi_8(x,t+y)\\
&+\varphi_8(x,t-y)]+\int\limits_0^{t+y}\varphi_8(x,\tau)\tilde g_{0t}(x,t+y-\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{t-y}\varphi_8(x,\tau)\tilde g_{0t}(x,t-y-\tau)d\tau\Bigg\},\\
h(x,y)&=\frac{1}{2}[\varphi_5(x,y)+c_0(x)\varphi_8(x,y)]+\frac{1}{a}\left[g_0(x,0)\varphi_9(x,y)+\varphi_8(x,y)\tilde g_{0t}(x,0)\right].\end{aligned}$$

Основной результат статьи составляет теорема локальной однозначной разрешимости в классе функций, аналитических по переменной x_2.

Теорема. *Пусть* $(\rho,\mu,\lambda)\in\Lambda$, *кроме того*

$$
\begin{gathered}
(\tilde g_0(x,0),\tilde g_{0t}(x,0))\in A_{s_0},\\
(\tilde g_0(x,t),\tilde g_{0t}(x,t),\tilde g_{0tt}(x,t))\in C_t\left([0,T];A_{s_0}\right),\\
\max\left\{\|\tilde g_0\|_{s_0}(t),\|\tilde g_{0t}\|_{s_0}(t),\|\tilde g_{0tt}\|_{s_0}\right\}\leqslant R,\\
\max\left\{\|\beta\|_{s_0}(y),\|H\|_{s_0}(y),\max(1,\nu_0^2)\|\exp(\pm r(x,0)t/2)\|_{s_0}(t)\right\}\leqslant R,\\
\max\left\{\|\varphi_i^0\|_{s_0}(t)\right\}\leqslant R,\quad i=5,6,7,8,9,\\
\nu_0^2=\max_{0\leqslant y\leqslant\frac{T}{2}}\nu^2\left(\phi^{-1}(y)\right),\quad t\in[0,T],\ y\in[0,T/2],\ R>0.
\end{gathered}
$$

Тогда найдется такое $b\in(0,\ T/2)$, *что для любого* $s\in(0,s_0)$ *в области* $\Gamma_{sT}=D_T\cap\{(x,y,t):\,0\leqslant y\leqslant b(s_0-s)\}$ *существует единственное решение системы уравнений* (2.36)–(2.42), *для которого*

$$
\begin{gathered}
\varphi_1(x,y,t),\varphi_3(x,y,t)\in C_{(y,t)}\left(P_{sT};A_{s_0}\right),\\
\varphi_i(x,t)\in C_t\left([0,b(s_0-s)];A_{s_0}\right),\quad i=5,6,7,8,9,\\
P_{sT}=G_T\cap\left\{(y,t)|\ 0\leqslant y\leqslant b(s_0-s)\right\},
\end{gathered}
$$

причем

$$
\begin{gathered}
\|\varphi_i-\varphi_i^0\|_s\leqslant R,\ i=1,6,8,\quad \|\varphi_i-\varphi_i^0\|_s\leqslant\frac{R}{s_0-s},\ i=3,7,9,\\
\|\varphi_5-\varphi_5^0\|_s\leqslant\frac{R}{(s_0-s)^2},\quad (y,t)\in P_{sT}.
\end{gathered}
$$

3. Доказательство теоремы

В условиях теоремы

$$
\varphi_i^0\in C_{(y,t)}(G_T;A_{s_0}),\quad \|\varphi_i^0\|_s(y,t)\leqslant R,\quad i=1,3,\ (y,t)\in G_T,\ 0<s<s_0.
$$

Пусть b_n являются членами монотонно убывающей последовательности, определяемой равенствами

$$
b_{n+1}=\frac{b_n}{1+1/(n+1)^2},\quad n=0,1,2,\ldots
$$

Обозначим

$$
b=\lim_{n\to\infty}b_n=b_0\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+1/(n+1^2)\right)^{-1}.
$$

Число $b_0\in(0,T/2)$ будет выбрано подходящим образом.

Построим процесс последовательных приближений по схеме

$$\varphi_1^{n+1}(x,y,t)=\varphi_1^0(x,y,t)+\frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{t-y+\xi}^{t+y-\xi}\Big\{H(x,\xi)w^n(x,\xi,\tau)-\frac{a}{2}h^n(x,\tau-\xi)+k_{00}^n(x,\xi,\tau)$$

$$-\int\limits_0^{\tau-\xi}h^n(x,\gamma)w^n(x,\xi,\tau-\gamma)\,d\gamma+\nu^2\exp\left(r(x,0)\tau/2\right)$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^n(x,\tau)\exp\left(-r(x,0)(\tau)/2\right),(r_{00}^n+\frac{\partial\varphi_2^n}{\partial x})(x,\xi,\tau)\right]\Big\}\,d\tau\,d\xi,$$

$$\varphi_3^{n+1}(x,y,t)=\varphi_3^0(x,y,t)+\frac{1}{2}\int\limits_{-y}^{y}\Big\{H(x,y-|\xi|)w^n(x,y-|\xi|,\xi+t)-\frac{a}{2}h^n(x,\xi+t-y+|\xi|)$$

$$+k_{00}^n(x,y-|\xi|,t+|\xi|)-\int\limits_0^{t-y+\xi+|\xi|}h^n(x,\gamma)w^n(x,y-|\xi|,t+\xi-\gamma)\,d\gamma$$

$$+\nu^2\exp\left(r(x,0)(\xi+t)/2\right)\frac{\partial}{\partial x}L_0\Big[\varphi_8^n(x,\xi+t)$$

$$\times\exp\left(-r(x,0)(\xi+t)/2\right),\left(r_{00}^n+\frac{\partial\varphi_2^n}{\partial x}\right)(x,y-|\xi|,\xi+t)\Big]\Big\}\,\mathrm{sgn}(\xi)\,d\xi,$$

$$\varphi_5^{n+1}(x,y)=\varphi_5^0(x,y)+\int\limits_0^y\left(\frac{2}{a}\tilde g_{0tt}(x,y-\xi)-h^n(x,y-\xi)\right)\varphi_8^n(x,\xi)\,d\xi$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_0^{y/2}\Big\{H(x,\xi)w_t^n(x,\xi,y-\xi)+k_{00t}^n(x,\xi,y-\xi)-\frac{1}{2}h^n(x,y-2\xi)\beta(x,\xi)$$

$$-\int\limits_0^{y-2\xi}h^n(x,\tau)w_t^n(x,\xi,y-\xi-\tau)\,d\tau+\nu^2\exp\left(r(x,0)(y-\xi)/2\right)$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^n(x,y-\xi)\exp\left(-r(x,0)(y-\xi)/2\right),\left(r_{00t}^n+\frac{\partial\varphi_4^n}{\partial x}\right)(x,\xi,y-\xi)\right]$$

$$+\frac{r(x,0)}{2}\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^n(x,y-\xi)\exp\left(-r(x,0)(y-\xi)/2\right),\left(r_{00}^n+\frac{\partial\varphi_2^n}{\partial x}\right)(x,\xi,y-\xi)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi_2^n(x,y-2\xi)\exp\left(-r(x,0)(y-2\xi)/2\right)\left(r_{00}^n+\frac{\partial\varphi_2^n}{\partial x}\right)(x,\xi,\xi)\right]\Big\}\,d\xi,$$

$$\varphi_6^{n+1}(x,y)=\varphi_6^0(x,y)+\int\limits_0^y(y-\xi)\left(h^n(x,\xi)+r(x,0)\varphi_7^n(x,\xi)-\frac{r^2(x,0)}{4}\varphi_6^n(x,\xi)\right)\,d\xi,$$

$$\varphi_7^{n+1}(x,y)=\varphi_7^0(x)+\int\limits_0^y\left(h^n(x,\xi)+r(x,0)\varphi_7^n(x,\xi)-\frac{r^2(x,0)}{4}\varphi_6^n(x,\xi)\right)\,d\xi,$$

$$\varphi_8^{n+1}(x,y)=\varphi_8^0(x,y)+\int\limits_0^y(y-\xi)\left(c_0(x)\varphi_8^n(x,\xi)-L[\varphi_8^n,h^n]\right)(x,\xi)\,d\xi,$$

$$\varphi_9^{n+1}(x,y)=\varphi_9^0(x)+\int\limits_0^y (c_0(x)\varphi_8^n(x,\xi)-L[\varphi_8^n,h^n])(x,\xi)\,d\xi,$$

где

$$w^n(x,y,t)=\varphi_1^n(x,y,t)+\frac{1}{2}\bigg\{\frac{a}{2}\left(\varphi_8^n(x,t+y)+\varphi_8^n(x,t-y)\right)$$
$$+\int\limits_0^{t+y}\varphi_8^n(x,\tau)\tilde{g}_0(x,t+y-\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{t-y}\varphi_8^n(x,\tau)\tilde{g}_0(x,t-y-\tau)\,d\tau\bigg\},$$

$$w_t^n(x,y,t)=\varphi_3^n(x,y,t)+\frac{a}{4}\left[\varphi_9^n(x,t+y)+\varphi_9^n(x,t-y)\right]+\frac{1}{2}g_0(x,0)[\varphi_8^n(x,t+y)$$
$$+\varphi_8^n(x,t-y)]+\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{t+y}\varphi_8^n(x,t-\tau)\tilde{g}_{0t}(x,\tau)d\tau+\int\limits_0^{t-y}\varphi_8^n(x,t-\tau)\tilde{g}_{0t}(x,\tau)\,d\tau\right),$$

$$h^n(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_5^n(x,y)+c_0(x)\varphi_8^n(x,y)]+\frac{1}{a}\left[g_0(x,0)\varphi_9^n(x,y)+\varphi_8^n(x,y)\tilde{g}_{0t}(x,0)\right],$$
$$\varphi_2^n(x,y,t)=\exp\left(k(x,0)t/2\right)L_0\left[\varphi_6^n,w^n\right],$$
$$\varphi_4^n(x,y,t)=\exp\left(k(x,0)t/2\right)\left(\frac{k(x,0)}{2}L_0\left[\varphi_6^n,w^n\right]+L_0\left[\varphi_6^n,w_t^n\right]+\varphi_6^n(x,t-y)\beta(x,y)\right),$$
$$k_{00}^n(x,y,t)=\frac{\nu^2 a}{2}\exp(k(x,0)(t-y)/2)\left[\left(k_{xx}(x,0)\frac{y}{2}+k_x^2(x,0)\frac{y^2}{4}+\frac{k_x^2(x,0)(t-y)}{2}\right)\right.$$
$$\left.\times\,\varphi_8^n(x,t-y)+k_x(x,0)\frac{\partial\varphi_8^n}{\partial x}(x,t-y)\right],$$
$$r_{00}^n(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_6^n(x,t-y)\exp\left(k(x,0)t/2\right)\right),$$
$$k_{00t}^n(x,y,t)=\frac{k(x,0)}{2}k_{00}^n(x,y,t)+\frac{\nu^2 a}{2}\exp(k(x,0)(t-y)/2)\left[\left(k_{xx}(x,0)\frac{y}{2}+k_x^2(x,0)\frac{y^2}{4}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{k_x^2(x,0)(t-y)}{2}\right)\varphi_9^n(x,t-y)+k_x(x,0)\frac{\partial\varphi_9^n}{\partial x}(x,t-y)+\frac{k_x^2(x,0)}{2}\varphi_8^n(x,t-y)\right],$$
$$r_{00t}^n(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\exp(k(x,0)t/2)\left(\varphi_7^n(x,t-y)+\frac{k(x,0)}{2}\varphi_6^n(x,t-y)\right)\right].$$

Определим функцию $s'(y)$ формулой

$$s'(y)=\frac{s+\gamma^n(y)}{2},\quad \gamma^n(y)=s_0-\frac{y}{b_n}. \tag{3.1}$$

Введем обозначение $\psi_i^n=\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n$, $i=1,3,5,6,7,8,9$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\psi_1^0(x,y,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{t-y+\xi}^{t+y-\xi}\bigg\{H(x,\xi)w^0(x,\xi,\tau)-\frac{a}{2}h^0(x,\tau-\xi)+k_{00}^0(x,\xi,\tau)$$
$$-\int\limits_0^{\tau-\xi}h^0(x,\gamma)w^0(x,\xi,\tau-\gamma)\,d\gamma+\nu^2\exp\left(r(x,0)\tau/2\right)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^0(x,\tau)\exp\left(-r(x,0)(\tau)/2\right), (r_{00}^0+\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x})(x,\xi,\tau)\right]\Big\}\,d\tau\,d\xi,$$

$$\psi_3^0(x,y,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{-y}^{y}\Big\{H(x,y-|\xi|)w^0(x,y-|\xi|,\xi+\tau)-\frac{a}{2}h^0(x,\xi+t-y+|\xi|)$$

$$+k_{00}^0(x,y-|\xi|,t+|\xi|)-\int\limits_0^{t-y+\xi+|\xi|}h^0(x,\gamma)w^0(x,y-|\xi|,t+\xi-\gamma)\,d\gamma$$

$$+\nu^2\exp\left(r(x,0)(\xi+t)/2\right)\frac{\partial}{\partial x}L_0[\varphi_8^0(x,\xi+t) \tag{2.36}$$

$$\times\exp\left(-r(x,0)(\xi+t)/2\right), (r_{00}+\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x})(x,y-|\xi|,\xi+t)]\Big\}\operatorname{sgn}(\xi)\,d\xi,$$

$$\psi_5^0(x,y)=\int\limits_0^y\left(\frac{2}{a}\tilde{g}_{0tt}(x,y-\xi)-h^0(x,y-\xi)\right)\varphi_8^0(x,\xi)\,d\xi$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_0^{y/2}\left\{H(x,\xi)w_t^0(x,\xi,y-\xi)+k_{00t}^0(x,\xi,y-\xi)-\frac{1}{2}h^0(x,y-2\xi)\beta(x,\xi)\right.$$

$$-\int\limits_0^{y-2\xi}h^0(x,\tau)w_t^0(x,\xi,y-\xi-\tau)\,d\tau+\nu^2\exp\left(r(x,0)(y-\xi)/2\right)$$

$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^0(x,y-\xi)\exp\left(-r(x,0)(y-\xi)/2\right), \left(r_{00t}^0+\frac{\partial\varphi_4^0}{\partial x}\right)(x,\xi,y-\xi)\right]\right.$$

$$+\frac{r(x,0)}{2}\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^0(x,y-\xi)\exp\left(-r(x,0)(y-\xi)/2\right), \left(r_{00}^0+\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x}\right)(x,\xi,y-\xi)\right]$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi_2^0(x,y-2\xi)\exp\left(-r(x,0)(y-2\xi)/2\right)\left(r_{00}^0+\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x}(x,\xi,\xi)\right)\right]\right\}\right\}d\xi,$$

$$\psi_6^0(x,y)=\int\limits_0^y(y-\xi)\left(h^0(x,\xi)+r(x,0)\varphi_7^0(x,\xi)-\frac{r^2(x,0)}{4}\varphi_6^0(x,\xi)\right)d\xi,$$

$$\psi_7^0(x,y)=\int\limits_0^y\left(h^0(x,\xi)+r(x,0)\varphi_7^0(x,\xi)-\frac{r^2(x,0)}{4}\varphi_6^0(x,\xi)\right)d\xi,$$

$$\psi_8^0(x,y)=\int\limits_0^y(y-\xi)\left(c_0(x)\varphi_8^0(x,\xi)-L[\varphi_8^0,h^0]\right)d\xi,$$

$$\psi_9^0(x,y)=\int\limits_0^y\left(c_0(x)\varphi_8^0(x,\xi)-L[\varphi_8^0,h^0]\right)d\xi,$$

$$\psi_1^{n+1}(x,y,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{t-y+\xi}^{t+y-\xi}\Big\{H(x,\xi)\hat{w}^n(x,\xi,\tau)-\frac{a}{2}\hat{h}^n(x,\tau-\xi)+\hat{k}_{00}^n(x,\xi,\tau)$$

$$-\int\limits_0^{\tau-\xi}\Big(\hat{h}^n(x,\gamma)w^{n+1}(x,\xi,\tau-\gamma)-h^n(x,\gamma)\hat{w}^n(x,\xi,\tau-\gamma)\Big)\,d\gamma$$

$$+\nu^2\exp\left(r(x,0)\tau/2\right)\frac{\partial}{\partial x}\Big\{L_0\Big[\varphi_8^{n+1}(x,\tau)\exp\left(-r(x,0)(\tau)/2\right),\Big(\hat{r}_{00}^n+\frac{\partial\psi_2^n}{\partial x}\Big)(x,\xi,\tau)\Big]$$

$$-\int\limits_0^{\tau-\xi}\psi_8^n(x,\gamma)\exp(-r(x,0)\gamma/2)\left(r_{00}^n+\frac{\partial\varphi_2^n}{\partial x}\right)(x,\xi,\tau-\gamma)d\gamma\Big\}\Big\}\,d\tau\,d\xi,$$

$$\psi_3^{n+1}(x,y,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{-y}^{y}\Big\{H(x,y-|\xi|)\hat{w}^n(x,y-|\xi|,\xi+\tau)-\frac{a}{2}\hat{h}^n(x,\xi+t-y+|\xi|)$$

$$+\hat{k}_{00}^n(x,y-|\xi|,t+|\xi|)-\int\limits_0^{t-y+\xi+|\xi|}\big(\hat{h}^n(x,\gamma)w^{n+1}(x,y-|\xi|,t+\xi-\gamma)$$

$$-h^n(x,\gamma)\hat{w}^n(x,y-|\xi|,t+\xi-\gamma)\big)d\gamma+\nu^2\exp\left(r(x,0)(\xi+t)/2\right)$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}\Big\{L_0[\varphi_8^{n+1}(x,\xi+t)\exp\left(-r(x,0)(\xi+t)/2\right),\left(\hat{r}_{00}^n+\frac{\partial\psi_2^n}{\partial x}\right)(x,y-|\xi|,\xi+t)]$$

$$-\int\limits_0^{t-y+\xi+|\xi|}\psi_8^n(x,\gamma)\exp(-r(x,0)\gamma/2)\left(r_{00}^n+\frac{\partial\varphi_2^n}{\partial x}\right)(x,y-\xi,\xi+t-\gamma)\,d\gamma\Big\}\Big\}\,\mathrm{sgn}(\xi)\,d\xi,$$

$$\psi_5^{n+1}(x,y)=\int\limits_0^y\left(\frac{2}{a}\psi_8^n(x,\xi)\tilde{g}_{0tt}(x,y-\xi)-\hat{h}^n(x,y-\xi))\varphi_8^{n+1}(x,\xi)+h^n(x,y-\xi))\psi_8^n(x,\xi)\right)d\xi$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_0^{y/2}\Big\{H(x,\xi)\hat{w}_t^n(x,\xi,y-\xi)+\hat{k}_{00t}^n(x,\xi,y-\xi)-\frac{1}{2}\hat{h}^n(x,y-2\xi)\beta(x,\xi)$$

$$-\int\limits_0^{y-2\xi}\Big(\hat{h}^n(x,\tau)w_t^{n+1}(x,\xi,y-\xi-\tau)-h^n(x,\tau)\hat{w}_t^n(x,\xi,y-\xi-\tau)\Big)d\tau$$

$$+\nu^2\exp\left(r(x,0)(y-\xi)/2\right)\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big\{L_0\Big[\varphi_8^{n+1}(x,y-\xi)\exp\left(-r(x,0)(y-\xi)/2\right),\Big(\hat{r}_{00t}^n+\frac{\partial\psi_4^n}{\partial x}\Big)$$

$$\times(x,\xi,y-\xi)\Big]-\int\limits_0^{y-2\xi}\psi_8^n(x,\tau)\exp\left(-r(x,0)\tau/2\right)\left(r_{00t}^n+\frac{\partial\varphi_4^n}{\partial x}\right)(x,\xi,y-\xi-\tau)\,d\tau\Big\}$$

$$+\frac{r(x,0)}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big\{L_0\left[\varphi_8^{n+1}(x,\tau)\exp\left(-r(x,0)(y-\xi)/2\right),\left(\hat{r}_{00}^n+\frac{\partial\psi_2^n}{\partial x}\right)(x,\xi,y-\xi)\right]$$

$$-\int\limits_0^{y-2\xi}\psi_8^n(x,\gamma)\exp(-r(x,0)\tau/2)\left(r_{00}^n+\frac{\partial\varphi_2^n}{\partial x}\right)(x,\xi,y-\xi-\tau)\,d\gamma\Big\}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\exp\left(-r(x,0)(y-2\xi)/2\right)(\varphi_8^{n+1}(x,y-2\xi)\left(\hat{r}_{00}^n+\frac{\partial\psi_2^n}{\partial x}\right)(x,\xi,\xi)$$

$$-\psi_8^n(x,y-2\xi)\left(r_{00}^n+\frac{\partial\varphi_2^n}{\partial x}\right)(x,\xi,\xi))\Big]\Big\}\,d\xi,$$

$$\psi_6^{n+1}(x,y) = \int\limits_0^y (y-\xi)\left(\hat{h}^n(x,\xi) + r(x,0)\psi_7^n(x,\xi) - \frac{r^2(x,0)}{4}\psi_6^n(x,\xi)\right)d\xi,$$

$$\psi_7^{n+1}(x,y) = \int\limits_0^y \left(\hat{h}^n(x,\xi) + r(x,0)\psi_7^n(x,\xi) - \frac{r^2(x,0)}{4}\psi_6^n(x,\xi)\right)d\xi,$$

$$\psi_8^{n+1}(x,y) = \int\limits_0^y (y-\xi)\left(c_0(x)\psi_8^n(x,\xi) - L[\varphi_8^n,\hat{h}^n] - \int\limits_0^\xi \psi_8^n(x,\xi-\tau)h^{n+1}(x,\tau)\,d\tau\right)d\xi,$$

$$\psi_9^{n+1}(x,y) = \int\limits_0^y \left(c_0(x)\psi_8^n(x,\xi) - L[\varphi_8^n,\hat{h}^n] - \int\limits_0^\xi \psi_8^n(x,\xi-\tau)h^{n+1}(x,\tau)\,d\tau\right)d\xi,$$

где

$$\hat{k}_{00}^n(x,y,t) = \frac{\nu^2 a}{2}\exp(k(x,0)(t-y)/2)\Bigg[\left(k_{xx}(x,0)\frac{y}{2} + k_x^2(x,0)\frac{y^2}{4} + \frac{k_x^2(x,0)(t-y)}{2}\right)$$
$$\times\,\psi_8^n(x,t-y) + k_x(x,0)\frac{\partial\psi_8^n}{\partial x}(x,t-y)\Bigg],$$

$$\hat{r}_{00}^n(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_6^n(x,t-y)\exp\left(k(x,0)t/2\right)\right),$$

$$\hat{k}_{00t}^n(x,y,t) = \frac{k(x,0)}{2}k_{00}^n(x,y,t) + \frac{\nu^2 a}{2}\exp(k(x,0)(t-y)/2)\Bigg[\Bigg(k_{xx}(x,0)\frac{y}{2} + k_x^2(x,0)\frac{y^2}{4}$$
$$+\,\frac{k_x^2(x,0)(t-y)}{2}\Bigg)\psi_9^n(x,t-y) + k_x(x,0)\frac{\partial\psi_9^n}{\partial x}(x,t-y) + \frac{k_x^2(x,0)}{2}\psi_8^n(x,t-y)\Bigg],$$

$$\hat{r}_{00t}^n(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\exp(k(x,0)t/2)\left(\psi_7^n(x,t-y) + \frac{k(x,0)}{2}\psi_6^n(x,t-y)\right)\right],$$

$$\hat{w}^n(x,y,t) = \psi_1^n(x,y,t) + \frac{1}{2}\Bigg\{\frac{a}{2}(\psi_8^n(x,t+y) + \psi_8^n(x,t-y))$$
$$+\int\limits_0^{t+y}\psi_8^n(x,\tau)\tilde{g}_0(x,t+y-\tau)\,d\tau + \int\limits_0^{t-y}\psi_8^n(x,\tau)\tilde{g}_0(x,t-y-\tau)\,d\tau\Bigg\},$$

$$\hat{w}_t^n(x,y,t) = \psi_3^n(x,y,t) + \frac{a}{4}\left[\psi_9^n(x,t+y) + \psi_9^n(x,t-y)\right] + \frac{1}{2}g_0(x,0)\left[\psi_8^n(x,t+y) + \psi_8^n(x,t-y)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{t+y}\psi_8^n(x,t-\tau)\tilde{g}_{0t}(x,\tau)d\tau + \int\limits_0^{t-y}\psi_8^n(x,t-\tau)\tilde{g}_{0t}(x,\tau)d\tau\right),$$

$$\hat{h}^n(x,y) = \frac{1}{2}[\psi_5^n(x,y) + c_0(x)\psi_8^n(x,y)] + \frac{1}{a}\left[g_0(x,0)\psi_9^n(x,y) + \psi_8^n(x,y)\tilde{g}_{0t}(x,0)\right],$$

$$\psi_2^n(x,y,t) = \exp(k(x,0)t/2)\left(L_0[\varphi_6^{n+1},\hat{w}^n] - \int\limits_y^t \psi_6^n(x,t-\tau)w^n(x,y,\tau)\,d\tau\right),$$

$$\psi_4^n(x,y,t)=\frac{k(x,0)}{2}\psi_2^n(x,y,t)+\exp(k(x,0)t/2)\Big(L_0[\varphi_6^{n+1},\hat{w}_t^n]$$
$$-\int\limits_y^t\psi_6^n(x,y-\tau)w^n(x,y,\tau)\,d\tau-\psi_6^n(x,t-y)\beta(x,y)\Big).$$

Покажем, что можно выбрать $b_0\in(0,T/2)$ так, что для любого $n=0,1,2,\dots$ будут выполнены неравенства

$$\lambda_n=\max\Bigg\{\sup_{(y,t,s)\in F_n}\Big[\|\psi_1^n\|_s(y,t)\frac{\gamma^n(y)-s}{y}\Big],\ \sup_{(y,t,s)\in F_n}\Big[\|\psi_i^n\|_s(y)\frac{\gamma^n(y)-s}{y}\Big],\ i=6,8,$$
$$\sup_{(y,t,s)\in F_n}\Big[\|\psi_3^n\|_s(y,t)\frac{(\gamma^n(y)-s)^2}{y}\Big],\ \sup_{(y,t,s)\in F_n}\Big[\|\psi_5^n\|_s(y)\frac{(\gamma^n(y)-s)^3}{y}\Big],\tag{3.2}$$
$$\sup_{(y,t,s)\in F_n}\Big[\|\psi_i^n\|_s(y)\frac{(\gamma^n(y)-s)^2}{y}\Big],\ i=7,9\Bigg\}<\infty,$$

$$\|\varphi_1^{n+1}-\varphi_1^0\|_s(y,t)\leqslant R,\quad\|\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^0\|_s(y)\leqslant R,\quad i=6,8,$$
$$\|\varphi_3^{n+1}-\varphi_3^0\|_s(y,t)\leqslant\frac{R}{s_0-s},\quad\|\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^0\|_s(y)\leqslant\frac{R}{s_0-s},\quad i=7,9,$$
$$\|\varphi_5^{n+1}-\varphi_5^0\|_s(y)\leqslant\frac{R}{(s_0-s)^2},\quad(y,t,s)\in F_{n+1},\tag{3.3}$$

где

$$F_n=\Big\{(y,t,s):\,(y,t)\in G_T,\ 0\leqslant y\leqslant b_n(s_0-s),\ 0<s<s_0\Big\}.$$

Действительно, используя соотношения для ψ_i^n при $n=0$, получим:

$$\left\|\psi_1^0\right\|_s(y)\leqslant\int\limits_0^y(y-\xi)\Big\{R\left\|w^0\right\|_s+\frac{a}{2}\left\|h^0\right\|_s+\left\|k_{00}^0\right\|_s+T\left\|h^0\right\|_s\left\|w^0\right\|_s$$
$$+R\left\|\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^0(x,\tau)\exp(-r(x,0)\tau/2),\left(r_{00}^0+\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x}\right)\right]\right\|_s(\xi,\tau)\Big\}\,d\xi,$$

где

$$\left\|w^0\right\|_s\leqslant R\left(1+\frac{a}{2}+2TR\right),\quad\left\|h^0\right\|_s\leqslant R\left(\frac{1}{2}+R\left(1+\frac{4}{a}\right)\right),$$
$$\left\|\varphi_2^0\right\|_s(y,t)\leqslant R(1+RT)\left\|w^0\right\|_s\leqslant R(1+RT)R\left(\frac{1}{2}+R\left(1+\frac{4}{a}\right)\right),$$
$$\left\|k_{00}^0\right\|_s(y,t)\leqslant\frac{a}{2}R^2\left(R\left(1+\frac{T}{2}\right)+\left\|\frac{\partial\varphi_8^0}{\partial x}\right\|_s\right),\quad s\in(0,s_0),\ (y,t)\in G_T.$$

Воспользуемся неравенством (2.35) для оценки $\left\|\frac{\partial\varphi_8^0}{\partial x}\right\|_s$, $\left\|r_{00}^0\right\|_s$, $\left\|\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x}\right\|_s$, $\left\|\frac{\partial}{\partial x}L_0\right\|_s$:

$$\left\|\frac{\partial\varphi_8^0}{\partial x}\right\|_s(y)\leqslant\frac{R}{s'(y)-s},\quad\left\|r_{00}^0\right\|_s(y,t)\leqslant\frac{R^2}{s'(y)-s},$$
$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^0\exp(-r(x,0)(t\pm y\mp\xi)/2),r_{00}^0+\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x}\right]\right\|_s(y,t)$$
$$\leqslant\frac{1}{s'(y)-s}\left(\left\|r_{00}^0\right\|_{s'}+\frac{\left\|\varphi_2^0\right\|_{s'}}{s'(y)-s}+2TR^2\left(\left\|r_{00}^0\right\|_{s'}+\frac{\left\|\varphi_2^0\right\|_{s'}}{s'(y)-s}\right)\right)\leqslant\frac{R^2+\left\|\varphi_2^0\right\|_{s'}}{(s'(y)-s)^2}(1+2TR^2).$$

Взяв функцию $s'(\xi)$ из (3.1) для $n=0$, с учетом вышеприведенных неравенств, имеем:

$$\left\|\psi_1^0\right\|_s(y,t)\leqslant \mu_0(a,T,R,s_0)\int\limits_0^y \frac{y-\xi}{(\gamma^0(y)-s)^2}\,d\xi\leqslant b_0\mu_0(a,T,R,s_0)\frac{y}{\gamma^0(y)-s}.$$

Далее,

$$\left\|\psi_3^0\right\|_s(y,t)\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-y}^{y}\Bigg\{R\left\|w^0\right\|_s+\frac{a}{2}\left\|h^0\right\|_s+\left\|k_{00}^0\right\|_s+3T\left\|h^0\right\|_s\left\|w^0\right\|_s$$

$$+R\left\|\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^0(x,\xi+t)\exp(-r(x,0)(\xi+t)/2),\left(r_{00}^0+\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x}\right)\right]\right\|_s(y-|\xi|,\xi+t)\Bigg\}\,d\xi$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-y}^{y}\frac{\mu_1(a,T,R,s_0)}{(\gamma^0(y)-s)^2}\,d\xi\leqslant \mu_1(a,T,R,s_0)\frac{y}{(\gamma^0(y)-s)^2},$$

$$\left\|\psi_5^0\right\|_s(y)\leqslant \frac{a}{2}\int\limits_0^y R\left(\frac{2}{a}R+\|h^0\|_s\right)d\xi+\frac{1}{a}\int\limits_0^{y/2}\Bigg\{R\left\|w_t^0\right\|_s+\frac{1}{2}R\left\|h^0\right\|_s+\left\|k_{00t}^0\right\|_s$$

$$+T\left\|h^0\right\|_s\left\|w_t^0\right\|_s+R\Bigg\{\left\|\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^0(x,y-\xi)\exp(-r(x,0)(y-\xi)/2),r_{00t}^0+\frac{\partial\varphi_4^0}{\partial x}\right]\right\|_s$$

$$+R\left\|\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^0(x,y-\xi)\exp(-r(x,0)(y-\xi)/2),r_{00}^0+\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x}\right]\right\|_s$$

$$+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_8^0(x,y-\xi)\exp(-r(x,0)(y-\xi)/2)\left(r_{00}^0+\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x}\right)\right)\right\|_s\Bigg\}\Bigg\}\,d\xi,$$

где

$$\left\|w_t^0\right\|_s\leqslant R\left(1+\frac{a}{2}+R(1+T)\right),\quad \left\|\varphi_4^0\right\|_s\leqslant R(1+TR)\left(R\|w^0\|_s+\|w_t^0\|_s\right)+R^3,$$

$$\left\|k_{00t}^0\right\|_s(y,t)\leqslant R\left\|k_{00t}^0\right\|_s+\frac{a}{2}R^2\left(R(1+TR)+R^2+\left\|\frac{\partial\varphi_9^0}{\partial x}\right\|_s(y)\right),$$

$$\left\|r_{00t}^0\right\|_s(y,t)\leqslant \frac{R^2(1+R)}{s'(y)-s},\quad \left\|\frac{\partial\varphi_9^0}{\partial x}\right\|_s(y)\leqslant \frac{R}{s'(y)-s},\quad s\in(0,s_0),\ (y,t)\in G_T.$$

Из вышеприведенных оценок следует, что

$$\left\|\psi_5^0\right\|_s(y)\leqslant \mu_2(a,T,R,s_0)\frac{y}{(\gamma^0(y)-s)^2}\leqslant s_0\mu_2(a,T,R,s_0)\frac{y}{(\gamma^0(y)-s)^3}.$$

Поступая аналогично, имеем

$$\left\|\psi_6^0\right\|_s(y)\leqslant \int\limits_0^y(y-\xi)\left(\left\|h^0\right\|_s+2R^2\right)d\xi\leqslant s_0RT\left(1/2+2R+R\left(1+\frac{4}{a}\right)\right)\frac{y}{\gamma^0(y)-s},$$

$$\left\|\psi_7^0\right\|_s(y)\leqslant \int\limits_0^y\left(\|h^0\|_s+2R^2\right)d\xi\leqslant s_0^2R\left(1/2+2R+R\left(1+\frac{4}{a}\right)\right)\frac{y}{(\gamma^0(y)-s)^2},$$

$$\left\|\psi_8^0\right\|_s(y) \leqslant \int\limits_0^y (y-\xi)\left(R^2+\|h^0\|_s(1+TR)\right)\,d\xi$$

$$\leqslant s_0RT\left(R+\left(1/2+R\left(1+\frac{4}{a}\right)\right)(1+TR)\right)\frac{y}{\gamma^0(y)-s},$$

$$\left\|\psi_9^0\right\|_s(y) \leqslant \int\limits_0^y \left(R^2+R\left(1/2+R\left(1+\frac{4}{a}\right)\right)(1+TR)\right)d\xi$$

$$\leqslant s_0^2R\left(R+\left(1/2+R\left(1+\frac{4}{a}\right)\right)(1+TR)\right)\frac{y}{\gamma^0(y)-s}.$$

Из этих оценок следует выполнение неравенств (3.2) при $n=0$. Кроме того, для $(y,t,s)\in F_1$ находим

$$\|\varphi_1^1-\varphi_1^0\|_s(y,t)=\|\psi_1^0\|_s(y,t)\leqslant\frac{\lambda_0y}{\gamma^0(y)-s}\leqslant\frac{\lambda_0b_1}{1-b_1/b_0}=\lambda_0b_0,$$

$$\|\varphi_3^1-\varphi_3^0\|_s(y,t)=\|\psi_3^0\|_s(y,t)\leqslant\frac{\lambda_0y}{(\gamma^0(y)-s)^2}\leqslant\frac{2\lambda_0b_0}{s_0-s},$$

$$\|\varphi_5^1-\varphi_5^0\|_s(y)=\|\psi_5^0\|_s(y,t)\leqslant\frac{\lambda_0y}{(\gamma^0(y)-s)^3}\leqslant\frac{4\lambda_0b_0}{(s_0-s)^3},$$

$$\|\varphi_6^1-\varphi_6^0\|_s(y)=\|\psi_6^0\|_s(y,t)\leqslant\frac{\lambda_0y}{\gamma^0(y)-s}\leqslant\frac{\lambda_0b_1}{1-b_1/b_0}=\lambda_0b_0,$$

$$\|\varphi_7^1-\varphi_7^0\|_s(y)=\|\psi_7^0\|_s(y,t)\leqslant\frac{\lambda_0y}{(\gamma^0(y)-s)^2}\leqslant\frac{2\lambda_0b_0}{s_0-s},$$

$$\|\varphi_8^1-\varphi_8^0\|_s(y)=\|\psi_8^0\|_s(y,t)\leqslant\frac{\lambda_0y}{\gamma^0(y)-s}\leqslant\frac{\lambda_0b_1}{1-b_1/b_0}=\lambda_0b_0,$$

$$\|\varphi_9^1-\varphi_9^0\|_s(y)=\|\psi_9^0\|_s(y,t)\leqslant\frac{\lambda_0y}{(\gamma^0(y)-s)^2}\leqslant\frac{2\lambda_0b_0}{s_0-s}.$$

Если выбрать b_0 так, чтобы $4\lambda_0b_0\leqslant R$, то неравенства (3.3) будут выполняться для $n=0$. Покажем методом индукции, что неравенства (3.2), (3.3) имеют место и для других n, если b_0 выбрать подходящим образом. Пусть неравенства (3.2), (3.3) справедливы для $n=0,1,2,\dots,j$. Тогда для $(y,t,s)\in F_{j+1}$

$$\left\|\psi_1^{j+1}\right\|_s(y,t)\leqslant\int\limits_0^y(y-\xi)\Bigg\{R\left\|\hat w^j\right\|_s+\frac{a}{2}\left\|\hat h^j\right\|_s+\left\|\hat k_{00}^j\right\|_s$$

$$+T\left(\left\|\hat h^j\right\|_s\left\|w^{j+1}\right\|_s+\left\|h^j\right\|_s\left\|\hat w^j\right\|_s\right)+R\Bigg\{\left\|\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^{j+1}\exp(-r(x,0)t/2),\hat r_{00}^j+\frac{\partial\psi_2^j}{\partial x}\right]\right\|_s$$

$$+T\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi_8^j\exp(-r(x,0)t/2)\left(r_{00}^j+\frac{\partial\varphi_2^j}{\partial x}\right)\right]\right\|_s\Bigg\}\Bigg\}\,d\xi.$$

Нетрудно видеть, что

$$\|\hat w^j\|_s(y,t)\leqslant\|\psi_1^j\|_s+\frac{1}{2}(a+TR)\|\psi_8^j\|_s\leqslant(1+(a+TR)/2)\frac{\lambda_jy}{\gamma^j(y)-s},$$

$$\|\hat h^j\|_s(y) \leqslant \frac{1}{2}\|\psi_5^j\|_s + R\|\psi_8^j\|_s + \frac{2}{a}R(\|\psi_9^j\|_s + \|\psi_8^j\|_s)$$
$$\leqslant (1/2 + R(1+2/a)s_0 + 2Rs_0)\frac{\lambda_j y}{(\gamma^j(y)-s)^3},$$
$$\|\hat k_{00}^j\|_s(y,t) \leqslant \frac{a}{2}R^2\left((1+TR/2)\|\psi_8^j\|_s + \frac{\|\psi_8^j\|_s}{s'(y)-s}\right) \leqslant \frac{a}{2}R^2(3+TR/2)\frac{\lambda_j y}{(\gamma^j(y)-s)^2},$$
$$\|\hat r_{00}^j\|_s(y,t) \leqslant R\frac{\lambda_j y}{(s'(y)-s)(\gamma^j(y)-s)},$$
$$\|\psi_2^j\|_s(y,t) \leqslant R(\|\hat w^j\|_s(1+2RT) + T\|\psi_6^j\|_s\|w^j\|_s)$$
$$\leqslant R((1+2RT)(1+a/2+TR/2) + TR(2+a+2TR))\frac{\lambda_j y}{\gamma^j(y)-s},$$
$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}L_0\left[\varphi_8^{j+1}\exp(-r(x,0)t/2), \hat r_{00}^0 + \frac{\partial\psi_2^j}{\partial x}\right]\right\|_s(y,t) \leqslant \frac{1}{s'(y)-s}(1+TR)\left(\left\|\hat r_{00}^j\right\|_s + \frac{\|\psi_2^j\|_s}{s'(y)-s}\right)$$
$$\leqslant \mu_3(a,T,R)\frac{\lambda_j y}{(\gamma^j(y)-s)^3},$$

где

$$\|w^j\|_s(y,t) \leqslant \|\varphi_1^j\|_s + \frac{a}{2}\|\varphi_8^j\|_s + TR\|\varphi_8^j\|_s \leqslant R(2+a+2TR).$$

Здесь и в дальнейших промежуточных выкладках функция s' определена равенством (3.1) при $n=j$ и использованы неравенства

$$\|\varphi_i^j\|_s \leqslant 2R, \quad i=1,6,8; \quad \|\varphi_5^j\|_s \leqslant R\frac{1+s_0^2}{(s_0-s)^2};$$
$$\|\varphi_i^j\|_s \leqslant R\frac{1+s_0}{s_0-s}, \quad i=3,7,9,$$

справедливые согласно индуктивному предположению, а также очевидные неравенства $b_j \leqslant b_0$, $\gamma^{j+1}(y) \leqslant \gamma^j(y)$, $\|\varphi_2^j\|_s(y,t) \leqslant R(1+2RT)\|w^j\|_s \leqslant R^2(1+2RT)(2+a+2TR)$,

$$\|\varphi_4^j\|_s \leqslant R(R\|w^j\|_s(1+2TR) + \|w_t\|_s(1+2RT) + 2R^2) \leqslant \frac{\mu_4(a,T,R,s_0)}{s_0-s},$$
$$\|w_t^j\|_s \leqslant \frac{R(1+s_0)(1+aR/2) + 2R^2 s_0(1+T)}{s_0-s}.$$

Окончательно для ψ_1^{j+1} получаем

$$\left\|\psi_1^{j+1}\right\|_s(y,t) \leqslant \int_0^y (y-\xi)\mu_5(a,T,R,s_0)\frac{\lambda_j\xi}{(\gamma^j(\xi)-s)^3}\,d\xi \leqslant \lambda_j b_0^2\mu_5(a,T,R,s_0)\frac{y}{\gamma^{j+1}(y)-s}.$$

Аналогичные рассуждения для ψ_i^{j+1}, $i=3,5,6,7,8,9$, приводят к неравенствам

$$\left\|\psi_3^{j+1}\right\|_s(y,t) \leqslant \frac{1}{2}\int_{-y}^{y} \mu_6(a,T,R,s_0)\frac{\lambda_j\xi}{(\gamma^j(\xi)-s)^3}\,d\xi \leqslant \lambda_j b_0\mu_6(a,T,R,s_0)\frac{y}{(\gamma^{j+1}(y)-s)^2},$$

$$\left\|\psi_5^{j+1}\right\|_s(y,t)\leqslant\int\limits_0^y\left[\left(\frac{a}{2}R+\left\|h^j\right\|_s\right)\left\|\psi_8^j\right\|_s+\left\|\hat{h}^j\right\|_s\left\|\varphi_8^{j+1}\right\|_s\right]d\xi$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_0^{y/2}\Bigg\{\left(R+y\left\|h^j\right\|_s\right)\left\|\hat{w}_t^j\right\|_s+\left(R/2+y\left\|w_t^{j+1}\right\|_s\right)\left\|\hat{h}^j\right\|_s+\left\|\hat{k}_{00t}^j\right\|_s$$

$$+R\frac{\left\|L_0\varphi_8^{j+1}\exp(-r(x,0)(y-\xi)/2),\hat{r}_{00t}^j+\frac{\partial\psi_4^j}{\partial x}\right]\right\|_s}{s'(\xi)-s}$$

$$+\frac{yR^2\left\|\psi_8^j\right\|_s\left(\left\|r_{00t}^j\right\|_s+\left\|\frac{\partial\varphi_4^j}{\partial x}\right\|_s\right)}{s'(\xi)-s}+R\frac{\left\|L_0\varphi_8^{j+1}\exp(-r(x,0)(y-\xi)/2),\hat{r}_{00}^j+\frac{\partial\psi_2^j}{\partial x}\right]\right\|_s}{s'(\xi)-s}$$

$$+\frac{yR^2\left\|\psi_8^j\right\|_s\left(\left\|r_{00}^j\right\|_s+\left\|\frac{\partial\varphi_2^j}{\partial x}\right\|_s\right)}{s'(\xi)-s}+\frac{R^2}{2}\frac{\left\|\varphi_8^{j+1}\right\|_s\left(\left\|\hat{r}_{00}^j\right\|_s+\left\|\frac{\partial\psi_2^j}{\partial x}\right\|_s\right)+\left\|\psi_8^j\right\|_s\left(\left\|r_{00}^j\right\|_s+\left\|\frac{\partial\varphi_2^j}{\partial x}\right\|_s\right)}{s'(\xi)-s}\Bigg\}d\xi$$

$$\leqslant\int\limits_0^y\mu_7(a,T,R,s_0)\frac{\lambda_j\xi}{(\gamma^j(\xi)-s)^4}\,d\xi\leqslant\lambda_j b_0\mu_7(a,T,R,s_0)\frac{y}{(\gamma^{j+1}(y)-s)^3},$$

где

$$\left\|\hat{w}_t^j\right\|_s(y,t)\leqslant\left\|\psi_3^j\right\|_s+\frac{a}{2}\left\|\psi_9^j\right\|_s+R(1+T)\left\|\psi_8^j\right\|_s\leqslant\left(1+\frac{a}{2}+s_0R(1+T)\right)\frac{\lambda_j y}{(\gamma^j(y)-s)^2},$$

$$\left\|\hat{k}_{00t}^j\right\|_s(y,t)\leqslant R\left\|\hat{k}_{00}^j\right\|_s+\frac{a}{2}R^2\left[\left(1+TR/2+\frac{1}{s'(y)-s}\right)\left\|\psi_9^j\right\|_s+\frac{R}{2}\left\|\psi_8^j\right\|_s\right]$$

$$\leqslant\frac{a}{2}R^2\left(s_0R(3+TR/2)+s_0(1+TR/2)+2R+s_0^2R^2\right)\frac{\lambda_j y}{(\gamma^j(y)-s)^3},$$

$$\left\|\hat{r}_{00t}^j\right\|_s(y,t)\leqslant 2R(1+s_0R)\frac{\lambda_j y}{(\gamma^j(y)-s)^3},\quad\left\|r_{00t}^j\right\|_s(y,t)\leqslant\frac{2R^2(1+s_0+2Rs_0)}{(s_0-s)(\gamma^j(y)-s)},$$

$$\left\|\psi_4^j\right\|_s(y,t)\leqslant R\left\|\psi_2^j\right\|_s(y,t)+R\left[\left(\left\|\hat{w}^j\right\|_s+\left\|\hat{w}_t^j\right\|_s\right)(1+2TR)+\left\|\psi_6^j\right\|_s\left(\left(\left\|w^j\right\|_s+\left\|w_t^j\right\|_s\right)T+R\right)\right].$$

Далее

$$\left\|\psi_6^{j+1}\right\|_s(y)\leqslant\int\limits_0^y(y-\xi)\left(\frac{\lambda_j\xi(1/2+R(1+2/a)s_0+2Rs_0)}{(\gamma^j(y)-s)^3}+\frac{\lambda_j\xi R}{(\gamma^j(\xi)-s)^2}+\frac{\lambda_j\xi R}{\gamma^j(\xi)-s}\right)d\xi$$

$$\leqslant\lambda_j\mu_8(b_0,a,R,s_0)\frac{y}{(\gamma^{j+1}(y)-s)},$$

$$\left\|\psi_7^{j+1}\right\|_s(y)\leqslant\int\limits_0^y\left(\frac{\lambda_j\xi(1/2+R(1+2/a)s_0+2Rs_0)}{(\gamma^j(y)-s)^3}+\frac{\lambda_j\xi R}{(\gamma^j(\xi)-s)^2}+\frac{\lambda_j\xi R}{\gamma^j(\xi)-s}\right)d\xi$$

$$\leqslant\lambda_j b_0^{-1}\mu_8(b_0,a,R,s_0)\frac{y}{(\gamma^{j+1}(y)-s)^2},$$

$$\left\|\psi_8^{j+1}\right\|_s(y)\leqslant\lambda_j\mu_9(b_0,a,R,s_0,T)\frac{y}{\gamma^{j+1}(y)-s},$$

$$\left\|\psi_9^{j+1}\right\|_s(y)\leqslant\lambda_j b_0^{-1}\mu_9(b_0,s_0,R,T)\frac{y}{(\gamma^{j+1}(y)-s)^2},\quad(y,t,s)\in F_{j+1}.$$

Из полученных оценок следует

$$\lambda_{j+1}\leqslant\lambda_j\rho,\quad\lambda_{j+1}\leqslant\infty,\quad\rho=\max(\mu_5,\mu_6,\mu_7,\max(1,b_0^{-1})\mu_8,\max(1,b_0^{-1})\mu_9).$$

Вместе с тем, для $(y,t,s)\in F_{j+2}$

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_i^{j+2}-\varphi_i^0\right\|_s &\leqslant \sum_{n=0}^{j+1}\left\|\psi_i^n\right\|_s \leqslant \sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_n y}{\gamma^n(y)-s}\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_n b_{j+2}}{1-b_{i+2}/b_n}\leqslant \sum_{n=0}^{j+1}\lambda_n b_n(n+1)^2\leqslant \lambda_0 b_0\sum_{n=0}^{j+1}\rho^n(n+1)^2,\quad i=1,6,8,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_5^{j+2}-\varphi_5^0\right\|_s(y) &\leqslant \sum_{n=0}^{j+1}\|\psi_5^n\|_s(y)\leqslant \sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_n y}{(\gamma^n(y)-s)^3}\\ &\leqslant \frac{1}{(s_0-s)^2}\sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_n b_{j+2}}{(1-b_{i+2}/b_n)^3}\leqslant \frac{\lambda_0 b_0}{(s_0-s)^2}\sum_{n=0}^{j+1}\rho^n(n+1)^6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_i^{j+2}-\varphi_i^0\right\|_s &\leqslant \sum_{n=0}^{j+1}\|\psi_i^n\|_s\leqslant \sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_n y}{(\gamma^n(y)-s)^2}\\ &\leqslant \frac{1}{s_0-s}\sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_n b_{j+2}}{(1-b_{i+2}/b_n)^2}\leqslant \frac{\lambda_0 b_0}{s_0-s}\sum_{n=0}^{j+1}\rho^n(n+1)^4,\quad i=3,7,9.\end{aligned}$$

Выберем теперь $b_0\in(0,T/(2s_0))$ таким, что

$$\rho\leqslant 1,\quad \lambda_0 b_0\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(n+1)^6\leqslant R.$$

Тогда

$$\left\|\varphi_1^{j+2}-\varphi_1^0\right\|_s(y,t)\leqslant R;\quad \left\|\varphi_i^{j+2}-\varphi_i^0\right\|_s(y)\leqslant R,\quad i=6,8;\quad \left\|\varphi_5^{j+2}-\varphi_5^0\right\|_s(y)\leqslant \frac{R}{(s_0-s)^2};$$
$$\left\|\varphi_3^{j+2}-\varphi_3^0\right\|_s(y,t)\leqslant \frac{R}{s_0-s};\quad \left\|\varphi_i^{j+2}-\varphi_i^0\right\|_s(y)\leqslant \frac{R}{s_0-s},\quad i=7,9;\quad (y,t,s)\in F_{j+2}.$$

Так как выбор b_0 не зависит от номера приближений, то последовательные приближения φ_i^n, $i=1,3,5,6,7,8,9$, принадлежат

$$C_{(y,t)}\left(F;\ A_s\right),\quad F=\bigcap_{n=0}^{\infty}F_n$$

и для них имеют место неравенства

$$\left\|\varphi_1^n-\varphi_1^0\right\|_s(y,t)\leqslant R;\quad \left\|\varphi_i^n-\varphi_i^0\right\|_s(y)\leqslant R,\quad i=6,8;\quad \left\|\varphi_5^n-\varphi_5^0\right\|_s(y)\leqslant \frac{R}{(s_0-s)^2};$$
$$\left\|\varphi_3^n-\varphi_3^0\right\|_s(y,t)\leqslant \frac{R}{s_0-s};\quad \left\|\varphi_i^n-\varphi_i^0\right\|_s(y)\leqslant \frac{R}{s_0-s},\quad i=7,9;\ (y,t,s)\in F.$$

При $s\in(0,s_0)$ ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_i^n-\varphi_i^{n-1})$$

сходятся равномерно в норме пространства

$$C_{(y,t)}\left(P_{sT};A_s\right),\quad P_{sT}=G_T\cap\left\{(y,t):\ 0\leqslant y\leqslant b(s_0-s)\right\},$$

поэтому $\psi_i^n \to \psi_i$. Предельные функции ψ_i являются элементами $C_{(y,t)}\left(P_{sT};\ A_s\right)$ и удовлетворяют уравнениям (2.36)–(2.42). Докажем теперь, что найденное решение единственно. Пусть ψ_i и $\bar{\psi}_i$ — любые два решения, удовлетворяющие неравенствам

$$\left\|\varphi_1-\varphi_1^0\right\|_s(y,t)\leqslant R,\quad \left\|\varphi_i-\varphi_i^0\right\|_s(y)\leqslant R,\quad i=6,8,\quad \left\|\varphi_5-\varphi_5^0\right\|_s(y)\leqslant\frac{R}{(s_0-s)^2},$$
$$\left\|\varphi_3-\varphi_3^0\right\|_s(y,t)\leqslant\frac{R}{s_0-s},\quad \left\|\varphi_i-\varphi_i^0\right\|_s(y)\leqslant\frac{R}{s_0-s},\quad i=7,9,\ (y,t,s)\in F.$$

Обозначим через $\tilde{\psi}_i=\varphi_i-\bar{\varphi}_i$ и пусть

$$\lambda:=\max\Bigg\{\sup_{(y,t,s)\in F}\left[\|\tilde{\varphi}_1\|_s(y,t)\frac{\gamma(y)-s}{y}\right],\ \sup_{(y,t,s)\in F}\left[\|\tilde{\varphi}_3\|_s(y,t)\frac{(\gamma(y)-s)^2}{y}\right],$$
$$\sup_{(y,t,s)\in F}\left[\|\tilde{\varphi}_i\|_s(y)\frac{\gamma(y)-s}{y}\right],\ i=6,8,$$
$$\sup_{(y,t,s)\in F}\left[\|\tilde{\varphi}_i\|_s(y)\frac{(\gamma(y)-s)^2}{y}\right],\ i=7,9,\ \sup_{(y,t,s)\in F}\left[\|\tilde{\varphi}_5\|_s(y)\frac{(\gamma(y)-s)^3}{y}\right]\Bigg\}<\infty,$$

где $\gamma(y)=s_0-y/b$, $b=b_0\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+1/(n+1)^2\right)^{-1}$. Тогда для функций $\tilde{\varphi}_i$ можно получить соотношения

$$\tilde{\psi}_1(x,y,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{t-y+\xi}^{t+y-\xi}\Bigg\{H(x,\xi)\tilde{w}(x,\xi,\tau)-\frac{a}{2}\tilde{h}(x,\tau-\xi)+\tilde{k}_{00}(x,\xi,\tau)$$
$$-\int\limits_0^{\tau-\xi}\Big(\tilde{h}(x,\gamma)\bar{w}(x,\xi,\tau-\gamma)-h(x,\gamma)\tilde{w}(x,\xi,\tau-\gamma)\Big)\,d\gamma$$
$$+\nu^2\exp\left(r(x,0)\tau/2\right)\frac{\partial}{\partial x}\Big\{L_0\Big[\bar{\varphi}_8(x,\tau)\exp\left(-r(x,0)(\tau)/2\right),\Big(\tilde{r}_{00}+\frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial x}\Big)(x,\xi,\tau)\Big]$$
$$-\int\limits_0^{\tau-\xi}\tilde{\psi}_8(x,\gamma)\exp(-r(x,0)\gamma/2)\Big(r_{00}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\Big)(x,\xi,\tau-\gamma)d\gamma\Big\}\Bigg\}\,d\tau\,d\xi,$$
$$\tilde{\psi}_3(x,y,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{-y}^{y}\Big\{H(x,y-|\xi|)\tilde{w}^n(x,y-|\xi|,\xi+\tau)-\frac{a}{2}(\tilde{h}^n(x,\xi+t-y+|\xi|)$$
$$+\tilde{k}_{00}^n(x,y-|\xi|,t+|\xi|)-\int\limits_0^{t-y+\xi+|\xi|}\Big(\tilde{h}(x,\gamma)\bar{w}(x,y-|\xi|,t+\xi-\gamma)$$

$$
\begin{aligned}
&- h(x,\gamma)\tilde{w}^n(x,y-|\xi|,t+\xi-\gamma)\Big)d\gamma + \nu^2\exp\left(r(x,0)(\xi+t)/2\right)\\
&\times \frac{\partial}{\partial x}\Big\{L_0[\bar{\varphi}_8(x,\xi+t)\exp\left(-r(x,0)(\xi+t)/2\right), \Big(\tilde{r}_{00}^n + \frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial x}\Big)(x,y-|\xi|,\xi+t)]\\
&- \int\limits_0^{t-y+\xi+|\xi|} \tilde{\psi}_8(x,\gamma)\exp(-r(x,0)\gamma/2)\Big(r_{00}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\Big)(x,y-\xi,\xi+t-\gamma)d\gamma\Big\}\Big\}\operatorname{sgn}(\xi)\,d\xi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\psi}_5(x,y) &= \int\limits_0^y \left(\frac{2}{a}\tilde{\psi}_8(x,\xi)\tilde{g}_{0tt}(x,y-\xi) - \tilde{h}(x,y-\xi))\bar{\varphi}_8(x,\xi) + h(x,y-\xi)\tilde{\psi}_8(x,\xi)\right)d\xi\\
&+ \frac{1}{a}\int\limits_0^{y/2}\Big\{H(x,\xi)\tilde{w}_t(x,\xi,y-\xi) + \tilde{k}_{00t}(x,\xi,y-\xi) - \frac{1}{2}\tilde{h}(x,y-2\xi)\beta(x,\xi)\\
&- \int\limits_0^{y-2\xi}\Big(\tilde{h}(x,\tau)\bar{w}_t(x,\xi,y-\xi-\tau) - h(x,\tau)\tilde{w}_t(x,\xi,y-\xi-\tau)\Big)\,d\tau\\
&+ \nu^2\exp\left(r(x,0)(y-\xi)/2\right)\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big\{L_0\Big[\bar{\varphi}_8(x,y-\xi)\exp\left(-r(x,0)(y-\xi)/2\right), \Big(\tilde{r}_{00t}^n + \frac{\partial\tilde{\psi}_4}{\partial x}\Big)\\
&\times (x,\xi,y-\xi)\Big] - \int\limits_0^{y-2\xi}\tilde{\psi}_8(x,\tau)\exp\left(-r(x,0)\tau/2\right)\Big(r_{00t}+\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}\Big)(x,\xi,y-\xi-\tau)d\tau\Big\}\\
&+ \frac{r(x,0)}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big\{L_0\Big[\bar{\varphi}_8(x,\tau)\exp\left(-r(x,0)(y-\xi)/2\right), \Big(\tilde{r}_{00}+\frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial x}\Big)(x,\xi,y-\xi)\Big]\\
&- \int\limits_0^{y-2\xi}\tilde{\psi}_8(x,\gamma)\exp(-r(x,0)\tau/2)\Big(r_{00}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\Big)(x,\xi,y-\xi-\tau)d\gamma\Big\}\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\exp\Big(-r(x,0)(y-2\xi)/2\Big)\Big(\bar{\varphi}_8(x,y-2\xi)\Big(\tilde{r}_{00}+\frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial x}\Big)(x,\xi,\xi)\\
&- \tilde{\psi}_8(x,y-2\xi)\Big(r_{00}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\Big)(x,\xi,\xi)\Big)\Big]\Big\}\,d\xi,
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{\psi}_6(x,y) = \int\limits_0^y (y-\xi)\left(\tilde{h}(x,\xi) + r(x,0)\tilde{\psi}_7(x,\xi) - \frac{r^2(x,0)}{4}\tilde{\psi}_6(x,\xi)\right)d\xi,
$$

$$
\tilde{\psi}_7(x,y) = \int\limits_0^y \left(\tilde{h}(x,\xi) + r(x,0)\tilde{\psi}_7(x,\xi) - \frac{r^2(x,0)}{4}\tilde{\psi}_6(x,\xi)\right)d\xi,
$$

$$
\tilde{\psi}_8(x,y) = \int\limits_0^y (y-\xi)\left(c_0(x)\tilde{\psi}_8(x,\xi) - L[\varphi_8,\tilde{h}] - \int\limits_0^{\xi}\tilde{\psi}_8(x,\xi-\tau)\bar{h}(x,\tau)\right)d\xi,
$$

$$
\tilde{\psi}_9(x,y) = \int\limits_0^y (c_0\left(\tilde{\psi}_8(x,\xi) - L[\varphi_8,\tilde{h}] - \int\limits_0^{\xi}\tilde{\psi}_8(x,\xi-\tau)\bar{h}(x,\tau)\right)d\xi,
$$

где

$$
\begin{aligned}
\tilde{k}_{00}(x,y,t) &= \frac{\nu^2 a}{2}\exp(k(x,0)(t-y)/2)\Big[\Big(k_{xx}(x,0)\frac{y}{2} + k_x^2(x,0)\frac{y^2}{4} + \frac{k_x^2(x,0)(t-y)}{2}\Big)\\
&\times\tilde{\psi}_8(x,t-y) + k_x(x,0)\frac{\partial\tilde{\psi}_8}{\partial x}(x,t-y)\Big],
\end{aligned}
$$

$$\tilde r_{00}(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde\psi_6(x,t-y)\exp\left(k(x,0)t/2\right)\right),$$

$$\tilde k_{00t}(x,y,t)=\frac{k(x,0)}{2}k_{00}(x,y,t)+\frac{\nu^2a}{2}\exp(k(x,0)(t-y)/2)\Bigg[\Bigg(k_{xx}(x,0)\frac{y}{2}+k_x^2(x,0)\frac{y^2}{4}$$
$$+\frac{k_x^2(x,0)(t-y)}{2}\Bigg)\tilde\psi_9(x,t-y)+k_x(x,0)\frac{\partial\tilde\psi_9}{\partial x}(x,t-y)+\frac{k_x^2(x,0)}{2}\tilde\psi_8(x,t-y)\Bigg],$$

$$\tilde r_{00t}(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\exp(k(x,0)t/2)\left(\tilde\psi_7(x,t-y)+\frac{k(x,0)}{2}\tilde\psi_6(x,t-y)\right)\right],$$

$$\tilde w(x,y,t)=\tilde\psi_1(x,y,t)+\frac12\Bigg\{\frac a2(\tilde\psi_8(x,t+y)+\tilde\psi_8(x,t-y))+\int\limits_0^{t+y}\tilde\psi_8(x,\tau)\tilde g_0(x,t+y-\tau)\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^{t-y}\tilde\psi_8(x,\tau)\tilde g_0(x,t-y-\tau)\,d\tau\Bigg\},$$

$$\tilde w_t(x,y,t)=\tilde\psi_3(x,y,t)+\frac a4\left[\tilde\psi_9(x,t+y)+\tilde\psi_9(x,t-y)\right]+\frac12 g_0(x,0)\left[\tilde\psi_8(x,t+y)+\tilde\psi_8(x,t-y)\right]$$
$$+\frac12\Bigg(\int\limits_0^{t+y}\tilde\psi_8(x,t-\tau)\tilde g_{0t}(x,\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{t-y}\tilde\psi_8(x,t-\tau)\tilde g_{0t}(x,\tau)\,d\tau\Bigg),$$

$$\tilde h(x,y)=\frac12\left[\tilde\psi_5(x,y)+c_0(x)\tilde\psi_8(x,y)\right]+\frac1a\left[g_0(x,0)\tilde\psi_9(x,y)+\tilde\psi_8(x,y)\tilde g_{0t}(x,0)\right],$$

$$\tilde\psi_2(x,y,t)=\exp(k(x,0)t/2)\left(L_0[\bar\varphi_6,\tilde w_t]-\int\limits_y^t\tilde\psi_6(x,t-\tau)w(x,y,\tau)\right)\,d\tau,$$

$$\tilde\psi_4(x,y,t)=\frac{k(x,0)}{2}\tilde\psi_2(x,y,t)+\exp(k(x,0)t/2)\Bigg(L_0[\bar\varphi_6(x,y),\tilde w_t(x,y,t)]-\tilde\psi_6(x,t-y)\beta(x,y)$$
$$-\int\limits_y^t\tilde\psi_6(x,y-\tau)w(x,y,\tau)\,d\tau\Bigg).$$

Применяя к ним оценки, приведенные выше, находим неравенство

$$\lambda\leqslant\lambda\rho',\quad \rho'=\max\left(\mu_5',\mu_6',\mu_7',\max(1,b^{-1})\mu_8',\max(1,b^{-1})\mu_9'\right)<\rho<1,$$

где $\mu'_{5,6,7}=\mu'_{5,6,7}(b,a,R,s_0)$, $\mu'_{8,9}=\mu'_{8,9}(b,a,R,s_0,T)$.

Следовательно, $\lambda=0$. Поэтому $\varphi_i=\bar\varphi_i$. Теорема доказана.

Литература

1. *Туаева Ж. Д.* Многомерная математическая модель сейсмики с памятью // Мат. форум. Т. 1, ч. 2. Исследования по диф. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 297–306.—(Итоги науки. ЮФО).
2. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем.—2013.—Т. 16, № 2.—С. 72–82.
3. *Овсянников Л. В.* Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств // Докл. АН СССР.—1965.—Т. 163, вып. 4.—С. 819–822.
4. *Овсянников Л. В.* Нелинейная задача Коши в шкалах банаховых пространств // Докл. АН СССР.—1971.—Т. 200, вып. 4.—С. 789–792.

5. *Nirenberg L.* Topics in Nonlinear Functional Analysis.—N. Y.: Courant Institute Math. Sci., New York Univ., 1974.—259 p.
6. *Романов В. Г.* О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа // Диф. уравнения.—1989.—Т. 25, № 2.—С. 275–284.
7. *Романов В. Г.* Вопросы корректности задачи определения скорости звука // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, вып. 4.—С. 125–134.
8. *Романов В. Г.* О разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в классе функций, аналитических по части переменных // Докл. АН СССР.—1989.—Т. 304, вып. 4.—С. 807–811.
9. *Дурдиев Д. К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, вып. 3.—С. 574–582.
10. *Durdiev D. K.* Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations // Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.—2007.—Vol. 3, № 4.—С. 411–423.
11. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш.* Локальная разрешимость задачи определения пространственной части многомерного ядра в интегродифференциальном уравнении гиперболического типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2012.—Т. 4, вып. 29.—С. 37–47.

Статья поступила 9 февраля 2015 г.

Дурдиев Дурдимурод Каландарович
Бухарский государственный университет,
проректор по учебной работе
УЗБЕКИСТАН, 200117, Бухара, ул. М. Икбол, 11
E-mail: `durdiev65@mail.ru`

Тотиева Жанна Дмитриевна
Центр геофизических исследований ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 362002, Владикавказ, ул. Маркова, 93 а;

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `jannatuaeva@inbox.ru`

THE PROBLEM OF DETERMINING THE MULTIDIMENSIONAL KERNEL OF VISCOELASTICITY EQUATION

Durdiev D. Q., Totieva Zh. D.

The integro-differential system of viscoelasticity equations is considered. The direct problem of determining of the displacements vector from the initial-boundary problem for this system is formulated. It is assumed that the kernel in the integral part depends on both the time and the space variable x_2. For its determination an additional condition relative to the first component of the displacements vector with $x_3 = 0$ is posed. The inverse problem is replaced by the equivalent system of integral equations. The study is based on the method of scales of Banach spaces of analytic functions. The theorem on local unique solvability of the inverse problem is proved in the class of functions analytic on the variable x_2 and continuous on t.

Key words: inverse problem, stability, delta function, Lame's coefficients, kernel.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 44–58

ON THE ABSENCE OF SOLUTIONS TO DAMPED SYSTEM OF NONLINEAR WAVE EQUATIONS OF KIRCHHOFF-TYPE

Kh. Zennir, S. Zitouni

In higher-order function spaces, some techniques are used to give the nonexistence result to system of wave equations in the Kirchhoff type, to generalize earlier results in the literature.

Mathematics Subject Classification (2000): 35L05, 58J45.

Key words: blow up, Kirchhoff-type, wave equations, degenerately damped system, strong nonlinear source, positive initial energy, higher-order.

1. Introduction and Previous Work

Let us consider the problem

$$\begin{cases} (|u_1'|^{m-2}u_1')' + \left(\int\limits_\Omega |D^\kappa u_1|^2 dx\right)^\gamma (-\Delta)^\kappa u_1 + \left(a|u_1|^k + b|u_2|^l\right) u_1' = f_1(u_1,u_2); \\ (|u_2'|^{m-2}u_2')' + \left(\int\limits_\Omega |D^\kappa u_2|^2 dx\right)^\gamma (-\Delta)^\kappa u_2 + \left(c|u_2|^\theta + d|u_1|^\varrho\right) u_2' = f_2(u_1,u_2), \end{cases} \tag{1.1}$$

where all terms must be alive, we will prove that the solutions of (1.1) cannot exist for $t > 0$ with positive initial energy, where

$$u_i(x,0) = u_{i0}(x) \in H_0^\kappa(\Omega), \quad i = 1,2, \tag{1.2}$$

$$u_i'(x,0)) = u_{i1}(x) \in L^m(\Omega), \quad i = 1,2, \tag{1.3}$$

and boundary conditions

$$\frac{\partial^j u_i}{\partial \nu^j} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ \ i = 1,2, \ \ j = 0,1,2,\ldots,\kappa-1, \tag{1.4}$$

where ν is the outward normal to the boundary.

In the present paper, we study the system (1.1), with

$$\begin{aligned} f_1(u_1,u_2) &= (p+1)\left[a_1|u_1+u_2|^{(p-1)}(u_1+u_2) + b_1|u_1|^{\frac{(p-3)}{2}}u_1|u_2|^{\frac{(p+1)}{2}}\right], \\ f_2(u_1,u_2) &= (p+1)\left[a_1|u_1+u_2|^{(p-1)}(u_1+u_2) + b_1|u_2|^{\frac{(p-3)}{2}}u_2|u_1|^{\frac{(p+1)}{2}}\right], \end{aligned} \tag{1.5}$$

and the parametres $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $p > 3$, $\gamma \geqslant 0$, $m \geqslant 2$, $k, l, \theta, \varrho, \kappa \geqslant 1$ satisfying

$$p > \max\left(m-1, k+1, l+1, \theta+1, \varrho+1, 2\gamma+1\right). \tag{1.6}$$

In (1.1), $u_i = u_i(t,x)$, $i = 1,2$, where $x \in \Omega$ is a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ with a smooth boundary $\partial\Omega$, $t > 0$ and a, b, c, d are nonnegative constants.

We mention here that

$$|D^\kappa u|^2 = (\Delta^{\kappa/2}u)^2 \text{ for par value of } \kappa$$

and

$$|D^\kappa u|^2 = |\nabla(\Delta^{(\kappa-1)/2}u)|^2 \text{ for odd } \kappa,$$

where

$$|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2, \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

This kind of systems appears in the models of nonlinear Kirchhoff-type. It is a generalization of a model introduced by Kirchhoff [11] in the case $n = 1$; this type of problem describes a small amplitude vibration of an elastic string. The original equation is:

$$\rho h u_{tt} + \tau u_t = \left(P_0 + \frac{Eh}{2L}\int_0^L |u_x(x,t)|^2 ds\right) u_{xx} + f, \tag{1.7}$$

where $0 \leqslant x \leqslant L$ and $t > 0$, $u(x,t)$ is the lateral displacement at the space coordinate x and the time t, ρ the mass density, h the cross-section area, L the length, P_0 the initial axial tension, τ the resistance modulus, E the Young modulus and f the external force (for example the action of gravity).

The blow up of the gender of our problems in the single equation has been considered in [18]; it was established a blow-up result for certain solutions with positive initial energy. In [14] local existence and blow up of the solutions, of the same equation have been studied.

A related problems with $\kappa = 1$ have attracted a great deal of attention in the last decades, and many results have been appeared on the existence and long time behavior of solutions. For the literature we quote essentially the results of [2–5], [7], [10–12], [15, 17, 19, 20, 22, 23, 30] and references therein.

The systems of nonlinear wave equations (1.1) go back to Reed [24] who proposed a similar system in three space dimensions but in the absence of the viscoelastic and damping terms. This type of system was completely analysed; for example, in [2], the authors studied the following system:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m-1}u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - \Delta v + |v_t|^{r-1}v_t = f_2(u,v), \end{cases} \tag{1.8}$$

in $\Omega \times (0,T)$ with initial and boundary conditions and the nonlinear functions f_1 and f_2 satisfying appropriate conditions and in the case where $a = b = c = d = \gamma = 0$, $m = 2$, $\kappa = 1$. They proved under some restrictions on the parameters and the initial data many results on the existence of a weak solution. They also showed that any weak solution with negative initial energy blows up in finite time using the same techniques as in [8].

In the work [19], the authors considered the nonlinear viscoelastic system:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)\,ds + |u_t|^{m-1}u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t h(t-s)\Delta v(x,s)\,ds + |v_t|^{r-1}v_t = f_2(u,v), \end{cases} \quad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1.9}$$

where

$$\begin{cases} f_1(u,v) = a|u+v|^{2(\rho+1)}(u+v) + b|u|^{\rho}u|v|^{(\rho+2)}, \\ f_2(u,v) = a|u+v|^{2(\rho+1)}(u+v) + b|u|^{(\rho+2)}|v|^{\rho}v, \end{cases} \tag{1.10}$$

and they prove a global nonexistence theorem for certain solutions with positive initial energy, the main tool of the proof is a method used in [25].

In the case of $\gamma = 0$, $\kappa = 1$, $m = 2$, problem (1.1) has been studied recently in [22] focusing on the global well-posedness of the system of nonlinear wave equations

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \left(d|u|^k + e|v|^l\right)|u_t|^{m-1}u_t &= f_1(u,v), \\ v_{tt} - \Delta v + \left(d'|v|^{\theta} + e'|u|^{\rho}\right)|v_t|^{r-1}v_t &= f_2(u,v), \end{cases} \tag{1.11}$$

in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, $0 < r, m < 1$, with Dirichlet boundary conditions. The nonlinearities $f_1(u,v)$ and $f_2(u,v)$ act as a strong source in the system. Under some restriction on the parameters in the system, they obtain several results on the existence and uniqueness of solutions. In addition, they prove that weak solutions blow up in finite time whenever the initial energy is negative and the exponent of the source term is more dominant than the exponents of both damping terms. This last result was extended by A. Benaissa, Ouchenane, and Zennir in [3] with positive initial energy, $r, m > 0$ and for $n > 0$.

Our main theorem addresses to generalize earlier results in the literature. We will improve the influence of a strong sources with positive initial energy, which lead to blow up of solutions for all $t > 0$ in Theorem 3.1.

2. Notations and Preliminaries

The constants c_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, used throughout this paper are positive generic constants, which may be different in various occurrences. We take $a = b = c = d = a_1 = b_1 = 1$ for convenience.

(**A1**) There exists a C^1-function $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ such that

$$(p+1)F(u_1,u_2) = [u_1 f_1(u_1,u_2) + u_2 f_2(u_1,u_2)] = \left[a_1|u_1+u_2|^{p+1} + 2b_1|u_1u_2|^{\frac{(p+1)}{2}}\right], \tag{1.12}$$

where

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = f_1(u_1,u_2), \quad \frac{\partial F}{\partial u_2} = f_2(u_1,u_2). \tag{1.13}$$

(**A2**) There exist a positive constant $c_1 = 2^p a + b$ such that

$$F(u_1,u_2) \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{2} |u_i|^{p+1}. \tag{1.14}$$

We introduce the following definition of weak solution to (1.1)–(1.4).

Definition 2.1. A pair of functions (u_1,u_2) is said to be a weak solution of (1.1)–(1.4) on $[0,T]$ if $u_1, u_2 \in C_w([0,T], H_0^{\kappa}(\Omega))$, $u_1', u_2' \in C_w([0,T], L^m(\Omega))$, $(u_{10},u_{20}) \in H_0^{\kappa}(\Omega) \times H_0^{\kappa}(\Omega)$,

$(u_{11}, u_{21}) \in L^m(\Omega) \times L^m(\Omega)$ and (u_1, u_2) satisfies,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega (|u_1'|^{m-2} u_1')' \phi \, dxds + \int_0^t \|D^\kappa u_1\|_2^{2\gamma} \int_\Omega D^\kappa u_1 D^\kappa \phi \, dxds \\
&+ \int_0^t \int_\Omega \left((a\,|u_1|^k + b\,|u_2|^l \right) u_1' \phi \, dxds = \int_0^t \int_\Omega f_1(u_1, u_2) \phi \, dxds; \\
&\int_0^t \int_\Omega (|u_2'|^{m-2} u_2')' \psi \, dxds + \int_0^t \|D^\kappa u_2\|^{2\gamma} \int_\Omega D^\kappa u_2 D^\kappa \psi \, dxds \\
&+ \int_0^t \int_\Omega \left(c\,|u_2|^\theta + d\,|u_1|^\varrho \right) u_2' \psi \, dxds = \int_0^t \int_\Omega f_2(u_1, u_2) \psi \, dxds
\end{aligned} \tag{1.15}$$

for all test functions $\phi, \psi \in H_0^\kappa(\Omega) \cap L^m(\Omega)$, for almost all $t \in [0, T]$. Where $C_w([0, T], X)$ denotes the space of weakly continuous functions from $[0, T]$ into Banach space X.

The energy functional $E(t)$ associated to our system is given by:

$$E(t) = \frac{m-1}{m} \sum_{i=1}^{2} \|u_i'\|_m^m + \frac{1}{2(\gamma+1)} \sum_{i=1}^{2} \|D^\kappa u_i\|_2^{2(\gamma+1)} - \int_\Omega F(u_1, u_2)\, dx. \tag{1.16}$$

The following Sobolev–Poincare inequality will be used frequently without mention $H_0^\kappa(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, for

$$\begin{cases} 1 < p, & \text{if} \quad n = \kappa, 2\kappa, \\ 1 < p \leqslant \frac{4\kappa - n}{n - 2\kappa}, & \text{if} \quad n \geqslant 3\kappa. \end{cases} \tag{1.17}$$

We first state (without proof, it is similar to that in [23]) a local existence theorem for $n = 1, 2, 3$. Unfortunately, due to the strong nonlinearities on f_1, f_2 the well known techniques of constructing approximations by the Faedo–Galerkin allowed us to prove the local existence result only for $n \leqslant 3$.

Theorem 2.2. *Let $n = 1, 2, 3$. Suppose that* (1.17) *holds. Then, there exists a local weak solution in the sense of Definition* 2.1 *of problem* (1.1)–(1.4) *defined on* $[0, T]$ *for some* $T > 0$, *and* (u_1, u_2) *satisfies the energy inequality*

$$\begin{aligned}
E(t) + \int_s^t \Bigg(&\int_\Omega \left(|u_1(\tau)|^k + |u_2(\tau)|^l \right) (u_1')^2 dx \\
+ &\int_\Omega \left(|u_2(\tau)|^\theta + |u_1(\tau)|^\varrho \right) (u_2')^2 \, dx \Bigg) d\tau \leqslant E(s)
\end{aligned} \tag{1.18}$$

for all $T \geqslant t \geqslant s \geqslant 0$, *where* $E(t)$ *is given in* (1.16).

3. Results

Our main results read as follows

Theorem 3.1. *Suppose that* (1.6), (1.17) *hold. Then any solution of the problem* (1.1)–(1.4), *with initial data satisfying*

$$\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_{i0}\|_2^2>\alpha_1^2, \tag{1.19}$$

and

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\|u_{i1}\|_m^m+\frac{1}{2(\gamma+1)}\|D^{\kappa}u_{i0}\|_2^{2(\gamma+1)}\right)-\int\limits_{\Omega}F(u_{10},v_{20})\,dx<d \tag{1.20}$$

blows up for all time, where the constants α_1 *and* d *are defined in* (1.21).

We introduce the following:

$$B=\eta^{\frac{1}{p+1}},\quad \alpha_1=B^{\frac{p+1}{1-p}},\quad d=\left(\frac{1}{2(\gamma+1)}-\frac{1}{p+1}\right)\alpha_1^2, \tag{1.21}$$

where η is the constant in (1.28).

Lemma 3.2. *Suppose that* (1.17) *holds. Let* (u_1,u_2) *be a solution of* (1.1)–(1.4). *Assume further that*

$$\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_{i0}\|_2^2>\alpha_1^2, \tag{1.22}$$

and

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{m-1}{m}\|u_{i1}\|_m^m+\frac{1}{2(\gamma+1)}\|D^{\kappa}u_{i0}\|_2^{2(\gamma+1)}\right)-\int\limits_{\Omega}F(u_{10},u_{20})\,dx<d. \tag{1.23}$$

Then there exists a constant $\alpha_2>\alpha_1$ *such that*

$$\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_i\|_2^2>\alpha_2^2, \tag{1.24}$$

and

$$\left((p+1)\int\limits_{\Omega}F(u_1,u_2)dx\right)^{1/(p+1)}\geqslant B\alpha_2\quad(\forall\, t\geqslant 0). \tag{1.25}$$

$\lhd$ By the definition of energy functional, we have

$$E(t)=\frac{m-1}{m}\sum_{i=1}^{2}\|u_i'\|_m^m+\frac{1}{2(\gamma+1)}\sum_{i=1}^{2}\big\|D^{\kappa}u_i\big\|_2^{2(\gamma+1)}-\int\limits_{\Omega}F(u_1,u_2)\,dx$$

$$=\frac{m-1}{m}\sum_{i=1}^{2}\|u_i'\|_m^m+\frac{1}{2(\gamma+1)}\sum_{i=1}^{2}\big\|D^{\kappa}u_i\big\|_2^{2(\gamma+1)}-\frac{1}{p+1}\left[\big\|u_1+u_2\big\|_{p+1}^{p+1}+2\big\|u_1u_2\big\|_{\frac{p+1}{2}}^{\frac{p+1}{2}}\right].$$

By using Minkowski's inequality and embedding $H_0^{\kappa}\Omega\hookrightarrow L^{(p+1)}(\Omega)$, we get

$$\big\|u_1+u_2\big\|_{p+1}^{p+1}\leqslant 2^{\frac{p+1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{p+1}^2\right)^{\frac{p+1}{2}}\leqslant c\left(\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_i\|_2^{2(\gamma+1)}\right)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{1.26}$$

Hölder's and Young's inequalities give us

$$\big\|u_1u_2\big\|_{\frac{p+1}{2}}^{\frac{p+1}{2}} \leqslant \Big(\|u_1\|_{p+1}\,\|u_2\|_{p+1}\Big)^{\frac{p+1}{2}} \leqslant c\left(\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_i\|_2^{2(\gamma+1)}\right)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{1.27}$$

Then there exist $\eta>0$ such that

$$\|u_1+u_2\|_{p+1}^{p+1}+2\|u_1u_2\|_{\frac{p+1}{2}}^{\frac{p+1}{2}} \leqslant \eta\left(\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_i\|_2^{2(\gamma+1)}\right)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{1.28}$$

By definition of B wo get

$$\begin{aligned}
E(t) &\geqslant \frac{1}{2(\gamma+1)}\sum_{i=1}^{2}\big\|D^{\kappa}u_i\big\|_2^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{p+1}\left[\big\|u_1+u_2\big\|_{p+1}^{p+1}+2\big\|u_1u_2\big\|_{\frac{p+1}{2}}^{\frac{p+1}{2}}\right]\\
&\geqslant \frac{1}{2(\gamma+1)}\sum_{i=1}^{2}\big\|D^{\kappa}u_i\big\|_2^{2(\gamma+1)} - \frac{\eta}{p+1}\left(\sum_{i=1}^{2}\big\|D^{2(\gamma+1)}u_i\big\|_2^{2}\right)^{\frac{p+1}{2}}\\
&\geqslant \frac{1}{2(\gamma+1)}\sum_{i=1}^{2}\big\|D^{\kappa}u_i\big\|_2^{2(\gamma+1)} - \frac{B^{(p+1)}}{p+1}\left(\sum_{i=1}^{2}\big\|D^{\kappa}u_i\big\|_2^{2(\gamma+1)}\right)^{\frac{p+1}{2}} = f(\alpha),
\end{aligned} \tag{1.29}$$

where $\alpha^2=\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_i\|_2^{2(\gamma+1)}$. We can verify that the function f is increasing for $0<\alpha<\alpha_1$, decreasing for $\alpha>\alpha_1$, $f(\alpha)\to-\infty$ as $\alpha\to+\infty$, and

$$f(\alpha_1)=\frac{1}{2(\gamma+1)}\,\alpha_1^2-\frac{B^{(p+1)}}{p+1}\,\alpha_1^{p+1}=d, \tag{1.30}$$

where α_1 given in (1.21). Therefore, since $E(0)<d'$, there exists $\alpha_2>\alpha_1$ such that $f(\alpha_2)=E(0)$.

Now we set $\alpha_0^2=\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_{i0}\|_2^{2(\gamma+1)}$, then by (1.29), we have $f(\alpha_0)\leqslant E(0)$, which implies that $\alpha_0\geqslant\alpha_2$. To establish (1.24), we suppose by contradiction that $\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_i(t_0)\|_2^{2(\gamma+1)}<\alpha_2^2$ for some $t_0>0$ to choose t_0 such that $\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_i(t_0)\|_2^{2(\gamma+1)}>\alpha_1^2$.

Again using of (1.29) leads to

$$E(t_0)\geqslant f\left(\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_i(t_0)\|_2^{2(\gamma+1)}\right)>f(\alpha_2)=E(0).$$

This is impossible since $E(t)\leqslant E(0)$ $(\forall\, t\in[0,T))$.

To prove (1.25), we exploit the definition of E, to get

$$\frac{1}{2(\gamma+1)}\sum_{i=1}^{2}\big\|D^{\kappa}u_i\big\|_2^{2(\gamma+1)}\leqslant E(0)+\frac{1}{p+1}\left[\big\|u_1+u_2\big\|_{p+1}^{p+1}+2\big\|u_1u_2\big\|_{\frac{p+1}{2}}^{\frac{p+1}{2}}\right].$$

Consequently, (1.24) gives

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p+1}\left[\big\|u_1+u_2\big\|_{p+1}^{p+1}+2\big\|u_1u_2\big\|_{\frac{p+1}{2}}^{\frac{p+1}{2}}\right]\\
&\geqslant \frac{1}{2(\gamma+1)}\sum_{i=1}^{2}\big\|D^{\kappa}u_i(t_0)\big\|_2^{2(\gamma+1)}-E(0)\geqslant\frac{\eta}{p+1}\alpha_2^{(p+1)}\quad(\forall\, t\geqslant 0).\ \triangleright
\end{aligned}$$

◁ Proof of Theorem 3.1. We set

$$H(t) = d - E(t). \tag{1.31}$$

By using (1.16), (1.31) we get

$$\begin{aligned} H'(t) = &\int\limits_{\Omega} \Big(|u_1(t)|^k + |u_2(t)|^l\Big)\, |u_1'(t)|^2\, dx \\ &+ \int\limits_{\Omega} \Big(|u_2(t)|^\theta + |u_1(t)|^\varrho\Big)\, |u_2'(t)|^2\, dx \geqslant 0 \quad (\forall\, t \geqslant 0). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Therefore,

$$0 < H(0) \leqslant H(t) = d - \frac{m-1}{m} \sum_{i=1}^{2} \|u_i'\|_m^m$$
$$- \frac{1}{2(\gamma+1)} \sum_{i=1}^{2} \big\|D^\kappa u_i\big\|_2^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{p+1}\left[\big\|u_1+u_2\big\|_{p+1}^{p+1} + 2\big\|u_1u_2\big\|_{\frac{(p+1)}{2}}^{\frac{(p+1)}{2}}\right].$$

From (1.24), we obtain that for all $t \geqslant 0$ the estimates hold

$$\begin{aligned} d - \frac{1}{2(\gamma+1)} \sum_{i=1}^{2} \big\|D^\kappa u_i(t_0)\big\|_2^{2(\gamma+1)} &+ \frac{1}{p+1}\left[\big\|u_1+u_2\big\|_{p+1}^{p+1} + 2\big\|u_1u_2\big\|_{\frac{(p+1)}{2}}^{\frac{(p+1)}{2}}\right] \\ &< d - \frac{1}{2(\gamma+1)}\, \alpha_1^2 + \frac{1}{p+1}\left[\big\|u_1+u_2\big\|_{p+1}^{p+1} + 2\big\|u_1u_2\big\|_{\frac{(p+1)}{2}}^{\frac{(p+1)}{2}}\right] \\ &< -\frac{1}{p+1}\, \alpha_1^2 + \frac{1}{p+1}\left[\big\|u_1+u_2\big\|_{p+1}^{p+1} + 2\big\|u_1u_2\big\|_{\frac{(p+1)}{2}}^{\frac{(p+1)}{2}}\right] \\ &< \frac{c_0}{p+1}\left[\big\|u_1+u_2\big\|_{p+1}^{p+1} + 2\big\|u_1u_2\big\|_{\frac{(p+1)}{2}}^{\frac{(p+1)}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Hence by (**A2**), we have

$$0 < H(0) \leqslant H(t) \leqslant \frac{c_1}{p+1} \sum_{i=1}^{2} \big\|u_i\big\|_{p+1}^{p+1}.$$

Then we introduce

$$L(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} u_i |u_i'|^{m-2} u_i' dx, \tag{1.33}$$

for ε small to be chosen later and

$$0 < \sigma \leqslant \min\left\{\frac{p-(k+1)}{p+1}, \frac{p-(l+1)}{p+1}, \frac{p-(\varrho+1)}{p+1}, \frac{p-(\theta+1)}{p+1}, \frac{(p-(m-1))}{m(p+1)}\right\}. \tag{1.34}$$

We will show that $L(t)$ satisfies

$$L'(t) \geqslant \xi L^{1+\nu}(t), \quad \text{for all} \;\; t \geqslant 0,\; \nu > 0,\; \xi > 0, \tag{1.35}$$

defined in $[0,\infty)$. By taking a derivative of (1.33) and using (1.1), we obtain

$$
\begin{aligned}
L'(t) = (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon\sum_{i=1}^{2}\|u_i'\|_m^m + \varepsilon\sum_{i=1}^{2}\left\|D^\kappa u_i\right\|_2^{2(\gamma+1)} \\
-\varepsilon\int\limits_\Omega u_1\left(|u_1(t)|^k+|u_2(t)|^l\right)u_1'\,dx - \varepsilon\int\limits_\Omega u_2\left(\left|u_2(t)\right|^\theta+\left|u_1(t)\right|^\varrho\right)u_2'dx \\
+\varepsilon\int\limits_\Omega\left(u_1f_1(u_1,u_2)+u_2f_2(u_1,u_2)\right)\,dx.
\end{aligned}
$$

Then

$$
\begin{aligned}
L'(t) = (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon\sum_{i=1}^{2}\|u_i'\|_m^m + \varepsilon\sum_{i=1}^{2}\left\|D^\kappa u_i\right\|_2^{2(\gamma+1)} \\
-\varepsilon\int\limits_\Omega u_1\left(|u_1(t)|^k+|u_2(t)|^l\right)u_1'dx - \varepsilon\int\limits_\Omega u_2\left(|u_2(t)|^\theta+|u_1(t)|^\varrho\right)u_2'dx \\
+\varepsilon\left(\left\|u_1+u_2\right\|_{p+1}^{p+1}+2\left\|u_1u_2\right\|_{\frac{(p+1)}{2}}^{\frac{(p+1)}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

By exploiting (1.16) and (1.21), equation (1.36) takes the form

$$
\begin{aligned}
L'(t) \geqslant (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon\frac{m+2(\gamma+1)(m-1)}{m}\sum_{i=1}^{2}\|u_i'\|_m^m \\
+\varepsilon 2(\gamma+1)H(t) - \varepsilon 2(\gamma+1)d + \varepsilon 2\sum_{i=1}^{2}\|D^\kappa u_i\|_2^{2(\gamma+1)} \\
-\varepsilon\int_\Omega u_1\left(|u_1(t)|^k+|u_2(t)|^l\right)u_1'dx - \varepsilon\int_\Omega u_2\left(|u_2(t)|^\theta+|u_1(t)|^\varrho\right)u_2'dx \\
+\varepsilon(1-\frac{2(\gamma+1)}{p+1})\left(\left\|u_1+u_2\right\|_{p+1}^{p+1}+2\left\|u_1u_2\right\|_{\frac{(p+1)}{2}}^{\frac{(p+1)}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

We will estimate, for some constance $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, two terms as

$$
\begin{aligned}
\int\limits_\Omega\left(|u_1(t)|^k+|u_2(t)|^l\right)|u_1u_1'|dx \\
\leqslant \lambda_1\int\limits_\Omega\left(|u_1(t)|^k+|u_2(t)|^l\right)|u_1|^2\,dx + \frac{1}{4\lambda_1}\int\limits_\Omega\left(|u_1(t)|^k+|u_2(t)|^l\right)|u_1'|^2dx,
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\int\limits_\Omega\left(|u_2(t)|^\theta+|u_1(t)|^\varrho\right)|u_2u_2'|dx \\
\leqslant \lambda_2\int\limits_\Omega\left(|u_2(t)|^\theta+|u_1(t)|^\varrho\right)|u_2|^2\,dx + \frac{1}{4\lambda_2}\int\limits_\Omega\left(|u_2(t)|^\theta+|u_1(t)|^\varrho\right)|u_2'|^2\,dx.
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

Then,

$$
\begin{aligned}
L'(t) \geqslant (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon\frac{m+2(\gamma+1)(m-1)}{m}\sum_{i=1}^{2}\|u_i'\|_m^m \\
+\varepsilon 2\sum_{i=1}^{2}\left\|D^\kappa u_i\right\|_2^{2(\gamma+1)} + 2(\gamma+1)\varepsilon H(t) \\
+\varepsilon\left(1-\frac{2(\gamma+1)}{p+1}\right)\left(\left\|u_1+u_2\right\|_{p+1}^{p+1} + 2\left\|u_1u_2\right\|_{\frac{p+1}{2}}^{\frac{p+1}{2}}\right) \\
-\varepsilon\lambda_1\int\limits_\Omega \left(|u_1(t)|^k + |u_2(t)|^l\right)|u_1|^2dx - \varepsilon\frac{1}{4\lambda_1}\int\limits_\Omega\left(|u_1(t)|^k + |u_2(t)|^l\right)|u_1'|^2\,dx \\
-\varepsilon\lambda_2\int\limits_\Omega \left(|u_2(t)|^\theta + |u_1(t)|^\varrho\right)|u_2|^2dx - \varepsilon\frac{1}{4\lambda_2}\int\limits_\Omega\left(|u_2(t)|^\theta + |u_1(t)|^\varrho\right)|u_2'|^2\,dx.
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

Consequently, by using Young's inequality for some $\delta, \delta_1 > 0$, we have

$$
\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \left(|u_1(t)|^k + |u_2(t)|^l\right)|u_1|^2dx = \left\|u_1\right\|_{k+2}^{k+2} + \int\limits_\Omega |u_2|^l|u_1|^2dx \\
\leqslant \left\|u_1\right\|_{k+2}^{k+2} + \frac{l}{l+2}\delta^{(l+2)/l}\left\|u_2\right\|_{l+2}^{l+2} + \frac{2}{l+2}\delta^{-(l+2)/(2)}\left\|u_1\right\|_{l+2}^{l+2},
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \left(|u_2(t)|^\theta + |u_1(t)|^\varrho\right)|u_2|^2dx = \left\|u_2\right\|_{\theta+2}^{\theta+2} + \int\limits_\Omega |u_1|^\varrho|u_2|^2dx \\
\leqslant \left\|u_2\right\|_{\theta+2}^{\theta+2} + \frac{\varrho}{\varrho+2}\delta_1^{(\varrho+2)/\varrho}\left\|u_1\right\|_{\varrho+2}^{\varrho+2} + \frac{2}{\varrho+2}\delta_1^{-(\varrho+2)/(2)}\left\|u_2\right\|_{\varrho+2}^{\varrho+2}.
\end{aligned}
$$

Then,

$$
\begin{aligned}
L'(t) \geqslant (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon\frac{m+2(\gamma+1)(m-1)}{m}\sum_{i=1}^{2}\|u_i'\|_m^m \\
+\varepsilon 2\sum_{i=1}^{2}\|D^\kappa u_i\|_2^{2(\gamma+1)} + 2(\gamma+1)\varepsilon H(t) \\
+\varepsilon\left(1-\frac{2(\gamma+1)}{p+1}\right)\left(\|u_1+u_2\|_{p+1}^{p+1} + 2\left\|u_1u_2\right\|_{\frac{p+1}{2}}^{\frac{p+1}{2}}\right) \\
-\varepsilon\frac{1}{4\lambda_1}\int\limits_\Omega\left(|u_2(t)|^\theta + |u_1(t)|^\varrho\right)|u_2'|^2dx - \varepsilon\frac{1}{4\lambda_2}\int\limits_\Omega\left(|u_1(t)|^k + |u_2(t)|^l\right)|u_1'|^2dx \\
-\varepsilon\lambda_1\left(\left\|u_2\right\|_{\theta+2}^{\theta+2} + \frac{\varrho}{\varrho+2}\delta_1^{(\varrho+2)/\varrho}\left\|u_1\right\|_{\varrho+2}^{\varrho+2} + \frac{2}{\varrho+2}\delta_1^{-(\varrho+2)/(2)}\left\|u_2\right\|_{\varrho+2}^{\varrho+2}\right) \\
-\varepsilon\lambda_2\left(\left\|u_1\right\|_{k+2}^{k+2} + \frac{l}{l+2}\delta^{(l+2)/l}\left\|u_2\right\|_{l+2}^{l+2} + \frac{2}{l+2}\delta^{-(l+2)/(2)}\left\|u_1\right\|_{l+2}^{l+2}\right).
\end{aligned}
$$

Choosing λ_1, λ_2 such that

$$
\frac{1}{4\lambda_1} = m_1H^{-\sigma}(t), \quad \frac{1}{4\lambda_2} = m_2H^{-\sigma}(t), \quad m_1, m_2 > 0. \tag{1.39}
$$

Using (1.39) and the fact that

$$H'(t) = \int\limits_{\Omega} \left(|u_1(t)|^k + |u_2(t)|^l\right) |u_1'(t)|^2 dx + \int\limits_{\Omega} \left(|u_2(t)|^\theta + |u_1(t)|^\varrho\right) |u_2'(t)|^2 dx \quad (\forall\, t \geqslant 0),$$

to obtain for $M = m_1 + m_2$ and assumption (**A2**),

$$\begin{aligned} L'(t) \geqslant{}& ((1-\sigma) - M\varepsilon) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \frac{m + 2(\gamma+1)(m-1)}{m} \sum_{i=1}^{2} \|u_i'\|_m^m \\ &+ \varepsilon 2 \sum_{i=1}^{2} \left\|D^\kappa u_i\right\|_2^{2(\gamma+1)} + 2(\gamma+1)\varepsilon H(t) + \varepsilon c_2 \sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{p+1}^{p+1} \\ &- \varepsilon \frac{1}{4m_1} H^\sigma(t) \left(\|u_2\|_{\theta+2}^{\theta+2} + \frac{\varrho}{\varrho+2} \delta_1^{(\varrho+2)/\varrho} \|u_1\|_{\varrho+2}^{\varrho+2} + \frac{2}{\varrho+2} \delta_1^{-(\varrho+2)/(2)} \|u_2\|_{\varrho+2}^{\varrho+2} \right) \\ &- \varepsilon \frac{1}{4m_2} H^\sigma(t) \left(\|u_1\|_{k+2}^{k+2} + \frac{l}{l+2} \delta^{(l+2)/l} \|u_2\|_{l+2}^{l+2} + \frac{2}{l+2} \delta^{-(l+2)/(2)} \|u_1\|_{l+2}^{l+2} \right). \end{aligned}$$

Since (1.6) holds, we obtain by using condition (1.34)

$$\begin{cases} H^\sigma(t) \|u_1\|_{i+2}^{i+2} \leqslant c_3 \left(\|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)+(i+2)} + \|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)} \|u_1\|_{i+2}^{i+2} \right); \\ H^\sigma(t) \|u_2\|_{j+2}^{j+2} \leqslant c_4 \left(\|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)+(j+2)} + \|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)} \|u_2\|_{j+2}^{j+2} \right), \end{cases} \tag{1.40}$$

where $i = k, l, \varrho$ and $j = \theta, \varrho, l$. Then

$$\begin{aligned} L'(t) \geqslant{}& ((1-\sigma) - M\varepsilon) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \frac{m + 2(\gamma+1)(m-1)}{m} \sum_{i=1}^{2} \|u_i'\|_m^m \\ &+ \varepsilon 2 \sum_{i=1}^{2} \|D^\kappa u_i\|_2^{2(\gamma+1)} + 2(\gamma+1)\varepsilon H(t) + \varepsilon c_2 \sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{p+1}^{p+1} \\ &- \varepsilon \frac{1}{4m_1} c_4 \left(\|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)+(\theta+2)} + \|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)} \|u_2\|_{\theta+2}^{\theta+2} \right) \\ &- \varepsilon \frac{1}{4m_1} \frac{\varrho}{\varrho+2} \delta_1^{(\varrho+2)/\varrho} c_3 \left(\|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)+(\varrho+2)} + \|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)} \|u_1\|_{\varrho+2}^{\varrho+2} \right) \\ &- \varepsilon \frac{1}{4m_1} \frac{2}{\varrho+2} \delta_1^{-(\varrho+2)/(2)} c_4 \left(\|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)+(\varrho+2)} + \|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)} \|u_2\|_{\varrho+2}^{\varrho+2} \right) \\ &- \varepsilon \frac{1}{4m_2} c_3 \left(\|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)+(k+2)} + \|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)} \|u_1\|_{k+2}^{k+2} \right) \\ &- \varepsilon \frac{1}{4m_2} \frac{l}{l+2} \delta^{(l+2)/l} c_4 \left(\|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)+(l+2)} + \|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)} \|u_2\|_{l+2}^{l+2} \right) \\ &- \varepsilon \frac{1}{4m_2} \frac{2}{l+2} \delta^{-(l+2)/(2)} c_3 \left(\|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)+(l+2)} + \|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)} \|u_1\|_{l+2}^{l+2} \right). \end{aligned}$$

By using (1.34) and the algebraic inequality

$$z^\nu \leqslant (z+1) \leqslant \left(1 + \frac{1}{a}\right)(z+a) \quad (\forall\, z \geqslant 0,\ 0 < \nu \leqslant 1,\ a \geqslant 0), \tag{1.41}$$

we have, for all $t \geqslant 0$,

$$\|u_i\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)+j+2} \leqslant b\left(\|u_i\|_{(p+1)}^{(p+1)} + H(0)\right) \leqslant b\left(\|u_i\|_{(p+1)}^{(p+1)} + H(t)\right), \tag{1.42}$$

where $b = 1 + 1/H(0)$, $j = k, \theta, l, \varrho$ and $i = 1, 2$, so that we obtain

$$\begin{aligned}
L'(t) \geqslant ((1-\sigma) - M\varepsilon)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon\frac{m + 2(\gamma+1)(m-1)}{m}\sum_{i=1}^{2}\|u_i'\|_m^m \\
+\varepsilon 2\sum_{i=1}^{2}\|D^\kappa u_i\|_2^{2(\gamma+1)} + 2(\gamma+1)\varepsilon H(t) + \varepsilon c_2\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{p+1}^{p+1} \\
-\varepsilon\frac{1}{4m_1}c_4\left(b\left(\|u_2\|_{(p+1)}^{(p+1)} + H(t)\right) + \|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)}\|u_2\|_{\theta+2}^{\theta+2}\right) \\
-\varepsilon\frac{1}{4m_1}\frac{\varrho}{\varrho+2}\delta_1^{(\varrho+2)/\varrho}c_3\left(b\left(\|u_1\|_{(p+1)}^{(p+1)} + H(t)\right) + \|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)}\|u_1\|_{\varrho+2}^{\varrho+2}\right) \\
-\varepsilon\frac{1}{4m_1}\frac{2}{\varrho+2}\delta_1^{-(\varrho+2)/(2)}c_4\left(b\left(\|u_2\|_{(p+1)}^{(p+1)} + H(t)\right) + \|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)}\|u_2\|_{\varrho+2}^{\varrho+2}\right) \\
-\varepsilon\frac{1}{4m_2}c_3\left(b\left(\|u_1\|_{(p+1)}^{(p+1)} + H(t)\right) + \|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)}\|u_1\|_{k+2}^{k+2}\right) \\
-\varepsilon\frac{1}{4m_2}\frac{l}{l+2}\delta^{(l+2)/l}c_4\left(b\left(\|u_2\|_{(p+1)}^{(p+1)} + H(t)\right) + \|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)}\|u_2\|_{l+2}^{l+2}\right) \\
-\varepsilon\frac{1}{4m_2}\frac{2}{l+2}\delta^{-(l+2)/(2)}c_3\left(b\left(\|u_1\|_{(p+1)}^{(p+1)} + H(t)\right) + \|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)}\|u_1\|_{l+2}^{l+2}\right).
\end{aligned}$$

Also, since $(X+Y)^s \leqslant C(X^s + Y^s)$, $X, Y \geqslant 0$, making use of (1.34) we conclude

$$\begin{aligned}
\|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)}\|u_1\|_{j+2}^{j+2} &\leqslant |\Omega|^{\frac{(p+1)-(j+2)}{(p+1)}}\left(\|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)}\|u_1\|_{p+1}^{j+2}\right) \\
&\leqslant |\Omega|^{\frac{(p+1)-(j+2)}{(p+1)}}\left(\|u_2\|_{(p+1)}^{\sigma}\|u_1\|_{p+1}^{\frac{j+2}{p+1}}\right)^{p+1} \\
\leqslant |\Omega|^{\frac{(p+1)-(j+2)}{(p+1)}}&\left(c'\|u_2\|_{(p+1)}^{\frac{\sigma(p+1)+(j+2)}{(p+1)}} + c''\|u_1\|_{p+1}^{\frac{\sigma(p+1)+(j+2)}{p+1}}\right)^{p+1} \leqslant c_5\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{(p+1)}^{(p+1)},
\end{aligned} \tag{1.43}$$

where $c' = \frac{\sigma(p+1)}{\sigma(p+1)+(i+2)}$, $c'' = \frac{i+2}{\sigma(p+1)+(i+2)}$, for $j = k, l, \varrho$.

Similarly,

$$\|u_1\|_{(p+1)}^{\sigma(p+1)}\|u_2\|_{j+2}^{j+2} \leqslant c_6\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{(p+1)}^{(p+1)}, \tag{1.44}$$

for $j = \theta$, ϱ, l.

Taking into account (1.43), (1.44), we deduce

$$
\begin{aligned}
L'(t) \geqslant\ & ((1-\sigma)-M\varepsilon)H^{-\sigma}(t)H'(t)+\varepsilon\frac{m+2(\gamma+1)(m-1)}{m}\sum_{i=1}^{2}\left\|u_i'\right\|_m^m \\
&+\varepsilon 2\sum_{i=1}^{2}\left\|D^{\kappa}u_i\right\|_2^{2(\gamma+1)}+2(\gamma+1)\varepsilon H(t)+\varepsilon c_2\sum_{i=1}^{2}\left\|u_i\right\|_{p+1}^{p+1} \\
&-\varepsilon\frac{1}{4m_1}c_4\left(b\left(\left\|u_2\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}+H(t)\right)+c_6\sum_{i=1}^{2}\left\|u_i\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}\right) \\
&-\varepsilon\frac{1}{4m_1}\frac{\varrho}{\varrho+2}\delta_1^{(\varrho+2)/\varrho}c_3\left(b\left(\left\|u_1\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}+H(t)\right)+c_5\sum_{i=1}^{2}\left\|u_i\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}\right) \\
&-\varepsilon\frac{1}{4m_1}\frac{2}{\varrho+2}\delta_1^{-(\varrho+2)/(2)}c_4\left(b\left(\left\|u_2\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}+H(t)\right)+c_6\sum_{i=1}^{2}\left\|u_i\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}\right) \\
&-\varepsilon\frac{1}{4m_2}c_3\left(b\left(\left\|u_1\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}+H(t)\right)+c_5\sum_{i=1}^{2}\left\|u_i\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}\right) \\
&-\varepsilon\frac{1}{4m_2}\frac{l}{l+2}\delta^{(l+2)/l}c_4\left(b\left(\left\|u_2\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}+H(t)\right)+c_6\sum_{i=1}^{2}\left\|u_i\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}\right) \\
&-\varepsilon\frac{1}{4m_2}\frac{2}{l+2}\delta^{-(l+2)/(2)}c_3\left(b\left(\left\|u_1\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}+H(t)\right)+c_5\sum_{i=1}^{2}\left\|u_i\right\|_{(p+1)}^{(p+1)}\right).
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

Then

$$
\begin{aligned}
L'(t) \geqslant\ & ((1-\sigma)-M\varepsilon)H^{-\sigma}(t)H'(t)+\varepsilon\frac{m+2(\gamma+1)(m-1)}{m}\sum_{i=1}^{2}\|u_i'\|_m^m \\
&+\varepsilon 2\sum_{i=1}^{2}\|D^{\kappa}u_i\|_2^{2(\gamma+1)}+\varepsilon\left(2(\gamma+1)+\frac{1}{4m_1}c_7+\frac{1}{4m_2}c_8\right)H(t) \\
&+\varepsilon\left(c_2+\frac{1}{4m_1}c_7+\frac{1}{4m_2}c_9\right)\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{p+1}^{p+1}.
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

For large values of m_1 and m_2 we can find positive constants A and B such that

$$
\begin{aligned}
& L'(t) \geqslant ((1-\sigma)-M\varepsilon)H^{-\sigma}(t)H'(t) \\
&+\varepsilon\frac{m+2(\gamma+1)(m-1)}{m}\sum_{i=1}^{2}\left\|u_i'\right\|_m^m+\varepsilon AH(t)+\varepsilon B\sum_{i=1}^{2}\left\|u_i\right\|_{p+1}^{p+1}.
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

We pick ε small enough so that $((1-\sigma)-M\varepsilon)\geqslant 0$ and $L(0)>0$.
Consequently, there exists $\Gamma>0$ such that

$$
L'(t)\geqslant\varepsilon\Gamma\left(H(t)+\sum_{i=1}^{2}\|u_i'\|_m^m+\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{(p+1)}^{(p+1)}\right). \tag{1.48}
$$

Thus, we have $L(t) \geqslant L(0) > 0$, for all $t \geqslant 0$.

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &= \Big(H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} u_i |u_i'|^{m-2} u_i'(x,t)\,dx\Big)^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leqslant c_{10}\Big(H(t) + \Big|\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} u_i |u_i'|^{m-1} dx\Big|^{\frac{1}{1-\sigma}}\Big). \end{aligned} \tag{1.49}$$

By Hölder's and Young's inegualities, taking (1.6) into accaunt, we estimate

$$\Big|\int\limits_{\Omega} u_i |u_i'|^{m-1} dx\Big|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leqslant \|u_i\|_m^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_i'\|_m^{\frac{m-1}{1-\sigma}} \leqslant C|\Omega|^{\frac{1}{m}-\frac{1}{p+1}} \Big(\|u_i\|_{p+1}^{\frac{m-m\sigma}{(1-\sigma)(1-m\sigma)}} + \|u_i'\|_m^m\Big), \quad i=1,2,$$

and also using (1.34), we have

$$\begin{aligned} \Big|\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} u_i |u_i'|^{m-1}\Big|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leqslant \Big|\int\limits_{\Omega} u_1 |u_1'|^{m-1}\Big|^{\frac{1}{1-\sigma}} + \Big|\int\limits_{\Omega} u_2 |u_2'|^{m-1}\Big|^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{p+1}^{\frac{m}{(1-m\sigma)}} + \sum_{i=1}^{2} \|u_i'\|_m^m\Big). \end{aligned} \tag{1.50}$$

By using again (1.34) and (1.41) we get

$$\|u_i\|_{(p+1)}^{\frac{m}{(1-m\sigma)}} \leqslant b\Big(\|u_i\|_{(p+1)}^{(p+1)} + H(t)\Big) \quad (i=1,2,\ \forall\, t \geqslant 0). \tag{1.51}$$

Therefore,

$$L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leqslant c_{11}\Big[H(t) + \sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{(p+1)}^{(p+1)} + \sum_{i=1}^{2} \|u_i'\|_m^m\Big] \quad (\forall\, t \geqslant 0). \tag{1.52}$$

With (1.52) and (1.48), we arrive at

$$L'(t) \geqslant a_0 L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \quad (\forall\, t \geqslant 0). \tag{1.53}$$

Finally, a simple integration of (1.53) gives the desired result. $\rhd$

5. Comments and Question

Remark. Let us mention that our main contributions in this article is the study of the influence of strong source terms on the existence of solutions with positive initial energy and in the higher-order function spaces, where f_1, f_2 drive the solution of our system to blow up for all t if they dominate the damping terms, for large values of p.

Noting that one need carefully following the proofs of results in this paper to prove the nonexistence of solutions of the viscoelactic cases, using some well known assumptions on the memory terms, but it will be interresting to see the energy decay rate which will be according with that of the relaxation functions.

Question: One can consider the problem

$$\begin{cases} u_1'' - \phi\left(\|\nabla u_1\|_2\right)\Delta u_1 + \psi\left(\|\nabla u_1\|_2\right)\int\limits_0^t g_1(t-s)\Delta u_1(s)\,ds = 0, \\ u_2'' - \phi\left(\|\nabla u_2\|_2\right)\Delta u_2 + \psi\left(\|\nabla u_2\|_2\right)\int\limits_0^t g_2(t-s)\Delta u_2(s)\,ds = 0, \end{cases} \tag{1.54}$$

and may ask questions on asymptotic behavior of the solutions (If it existes): as time goes to infinity, what is the asymptotic behavior of solutions? More generally, what is the long time behavior of solutions when initial data vary in any bounded set in a Sobolev space associated with the problem (1.54).

Acknowledgments. The author want to thank the referee for his/her careful reading of the proofs.

References

1. *Abdelli M. and Benaissa A.* Energy decay of solutions of degenerate Kirchhoff equation with a weak nonlinear dissipation // Nonlinear Analysis.—2008.—Vol. 69.—P. 1999–2008.
2. *Agre K. and Rammaha M. A.* Systems of nonlinear wave equations with damping and source terms // Diff .Inte. Equ.—2007.—Vol. 19.—P. 1235–1270.
3. *Benaissa A., Ouchenane D. and Zennir Kh.* Blow up of positive initial-energy solutions to systems of nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms // Nonlinear Studies.—2012.—Vol. 19, № 4.—P. 523–535.
4. *Benaissa A. and Messaoudi S. A.* Blow up of solutions of a nonlinear wave equation // J. Appl. Math.—2002.—Vol. 2 (2).—P. 105–108.
5. *Benaissa A., Messaoudi S. A.* Blow up of solutions for Kirchhoff equation of q-Laplacien type with nonlinear dissipation // Colloq. Math.—2002.—94 (1).—P. 103–109.
6. *Benaissa A., Messaoudi S. A.* Blow up of solutions of a quasilinear wave equation with nonlinear dissipation // J. Part. Diff. Eq.—2002.—Vol. 15 (3).—P. 61–67.
7. *Erhan Piskin and Necat Polat* Uniform decay and blow up of solutions for a system of nonlinear higher-order Kirchhoff-type equations with damping and source // Cont. Anal. Appl. Math.—2013.—Vol. 1, № 2.—P. 181–199.
8. *Georgiev V. and Todorova G.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source term // J. Diff. Eq.—1994.—Vol. 109.—P. 295–308.
9. *Hrusa W. J. and Renardy M.* A model equation for viscoelasticity with a strongly singular kernel // SIAM. J. Math. Anal.—1988.—Vol. 19, № 2.
10. *Kafini M., Messaoudi S.* A blow-up result in a Cauchy viscoelastic problem // Appl. Math. Letters.—2008.—Vol. 21.—P. 549–553.
11. *Kirchhoff G.* Vorlesungen uber Mechanik. 3rd ed.—Leipzig: Teubner, 1983.
12. *Levine H. A. and Serrin J.* Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equations with dissipation // Archive for Rational Mechanics and Analysis.—1997.—Vol. 37, № 4.—P. 341–361.
13. *Levine H. A., Park S. R., and Serrin J.* Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equation // JMAA.—1998.—Vol. 228, № 1.—P. 181–205.
14. *Gao Q., Li F., and Wang Y.* Blow up of the solution for higher order Kirchhoff type equations with nonlinear dissipation // Cent. Eur. J. Math.—2011.—Vol. 9(3).—P. 686–698.
15. *Messaoudi S.* Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation // Maths Nachr.—2003.—Vol. 260.—P. 58–66.
16. *Messaoudi S. A.* On the control of solutions of a viscoelastic equation // Journal of the Franklin Institute.—2007.—Vol. 344.—P. 765–776.
17. *Messaoudi S. A. and Said-Houari B.* Global non-existence of solutions of a class of wave equations with non-linear damping and source terms // Math. Meth. Appl. Sci.—2004.—Vol. 27.—P. 1687–1696.
18. *Messaoudi S. A. and Said-Houari B.* A blow-up result for a higher-order non-linear Kirchhoff -type hyperbolic equation // Appl. Math. Letters.—2007.—Vol. 20.—P. 866–871.
19. *Messaoudi S. A. and Said-Houari B.* Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms // J. Math. Anal. Appl.—2010.—Vol. 365.—P. 277–287.

20. *Ouchenane D., Zennir Kh., and Bayoud M.* Global nonexistence of solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with degenerate damping and source terms // Ukrainian Math. J.—2013.—Vol. 65, № 7.
21. *Pohozaev S. I.* On a class of quasiunear hyperbolic equations // Mat. Sbornik.—1975.—Vol. 96 (138), № 1.
22. *Rammaha M. A. and Sawanya Sakuntasathien.* Global existence and blow up of solutions to systems of nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms // Nonlinear Analysis.—2010.—Vol. 72.—P. 2658–2683.
23. *Rammaha M. A. and Sawanya Sakuntasathien.* Critically and degenerately damped systems of nonlinear wave equations with source terms // Appl. Anal.—2010.—Vol. 72.—P. 1201–1227.
24. *Reed M.* Abstract Non Linear Wave Equations // Lect. Notes in Math.—Berlin: Springer-Verlag, 1976.
25. *Said-Houari B.* Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear wave equations with damping and source terms // Dif. Int. Equ.—2010.—Vol. 23, № 1–2.—P. 79–92.
26. *Todorova G.* Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms // Comptes Rendus de l'académie des Sciences.—1998.—Sér. 1, Vol. 326, № 2.—P. 191–196.
27. *Todorova G.* Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms // JMAA.—1999.—Vol. 239, № 2.—P. 213–226.
28. *Vitillaro E.* Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipative // Archive for Rational Mechanics and Analysis.—1999.—Vol. 149, № 2.—P. 155–182.
29. *Yang Z.* Blow up of solutions for a class of nonlinear evolution equations with nonlinear damping and source term // Math. Meth. Ap. Sc.—2002.—Vol. 25, № 10.—P. 825–833.
30. *Zennir Kh.* Growth of solutions with positive initial energy to system of degeneratly damped wave equations with memory // Lobachevskii J. of Math.—2014.—Vol. 35, № 2.—P. 147–156.

Received March 19, 2014.

Khaled Zennir
Department of Mathematics,
College of Sciences and Arts, Al-Ras,
Al-Qassim University, Kingdom of Saudi Arabia;

Laboratory of Lamahis,
Department of Mathematics University
20 Août 1955, Skikda 21000, Algeria
Email:khaledzennir2@yahoo.com

Salah Zitouni
Department of Mathematics,
University Badji Mokhtar
Annaba 23000, Algeria
Email:zitsal@yahoo.fr

НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАТУХАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КИРХГОФА

Зеннир К., Зитуни С.

Изучается влияние сильного источника на существование решений в пространстве с высоким порядком суммируемости в затухающей системе нелинейных волновых уравнений типа Кирхгофа.

Ключевые слова: взрыв, уравнение типа Кирхгофа, вырождающиеся затухающие системы, сильно нелинейный источник, положительная начальная энергия.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 59–66

УДК **517.956**

О НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТРАКТОВКЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И. Г. Мамедов

В данной статье выявлен гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств при исследовании четырехмерной задачи Гурса для одного дифференциального уравнения со старшей частной производной шестого порядка $D_1D_2D_3^2D_4^2u(x)$ с разрывными коэффициентами (L_p-коэффициентами) путем сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, четырехмерная задача Гурса, уравнения с разрывными коэффициентами.

К настоящему времени усилиями многих математиков исследовались разнообразные классы трехмерных, четырехмерных, а также многомерных локальных и нелокальных начально-краевых задач для уравнений со старшей частной производной, см., например, [1–9]. Это связано с их появлением в различных задачах прикладного характера [10].

1. Постановка задачи

В работе обосновывается корректность четырехмерной задачи Гурса с неклассическими условиями для одного гиперболического уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}(V_{1,1,2,2}u)(x) \equiv D_1D_2D_3^2D_4^2u(x)\\ +a_{1,0,2,2}(x)D_1D_3^2D_4^2u(x)+a_{0,1,2,2}(x)D_2D_3^2D_4^2u(x)\\ +a_{1,1,1,2}(x)D_1D_2D_3D_4^2u(x)+a_{1,1,2,1}(x)D_1D_2D_3^2D_4u(x)\\ +\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3+i_4<5,\\ i_\xi=0,1,\,\xi=1,2;\\ i_\eta=0,2,\,\eta=3,4}} a_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x)D_1^{i_1}D_2^{i_2}D_3^{i_3}D_4^{i_4}u(x)=\varphi_{1,1,2,2}(x)\in L_p(G),\end{gathered} \tag{1}$$

здесь $u(x) = u(x_1,x_2,x_3,x_4)$ — искомая функция, определенная на G; $a_{i_1,i_2,i_3,i_4} = a_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x)$ — заданные измеримые функции на $G = G_1\times G_2\times G_3\times G_4$, где $G_\xi = (0,h_\xi)$, $\xi = 1,2,3,4$; $\varphi_{1,1,2,2}(x)$ — заданная измеримая функция на G; $D_\xi = \frac{\partial}{\partial x_\xi}$ — оператор обобщенного дифференцирования в смысле С. Л. Соболева.

Уравнение (1) является гиперболическим уравнением, которое обладает четырьмя действительными характеристиками $x_1 = \mathrm{const}$, $x_2 = \mathrm{const}$, $x_3 = \mathrm{const}$, $x_4 = \mathrm{const}$, первая и вторая, из которых простая, а третая и четвертая — двухкратные. Поэтому уравнение (1) в некотором смысле можно рассматривать также как псевдопараболическое уравнение [11, 12]. Уравнения подобного вида возникают при описании многих процессов, происходящих в природе и технике. Подобные ситуации имеют место при изучении процессов распространения тепла [13], влагопереноса в почвогрунтах [14], фильтрации жидкости в пористых средах [15], в задачах математической биологии [16], а также в теории оптимальных процессов [17].

В этой работе уравнение (1) исследовано в общем случае, когда коэффициенты $a_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x)$ являются негладкими функциями, удовлетворяющими лишь следующим условиям:

$$\begin{array}{lll}
a_{0,0,i_3,i_4}(x) \in L_p(G), & a_{1,0,i_3,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,p,p,p}(G), & a_{0,1,i_3,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,\infty,p,p}(G), \\
a_{0,0,2,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,p,\infty,p}(G), & a_{0,0,i_3,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,p,p,\infty}(G), & a_{1,1,i_3,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,\infty,p,p}(G), \\
a_{1,0,2,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,p,\infty,p}(G), & a_{1,0,i_3,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,p,p,\infty}(G), & a_{0,1,2,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,\infty,\infty,p}(G), \\
a_{0,1,i_3,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,\infty,p,\infty}(G), & a_{0,0,2,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,p,\infty,\infty}(G), & a_{1,1,2,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,\infty,\infty,p}(G), \\
a_{1,1,i_3,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,\infty,p,\infty}(G), & a_{0,1,2,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,\infty,\infty,\infty}(G), & a_{1,0,2,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,p,\infty,\infty}(G),
\end{array}$$

где $i_3 = 0, 1,\ i_4 = 0, 1$.

При этом важным принципиальным моментом является то, что рассматриваемое уравнение обладает разрывными коэффициентами, которые удовлетворяют только некоторым условиям типа p-интегрируемости и ограниченности, т. е. рассмотренный псевдопараболический дифференциальный оператор не имеет традиционного сопряженного оператора.

При этих условиях решение $u(x)$ уравнения (1) будем искать в пространстве С. Л. Соболева

$$W_p^{(1,1,2,2)}(G) \equiv \Big\{u(x):\ D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(x) \in L_p(G),\ i_\xi = 0,1,\ \xi = 1,2;\ i_\eta = 0,1,2,\ \eta = 3,4\Big\},$$

где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Норму в анизотропном пространстве $W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ будем определять равенством

$$\|u(x)\|_{W_p^{(1,1,2,2)}(G)} = \sum_{\substack{i_\xi=0,\\ \xi=1,2}} \sum_{\substack{i_\eta=0,\\ \eta=3,4}} \left\|D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(x)\right\|_{L_p(G)}.$$

Для уравнения (1) условия Гурса классического вида можно задать в виде

$$\begin{cases}
u(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|_{x_1=0} = F^1(x_2,x_3,x_4);\ u(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|_{x_2=0} = F^2(x_1,x_3,x_4); \\
u(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|_{x_3=0} = F^3(x_1,x_2,x_4);\ \frac{\partial u(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = F^4(x_1,x_2,x_4); \\
u(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|_{x_4=0} = F^5(x_1,x_2,x_3);\ \frac{\partial u(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_4}\Big|_{x_4=0} = F^6(x_1,x_2,x_3),
\end{cases} \tag{2}$$

$F^1(x_2,x_3,x_4),\ F^2(x_1,x_3,x_4),\ F^3(x_1,x_2,x_4),\ F^4(x_1,x_2,x_4),\ F^5(x_1,x_2,x_3),\ F^6(x_1,x_2,x_3)$ — заданные измеримые функции на G. Очевидно, что в случае условий (2) функции F^i, $i = 1,2,3,4,5,6$, кроме условий

$$F^1(x_2,x_3,x_4) \in W_p^{(1,2,2)}(G_2 \times G_3 \times G_4), \quad F^2(x_1,x_3,x_4) \in W_p^{(1,2,2)}(G_1 \times G_3 \times G_4),$$

$$F^3(x_1,x_2,x_4) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_4), \quad F^4(x_1,x_2,x_4) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_4),$$

$$F^5(x_1,x_2,x_3) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_3), \quad F^6(x_1,x_2,x_3) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_3),$$

должны удовлетворять также следующим условиям:

$$\begin{cases} F^1(0,x_3,x_4)=F^2(0,x_3,x_4); & F^1(x_2,0,x_4)=F^3(0,x_2,x_4); \\ & F^2_{x_4}(x_1,x_3,0)=F^6(x_1,0,x_3); \\ F^1(x_2,x_3,0)=F^5(0,x_2,x_3); & F^1_{x_3}(x_2,0,x_4)=F^4(0,x_2,x_4); \\ & F^1_{x_4}(x_2,x_3,0)=F^6(0,x_2,x_3); \\ F^2(x_1,x_3,0)=F^5(x_1,0,x_3); & F^2(x_1,0,x_4)=F^3(x_1,0,x_4); \\ & F^2_{x_3}(x_1,0,x_4)=F^4(x_1,0,x_4); \\ F^3(x_1,x_2,0)=F^5(x_1,x_2,0); & F^3_{x_4}(x_1,x_2,0)=F^6(x_1,x_2,0); \\ & F^4_{x_4}(x_1,x_2,0)=F^6_{x_3}(x_1,x_2,0), \end{cases} \tag{3}$$

которые являются условиями согласования.

2. Четырехмерная задача Гурса в неклассической трактовке и ее обоснование

Наличие условий согласования (3) в постановке задачи (1), (2) означает, что условиями (2) задана также некоторая излишняя информация о решении этой задачи. Поэтому возникает вопрос о нахождении краевых условий, которые не содержат излишней информации о решении и не требуют выполнения некоторых дополнительных условий типа согласования. В связи с этим рассмотрим следующие неклассические граничные условия:

$$V_{0,0,i_3,i_4}u \equiv D_3^{i_3}D_4^{i_4}u(0,0,0,0)=\varphi_{0,0,i_3,i_4}\in\mathbb{R}, \quad i_\nu=0,1, \quad \nu=3,4;$$

$$(V_{1,0,i_3,i_4}u)(x_1)\equiv D_1D_3^{i_3}D_4^{i_4}u(x_1,0,0,0)=\varphi_{1,0,i_3,i_4}(x_1)\in L_p(G_1), \quad i_\nu=0,1, \quad \nu=3,4;$$

$$(V_{0,1,i_3,i_4}u)(x_2)\equiv D_2D_3^{i_3}D_4^{i_4}u(0,x_2,0,0)=\varphi_{0,1,i_3,i_4}(x_2)\in L_p(G_2), \quad i_\nu=0,1, \quad \nu=3,4;$$

$$(V_{0,0,2,i_4}u)(x_3)\equiv D_3^2D_4^{i_4}u(0,0,x_3,0)=\varphi_{0,0,2,i_4}(x_3)\in L_p(G_3), \quad i_4=0,1;$$

$$(V_{0,0,i_3,2}u)(x_4)\equiv D_3^{i_3}D_4^2u(0,0,0,x_4)=\varphi_{0,0,i_3,2}(x_4)\in L_p(G_4), \quad i_3=0,1;$$

$$\begin{aligned}(V_{1,1,i_3,i_4}u)(x_1,x_2)&\equiv D_1D_2D_3^{i_3}D_4^{i_4}u(x_1,x_2,0,0)\\ &=\varphi_{1,1,i_3,i_4}(x_1,x_2)\in L_p(G_1\times G_2), \quad i_\nu=0,1, \quad \nu=3,4;\end{aligned}$$

$$(V_{1,0,2,i_4}u)(x_1,x_3)\equiv D_1D_3^2D_4^{i_4}u(x_1,0,x_3,0)=\varphi_{1,0,2,i_4}(x_1,x_3)\in L_p(G_1\times G_3), \quad i_4=0,1;$$

$$(V_{1,0,i_3,2}u)(x_1,x_4)\equiv D_1D_3^{i_3}D_4^2u(x_1,0,0,x_4)=\varphi_{1,0,i_3,2}(x_1,x_4)\in L_p(G_1\times G_4), \quad i_3=0,1;$$

$$(V_{0,1,2,i_4}u)(x_2,x_3)\equiv D_2D_3^2D_4^{i_4}u(0,x_2,x_3,0)=\varphi_{0,1,2,i_4}(x_2,x_3)\in L_p(G_2\times G_3), \quad i_4=0,1;$$

$$(V_{0,1,i_3,2}u)(x_2,x_4)\equiv D_2D_3^{i_3}D_4^2u(0,x_2,0,x_4)=\varphi_{0,1,i_3,2}(x_2,x_4)\in L_p(G_2\times G_4), \quad i_3=0,1;$$

$$(V_{0,0,2,2}u)(x_3,x_4)\equiv D_3^2D_4^2u(0,0,x_3,x_4)=\varphi_{0,0,2,2}(x_3,x_4)\in L_p(G_3\times G_4);$$

$$\begin{aligned}(V_{1,1,2,i_4}u)(x_1,x_2,x_3)&\equiv D_1D_2D_3^2D_4^{i_4}u(x_1,x_2,x_3,0)\\ &=\varphi_{1,1,2,i_4}(x_1,x_2,x_3)\in L_p(G_1\times G_2\times G_3), \quad i_4=0,1;\end{aligned}$$

$$(V_{1,1,i_3,2}u)(x_1,x_2,x_4)\equiv D_1D_2D_3^{i_3}D_4^2u(x_1,x_2,0,x_4)$$
$$=\varphi_{1,1,i_3,2}(x_1,x_2,x_4)\in L_p(G_1\times G_2\times G_4),\quad i_3=0,1;$$

$$(V_{0,1,2,2}u)(x_2,x_3,x_4)\equiv D_2D_3^2D_4^2u(0,x_2,x_3,x_4)=\varphi_{0,1,2,2}(x_2,x_3,x_4)\in L_p(G_2\times G_3\times G_4);$$

$$(V_{1,0,2,2}u)(x_1,x_3,x_4)\equiv D_1D_3^2D_4^2u(x_1,0,x_3,x_4)$$
$$=\varphi_{1,0,2,2}(x_1,x_3,x_4)\in L_p(G_1\times G_3\times G_4). \tag{4}$$

Если функция $u\in W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ является решением четырехмерной задачи Гурса классического вида (1), (2), то она является также решением задачи (1), (4) для $\varphi_{i_1,i_2,i_3,i_4}$ с условиями

$$\varphi_{0,0,0,0}=F^1(0,0,0)=F^2(0,0,0)=F^3(0,0,0)=F^5(0,0,0);$$

$$\varphi_{0,0,1,0}=F^4(0,0,0)=F^2_{x_3}(0,0,0)=F^1_{x_3}(0,0,0);$$
$$\varphi_{0,0,0,1}=F^6(0,0,0)=F^1_{x_4}(0,0,0)=F^3_{x_4}(0,0,0);$$
$$\varphi_{0,0,1,1}=F^6_{x_3}(0,0,0)=F^4_{x_4}(0,0,0);$$
$$\varphi_{1,0,0,0}(x_1)=F^2_{x_1}(x_1,0,0)=F^3_{x_1}(x_1,0,0)=F^5_{x_1}(x_1,0,0);$$
$$\varphi_{1,0,1,0}(x_1)=F^2_{x_1x_3}(x_1,0,0)=F^4_{x_1}(x_1,0,0)=F^5_{x_1x_3}(x_1,0,0);$$
$$\varphi_{1,0,0,1}(x_1)=F^2_{x_1x_4}(x_1,0,0)=F^3_{x_1x_4}(x_1,0,0)=F^6_{x_1}(x_1,0,0);$$
$$\varphi_{1,0,1,1}(x_1)=F^2_{x_1x_3x_4}(x_1,0,0)=F^4_{x_1x_4}(x_1,0,0);$$
$$\varphi_{0,1,0,0}(x_2)=F^1_{x_2}(x_2,0,0)=F^3_{x_2}(0,x_2,0)=F^5_{x_2}(0,x_2,0);$$
$$\varphi_{0,1,1,0}(x_2)=F^1_{x_2x_3}(x_2,0,0)=F^5_{x_2x_3}(0,x_2,0)=F^4_{x_2}(0,x_2,0);$$
$$\varphi_{0,1,0,1}(x_2)=F^1_{x_2x_4}(x_2,0,0)=F^3_{x_2x_4}(0,x_2,0)=F^6_{x_2}(0,x_2,0);$$
$$\varphi_{0,1,1,1}(x_2)=F^1_{x_2x_3x_4}(x_2,0,0)=F^6_{x_2x_3}(0,x_2,0);$$
$$\varphi_{0,0,2,0}(x_3)=F^1_{x_3x_3}(0,x_3,0)=F^2_{x_3x_3}(0,x_3,0)=F^5_{x_3x_3}(0,0,x_3);$$
$$\varphi_{0,0,2,1}(x_3)=F^1_{x_3x_3x_4}(0,x_3,0)=F^2_{x_3x_3x_4}(0,x_3,0)=F^6_{x_3x_3}(0,0,x_3);$$
$$\varphi_{0,0,0,2}(x_4)=F^1_{x_4x_4}(0,0,x_4)=F^2_{x_4x_4}(0,0,x_4)=F^3_{x_4x_4}(0,0,x_4);$$
$$\varphi_{0,0,1,2}(x_4)=F^1_{x_3x_4x_4}(0,0,x_4)=F^2_{x_3x_4x_4}(0,0,x_4)=F^4_{x_4x_4}(0,0,x_4);$$
$$\varphi_{1,1,0,0}(x_1,x_2)=F^3_{x_1x_2}(x_1,x_2,0)=F^5_{x_1x_2}(x_1,x_2,0);$$
$$\varphi_{1,1,1,0}(x_1,x_2)=F^5_{x_1x_2x_3}(x_1,x_2,0)=F^4_{x_1x_2}(x_1,x_2,0);$$
$$\varphi_{1,1,0,1}(x_1,x_2)=F^3_{x_1x_2x_4}(x_1,x_2,0)=F^6_{x_1x_2}(x_1,x_2,0);$$
$$\varphi_{1,1,1,1}(x_1,x_2)=F^4_{x_1x_2x_4}(x_1,x_2,0)=F^6_{x_1x_2x_3}(x_1,x_2,0);$$
$$\varphi_{1,0,2,0}(x_1,x_3)=F^2_{x_1x_3x_3}(x_1,x_3,0)=F^5_{x_1x_3x_3}(x_1,0,x_3);$$
$$\varphi_{1,0,2,1}(x_1,x_3)=F^2_{x_1x_3x_3x_4}(x_1,x_3,0)=F^6_{x_1x_3x_3}(x_1,0,x_3);$$
$$\varphi_{1,0,0,2}(x_1,x_4)=F^2_{x_1x_4x_4}(x_1,0,x_4)=F^3_{x_1x_4x_4}(x_1,0,x_4);$$
$$\varphi_{1,0,1,2}(x_1,x_4)=F^2_{x_1x_3x_4x_4}(x_1,0,x_4)=F^4_{x_1x_4x_4}(x_1,0,x_4);$$
$$\varphi_{0,1,2,0}(x_2,x_3)=F^1_{x_2x_3x_3}(x_2,x_3,0)=F^5_{x_2x_3x_3}(0,x_2,x_3);$$

$$\varphi_{0,1,2,1}(x_2,x_3)=F^1_{x_2x_3x_3x_4}(x_2,x_3,0)=F^6_{x_2x_3x_3}(0,x_2,x_3);$$
$$\varphi_{0,1,0,2}(x_2,x_4)=F^1_{x_2x_4x_4}(x_2,0,x_4)=F^3_{x_2x_4x_4}(0,x_2,x_4);$$
$$\varphi_{0,1,1,2}(x_2,x_4)=F^1_{x_2x_3x_4x_4}(x_2,0,x_4)=F^4_{x_2x_4x_4}(0,x_2,x_4);$$
$$\varphi_{0,0,2,2}(x_3,x_4)=F^1_{x_3x_3x_4x_4}(0,x_3,x_4)=F^2_{x_3x_3x_4x_4}(0,x_3,x_4);$$
$$\varphi_{1,1,2,0}(x_1,x_2,x_3)=F^5_{x_1x_2x_3x_3}(x_1,x_2,x_3);$$
$$\varphi_{1,1,2,1}(x_1,x_2,x_3)=F^6_{x_1x_2x_3x_3}(x_1,x_2,x_3);$$
$$\varphi_{1,1,0,2}(x_1,x_2,x_4)=F^3_{x_1x_2x_4x_4}(x_1,x_2,x_4);$$
$$\varphi_{1,1,1,2}(x_1,x_2,x_4)=F^4_{x_1x_2x_4x_4}(x_1,x_2,x_4);$$
$$\varphi_{0,1,2,2}(x_2,x_3,x_4)=F^1_{x_2x_3x_3x_4x_4}(x_2,x_3,x_4);$$
$$\varphi_{1,0,2,2}(x_1,x_3,x_4)=F^2_{x_1x_3x_3x_4x_4}(x_1,x_3,x_4).$$

Легко доказать, что верно и обратное. Иначе говоря, если функция $u\in W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ является решением задачи (1), (4), то она является также решением задачи (1), (2), для следующих функций F^i, $i=1,2,3,4,5,6$:

$$F^1(x_2,x_3,x_4)=\sum_{i_3=0}^{1}\sum_{i_4=0}^{1}x_3^{i_3}\,x_4^{i_4}\,\varphi_{0,0,i_3,i_4}+\sum_{i_3=0}^{1}\sum_{i_4=0}^{1}x_3^{i_3}x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1,i_3,i_4}(\xi_2)\,d\xi_2$$
$$+\sum_{i_4=0}^{1}x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\xi_3)\,\varphi_{0,0,2,i_4}(\xi_3)\,d\xi_3+\sum_{i_3=0}^{1}x_3^{i_3}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,0,i_3,2}(\xi_4)\,d\xi_4$$
$$+\sum_{i_4=0}^{1}x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\xi_3)\,\varphi_{0,1,2,i_4}(\xi_2,\xi_3)\,d\xi_2\,d\xi_3+\int\limits_0^{x_3}\int\limits_0^{x_4}(x_3-\xi_3)(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,0,2,2}(\xi_3,\xi_4)\,d\xi_3\,d\xi_4$$
$$+\sum_{i_3=0}^{1}x_3^{i_3}\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,1,i_3,2}(\xi_2,\xi_4)\,d\xi_2\,d\xi_4$$
$$+\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}\int\limits_0^{x_4}(x_3-\xi_3)(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,1,2,2}(\xi_2,\xi_3,\xi_4)\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\xi_4;$$

$$F^2(x_1,x_3,x_4)=\sum_{i_3=0}^{1}\sum_{i_4=0}^{1}x_3^{i_3}x_4^{i_4}\,\varphi_{0,0,i_3,i_4}+\sum_{i_3=0}^{1}\sum_{i_4=0}^{1}x_3^{i_3}\,x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_1}\varphi_{1,0,i_3,i_4}(\xi_1)\,d\xi_1$$
$$+\sum_{i_4=0}^{1}x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\xi_3)\,\varphi_{0,0,2,i_4}(\xi_3)\,d\xi_3+\sum_{i_3=0}^{1}x_3^{i_3}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,0,i_3,2}(\xi_4)\,d\xi_4$$
$$+\sum_{i_4=0}^{1}x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\xi_3)\,\varphi_{1,0,2,i_4}(\xi_1,\xi_3)\,d\xi_1\,d\xi_3+\int\limits_0^{x_3}\int\limits_0^{x_4}(x_3-\xi_3)(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,0,2,2}(\xi_3,\xi_4)\,d\xi_3\,d\xi_4$$
$$+\sum_{i_3=0}^{1}x_3^{i_3}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\xi_4)\,\varphi_{1,0,i_3,2}(\xi_1,\xi_4)\,d\xi_1\,d\xi_4$$
$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_3}\int\limits_0^{x_4}(x_3-\xi_3)(x_4-\xi_4)\,\varphi_{1,0,2,2}(\xi_1,\xi_3,\xi_4)\,d\xi_1\,d\xi_3\,d\xi_4;$$

$$F^3(x_1,x_2,x_4)=M_0(x_1,x_2,x_4),\quad F^4(x_1,x_2,x_4)=M_1(x_1,x_2,x_4),$$

где

$$\begin{aligned}M_k(x_1,x_2,x_4)&=\varphi_{0,0,k,0}+x_4\,\varphi_{0,0,k,1}+\int\limits_0^{x_1}\varphi_{1,0,k,0}(\tau_1)\,d\tau_1+x_4\int\limits_0^{x_1}\varphi_{1,0,k,1}(\tau_1)\,d\tau_1\\&+\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1,k,0}(\tau_2)\,d\tau_2+x_4\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1,k,1}(\tau_2)\,d\tau_2+\int\limits_0^{x_4}(x_4-\tau_4)\,\varphi_{0,0,k,2}(\tau_4)\,d\tau_4\\&+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{1,1,k,0}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2+x_4\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{1,1,k,1}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2\\&+\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\tau_4)\,\varphi_{0,1,k,2}(\tau_2,\tau_4)\,d\tau_2\,d\tau_4+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\tau_4)\,\varphi_{1,0,k,2}(\tau_1,\tau_4)\,d\tau_1\,d\tau_4\\&+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\tau_4)\,\varphi_{1,1,k,2}(\tau_1,\tau_2,\tau_4)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_4,\quad k=0,1;\end{aligned}$$

$$F^5(x_1,x_2,x_3)=L_0(x_1,x_2,x_3),\quad F^6(x_1,x_2,x_3)=L_1(x_1,x_2,x_3),$$

где

$$\begin{aligned}L_k(x_1,x_2,x_3)&=\varphi_{0,0,0,k}+x_3\,\varphi_{0,0,1,k}+\int\limits_0^{x_1}\varphi_{1,0,0,k}(\eta_1)\,d\eta_1+x_3\int\limits_0^{x_1}\varphi_{1,0,1,k}(\eta_1)\,d\eta_1\\&+\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1,0,k}(\eta_2)\,d\eta_2+x_3\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1,1,k}(\eta_2)\,d\eta_2+\int\limits_0^{x_3}(x_3-\eta_3)\varphi_{0,0,2,k}(\eta_3)\,d\eta_3\\&+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{1,1,0,k}(\eta_1,\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2+x_3\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{1,1,1,k}(\eta_1,\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2\\&+\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\eta_3)\,\varphi_{0,1,2,k}(\eta_2,\eta_3)\,d\eta_2\,d\eta_3+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\eta_3)\,\varphi_{1,0,2,k}(\eta_1,\eta_3)\,d\eta_1\,d\eta_3\\&+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\eta_3)\,\varphi_{1,1,2,k}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\,d\eta_1\,d\eta_2\,d\eta_3,\quad k=0,1.\end{aligned}$$

Итак, четырехмерные задачи Гурса классического вида (1), (2) и вида (1), (4) в общем случае эквивалентны. Однако четырехмерная задача Гурса (1), (4) по постановке более естественна, чем задача (1), (2). Это связано с тем, что в постановке задачи (1), (4) на правые части краевых условий никаких дополнительных условий типа согласования не требуется. Поэтому задачу (1), (4) можно рассматривать как задачу Гурса с неклассическими условиями.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Задачи Гурса вида* (1), (2) *и неклассического вида* (1), (4) *эквивалентны.*

Задачу (1), (4) можно исследовать, следуя схеме рассуждений работы [24], методом операторных уравнений. В результате убеждаемся в справедливости утверждения, аналогичного теореме из [24, с. 63].

Отметим, что применяя методику, приводимую в статье [25], можно получить интегральное представление решения задачи (1), (4) с использованием фундаментального решения. А в работах [18–21] исследовались краевые задачи в неклассических трактовках. В этих работах для исследования таких задач развита методика, которая аналогично методу предложенному С. С. Ахиевым [22, 23] и существенно использует современные методы теории функций и функционального анализа. В данной статье она изложена, в основном, применительно к четырехмерным гиперболическим уравнениям шестого порядка с разрывными коэффициентами.

3. Выводы

Постановка задачи (1), (4) обладает рядом преимуществ:

1) в этой постановке не требуется никаких дополнительных условий согласования;

2) такая постановка порождает гомеоморфизм между двумя определенными банаховыми пространствами;

3) эту задачу можно рассматривать как задачу сформулированную по следам в пространстве С. Л. Соболева $W_p^{1,1,2,2}(G)$;

4) в этой постановке рассматриваемое уравнение является обобщением многих модельных уравнений некоторых процессов (например, уравнения влагопереноса, уравнения теплопроводности, уравнения Аллера, уравнения Буссинеска — Лява, уравнения Манжерона, трехмерного телеграфного уравнения и т. д.).

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания.

Литература

1. *Жегалов В. И., Севастьянов В. А.* Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Диф. уравнения.—1996.—Т. 32, № 10.—С. 1429–1430.
2. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.—Казань: Казанское мат. общество, 2001.—226 с.
3. *Миронов А. Н.* К задаче Коши в четырехмерном пространстве // Диф. уравнения.—2004.—Т. 40, № 6.—С. 844–847.
4. *Миронов А. Н.* К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки.—2007.—№ 2 (15).—С. 27–32.
5. *Кощеева О. А.* О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве // Изв. вузов. Математика.—2008.—№ 9.—С. 40–46.
6. *Уткина Е. А.* Об одной краевой задаче со смещениями в четырехмерном пространстве // Изв. вузов. Математика.—2009.—№ 4.—С. 50–55.
7. *Миронов А. Н.* О построении функции Римана для одного уравнения со старшей частной производной пятого порядка // Диф. уравнения.—2010.—Т. 46, № 2.—С. 266–272.
8. *Джохадзе О. М.* О трехмерной обобщенной задаче Гурса для уравнения третьего порядка и связанные с ней общие двумерные интегральные уравнения Вольтерры первого рода // Диф. уравнения.—2006.—Т. 42, № 3.—С. 385–394.
9. *Midodashvili B.* Generalized Goursat problem for a spatial fourth order hyperbolic equation with dominated low terms // Proceedings of A. Razmadze Math. Institute.—2005.—Vol. 138.—P. 43–54.
10. *Березин А. В., Воронцов А. С., Марков М. Б., Плющенков Б. Д.* О выводе и решении уравнений Максвелла в задачах с заданным волновым фронтом // Мат. моделирование.—2006.—Т. 18, № 4.—С. 43–60.
11. *Жегалов В. И., Уткина Е. А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика.—1999.—№ 10.—С. 73–76.

12. *Мамедов И. Г.* Фундаментальное решение задачи Коши, связанной с псевдопараболическим уравнением четвертого порядка // Журн. вычислительной математики и мат. физики.—2009.—Т. 49, № 1.—С. 99–110.
13. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Диф. уравнения.—2004.—Т. 40, № 6.—С. 763–764.
14. *Водахова В. А.* Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, №2.—С. 280–285.
15. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 4.—С. 689–699.
16. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—304 с.
17. *Мамедов И. Г.* Условия оптимальности некоторых процессов, описываемых псевдопараболическим уравнением при нелокальных краевых условиях // Мат. и компьютерное моделирование. Сер. физ.-мат. науки.—2008.—Вып. 1.—С. 133–141.
18. *Чернов А. В.* О тотальном сохранении глобальной разрешимости задачи Гурса для управляемого полулинейного псевдопараболического уравнения // Владикавк. мат. журн.— 2014.—Т. 16, вып. 3.—С. 55–63.
19. *Мамедов И. Г.* Формула интегрирования по частям неклассического типа при исследовании задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 4.—С. 40–51.
20. *Мамедов И. Г.* Нелокальная комбинированная задача типа Бицадзе — Самарского и Самарского — Ионкина для системы псевдопараболических уравнений // Владикавк. мат. журн.—2014.—Т. 16, вып. 1.—С. 30–41.
21. *Мамедов И. Г.* О неклассической трактовке задачи Дирихле для одного псевдопараболического уравнения четвертого порядка // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 3.—С. 417–420.
22. *Ахиев С. С.* Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных краевых задач и их представления // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 271, № 2.—С. 265–269.
23. *Ахиев С. С.* Функция Римана уравнения с доминирующей смешанной производной произвольного порядка // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 283, № 5.—С. 783–787.
24. *Мамедов И. Г.* Об одной задаче Гурса в пространстве Соболева // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 2.—С. 54–64.
25. *Мамедов И. Г.* Фундаментальное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 1.—С. 17–32.

Статья поступила 12 декабря 2013 г.

Мамедов Ильгар Гурбат оглы
Институт Систем Управления НАН Азербайджана,
ведущий научный сотрудник
Азербайджан, AZ 1141, Баку, Б. Вагабзаде, 9
E-mail: ilgar-mammadov@rambler.ru

ON A NONCLASSICAL INTERPRETATION OF THE FOUR-DIMENSIONAL GOURSAT PROBLEM FOR ONE HYBERBOLIC EQUATION

Mamedov I. G.

A homeomorphism between certain pairs of Banach space is revealed in the study of the four-dimensional Goursat problem for one differential equation with leading partial derivative of the sixth order $D_1 D_2 D_3^2 D_4^2$ with discontinuous coefficients (L_p-coefficients) by reducing this problem to an equivalent integral equation.

Key words: hyperbolic equation, the four-dimensional Goursat problem, equations with discontinuous coefficients.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 67–74

УДК **517.95**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Л. И. Сазонов

Рассмотрен вопрос об устойчивости ограниченных по времени решениях системы Навье — Стокса во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$. Предварительно рассмотрен вопрос об их существовании.

Ключевые слова: система Навье — Стокса, ограниченное решение, устойчивость, пространство соленоидальных полей.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим множество $\mathscr{V} = \{v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{div} v = 0\}$ — всех соленоидальных бесконечно дифференцируемых финитных полей. Замыкание этого множества в пространстве n-мерных векторных полей $L_p^n(\mathbb{R}^n)$, обозначаемое через $S_p(\mathbb{R}^n)$, называется пространством L_p-соленоидальных полей. Гидродинамический проектор Π, проектирующий пространство $L_2^n(\mathbb{R}^n)$ на $S_2(\mathbb{R}^n)$, продолжается с множества $\mathscr{V}$ до ограниченного проектора в любом пространстве $L_p^n(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$ с образом $S_p(\mathbb{R}^n)$. За этим проектором сохраняется прежнее обозначение Π.

Рассмотрим линейное линеаризованное уравнение Озеена

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \triangle v - \frac{\partial v}{\partial x_1} - \nabla p, \\ \operatorname{div}\, v = 0. \end{cases}$$

Решение задачи Коши с начальным условием $v|_{t=0} = a$, где $a \in S_p(\mathbb{R}^n)$ представляется в виде $v = T(t)\, a$

$$T(t)\, a = (4\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{\frac{|x - y - (x_1 - y_1)te_1|^2}{4t}\right\} a(y)\, dy.$$

Вообще говоря, $T(t)$ является аналитической полугруппой уравнения теплопроводности со сдвигом, но ввиду того, что гидродинамический проектор коммутирует с полугруппой, а начальное условие соленоидально решение соленоидально.

В дальнейшем особенно важны оценки полугруппы

$$\|\partial_x^\alpha T(t)a\|_{S_q} \leqslant c_{pq} t^{-|\alpha|/2 - \frac{n}{2}(1/p - 1/q)} \|a\|_{S_p}, \quad |\alpha| = 0, 1, \ \ 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty.$$

[1] Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, задание № 1 1398 2014 К.

2. Существование ограниченных решений

Для системы Навье — Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \triangle v - (v,\nabla)v - \nabla p - f(x,t), \\ \operatorname{div}\, v = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим вопрос о существовании ограниченных решений вида $v = \xi(x,t) + 1$, где $\xi(x,t)$ стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Поле $\xi(x,t)$ является решением системы

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \triangle\xi - \partial_1\xi - (\xi,\nabla)\xi - \nabla p - f(x,t), \quad \operatorname{div}\,\xi = 0. \tag{1}$$

Предполагая, что $\xi(x,t)$ принимает значения в пространствах типа L_p, и действуя на систему (1) проектором Π, получим ОДУ в некотором банаховом пространстве, которое будет определено ниже

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \triangle\,\xi - \partial_1\xi - \Pi\big\{(\xi,\nabla)\xi - f\big\}. \tag{2}$$

Используя метод вариации, сведем решение задачи Коши с начальным условием $\xi\big|_{t-0} = a$ к интегральному уравнению

$$\xi(t) = T(t)a + \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi(s) - f(s)\big\}\,ds. \tag{3}$$

Исследуем вопрос об инвариантности пространства $L_\infty([0,\infty), S_{p_1} \cap S_{p_2})$ относительно отображения

$$Q\xi(t) = \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi(s)\big\}\,ds.$$

Предварительно заметим, что

$$T(t-s)\Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi(s)\big\} = \sum \partial_j T(t-s)\Pi\big(\xi_j(s)\xi(s)\big).$$

Далее, имеем

$$\|Q\xi(t)\|_p \leqslant c\int\limits_0^t (t-s)^{-1/2-n/(2p)}ds\|\xi\|^2_{L_\infty(S_p)}.$$

Отсюда следует, что нельзя обойтись одним показателем. Из оценки

$$\|Q\xi(t)\|_q \leqslant c\int\limits_0^t (t-s)^{-1/2-(n/p-n/(2q))}ds\|\xi\|^2_{L_\infty(S_p)}$$

вытекает необходимость изменения показателя на разных участках интегрирования. Для определенности считаем, что при $t < 2$ на отрезке $[0,t]$, или при $t > 2$ на отрезке $[t-1,t]$ выполняется неравенство $0 \leqslant (n/p - n/(2q)) < 1/2$, либо при $t > 2$ на отрезке $[0,t-1]$ выполняется неравенство $(n/p - n/(2q)) > 1/2$. Тогда $\|Q\xi\|_q \leqslant c\|\xi\|^2_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})}$ при $q = p_1$ или $q = p_2$. Таким образом, пространство $L_\infty([0,\infty), S_{p_1} \cap S_{p_2})$ инвариантно относительно отображения Q при выполнении условий $2 \leqslant p_1 < n$, $n < p_2 \leqslant 2p_1$, причем справедливо неравенство

$$\|Q\xi\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})} \leqslant c_{p_1,p_2}\|\xi\|^2_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть* $(p_1,p_2) \in \Delta = \{p_1 < n,\ n < p_2 \leqslant 2p_1\}$, $a \in S_{p_1} \cap S_{p_2}$, $f = \sum \partial_j F_k$, $F_k \in L_\infty(S_{p_1/2} \cap S_{p_2/2})$. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon > 0$, $R > 0$, *что при выполнении условий* $\|a\| < \varepsilon$, $\|F_k\| < \varepsilon$ *уравнение* (3) *имеет решение, единственное в шаре* $B_R = \{\|\xi\| \leqslant R\} \subset L_\infty(S_{p_1} \cap S_{p_2})$.

$\lhd$ Справедливы оценки

$$\|\eta\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})} \leqslant c_{p_1,p_2}\Big(\|a\|_{S_{p_1}\cap S_{p_2}} + n^2 \sup_j \|F_j\|_{L_\infty(S_{p_1/2}\cap S_{p_2/2})} + \|\xi\|^2_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})}\Big), \tag{5}$$

где η образ ξ при отображении, определяемом правой частью уравнения (3). Для краткости полагаем $c_{p_1,p_2} = c$. Из предположений теоремы следует, что выполнение условия $c((n^2+1)\varepsilon + R^2) \leqslant R$ влечет инвариантность шара $B_R = \{\|\xi\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})} \leqslant R\}$. Таким образом, это справедливо для всех R, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{2c}(1-\sqrt{1-\sigma}) \leqslant R \leqslant \frac{1}{2c}(1+\sqrt{1-\sigma}), \quad \sigma = 4c^2(n^2+1)\,\varepsilon.$$

В шаре B_R условие сжимаемости имеет вид $2Rc < 1$. Таким образом, при $\frac{1}{2c}(1-\sqrt{1-\sigma}) \leqslant R < \frac{1}{2c}$ шар B_R является инвариантным и в нем выполняется условие сжимаемости. Выберем $\varepsilon_0 = 3(16c^2(n^2+1))^{-1}$, $R_0 < (2c)^{-1}$. Тогда при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ в шаре B_{R_0} существует единственное решение ξ уравнения (3), причем на самом деле ξ содержится в шаре $B_{R_{\min}}$, $R_{\min} = \frac{1}{2c}(1-\sqrt{1-\sigma})$. $\rhd$

Пусть $1/p_1 = 3/(2n)$, $1/p_2 = 3/(4n)$. Тогда $2/p_1 - 1/q_1 = 3/n - 1/q_1 > 1/n$ влечет $1/q_1 < 2/n$. Ясно, что $1/q_1$ можно взять сколь угодно близким к $2/n$, так как можно взять $p_1 < r < n$, так что $2/r - 1/q_1 < 1/n$. Далее, $2/p_2 - 1/q_2 = 3/(2n) - 1/q_2 < 1/n$ влечет $1/q_2 > 1/(2n)$, причем $1/q_2$ можно взять сколь угодно близким к $1/(2n)$. Дальнейшие рассуждения показывают, что можно считать, что $p_1 = 2$, $p_2 = \infty$. Таким образом, если дополнительно к условиям теоремы 1 потребовать $a \in S_2 \cap S_\infty$, $F_j \in L_\infty(S_1 \cap S_\infty)$, то $\xi(t) \in L_\infty(S_2 \cap S_\infty)$.

Очевидно, что данный результат справедлив для любой точки (p_1,p_2), принадлежащей $\triangle$.

Регулярность ограниченных решений. Формально дифференцируя уравнение (3) и осуществляя замену $\eta_j = \partial_j\xi$, имеем

$$\eta_j = \partial_j T(t)a + \partial_j \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum \xi_j(s)\eta_j(s) + f(s)\Big\}\,ds. \tag{6}$$

Для оператора $(A\eta)_k(t) = \partial_k \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\big\{\sum \xi_j(s)\eta_j(s)\big\}\,ds$ справедлива оценка

$$\|\{(A\eta)_j\}\|_{L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^n)} \leqslant cn\|\xi\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})}\|\{\eta_j\}\|_{L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^n)}.$$

Здесь константа $c = c_{p_1,p_2}$, $(p_1,p_2) \in \triangle$ из доказательства теоремы.

1. Имеем $cn\|\xi\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})} \leqslant cnR_{\min}$. Здесь возникает дополнительное требование $cnR_{\min} < 1$. При выполнении этого условия оператор $I - A$ обратим в пространстве

$L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^n)$. Поэтому уравнение (6) имеет единственное решение в этом пространстве. Предположим, что $a\in S_2\cap S_\infty$, $F_k\in L_\infty(S_1\cap S_\infty)$. Аналогично предыдущему устанавливаем, что $\eta_j\in L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})$ для всех $p_1>2$, $p_2<\infty$. Далее, введя обозначение

$$\zeta = T(t)a+\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum \xi_j(s)\eta_j(s)+f(s)\Big\}\,ds, \tag{7}$$

имеем $\eta_j=\partial_j\zeta$ и, следовательно,

$$\zeta = T(t)a+\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\zeta(s)+f(s)\Big\}\,ds. \tag{8}$$

Так как ξ является также решением этого уравнения, то $\xi=\zeta$ и, следовательно, $\partial_j\xi=\eta_j$.

Старшие производные. Выполним некоторые формальные преобразования. Представим $\partial_j\xi$ в виде

$$\partial_j\xi = T(t)\partial_j a+\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\partial_j\xi(s)+G_j(s)\Big\}\,ds, \tag{9}$$

где $G_j(s)=(\partial_j\xi(s),\nabla)\xi(s)+\partial_j f(s)$. Продифференцировав уравнение (9) и введя обозначение $\eta_{j,k}=\partial_k\partial_j\xi$, получим

$$\eta_{j,k} = \partial_k T(t)\partial_j a+\partial_k\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum \xi_r(s)\eta_{j,r}(s)+G_j(s)\Big\}\,ds. \tag{10}$$

Введем оператор

$$B\{\eta_{j,k}\}(t) = \Big\{\partial_k\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum \xi_r(s)\eta_{j,r}(s)\Big\}\,ds\Big\}.$$

Имеет место оценка

$$\|B\{\eta_{j,k}\}\|_{L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^{n^2})}\leqslant cn\|\xi\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})}\|\{\eta_{j,k}\}\|_{L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^{n^2})}.$$

Из данной оценки следует, что не возникает новых условий по сравнению со случаем первых производных. Предполагая эти условия выполненными, получаем, что оператор $I-B$ обратим в пространстве $L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^{n^2})$. Если предположить, что выполняются условия $\partial_j\partial_k a\in S_2\cap S_\infty$, $\Pi G_j\in L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2}))$ для всех $1<p_1,p_2<\infty$, то $\eta_{j,k}\in L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})$ для всех $2<p_1,p_2<\infty$. Из уравнения (10) следует, что $\eta_{j,k}=\partial_k\zeta_j$, где

$$\zeta_j = T(t)\partial_j a+\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum \xi_r(s)\,\eta_{j,r}(s)+G_j(s)\Big\}\,ds. \tag{11}$$

Таким образом, ζ_j являются решением системы

$$\zeta_j = T(t)\partial_j a+\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum \xi_r(s)\,\partial_r\zeta_j(s)+G_j(s)\Big\}\,ds. \tag{12}$$

Представим (12) в виде

$$\zeta_j = T(t)\partial_j a + \partial_r \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{ \sum \xi_r(s)\zeta_j(s) + \partial_j\xi_r(s)\,\xi(s) + \partial_j f(s)\Big\}\, ds. \qquad (13)$$

Покажем, что $\partial_j\xi$ также являются решением этой системы. Ввиду очевидного соотношения $\partial_j\partial_r T(t)\Pi\xi_r\xi = \partial_j T(t)\Pi(\xi,\nabla)\xi)$ после подстановки в уравнение (13) преобразуем его к виду

$$\partial_j\xi = T(t)\partial_j a + \partial_j \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\,\xi + f(s)\Big\}\, ds. \qquad (14)$$

Следовательно, $\zeta_j = \partial_\xi$, $\eta_{j,k} = \partial_k\zeta_j = \partial_j\partial_k\xi$. Таким образом, при приведенных выше условиях $\partial_j\partial_k\xi \in L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})$ для всех $2 < p_1, p_2 < \infty$.

Производная по времени. В соотношении

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-\varepsilon} T(t-s)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\Big\}\, ds = T(\varepsilon)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\Big\}$$

$$+ \int\limits_0^{t-\varepsilon} \partial_j T(t-s)\Pi\partial_j\Big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\Big\} - \partial_1 T(t-s)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\Big\}\, ds,$$

переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t} T(t-s)\Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\big\}\, ds = \Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\big\}$$

$$+ \int\limits_0^{t} \partial_j T(t-s)\Pi\partial_j\big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\big\} - \partial_1 T(t-s)\Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\big\}\, ds.$$

Из последнего соотношения следует, что существует производная по времени. Кроме того, имеем

$$(\partial_t - \triangle + \partial_1)\,\xi = (\xi,\nabla)\xi) + f.$$

Устойчивость ограниченных решений. Пусть $\theta(t,x) = \xi(t,x) + e_1$ — ограниченное решение. Рассмотрим вопрос об его устойчивости. Для этого исследуем интегральное уравнение для возмущений $v(t,x)$

$$v(t) = T(t)v_0 + \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{(v(s),\nabla)\,\xi(s) + (\xi(s)\nabla)\,v(s) + (v(s),\nabla)v(s)\Big\}\, ds. \qquad (15)$$

Уравнение будем рассматривать в подпространстве $S_{\gamma,p}$ пространства $L_\infty(S_p)$, состоящем из элементов с конечной нормой $\|v\|_{S_{\gamma,p}} = \sup_t(1+t)^\gamma\|v(t)\|_{S_p}$. Найдем условия инвариантности пространства $S_{\gamma,p}$ относительно оператора в правой части уравнения.

$$\left\|\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\big\{(v(s),\nabla)v(s)\big\}\, ds\right\|_{S_p} \leqslant c\int\limits_0^t (t-s)^{-1/2-n/(2p)}(1+s)^{-2\gamma}\|v\|^2_{S_{\gamma,p}}.$$

Считаем, что $1/2 + n/(2p) < 1$. Тогда интегрируя, получаем оценку

$$\left\| \int_0^t T(t-s)\Pi\big\{(v(s),\nabla)v(s)\big\}\,ds \right\|_{S_p} \leqslant c\,\max\big(t^{-1/2-n/(2p)},\ t^{1/2-n/(2p)-2\gamma}\big)\|v\|^2_{S_{\gamma,p}}.$$

Таким образом, условия инвариантности для рассматриваемого оператора имеют вид $p > n$, $1/2 - n/(2p) \leqslant \gamma \leqslant 1/2 + n/(2p)$. Для линейной части при выполнении оценки для γ имеем

$$\left\| \int_0^t T(t-s)\Pi\{(v(s),\nabla)\xi(s) + (\xi(s),\nabla)v(s)\}\,ds \right\|_{S_{\gamma,p}} \leqslant c\sup\|\xi(s)\|_{S_{r_1}\cap S_{r_2}}(1+t)^{-\gamma}\|v\|_{S_{\gamma,p}},$$

где $r_1 < n < r_2$, $1/r_1 + 1/p < 1$.

Далее, для выполнения включения $T(t)v_0 \in S_{\gamma,p}$ необходимо и достаточно чтобы $v_0 \in S_q \cap S_p$, $\frac{n}{2}(1/q - 1/p) \geqslant \gamma$. Выясним когда вес максимален. Подставляя $\gamma = 1/2 + n/(2p)$ в последнее неравенство, получаем $1/q \geqslant 1/n + 3/p$. Отсюда при $n = 3$ должно быть $p > 9/2$, а при $n > 3$ остается $p > n$.

Введем обозначения для операторов

$$Bv(t) = -\int_0^t T(t-s)\Pi\big\{(v(s),\nabla)\xi(s) + (\xi(s),\nabla)v(s)\big\}\,ds,$$

$$Av(t) = -\int_0^t T(t-s)\Pi\big\{(v(s),\nabla)v(s)\big\}\,ds.$$

Теорема 2. *Пусть пространство $S_{\gamma,p}$ инвариантно относительно операторов A, B, оператор $I + B$ обратим в этом пространстве. Тогда существуют числа $\varepsilon > 0$, $R > 0$ такие, что при $\|T(t)v_0\|_{S_{\gamma,p}} < \varepsilon$ уравнение*

$$v(t) = T(t)v_0 - Bv(t) - Av(t)$$

в шаре $B_R = \{\|v\|_{S_{\gamma,p}} < R\}$ имеет единственное решение.

$\lhd$ Условия инвариантности операторов определены выше. Обращая оператор $I + B$, сведем рассматриваемое уравнение к виду

$$v(t) = (I+B)^{-1}\{T(t)v_0 - Av(t)\}.$$

Имеет место оценка

$$\|(I+B)^{-1}\{T(t)v_0 - Av(t)\}\|_{S_{\gamma,p}} \leqslant \|(I+B)^{-1}\|(\|T(t)v_0\| + c\|v\|^2).$$

Правую часть этого неравенства оценим через $C(\|T(t)v_0\| + \|v\|^2)$, где

$$C = \max\{\|(I+B)^{-1}\|(1,c)\}.$$

Пусть выполняется условие теоремы для $T(t)v_0$. Тогда условие инвариантности шара B_R выполняется при $C(\varepsilon + R^2) \leqslant R$, а условие сжимаемости в этом шаре имеет вид $2CR < 1$. Очевидно, оба эти неравенства выполняются, если $1/(2C) - \sqrt{1/(4C^2) - \varepsilon} \leqslant R < 1/(2C)$. Тогда применим принцип сжимающих отображений, гарантирующий существование единственного решения в рассматриваемом шаре. $\rhd$

Замечание. Важным условием применимости теоремы является условие обратимости оператора $I+B$. Из оценки оператора B следует, что для этого достаточно подходящей малости величины $\sup_{r_1<n<r_2}\|\xi\|_{S_{r_i}}$.

Пусть возмущение $v\in S_{\gamma,p}$ и $\gamma=1/2+n/(2p)$. Рассмотрим вопрос о принадлежности v другим пространствам $S_{\mu,q}$. Для этого обратимся к интегральному уравнению возмущений (15). Отдельно для линейного и нелинейного операторов выясним вопрос о действии из $S_{\gamma,p}$ в $S_{\mu,q}$.

Имеем

$$\|Av(t)\|_{S_q}\leqslant c\int\limits_0^t(t-s)^{-1/2-(n/p-n/(2q))}(1+s)^{-2\gamma}\|v\|^2_{S_{\gamma,p}}\leqslant c(1+t)^{-1/2-(n/p-n/(2q))}\|v\|^2_{S_{\gamma,p}}$$

при выполнении условия $2/p-1/n<1/q\leqslant 2/p$.

$$\|Bv(t)\|_{S_q}\leqslant c\int\limits_0^t(t-s)^{-1/2-(1/r+1/p-1/q)n/2)}(1+s)^{-\gamma}\|v\|_{S_{\gamma,p}}\|\xi\|_{L_\infty(S_r)}\leqslant c(1+t)^{-\gamma}\|v\|_{S_{\gamma,p}}$$

при условии, что показатель $r>2$ можно менять так, чтобы на разных участках интегрирования показатель $1/2+(1/r+1/p-1/q)n/2$ был больше или меньше единицы. Кроме того, должны выполняться условия $1/r+1/p-1/q\geqslant 0$, $1/r+1/p<1$. Легко показать, что все эти условия выполняются, если $0<1/q<1/2+1/p-1/n$.

Таким образом, приходим к выводу: *оператор, определяемый правой частью уравнения возмущений, действует из* $S_{\gamma,p}$ *в* $S_{\mu,q}$, $\mu=\min(1/2+n/(2p),1/2+(2/p-1/q)n/2)$ *при выполнении условия* $2/p-1/n<1/q<\min(2/p,1/2+1/p-1/n)$.

Изложенное приводит к следующему результату об устойчивости.

Теорема 3. *Существует такое число* $\varepsilon_p>0$, *что при выполнении условия* $\sup_{r_1<n<r_2}\|\xi\|_{L_\infty(S_{r_i})}<\varepsilon_p$ *ограниченное решение* $\xi(x,t)+e_1$ *асимптотически устойчиво в пространстве* S_p, $p>n$, *причем для возмущений справедлива оценка* $\|v(t)\|_{S_p}\leqslant c(1+t)^{-\gamma}$, $\gamma=1/2+n/(2p)$. *Как следует из предыдущего замечания возмущение принадлежит* S_q *и* $\|v\|_{S_q}\leqslant c(1+t)^{-\mu}$, *где* q, μ *указаны выше.*

Замечание. В работах [1, 2] установлены критерии устойчивости стационарных и периодических решений задачи обтекания без предположения об их малости.

Литература

1. *Сазонов Л. И.* Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. мат.—1994.—Т. 58, № 5.—С. 85–109.
2. *Сазонов Л. И.* Об устойчивости периодических решений системы Навье — Стокса в трехмерной внешней области // Изв. РАН. Сер. мат.—2003.—Т. 67, № 4.—С. 155–170.

Статья поступила 23 марта 2015 г.

Сазонов Леонид Иванович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела диф. уравнений
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Южный федеральный университет,
доцент кафедры выч. мат-ки и математической физики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а

ON THE STABILITY OF BOUNDED SOLUTIONS TO THE NAVIER–STOKES EQUATIONS IN THE WHOLE SPACE

Sazonov L. I.

Stability in the whole space of bounded solutions to the Navier–Stokes system is considered. Preliminarily, the existence of such solutions is studied.

Key words: Navier–Stokes system, bounded solution, stability, space of solenoidal fields.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 75–79

УДК **517.98**

О ФАКТОРИЗАЦИИ $(\mathbb{B}, p)$-СУММИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Б. Б. Тасоев

Для полной булевой алгебры $\mathbb{B}$ и числа $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$ вводится класс $(\mathbb{B}, p)$-суммирующих операторов из банаховой решетки в $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство. Устанавливается теорема о факторизации для этого класса.

Ключевые слова: банахова решетка, $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство, $(\mathbb{B}, p)$-суммирующий оператор, факторизация, $(\mathbb{B}, p)$-супераддитивная норма.

В работе [1] были введены $\mathbb{B}$-суммирующие операторы, действующие из банаховой решетки в $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство, где $\mathbb{B}$— полная булева алгебра проекторов, и доказана теорема об факторизации таких операторов. Цель данной работы — ввести класс $(\mathbb{B}, p)$-суммирующих операторов, где $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$ и установить аналогичный результат о факторизации. Необходимые сведения имеются в книгах [2, 3].

Всюду далее X и Y — векторные пространства, E и F — банаховы решетки, $L(X, Y)$ — множество всех линейных операторов из X в Y, $1 \leqslant p < \infty$. При $X = Y$ будем писать $L(X)$ вместо $L(X, X)$. Под *булевой алгеброй проекторов* в векторном пространстве X понимается множество $\mathscr{B}$ коммутирующих линейных идемпотентных операторов, действующих в X, в котором роль нуля и единицы играют соответственно нулевое и тождественное отображения, а булевы операции имеют вид:

$$\pi \wedge \rho := \pi \circ \rho = \rho \circ \pi, \quad \pi \vee \rho := \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi^{\perp} := I_X - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathscr{B}).$$

Если булева алгебра $\mathbb{B}$ изоморфна $\mathscr{B}$, то будет также писать $\mathbb{B} \subset L(X)$.

Определение 1. Пусть X — нормированное пространство, $U_X := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$. Предположим, что в $L(X)$ имеется полная булева алгебра проекторов единичной нормы $\mathbb{B}$. Нормированное пространство X называется $\mathbb{B}$-*циклическим*, если для произвольного разбиения единицы $(\pi_\xi) \subset \mathbb{B}$ и любого семейства $(x_\xi) \subset U_X$ существует и при том единственный $x \in U_X$, для которого выполняется $\pi_\xi x_\xi = \pi_\xi x$ при всех ξ, см. [2, §7.3.3].

Подпространство X_0 $\mathbb{B}$-циклического банахова пространства X называется $\mathbb{B}$-*плотным*, если для любого $x \in X$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существуют $x_\varepsilon \in X$, разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в $\mathbb{B}$ и семейство $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в X_0 такие, что $\|x - x_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$ и $\pi_\xi x_\varepsilon = \pi_\xi x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Пусть X, Y — банаховы пространства, $\mathbb{B} \subset L(X)$ и $\mathbb{B} \subset L(Y)$. Оператор $T \in L(X, Y)$ называется $\mathbb{B}$-*линейным*, если $\pi(Tx) = T(\pi x)$ для всех $\pi \in \mathbb{B}$ и $x \in X$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-91339_ННИО-а.

Символом $\mathrm{Prt}_\sigma := \mathrm{Prt}_\sigma(\mathbb{B})$ обозначим множество всех счетных разбиений единицы в $\mathbb{B}$. Пусть E — банахова решетка, Y — $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство. Для произвольного линейного оператора $T \in L(E,Y)$ положим по определению

$$\sigma_p(T) := \sup\left\{ \inf_{(\pi_k)\in\mathrm{Prt}_\sigma} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^n \|\pi_k T x_i\|^p \right)^{1/p} : x_1,\dots,x_n \in E,\ \left\| \sum_{i=1}^n |x_i| \right\| \leqslant 1,\ n\in\mathbb{N} \right\}.$$

Определение 2. Оператор $T \in L(E,Y)$ называется $(\mathbb{B},p)$-*суммирующим*, если $\sigma_p(T) < \infty$. Таким образом, T является $(\mathbb{B},p)$-суммирующим тогда и только тогда, когда существует константа $C > 0$ такая, что для любого конечного набора $x_1,\dots,x_n \in E$ найдется счетное разбиение единицы $(\pi_k) \in \mathrm{Prt}_\sigma(\mathbb{B})$, для которых выполняется соотношение

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^n \|\pi_k T x_i\|^p \right)^{1/p} \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^n |x_i| \right\|.$$

Как видно, если $p = 1$, то приходим к определению $\mathbb{B}$-суммирующего оператора, введенному в [1, определение 7.1], см. также [4, определение 5.13.1].

Определение 3. Пусть E — банахова решетка, $\mathbb{B}$ — некоторая полная булева алгебра проекторов в $L(E)$ единичной нормы, $1 \leqslant p < \infty$. Норма $\|\cdot\|$ в E называется $(\mathbb{B},p)$-*супераддитивной*, если выполняется соотношение

$$\inf_{(\pi_k)\in\mathrm{Prt}_\sigma} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\|\pi_k x\|^p + \|\pi_k y\|^p \right)^{1/p} \leqslant \|x+y\|$$

для всех $x,y \in E$, $|x| \wedge |y| = 0$. Если $\mathbb{B} = \{0, I_E\}$, то говорят о p-*супераддитивной* норме, т. е. в этом случае $(\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} \leqslant \|x+y\|$ для всех $x,y \in E$, $|x| \wedge |y| = 0$, см. [3, p. 138].

Можно показать, что норма в банаховой решетке E будет $(\mathbb{B},p)$-супераддитивной тогда и только тогда, когда для любых $x_1,\dots,x_n \in E_+$ выполняется

$$\inf_{(\pi_k)\in\mathrm{Prt}_\sigma} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^n \|\pi_k x_i\|^p \right)^{1/p} \leqslant \|x_1 + \ldots + x_n\|.$$

Все уже готово, чтобы сформулировать основной результат настоящей заметки, но прежде рассмотрим два примера банаховых решеток с $(\mathbb{B},p)$-супераддитивной нормой.

Пример 1. Пусть E — банахова решетка с p-супераддитивной нормой, (Ω,Σ,μ) — пространство с мерой. Рассмотрим $L^\infty(E)$ — пространство измеримых по Бохнеру вектор-функций f со значениями в E, у которых поточечная норма $|\!|f|\!| : t \mapsto \|f(t)\|$ $(t \in \Omega)$ принадлежит $L^\infty(\mu)$. Введем норму в $L^\infty(E)$ по формуле $\|f\| := \||\!|f|\!|\|_\infty$, где $\|\cdot\|_\infty$ — норма в $L^\infty(\mu)$. Обозначим через $\mathbb{B}$ булеву алгебру всех характеристических функций измеримых множеств. Тогда $L^\infty(E)$ будет $\mathbb{B}$-циклической банаховой решеткой. Норма в $L^\infty(E)$ будет $(\mathbb{B},p)$-супераддитивной тогда и только тогда, когда норма в E p-супераддитивна.

Пример 2. Пусть Q — экстремальный компакт, E — банахово решетка. Обозначим символом $C_\infty(Q,E)$ множество классов эквивалентности непрерывных вектор-функций, действующих из котощих множеств $\mathrm{dom}(u) \subset Q$ в E. Напомним, что множество в топологическом пространстве называют *котощим*, если его дополнение является тощим. Множество $C_\infty(Q,E)$ можно естественным образом снабдить структурой модуля над кольцом $C_\infty(Q)$. Более того, непрерывное продолжение поточечной нормы $t \mapsto \|f(t)\|$ $(t \in \mathrm{dom}(f),\ f \in C_\infty(Q,E))$ определяет разложимую норму $|\!|\cdot|\!|$ на $C_\infty(Q,E)$ со значениями в $C_\infty(Q)$. Введем пространство $C_\#(Q,E) := \{f \in C_\infty(Q,E) : |\!|f|\!| \in C(Q)\}$ и ному в нем $\|f\| := \|{|f|}\|_\infty$. Обозначим через $\mathbb{B}$ булеву алгебру всех характеристических функций открыто-замкнутых подмножеств множества Q. Тогда $C_\#(Q,E)$ будет $\mathbb{B}$-циклической банаховой решеткой. Норма в $C_\#(Q,E)$ будет $(\mathbb{B},p)$-супераддитивной тогда и только тогда, когда норма в E p-супераддитивна.

Теперь приведем формулировку и доказательство нашей факторизационной теоремы.

Теорема. *Пусть E — банахова решетка, Y — $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство. Оператор $T \in L(E,Y)$ является $(\mathbb{B},p)$-суммирующим тогда и только тогда, когда существуют главный идеал $\mathbb{B}_0$ в $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}_0$-циклическая банахова решетка F с $(\mathbb{B}_0,p)$-супераддитивной нормой, решеточный гомоморфизм $Q : E \to F$ с $\mathbb{B}_0$-плотным образом в F и $\mathbb{B}_0$-линейный оператор $S \in L(F,Y)$ такие, что*

$$T = SQ, \quad \|S\| \leqslant \|1\|, \quad \|Q\| \leqslant \sigma_p(T).$$

$\lhd$ *Достаточность.* Так как всякое разбиение единицы в $\mathbb{B}_0$ может быть дополнено до разбиения единицы в $\mathbb{B}$, то в определении 2 достаточно ограничиться разбиениями единицы в $\mathbb{B}_0$. Пусть (π_k) — произвольное разбиение единицы в $\mathbb{B}_0$, $x_1,\dots,x_n \in E$. Тогда в силу $\mathbb{B}_0$-линейности S и $(\mathbb{B}_0,p)$-супераддитивности нормы в F выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\sup_{k\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{i=1}^n \|\pi_k T x_i\|^p\Big)^{1/p} &= \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{i=1}^n \|S(\pi_k Q x_i)\|^p\Big)^{1/p} \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{i=1}^n \|\pi_k |Qx_i|\|^p\Big)^{1/p} \\ &\leqslant \Big\|\sum_{i=1}^n |Qx_i|\Big\| = \Big\|Q\Big(\sum_{i=1}^n |x_i|\Big)\Big\| \leqslant \sigma_p(T)\Big\|\sum_{i=1}^n |x_i|\Big\|.\end{aligned}$$

Следовательно, оператор T является $(\mathbb{B},p)$-суммирующим.

Необходимость. Ввиду [2, теорема 7.3.3(1)] отождествим $(Y,\|\cdot\|)$ с bo-полным пространством $(Y,|{\cdot}|,\Lambda)$, нормирующая решетка которого Λ служит порядково полным AM-пространством с единицей $\mathbf{1}$, причем $\|y\| = \|{|y|}\|_\infty$ $(y \in Y)$, где $\|\cdot\|_\infty$ — равномерная норма в Λ. Более того, множество всех порядковых проекторов в Λ изоморфно полной булевой алгебре $\mathbb{B}$. В дальнейшем мы будем отождествлять эти булевы алгебры. Определим оператор $\rho : X \to \Lambda_+$, полагая

$$\rho(x) := \sup\bigg\{\Big(\sum_{i=1}^n |Tx_i|^p\Big)^{1/p} : x_1,\dots,x_n \in E,\ \sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant |x|,\ n\in\mathbb{N}\bigg\} \quad (x \in E).$$

Супремум в указанной формуле существует, так как ввиду [5, лемма 5.1] и $(\mathbb{B},p)$-суммируемости оператора T выполняется условие $\big(\sum_{i=1}^n |Tx_i|^p\big)^{1/p} \leqslant \sigma_p(T)\|x\|\mathbf{1}$ для всех $x_1,\dots,x_n \in E$, $\sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant |x|$. Покажем, что $\rho : X \to \Lambda$ является полунормой. Ясно, что $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$ для всех $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть $z_1,\dots,z_n,x,y \in E$ такие, что $\sum_{i=1}^n |z_i| \leqslant |x+y|$. В силу [3, Proposition 1.1.3] найдутся u_i, v_i $(i=1,\dots,n)$ из E_+ такие, что $|z_i| = u_i + v_i$ $(i=1,\dots,n)$, $\sum_{i=1}^n u_i \leqslant |x|$, $\sum_{i=1}^n v_i \leqslant |y|$. Из неравенства Минковского следует справедливость соотношений

$$\begin{aligned}\rho(x)+\rho(y) &\geqslant \Big(\sum_{i=1}^n |Tu_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^n |Tv_i|^p\Big)^{1/p} \geqslant \Big(\sum_{i=1}^n (|Tu_i| + |Tv_i|)^p\Big)^{1/p} \\ &\geqslant \Big(\sum_{i=1}^n (|Tu_i + Tv_i|)^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{i=1}^n |Tz_i|^p\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Переходя к супремуму по всем $z_1,\dots,z_n \in E$, $\sum_{i=1}^n |z_i| \leqslant |x+y|$, получим $\rho(x)+\rho(y) \geqslant \rho(x+y)$. Ясно, что из соотношения $|x| \leqslant |y|$ следует $\rho(x) \leqslant \rho(y)$. Поэтому множество $\rho^{-1}(0) := \{x \in E : \rho(x) = 0\}$ является равномерно замкнутым порядковым идеалом в E. Обозначим фактор-решетку $E/\rho^{-1}(0)$ через F_0 и пусть $Q : E \to F_0$ — канонический фактор-гомоморфизм. Определим норму на F_0 по формуле $\|Qx\| := \|\rho(x)\|_\infty$ $(x \in E)$. Тогда (F_0,ρ,Λ) — решеточно нормированная решетка. Из определения ρ и [5, лемма 5.1] следует справедливость соотношений

$$\left|Tx\right| \leqslant \rho(x) \leqslant \sigma_p(T)\|x\|\mathbf{1} \quad (x \in E).$$

Следовательно, оператор $S_0 : F_0 \to Y$, действующий по формуле $S_0(Qx) := Tx$ $(x \in E)$ корректно определен и $\|S_0\| \leqslant 1$, $\|Q\| \leqslant \sigma_p(T)$. Возьмем *bo*-пополнение решеточно нормированной решетки (F_0,ρ,Λ) и обозначим его через $F = (F,\rho,\Lambda)$. Тогда F является банаховой решеткой, где норма определяется по формуле $\|x\| := \|\rho(x)\|_\infty$ $(x \in F)$. Пусть τ обозначает порядковый проектор в Λ на полосу $\rho(E)^{\perp\perp}$. Существует изоморфизм h из главного идеала $\mathbb{B}_0 := \{\pi \in \mathbb{B} : \pi \leqslant \tau\}$ в булеву алгебру порядковых проекторов в F такой, что $\pi(\rho x) = \rho(h(\pi)x)$ для всех $x \in F$. Следовательно, F является $\mathbb{B}_0$-циклической банаховой решеткой. Из определения *bo*-пополнения следует, что $F_0 = Q(X)$ — это $\mathbb{B}_0$-плотное подпространство в F. Проверим $(\mathbb{B}_0,p)$-супераддитивность нормы в F. Из определения ρ следует, что $(\rho(x)^p + \rho(y)^p)^{1/p} \leqslant \rho(x+y)$ для всех $x,y \in F_0$, $x \perp y$. Отсюда в силу леммы [5, лемма 5.1] для произвольных дизъюнктных $x,y \in F$ справедливы соотношения

$$\inf_{(\pi_k)\in\mathrm{Prt}_\sigma(\mathbb{B}_0)} \sup_{k\in\mathbb{N}} (\|\pi_k x\|^p + \|\pi_k y\|^p)^{1/p} = \inf_{(\pi_k)\in\mathrm{Prt}_\sigma(\mathbb{B}_0)} \sup_{k\in\mathbb{N}} (\|\pi_k\rho(x)\|_\infty^p + \|\pi_k\rho(y)\|_\infty^p)^{1/p}$$
$$= \|(\rho(x)^p + \rho(y)^p)^{1/p}\|_\infty \leqslant \|\rho(x+y)\|_\infty = \|x+y\|.$$

В силу [2, теорема 2.2.11] $F = rd(F_0)$. Всякий элемент из $d(F_0)$ имеет вид $\sum_\xi \pi_\xi x_\xi$, где $(\pi_\xi) \subset \mathbb{B}_0$ — разбиение единицы в $\mathbb{B}_0$, а семейство $(x_\xi) \subset F_0$ ограничено по решеточной норме ρ. Ввиду того, что $\left|S_0(x)\right| \leqslant \rho(x)$ для всех $x \in F_0$, положим $S\big(\sum_\xi \pi_\xi x_\xi\big) := \sum_\xi \pi_\xi S_0(x_\xi)$. Переходя к более мелкому разбиению, можно показать, что определение оператора S не зависит от разбиения (π_ξ) и семейства $(x_\xi) \subset F$. Далее продолжим оператор S с $d(F_0)$ на $F = rd(F_0)$ по *br*-непрерывности и обозначим его снова через S. Тогда $\|S\| \leqslant 1$, S является $\mathbb{B}_0$-линейным оператором и $T = SQ$. $\rhd$

Замечание. При $p = 1$ установленный результат превращается в эквивалентность (1) $\Longleftrightarrow$ (3) из [1, теорема 7.6], причем в [1] используется булевозначный анализ.

Литература

1. *Kusraev A. G.* Boolean Valued Analysis Approach to Injective Banach Lattices.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2011.—28 p.—(Preprint № 1).
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—395 p.
4. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.—(Trends in Science: The South of Russia. Math. Monogr. Issue 6).
5. *Kusraev A. G.* Boolean Valued Analysis Approach to Injective Banach Lattices II.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2012.—16 c.—(Preprint № 1).

Статья поступила 30 ноябрь 2015 г.

Тасоев Батрадз Ботазович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `tasoevbatradz@yandex.ru`

FACTORIZATION OF CONE $(\mathbb{B}, p)$-SUMMING OPERATORS

Tasoev B. B.

For a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ and a real $p \geqslant 1$ we introduce the class of cone $(\mathbb{B}, p)$-summing operators and prove a factorization result for this class.

Key words: Banach lattice, $\mathbb{B}$-cyclic Banach space, cone $(\mathbb{B}, p)$-summing operators, factorization, $(\mathbb{B}, p)$-superadditive norm.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 80–85

УДК **517.512**

ОБ ОТКЛОНЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ИХ ЗНАЧЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ

Ю. Х. Хасанов

В работе установлен ряд утверждений, которые позволяют оценить меру отклонений гармонической почти-периодической функции от их граничных значений. В качестве граничных значений рассматриваются равномерные почти-периодические функции, а как характеристики свойств граничных функций — модули непрерывности.

Ключевые слова: почти-периодическая функция, гармоническая функция, граничные значения, модуль непрерывности.

Напомним, что непрерывная на всей действительной оси функция $f(x)$ называется *равномерной почти-периодической*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого выполняется неравенство

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty).$$

Пространство равномерных почти-периодических функций, его обозначим через $\mathbf{B}$, есть замыкание множества тригонометрических полиномов

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}, \qquad a_k \in \mathbb{C},\ \lambda_k, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

по норме

$$\|f\|_B = \sup_x |f(x)|.$$

Основные сведения о функциях из пространства B можно найти в [1] или [2].

Пусть $f(x)$ равномерная почти-периодическая функция с рядом Фурье

$$A + \sum_k A_k \cos \lambda_k x + B_k \sin \lambda_k x.$$

Покажем, что существует гармоническая и непрерывная для $\sigma \geqslant 0$ функция $U(x,\sigma)$, совпадающая с $f(x)$ при $\sigma = 0$ с нормой

$$\|U(x,\sigma)\|_B = \sup_x |U(x,\sigma)|.$$

Рассмотрим функцию, представимую интегралом Пуассона

$$U(x,\sigma) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sigma}{\sigma^2+(t-x)^2}\,dt \qquad (\sigma > 0).$$

Непосредственно проверяется, что функция

$$u(x,\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma^2+(t-x)^2}$$

при фиксированном t и $\sigma > 0$ является гармонической. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{(t-x)^2-\sigma^2}{[\sigma^2+(t-x)^2]^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} = \frac{2\sigma^3-6\sigma(t-x)^2}{[\sigma^2+(t-x)^2]^3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\sigma(t-x)}{[\sigma^2+(t-x)^2]^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2\sigma^3+6\sigma(t-x)^2}{[\sigma^2+(t-x)^2]^3}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

т. е. функция $u(x,\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma^2+(t-x)^2}$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Следовательно, она является гармонической, поэтому $U(x,\sigma)$ также гармоническая функция.

Теперь покажем, что при $\sigma > 0$ и $U(x,\sigma)$ по переменной x является почти-периодической функцией и притом равномерно для всех $\sigma > 0$. С помощью подстановки $t - x = \sigma u$ получим

$$U(x,\sigma) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+\sigma u)}{1+u^2}\,du. \tag{1}$$

Если τ есть ε -почти-период функции $U(x,\sigma)$, то в силу определения равномерных почти-периодических функций, имеем

$$|U(x+\tau,\sigma) - U(x,\sigma)| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+\sigma u+\tau) - f(x+\sigma u)|}{1+u^2}\,du$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\varepsilon}{\pi}\pi = \varepsilon,$$

что и доказывает почти-периодичность функции $U(x,\sigma)$.

Далее, мы должны показать, что $U(x,\sigma) \to f(x)$ при $\sigma \to 0$. С этой целью построим ряд Фурье функции $U(x,\sigma)$. Если обозначить через

$$M_x\{U(x,\sigma)\cos\lambda x\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} U(x,\sigma)\cos\lambda x\,dx$$

среднее значение функции $U(x,\sigma)\cos\lambda x$, то имеем

$$M_x\{U(x,\sigma)\cos\lambda x\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} M_x\{f(x+\sigma u)\cos\lambda x\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\lambda\sigma u\,du}{1+u^2} M_x\{f(x)\cos\lambda x\} = M_x\{f(x)\cos\lambda x\}\exp(-|\lambda|\sigma).$$

Аналогично

$$M_x\{U(x,\sigma)\sin\lambda x\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda\sigma u\,du}{1+u^2}M_x\{f(x)\sin\lambda x\} = M_x\{f(x)\sin\lambda x\}\exp(-|\lambda|\sigma).$$

Поэтому

$$U(x,\sigma) \sim A + \sum_k (A_k\cos\lambda_k x + B_k\sin\lambda_k x)\exp(-\lambda_k\sigma).$$

Из последнего ряда и представления (1) следует, что при $\sigma \to 0$ и $U(x,\sigma) \to f(x)$, притом равномерно по x.

Наряду с функцией $f(x)$ рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt,$$

которая [3] при условии

$$\int\limits_0^1 t^{-1}\omega(f;t)\,dt < \infty \tag{2}$$

будет функцией непрерывной на всей вещественной оси, где $\omega(f;t)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$ в равномерной метрике.

Известно [1], что если равномерно по x

$$\left|\int\limits_0^1 f(x+t)\,dt\right| < M, \tag{3}$$

то $g(x)$ будет также равномерной почти-периодической функцией. Кроме того, функция $V(x,\sigma)$ $(\sigma > 0)$, сопряженная к гармонической функции $U(x,\sigma)$, при выполнении условия (3) будет также равномерной почти-периодической с рядом Фурье

$$\sum_k (B_k\cos\lambda_k x + A_k\sin\lambda_k x)\exp(-\lambda_k\sigma).$$

Пусть $f(x) \in B$. За меру отклонения функции $U(x,\sigma)$ от ее граничных значений $f(x)$ примем величину

$$\Delta(f;\sigma)_B = \|U(x,\sigma) - f(x)\|_B.$$

Отметим, прежде всего, некоторые свойства величины $\Delta(f;\sigma)_B$.

Лемма. *Если $U(x,\sigma)$ гармоническая функция и имеет своими граничными значениями функцию $f(x) \in B$, то*

$$\Delta(f;\sigma_1+\sigma_2)_B \leqslant \Delta(f;\sigma_1)_B + \Delta(f;\sigma_2)_B, \tag{4}$$

$$\Delta(f;n\sigma)_B \leqslant n\Delta(f;\sigma)_B, \tag{5}$$

где n — любое натуральное число.

$\lhd$ Неравенство (5) является следствием (4). Для доказательства свойства (4) воспользуемся очевидным тождеством

$$U(x,\sigma_1+\sigma_2)-U(x,\sigma_1)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big\{U(x+t,\sigma_2)-f(x+t)\big\}\frac{\sigma_1}{t^2+\sigma_1^2}\,dt,$$

справедливым для любой гармонической функции $U(x,\sigma)$. Применяя обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\Delta(f,\sigma_1+\sigma_2)_B-\Delta(f,\sigma_1)_B\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|U(x+t,\sigma_2)-f(x+t)\|_B\frac{\sigma_1}{t^2+\sigma_1^2}\,dt$$

или

$$\Delta(f,\sigma_1+\sigma_2)_B\leqslant\Delta(f,\sigma_1)_B+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|U(x+t,\sigma_2)-f(x+t)\|_B\frac{\sigma_1}{t^2+\sigma_1^2}\,dt.$$

Из последнего неравенства вытекает (4). $\rhd$

Теперь приведем ряд утверждений, которые обеспечивают возможность оценивать поведение величины $\Delta(f,\sigma)_B$ в зависимости от свойств их граничных значений $f(x)\in B$. В качестве характеристики свойств граничных функций рассматриваются модули непрерывности.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ равномерная почти-периодическая функция. Тогда справедлива оценка*

$$\Delta(f,\sigma)_B\leqslant C\sigma\left\{1+\int\limits_0^1\frac{\omega_k(f;t)}{t^2}\,dt\right\},$$

где $\omega_k(f;t)$ — модуль непрерывности порядка k, а константа C не зависит от σ.

$\lhd$ В работе [4] установлено, что всякая гармоническая функция $U(\sigma,x)$ представима интегралом Пуассона

$$U(x,\sigma)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\frac{\sigma}{t^2+\sigma^2}\,dt\quad(\sigma>0).$$

Поэтому, как показано в [5] (см. [5, с. 97]), имеем

$$\Delta(f;\sigma)_B=\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left\{\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\tbinom{k}{r}f(x+rt)\right\}\frac{\sigma}{t^2+\sigma^2}\,dt\right\|_B,$$

где $f(x)\in B$.

Применяя неравенство Минковского и разбивая правую часть полученного неравенства на три слагаемых, находим

$$\Delta(f;\sigma)_B\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\omega_k(f;t)_B\frac{\sigma}{t^2+\sigma^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\sigma}+\int\limits_{\sigma}^{1}+\int\limits_1^{\infty}\right)\omega_k(f;t)_B\frac{\sigma}{t^2+\sigma^2}\,dt$$

$$\leqslant\omega_k(f;\sigma)_B+\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{1}\frac{\omega_k(f;t)_B}{t^2}\,dt+\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_1^{\infty}\frac{\omega_k(f;t)_B}{t^2}\,dt=I_1+I_2+I_3.$$

Так как функция $f(x) \in B$ почти всюду на $[0,\sigma]$ совпадает с некоторой функцией ограниченной вариации, то (например, см. [3, с. 140])

$$\omega_k(f;\sigma)_B = O(\sigma).$$

Третье слагаемое $I_3 \to 0$ при $\sigma \to 0$, кроме того, интеграл в третьем слагаемом сходится, т. е. является конечным числом. Из оценок для величин I_1, I_2, I_3 получаем утверждения теоремы 1.

При $f(x) \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ результаты аналогичного характера получены в работе [5]. В качестве характеристики свойств граничных функций рассмотрены наилучшие приближения целыми функциями экспоненциального типа.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ равномерная почти-периодическая функция и для нее выполнены условия* (2) *и* (3). *Тогда*

$$\Delta(g,\sigma)_B \leqslant C\left\{\sigma + \int\limits_0^\sigma \frac{\omega_k(f;t)}{t}\,dt + \sigma\int\limits_\sigma^1 \frac{\omega_k(f;t)}{t^2}\,dt\right\}.$$

Доказательство этой теоремы основывается на том же приеме, что и в доказательстве теоремы 1, нужно лишь вместо функции $f(x)$ взять $g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt$, а $U(x,\sigma)$ заменить на $V(x,\sigma)$.

Теорема 3. *Если гармоническая в верхней полуплоскости функция $U(x,\sigma)$ равномерно по σ $(\sigma > 0)$ удовлетворяет условию*

$$|U(x,\sigma)| \leqslant K,$$

а почти-периодическая функция $f(x)$ $(|f(x)| \leqslant K)$ — ее граничные значения в равномерной метрике, то

$$\omega_2(f;\sigma)_B \leqslant C\Delta(f;\sigma)_B. \tag{6}$$

$\lhd$ В силу теоремы Лагранжа для любого $\sigma > 0$ имеем

$$U(x,\sigma) - U(x,2\sigma) = \sigma U'_\sigma(x,\sigma+\theta\sigma) \qquad (0 < \theta = \theta(x,\sigma) < 1).$$

Поскольку функция $U'_z(x,z)$ в верхней полуплоскости также будет гармонической и ограниченной в полуплоскости $z > \sigma$, то применяя к ней принцип максимума для гармонических и ограниченных функций получим

$$\sup_x |U'_z(x,z)| \leqslant \frac{\Delta(f;\sigma)_B + \Delta(f;2\sigma)_B}{\sigma} \qquad (z \geqslant 2\sigma).$$

Поэтому в силу неравенства для производных от гармонических функций [1], имеем

$$\sup_x |U''_{\sigma\sigma}(x,3\sigma)| \leqslant K\frac{\Delta(f;\sigma)_B + \Delta(f;2\sigma)_B}{\sigma^2} \qquad (z \geqslant 2\sigma), \tag{7}$$

где K — константа, не зависящая от функции $f(x) \in B$ и $\sigma > 0$. Оценим вторую разность функции $f(x)$ с шагом σ:

$$\begin{gathered}|f(x) - 2f(x+\sigma) + f(x+2\sigma)| \leqslant |f(x) - U(x,3\sigma)| + 2|f(x+\sigma) - U(x+\sigma,3\sigma)| \\ +|f(x+2\sigma) - U(x+2\sigma,3\sigma)| + |U(x,3\sigma) + U(x+2\sigma,3\sigma) - 2U(x+\sigma,3\sigma)| \\ \leqslant 4\Delta(f;3\sigma)_B + \left\|\int\limits_0^\sigma d\theta_1 \int\limits_0^\sigma U''_{xx}(x+\theta_1+\theta_2,3\sigma)\,d\theta_2\right\|_B.\end{gathered}$$

Выше было доказано, что функция $U(x,\sigma)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является гармонической. Следовательно, в силу (7) получим

$$\omega_2(f;\sigma)_B \leqslant C_1\Delta(f;3\sigma)_B + \sigma^2 \sup_x |U''_{\sigma\sigma}(x,3\sigma)| \leqslant C_2\Delta(f;3\sigma)_B + \Delta(f;\sigma)_B + \Delta(f;2\sigma)_B.$$

Отсюда, если в последнем неравенстве использовать свойство (7), получаем

$$\omega_2(f;\sigma)_B \leqslant C_3\Delta(f;\sigma)_B. \ \rhd$$

В работе [3, с. 275] установлена оценка снизу величины $\omega_k(f^{(r)};h)_{L_p}$, имеющая при любом $1 \leqslant p \leqslant \infty$ вид

$$\omega_k\left(f^{(r)};\frac{1}{\sigma}\right)_{L_p} \geqslant C\sigma^r A_\sigma(f)_{L_p}, \tag{8}$$

где $A_\sigma(f)_{L_p}$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ посредством целых функций степени не выше σ в заданной метрике $L_p(-\infty,\infty)$.

Из (6) с помощью оценки (8) при $r=0$, $k=2$ для функции $f(x) \in B$ и $\sigma > 0$ легко можно установить, что

$$A_\sigma(f)_B \leqslant C\Delta(f;\sigma)_B.$$

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2 ранее приведены автором без доказательства в работе [6].

Литература

1. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции.—М.–Л.: Гостехиздат, 1947.
2. *Бор Г.* Почти периодические функции.—М.: Книжный дом «Либроком», 2009.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.—М.: Физматгиз, 1960.
4. *Hill E., Tamarkin I.* On the absolute integrability of Fourier transforms // Fundam. Math.—1935.—Vol. 25.—P. 329–352.
5. *Тиман М. Ф.* Приближение функций, заданных на всей вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика.—1969.—№2.—С. 89–101.
6. *Хасанов Ю. Х.* Об отклонении гармонических почти-периодических функций от их значений на границе // Матер. 17-й междунар. Саратовской зимней школы, посвящ. 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова «Современные проблемы теории функций и их приложений».—Саратов, 2014.—С. 282–285.

Статья поступила 5 апреля 2015 г.

Хасанов Юсуфали Хасанович
Российско-Таджикский (славянский) университет,
профессор кафедры информатики и информационных систем
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, ул. М. Турсунзода, д. 30
E-mail: yukhas60@mail.ru

ON DEVIATION OF HARMONIC ALMOST PERIODIC FUNCTIONS FROM THEIR BOUNDARY VALUES

Khasanov Yu. Kh.

Some estimates of a measure of displacements of harmonic almost periodic functions from their boundary values are obtained. Uniform almost periodic functions are considered as boundary functions and the estimates are stated in terms of modulus of continuity.

Key words: almost periodic function, harmonic function, boundary values, modulus of continuity.

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на русском и английском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках. Для статей на русском языке список литературы приводится также на английском языке (подробнее на сайте `http://www.vmj.ru/`).

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов (≈ 12 стр. формата A4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Адрес редакции:
362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 53 84 62;
E-mail: `rio@smath.ru`
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17

Выпуск 4

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-50223 от 15 июня 2012 г.

Подписано в печать 7.12.2015. Дата выхода в свет 25.12.2015.
Формат бумаги 60×84 1/8. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 10,11. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель и издатель:
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.