Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17, выпуск 2 апрель–июнь, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2015

Редакционная коллегия поздравляет
доктора физико-математических наук,
профессора Владимира Амурхановича Койбаева
с 60-летием со дня рождения

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 5–11

УДК **519.17+514.52**

АВТОМОРФИЗМЫ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ $(1197, 156, 15, 21)$

В. В. Биткина, А. К. Гутнова, А. А. Махнев

К 60-летию
Владимира Амурхановича Койбаева

Пусть 3-(V, K, Λ) схема $\mathscr{E} = (X, \mathscr{B})$ является расширением симметричной 2-схемы. Тогда либо $\mathscr{E}$ является адамаровой 3-$(4\Lambda+4, 2\Lambda+2, \Lambda)$ схемой, либо $V = (\Lambda+1)(\Lambda^2+5\Lambda+5)$ и $K = (\Lambda+1)(\Lambda+2)$, либо $V = 496$, $K = 40$ и $\Lambda = 3$. Дополнительный граф к блочному графу 3-$(496, 40, 3)$ схемы сильно регулярен с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$ и имеет сильно регулярные окрестности вершин с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$. В работе найдены автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$. Доказано, что указанный граф не является реберно симметричным.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, реберно симметричный граф, группа автоморфизмов графа.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф $\{a\} \cup [a]$, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, каждое ребро Γ лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин.

Система инцидентности $(X, \mathscr{B})$ с множеством точек X и множеством блоков $\mathscr{B}$ называется t-(V, K, Λ) *схемой*, если $|X| = V$, каждый блок содержит ровно K точек и любые t точки лежат ровно в Λ блоках. Любая 2-схема является (V, B, R, K, Λ) схемой, где B — число блоков, каждая точка инцидентна R блокам, и имеют место равенства $VR = BK$, $(V-1)\Lambda = R(K-1)$. Схема называется *симметричной*, если $B = V$. Схема называется *квазисимметричной*, если для любых двух блоков $B, C \in \mathscr{B}$ имеем $|B \cap C| \in \{x, y\}$. Числа x, y называются *числами пересечений квазисимметричной схемы*, и предполагается, что $x < y$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 14-11-00061 (теорема), и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом, соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013 (следствие).

Блочный граф квазисимметричной схемы $(X, \mathscr{B})$ в качестве вершин имеет блоки схемы и два блока $B, C \in \mathscr{B}$ смежны, если $|B \cap C| = y$.

Предложение 1. *Блочный граф квазисимметричной* (V, B, R, K, Λ) *схемы сильно регулярен с собственными значениями* $k = ((R-1)K - xB + x)/(y-x)$ *кратности* 1, $k = (R - K - \Lambda + x)/(y-x)$ *кратности* $V-1$ *и* $k = -(K-x)/(y-x)$ *кратности* $B-V$.

Производной схемой для t-(V, K, Λ) схемы $\mathscr{D} = (X, \mathscr{B})$ в точке $x \in X$ называется схема $\mathscr{D}_x$ с множеством точек $X_x = X - \{x\}$ и множеством блоков $\mathscr{B}_x = \{B - \{x\} : x \in B \in \mathscr{B}\}$. Схема $\mathscr{E}$ называется *расширением* схемы $\mathscr{D}$ если производная схемы $\mathscr{E}$ в каждой точке изоморфна $\mathscr{D}$. *Вычетом* схемы $\mathscr{D}$ в блоке B называется схема $\mathscr{D}^B$ с множеством точек $X^B = X - \{x\}$ и множеством блоков $\mathscr{B}^B = \{C \in \mathscr{B}\} : |B \cap C| = 0\}$. Хорошо известно, что проективная плоскость расширяема, только если ее порядок равен 2 или 4. П. Камерон [1, теорема 1.35] описал расширения симметричных 2-схем.

Предложение 2. *Пусть* 3-(V, K, Λ) *схема* $\mathscr{E} = (X, \mathscr{B})$ *является расширением симметричной 2-схемы. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $\mathscr{E}$ *является адамаровой* 3-$(4\Lambda + 4, 2\Lambda + 2, \Lambda)$ *схемой*;

(2) $V = (\Lambda + 1)(\Lambda^2 + 5\Lambda + 5)$ *и* $K = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2)$;

(3) $V = 496$, $K = 40$ *и* $\Lambda = 3$.

В случае (3) имеем $R = V - 1 = 495$, $B = VR/K = 496 \cdot 495/40 = 6138$ и дополнительный граф к блочному графу схемы имеет параметры $(6138, 1197, 156, 252)$ и спектр $1197^1, 9^{5642}, -105^{495}$. Отсюда максимальный порядок коклики не больше $vm/(k+m) = 6138 \cdot 105/1302 = 495$. В частности, граница Хофмана для коклик совпадает с границей Цветковича (см. лемму 1). Дополнительный граф к блочному графу 3-$(496, 40, 3)$ схемы назовем монстром Камерона. В [2] доказано

Предложение 3. *Для монстра Камерона* Γ *выполняются следующие утверждения:*

(1) *окрестность любой вершины в графе* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(1197, 156, 15, 21)$ *и спектром* 156^1, 9^{741}, -15^{455}, *причем порядок коклики в этом графе не больше* 105;

(2) *множество блоков* C_x, *содержащих точку* x *схемы* $\mathscr{E}$, *является* 495*-кокликой графа* Γ, *для которой достигается равенство в границах Хофмана и Цветковича*;

(3) *подграф* $\Gamma - C_x$ *сильно регулярен с параметрами* $(5643, 1092, 141, 228)$ *и спектром* 1092^1, 9^{5148}, -96^{494};

(4) *для различных точек* x, y *схемы* $\mathscr{E}$ *имеем* $|C_x \cap C_y| = 39$, *причем для коклики* $C_x - C_y$ *графа* $\Gamma - C_y$ *достигается равенство в границе Хофмана.*

В данной работе найдены автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$.

Теорема. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(1197, 156, 15, 21)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $|\Omega| \leqslant 171$, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо*

  (*i*) $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 72l$, *либо*

  (*ii*) $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 168l - 21$, *либо*

  (*iii*) $p = 19$ *и* $\alpha_1(g) = 456l + 171$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо*

  (*i*) $p = 13$, $n = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 312l + 156$, *либо*

  (*ii*) $p = 2$, $n = 9$ *и* $\alpha_1(g) = 48l + 12$ *или* $n = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 32l - 12$, *либо*

  (*iii*) $p = 5$, $n = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 120l + 45$ *или* $n = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 120l - 30$;

(3) Ω *является* $3t + 1$*-кокликой,* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 72l + 12 - 45t$;

(4) Ω *содержит геодезический 2-путь и* $p \leqslant 13$.

Следствие. *Сильно регулярный граф с параметрами* $(1197, 156, 15, 21)$ *не является реберно симметричным.*

2. Автоморфизмы графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$

Приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* D — *индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \leqslant d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leqslant r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - D$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* D.

$\lhd$ Это утверждение хорошо известно (см., например, [3, § 2]). $\rhd$

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ и спектром 156^1, 9^{741}, -15^{455}. Если D — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то $d - 9 \leqslant w(156-d)/(1197-w) \leqslant d + 15$. Поэтому число вершин в коклике (клике) не больше 105 (не больше 11). Если C является 105-кокликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - C$ смежна точно с 15 вершинами из C.

Лемма 2 [4, теорема 3.2]**.** *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и собственными значениями* k, r, $-m$. *Если* g — *автоморфизм* Γ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, *то* $|\Omega| \leqslant v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k-r)$.

В случае сильно регулярного графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ получим $|\Omega| \leqslant 1197/7 = 171$.

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом графу Γ отвечает симметричная схема отношений $(X, \{R_0, R_1, R_2\})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\bar{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей 1, f, $v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает мономиальное матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(G)$-инвариантных подпространств W_0, W_1, W_2 матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g \in G$ получим равенство

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Лемма 3. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(1197, 156, 15, 21)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* χ_1 *— характер, полученный при проектировании* $\psi(G)$ *на подпространство размерности* 741. *Тогда*

$$\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 57)/8, \quad \alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$$

для любого l, *не кратного* p, *и* $741 - \chi_1(g)$ *делится на* p.

$\lhd$ Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$. Тогда

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 741 & 171/4 & -57/8 \\ 455 & -175/4 & 49/8 \end{pmatrix},$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 741 равно $\chi_1(g) = (13\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g)/4 - \alpha_2(g))/8)/21$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получаем $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 57)/8$.

Два последних утверждения леммы следуют из [6, лемма 1]. $\rhd$

В леммах 4–7 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 741.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω *— пустой граф, то либо*

(i) $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 72l$, *либо*

(ii) $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 168l - 21$, *либо*

(iii) $p = 19$ *и* $\alpha_1(g) = 456l + 171$;

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо*

(i) $p = 13$, $n = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 312l + 156$, *либо*

(ii) $p = 2$, $n = 9$ *и* $\alpha_1(g) = 48l + 12$ *или* $n = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 32l - 12$, *либо*

(iii) $p = 5$, $n = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 120l + 45$ *или* $n = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 120l - 30$;

(3) *если* Ω *является* m*-кокликой, то* $p = 3$, $m = 3t + 1$ *и* $\alpha_1(g) = 72l + 12 - 45t$;

(4) *если* Ω *является объединением* m ($m \geqslant 2$) *изолированных клик, то* $p = 3$ *и* Ω *— коклика.*

$\lhd$ Пусть Ω — пустой граф, $\alpha_i(g) = pw_i$. Так как $1197 = 9 \cdot 7 \cdot 19$, то $p \in \{3, 7, 19\}$.

Пусть $p = 3$. Тогда $\chi_1(g) = (w_1 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 72l$.

Пусть $p = 7$. Тогда $\chi_1(g) = (7w_1/3 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 168l - 21$.

Пусть $p = 19$. Тогда $\chi_1(g) = 19(w_1/3 - 3)/8$ и $\alpha_1(g) = 456l + 171$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$ и $\Omega = \{a\}$, то p делит 156 и 1040, поэтому $p = 2, 13$. В случае $p = 2$ для $u \in \Gamma - \Omega$ подграф $[u] \cap [u^g]$ содержит 15 или 21 вершин, поэтому $[u]$ содержит вершину из Ω, противоречие.

В случае $p = 13$ имеем $\chi_1(g) = (5 + 13w_1/3 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 312l + 156$.

Пусть $n \geqslant 2$ и $a, b \in \Omega$. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^\perp$, то p делит 140, 900 и $17 - n$ и $p = 2, 5$. В случае $p = 2$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с нечетным числом вершин из Ω, то $n = 9, 11$ В случае $n = 9$ имеем $\chi_1(g) = (45 + 2w_1/3 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 48l + 12$. В случае $n = 11$ имеем $\chi_1(g) = (55 + 2w_1/3 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 32l - 12$. В случае $p = 5$ получим $n = 2$ и $\alpha_1(g) = 120l + 45$ или $n = 7$ и $\alpha_1(g) = 120l - 30$.

Пусть Ω является m-кокликой, $0 < t \leqslant 34$. Если $a, b \in \Omega$, то g действует полурегулярно на $[a] \cap [b]$, $[a] - [b]$, поэтому p делит 21 и 135. Отсюда $p = 3$, $m = 3t + 1$, $\chi_1(g) = (15t + 5 + w_1 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 72l + 12 - 45t$.

Пусть Ω является объединением m ($m \geqslant 2$) изолированных клик. Если a, c — несмежные вершины из Ω, то g действует полурегулярно на $[a] \cap [c]$ и p делит 21.

Пусть a, b — смежные вершины из клики, лежащей в Ω. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^{\perp}$, то p делит 140. Отсюда $p = 7$ и порядки изолированных клик в Ω равны 3 или 10. Противоречие с тем, что 7 не делит $900 - 3$. $\rhd$

Лемма 5. *Если Ω содержит геодезический путь b, a, c, то выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов D с $\lambda_D = 15$ и $\mu_D = 21$;*

(2) *если Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины $a \in \Omega$, то $p = 2, 5$, $\Omega = a^{\perp}$ и $\alpha_1(g) = 0$;*

(3) $p \leqslant 13$.

$\lhd$ Пусть Γ содержит собственный сильно регулярный подграф D с $\lambda_D = 15$ и $\mu_D = 21$. Тогда $36 + 4(k_D - 21) = 4s^2$, $k_D = s^2 + 12$, D имеет неглавные собственные значения $s - 3$, $-(s + 3)$ и кратность $s - 3$ равна $(s + 2)(s^2 + 12)(s^2 + s + 15)/42s$. Отсюда $s = 4, 10$ и нарушается прямоугольное соотношение.

Если Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины $a \in \Omega$, то $p = 2, 5, 13$, $\Omega = a^{\perp}$ и $\alpha_1(g) = 0$. Так как вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с одной вершиной в любой орбите $u^{\langle g \rangle}$ длины p, то $p \neq 13$.

Если $p \geqslant 23$, то Ω — сильно регулярный подграф с $\lambda_\Omega = 15$ и $\mu_\Omega = 21$, противоречие.

Если $p = 19$, то $\lambda_\Omega = 15$ и $\mu_\Omega = 2, 21$. Далее, $|\Omega| = 19, 38, \ldots, 171$ и степень вершины в Ω равна $42, 80, \ldots$ Пусть $\Omega_2(a)$ содержит y вершин, смежных с 21 вершинами из $\Omega(a)$. Если степень вершины a в графе Ω не меньше 80, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $80 \cdot 26$, но не больше $90 \cdot 21$, противоречие. Итак, Ω — регулярный граф степени 42. По лемме 1 имеем $33 \leqslant 114|\Omega|/(1197 - |\Omega|) \leqslant 57$ и $1881 \leqslant 7|\Omega|$, противоречие.

Если $p = 17$, то $\lambda_\Omega = 15$ и $\mu_\Omega = 4, 21$, $|\Omega| = 24, 41, \ldots, 160$, степени вершин в Ω равны 20, 54, 88. Пусть y — число вершин в $\Omega_2(a)$, смежных с 21 вершиной из $\Omega(a)$, $k_2 = |\Omega_2(a)|$. Пусть D — регулярный подграф из Γ степени 15 на w вершинах. По лемме 1 имеем $43 \leqslant w \leqslant 210$. Поэтому в Ω нет вершин степени 20.

Если a — вершина степени 88 в Ω, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $38 \cdot 88$, но не больше $21k_2$, противоречие с тем, что $k_2 \leqslant 71$.

Значит, Ω — регулярный граф степени 54. По лемме 1 имеем неравенства $45 \leqslant 102|\Omega|/(1197 - |\Omega|) \leqslant 69$ и $2565 \leqslant 7|\Omega|$, противоречие. $\rhd$

3. Доказательство следствия

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве дуг (упорядоченных ребер) графа Γ. По теореме $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19\}$. Далее, для смежных вершин a, b имеем $|G : G_a| = 63 \cdot 19$ и $|G_a : G_{a,b}| = 156$.

Лемма 6. *Пусть f — элемент порядка 19 из G, g — элемент простого порядка $p < 19$ из $C_G(f)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 3$, *Ω — пустой граф и* $\alpha_1(g) = 627$;

(2) $p = 7$, $|\Omega| = 133$ *и* $\alpha_1(g) = 0$;

(3) $p = 5$, $|\Omega| = 57$ *и* $\alpha_1(g) = 1140$ *или* $|\Omega| = 152$ *и* $\alpha_1(g) = 120l + 75$;

(3) $p = 3$, $|\Omega| = 57$ *и* $\alpha_1(g) = 456s + 228$ *или* $|\Omega| = 114$ *и* $\alpha_1(g) = 456s + 57$ *или* $|\Omega| = 171$ *и* $\alpha_1(g) = 456s + 342$;

(4) $p = 2$, $|\Omega| = 38$ *и* $\alpha_1(g) = 912s + 57$ *или* $|\Omega| = 57$ *и* $\alpha_1(g) = 798$, *или* $|\Omega| = 95$ *и* $\alpha_1(g) = 684$, *или* $|\Omega| = 133$ *и* $\alpha_1(g) = 114$, *или* $|\Omega| = 171$ *и* $\alpha_1(g) = 228$.

$\lhd$ Пусть g — элемент простого порядка $p < 19$ из $C_G(f)$. Тогда либо $p = 3$, Ω — пустой граф и $\alpha_1(g) = 0$, либо $|\Omega| = 19t$, $t \leqslant 9$ и p делит $63 - t$. Далее, $\chi_1(g) = (95t + \alpha_1(g)/3 - 57)/8$. Тогда $p \neq 13$, и если $p = 11$, то $|\Omega| = 152$ и $\alpha_1(g) = 264l + 99$ делится на 19. Отсюда $l = 2$ и $\alpha_1(g) = 627$.

Если $p = 7$, то $|\Omega| = 133$ и $\alpha_1(g) = 168l$ делится на 19. Отсюда $\alpha_1(g) = 0$.

Если $p = 5$, то $t = 3, 8$. В первом случае $|\Omega| = 57$ и $228 + \alpha_1(g)/3$ делится на 8. Отсюда $\alpha_1(g) = 120l + 60$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 1140$. Во втором случае $|\Omega| = 152$ и $703 + \alpha_1(g)/3$ делится на 8. Отсюда $\alpha_1(g) = 120l + 75$ делится на 19, противоречие.

Если $p = 3$, то $t = 3, 6, 9$. В первом случае $|\Omega| = 57$ и $228 + \alpha_1(g)/3$ делится на 8. Отсюда $\alpha_1(g) = 24l + 12$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 456s + 228$. Во втором случае $|\Omega| = 114$ и $\alpha_1(g)/3 - 3$ делится на 8. Отсюда $\alpha_1(g) = 24l + 9$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 456s + 57$. В третьем случае $|\Omega| = 171$ и $\alpha_1(g)/3 - 2$ делится на 8. Отсюда $\alpha_1(g) = 24l + 6$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 456s + 342$.

Если $p = 2$, то $t = 1, 3, 5, 7, 9$. В первом случае $|\Omega| = 38$ и число $(3013 + \alpha_1(g)/3)/8$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 48l - 3$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 912s + 57$. Во втором случае $|\Omega| = 57$ и число $(5358 + \alpha_1(g)/3)/8$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 48l - 18$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 798$. В третьем случае $|\Omega| = 95$ и число $(8968 + \alpha_1(g)/3)/8$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 48l$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 912$. В четвертом случае $|\Omega| = 133$ и число $(12578 + \alpha_1(g)/3)/8$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 48l + 18$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 114$. В пятом случае $|\Omega| = 171$ и число $(16188 + \alpha_1(g)/3)/8$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 48l - 12$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 228$. $\rhd$

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *$S(G) = O_{3,7}(G)$;*

(2) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $L_3(7)$, $U_3(8)$, $L_4(7)$, $U_4(8)$, HN.*

$\lhd$ Пусть $|S(G)|$ делится на 19 и R — силовская 19-подгруппа из $S(G)$. Тогда $|N_G(R)|$ делится на 13, противоречие с леммой 6.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Из действия элемента порядка 19 на минимальной нормальной подгруппе $\bar{N}$ из $\bar{T}$ следует, что 19 делит $|\bar{N}|$ и $\bar{T}$ — простая неабелева группа.

Из [7, таблица 1] следует, что группа $\bar{T}$ изоморфна $L_3(7)$, $U_3(8)$, $L_4(7)$, $U_4(8)$, HN. $\rhd$

Завершим доказательство следствия. Группы $U_3(8)$, $L_4(7)$, $U_4(8)$, HN не содержат максимальных подгрупп индекса, делящего $19 \cdot 63$.

Если группа $\bar{T}$ изоморфна $L_3(7)$, то

$$|\bar{T} : \bar{T}_a| = 57, \quad \bar{T}_a = 7^2 : SL_2(7) : 2,$$

либо

$$|S(G) : S(G)_a| = 7, \quad |\bar{G} : \bar{T}| = 3, \quad \bar{G}_a = 7^2 : SL_2(7) : 2,$$

либо

$$|S(G) : S(G)_a| = 21.$$

В любом случае $|G|$ не делится на 13, противоречие. $\rhd$

Литература

1. *Cameron P., Van Lint J.* Designs, Graphs, Codes and their Links.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.—240 p.—(London Math. Soc. Student Texts, № 22).
2. *Махнев А. А.* Расширения симметричных 2-схем // Тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения».—Новосибирск, 2015.—С. 112.

3. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb.—1993.—Vol. 14.—P. 397–407.
4. *Behbahani M., Lam C.* Strongly regular graphs with non-trivial automorphisms // Discrete Math.—2011.—Vol. 311, № 2–3.—P. 132–144.
5. *Cameron P. J.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts, № 45).
6. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН.—2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
7. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. electr. Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 23 апреля 2015 г.

Биткина Виктория Васильевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
ассистент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `bviktoriyav@mail.ru`

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `gutnovaalina@gmail.com`

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`

AUTOMORPHISMS OF A STRONGLY REGULAR GRAPH WITH PARAMETERS $(1197, 156, 15, 21)$

Bitkina V. V., Gutnova A. K., Makhnev A. A.

Let a 3-(V, K, Λ) scheme $\mathscr{E} = (X, \mathscr{B})$ is an extension of a symmetric 2-scheme. Then either $\mathscr{E}$ is Hadamard 3-$(4\Lambda + 4, 2\Lambda + 2, \Lambda)$ scheme, or $V = (\Lambda + 1)(\Lambda^2 + 5\Lambda + 5)$ and $K = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2)$, or $V = 496$, $K = 40$ and $\Lambda = 3$. The complementary graph of a block graph of 3-$(496, 40, 3)$ scheme is strongly regular with parameters $(6138, 1197, 156, 252)$ and the neighborhoods of its vertices are strongly regular with parameters $(1197, 156, 15, 21)$. In this paper automorphisms of strongly regular graph with parameters $(1197, 156, 15, 21)$ are studied. We yet introduce the structure of automorphism groups of abovementioned graph in vetrex symmetric case.

Key words: strongly regular graph, vertex symmetric graph, automorphism groups of graph.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 12–15

УДК **512.5**

СЕТЬ И ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СЕТЕВАЯ ГРУППА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С НЕРАСЩЕПИМЫМ МАКСИМАЛЬНЫМ ТОРОМ[1]

Н. А. Джусоева

Владимиру Амурхановичу Койбаеву
к его шестидесятилетию

Элементы матриц нерасщепимого максимального тора $T = T(d)$ (связанного с радикальным расширением $k(\sqrt[n]{d})$ степени n основного поля k) порождают некоторое подкольцо $R(d)$ поля k. Пусть R — промежуточное подкольцо, $R(d) \subseteq R \subseteq k$, $d \in R$, $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$ — цепочка идеалов кольца R, причем $dA_n \subseteq A_1$. Через $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы обозначаем сеть идеалов, определенную формулой $\sigma_{ij} = A_{i+1-j}$ при $j \leqslant i$ и $\sigma_{ij} = dA_{n+i+1-j}$ при $j \geqslant i+1$. Через $G(\sigma)$ и $E(\sigma)$ обозначаются соответственно сетевая и элементарная сетевая группы. Доказывается, что $TG(\sigma)$ и $TE(\sigma)$ — промежуточные подгруппы группы $GL(n,k)$, содержащие тор T.

Ключевые слова: надгруппа, промежуточная подгруппа, элементарная группа, нерасщепимый максимальный тор, трансвекция.

Сеть и элементарная сетевая группа, которые определяются в настоящей заметке, связаны с изучением подгрупп, содержащих нерасщепимый максимальный тор T, в полной линейной группе $G = GL(n,k)$ над полем k (см. [3, 4]).

Пусть $x^n - d$ — неприводимый многочлен степени n над полем $k, d \in k$. Тогда $e_i = \theta^{i-1}$, $\theta = \sqrt[n]{d}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, образуют базис радикального расширения степени n поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ над k. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении в G. В выбранном базисе тор $T = T(d)$ определяется как матричная группа

$$T = T(d) = \bigl\{c(x) : x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}\bigr\},$$

причем элементы матрицы $c(x) = (c_{ij})$ определяются следующим образом: $c_{ij} = x_{i+1-j}$ при $j \leqslant i$ и $c_{ij} = dx_{n+i+1-j}$ при $j \geqslant i+1$. С каждой матрицей $c = c(x) = (c_{ij})$ связана обратная матрица $c^{-1} = c(y) = (c'_{ij})$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in k^n$, где $y_i = \frac{C_{1i}}{|C(x)|}$, причем C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $c = c(x)$. Рассматриваем унитальное подкольцо $R_0 = R(d)$ поля k, порожденное элементами $x_i y_j$, $dx_r y_s$:

$$R_0 = R(d) = \operatorname{ring}\bigl\langle x_i y_j, dx_r y_s : \ i + j \leqslant n+1, \ r + s > n+1, \ \ x \in k^n \setminus \bar{0}\bigr\rangle.$$

[1]Результаты настоящей заметки были получены в рамках государственного задания Минобрнауки России.

Пусть R — промежуточное подкольцо, $R_0 \subseteq R \subseteq k$. Пусть, далее, $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$ — цепочка идеалов кольца R, причем $dA_n \subseteq A_1$. Через $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы обозначаем сеть идеалов, определенную формулой

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases}$$

Через $G(\sigma)$ обозначается сетевая группа [1].

Сеть σ мы называем *сетью, ассоциированной с тором T*. Подгруппу $E(\sigma)$, порожденную всеми (общими) трансвекциями из $G(\sigma)$, мы называем *элементарной сетевой группой, ассоциированной с тором T*.

Напомним, что (общая) трансвекция — это матрица $(\delta_{ij} + \alpha_i\beta_j)$, у которой

$$\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n = 0, \quad \alpha_i, \beta_j \in k,$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Частным случаем (общей) трансвекции является элементарная трансвекция, а именно — это матрица $t_{rs}(\alpha) = e + \alpha e_{rs}$, где $r \neq s$, $\alpha \in k$, e — единичная матрица, e_{rs} — матрица, у которой на позиции (r, s) стоит 1, а на остальных местах нули.

Доказательство следующей теоремы основано на результатах работы [2].

Теорема. 1) *Тор T нормализует группы $G(\sigma)$ и $E(\sigma)$. Следовательно, $TG(\sigma)$ и $TE(\sigma)$ — промежуточные подгруппы группы $GL(n,k)$, содержащие тор T.*

2) *Если $b = (\delta_{ij} + \alpha_i\beta_j)$ — трансвекция из $TG(\sigma)$, то $\alpha_i\beta_j \in \sigma_{ij}$.*

3) *Группа $TE(\sigma)$ порождается тором T и корневыми подгруппами:*

$$TE(\sigma) = \big\langle T, t_{i1}(A_i) : 2 \leqslant i \leqslant n \big\rangle.$$

Более точно, всякая трансвекция из $E(\sigma)$ имеет вид

$$c(x)t_{21}(\alpha_2)t_{31}(\alpha_3)\ldots t_{n1}(\alpha_n)c^{-1}(x)$$

для некоторых $c(x) \in T$, $\alpha_i \in A_i$.

Прежде чем доказывать теорему сформулируем и докажем несколько утверждений.

Лемма 1 [2, теорема 2]**.** *Тор T нормализует группы $G(\sigma)$ и $E(\sigma)$. Следовательно, $TG(\sigma)$ и $TE(\sigma)$ — промежуточные подгруппы, содержащие тор T.*

Лемма 2. *Пусть $b = (\delta_{ij} + \alpha_i\beta_j)$ — трансвекция из $TG(\sigma)$. Тогда $\alpha_i\beta_j \in \sigma_{ij}$.*

$\lhd$ Доказательство этого утверждения разобьем на две части:

а) Матрица b имеет вид матрицы

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \lambda_n & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

По условию $b \in TG(\sigma)$. Покажем, например, что $\lambda_2 \in \sigma_{21} = A_2$. По условию

$$b = C(\bar{x}) \cdot a \in T \cdot G(\sigma),$$

где $a=(a_{ij})\in G(\sigma)$,

$$C(\bar{x})=\begin{pmatrix} x_1 & dx_n & \dots & dx_2\\ x_2 & x_1 & \dots & dx_3\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_1\end{pmatrix},$$

$$a=\begin{pmatrix} 1+a_1 & da_n^{(1)} & \dots & da_2^{(n-1)}\\ a_2 & 1+a_1^{(1)} & \dots & da_3^{(n-1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & a_{n-1}^{(1)} & \dots & 1+a_1^{(n-1)}\end{pmatrix},$$

где $a_i^{(k)}\in A_i$, $i=1,\dots,n$, $k=0,\dots,n-1$, $a_i^{(0)}=a_i$, $x_1,\dots,x_n\in k$. Приравнивая первую строку матрицы b к первой строке матрицы $c(\bar{x})\,a$, мы получим систему из n линейных уравнений относительно $x_1,dx_n,\dots,dx_2$. Из этой системы находим

$$x_1=\frac{A_{11}}{\Delta},\ dx_n=\frac{A_{21}}{\Delta},\ dx_{n-1}=\frac{A_{31}}{\Delta},\ \dots,\ dx_2=\frac{A_{n1}}{\Delta},$$

где $\Delta=\det a\in R^*$, A_{i1} — алгебраические дополнения элементов a_{i1} матрицы $a=(a_{ij})$. Далее,

$$\begin{aligned}\lambda_2&=x_2(1+a_1)+x_1a_2+dx_na_3+\dots+dx_3a_n\\ &=\frac{A_{n1}}{d\Delta}(1+a_1)+\frac{A_{11}}{\Delta}\,a_2+\frac{A_{21}}{\Delta}\,a_3+\frac{A_{31}}{\Delta}\,a_4+\dots+\frac{A_{n-1,1}}{\Delta}\,a_n.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что всякий элемент из A_{n1} содержится в dA_2, либо в $d^2A_k\subseteq d^2A_n\subseteq \mu A_1\subseteq dA_2$, следовательно,

$$\frac{A_{n1}}{d\Delta}(1+a_1)\in A_2.$$

Очевидно, далее, что

$$\frac{A_{11}}{\Delta}\,a_2\in A_2.$$

Далее, нетрудно видеть, что для $i=2,\dots,n$

$$A_{i1}\in dA_k\subseteq A_1\subseteq A_2.$$

Отсюда $\lambda_2\in A_2$.

b) $b=(\delta_{ij}+\alpha_i\beta_j)$ — произвольная трансвекция. Согласно предложению 2.1.1 (3) для некоторой матрицы $C\in T$ матрица $C^{-1}bC$ имеет вид (1), а потому в силу уже доказанного пункта a) имеем $C^{-1}bC\in G(\sigma)$. Из леммы 1 тогда мы имеем включение $b\in G(\sigma)$. $\triangleright$

Предложение. *Группа $TE(\sigma)$ порождается тором T и корневыми подгруппами:*

$$TE(\sigma)=\langle T,t_{i1}(A_i):2\leqslant i\leqslant n\rangle.$$

Более точно, всякая трансвекция из $E(\sigma)$ имеет вид

$$C(x)t_{21}(\alpha_2)t_{31}(\alpha_3)\dots t_{n1}(\alpha_n)C^{-1}(x)$$

для некоторых $C(x)\in T$, $\alpha_i\in A_i$.

$\lhd$ Пусть $b = (\delta_{ij} + \alpha_{ij}\beta_{ij})$ — трансвекция из $TE(\sigma)$. Тогда согласно лемме 2 $b \in E(\sigma)$. Далее, для некоторой матрицы $C \in T$ матрица $C^{-1}bC$ имеет вид (1), с другой стороны, по лемме 1 $C^{-1}bC \in G(\sigma)$. Следовательно, матрица $C^{-1}bC \in G(\sigma)$ (а потому и матрица b) принадлежит правой части доказываемого равенства. $\rhd$

Теперь, очевидно, теорема вытекает из лемм 1 и 2 и предложения.

Литература

1. *Боревич З. И.* Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семин. ПОМИ РАН.—1976.—Т. 64.—С. 12–29.
2. *Джусоева Н. А.* Сетевые кольца нормализуемые тором // Тр. ИММ УрО РАН.—2013.—Т. 19, № 3.—С. 113–119.
3. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $GL(2, Q)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 312, № 1.—С. 36–38.
4. *Койбаев В. А.* Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Алгебра и анализ.—2009.—Т. 21, №5.—С. 70–86.

Статья поступила 12 мая 2015 г.

Джусоева Нонна Анатольевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
ассистент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: djusoevanonna@rambler.ru

THE NET AND ELEMENTARY NET GROUP ASSOCIATED WITH NON-SPLIT MAXIMAL TORUS

Djusoeva N. A.

The elements of matrixes of a non-split maximal torus $T = T(d)$ (associated with a radical extension $k(\sqrt[n]{d})$ of degree n of the ground field k) generate some subring $R(d)$ of the field k. Let R be an intermediate subring, $R(d) \subseteq R \subseteq k$, $d \in R$, $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$ be a chain of ideals of the ring R, and $dA_n \subseteq A_1$. By $\sigma = (\sigma_{ij})$ we denote the net of ideals defined by $\sigma_{ij} = A_{i+1-j}$ with $j \leqslant i$ and $\sigma_{ij} = dA_{n+i+1-j}$ with $j \geqslant i+1$. By $G(\sigma)$ and $E(\sigma)$ we denote the net and the elementary net group, respectively. It is proved, that $TG(\sigma)$ and $TE(\sigma)$ are intermediate subgroups of $GL(n, k)$ containing the torus T.

Key words: overgroup, intermediate subgroup, elementary group, non-split maximal torus, transvection.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 16–21

УДК **512.542**

О ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ π-РАЗДЕЛИМЫХ ГРУППАХ

А. Х. Журтов, З. Б. Селяева

Владимиру Амурхановичу Койбаеву
к его 60-летию

Доказана ограниченность π-длины локально конечной π-разделимой группы G натуральным числом m, при условии ограниченности π-длины любой конечной подгруппы G числом m.

Ключевые слова: локально-конечная группа, π-разделимые группы, π-длина группы.

Пусть π — некоторое множество простых чисел, π' — его дополнение во множестве всех простых чисел. Группа называется *π-группой*, если она периодическая и порядок каждого ее элемента делится только на простые числа из π. Группа называется *π-разделимой*, если она обладает конечным нормальным рядом, каждый фактор которого является π-группой или π'-группой. Такой ряд называется *π-рядом*, а *π-длиной π-разделимой группы* называется наименьшее из возможных чисел нетривиальных π-факторов во всех рядах этой группы.

Для конечных групп понятие π-разделимой группы ввел С. А. Чунихин [3] вместе с определениями π-отделимой и π-разрешимой группой. Согласно Чунихину, конечная группа G называется π-разделимой, если любой ее главный фактор является либо π-группой, либо π'-группой. Она называется π-отделимой, если порядок любого ее главного фактора делится не более, чем на одно простое число из π; наконец, G называется π-разрешимой, если она одновременно является π-разрешимой и π-отделимой группой. Ее главный фактор является либо π'-группой, либо p-группой для некоторого $p \in \pi$. По теореме Томпсона — Фейта [4] конечная π-разделимая группа G является π- или π'-разрешимой, более того, если она не является π- или π'-группой, то она p-разрешима для некоторого простого числа p, делящего порядок G, т. е. любой ее главный фактор является p- или p'-группой. Конечные π-разделимые группы интенсивно изучались на протяжении всех лет развития теории конечных групп, начиная с классических работ Чунихина [3] и Ф. Холла [5] (см. [1], обзоры [2, 6, 7] и литературу в них).

Локально конечные π-разделимые группы, которым посвящена настоящая работа, до настоящего времени практически не изучались. Основным нашим результатом является следующая

Теорема. *Пусть G — локально конечная π-разделимая группа и m — натуральное число. Ели π-длина любой конечной подгруппы из G не превосходит m, то π-длина G не превосходит m.*

1. Основные обозначения и предварительные результаты

Для периодической группы G и множества π простых чисел обозначим через $O_\pi(G)$ наибольшую нормальную π-подгруппу группы G, т. е. произведение всех ее нормальных π-подгрупп. Далее, пусть $O_{\pi,\pi'}(G)$ — полный прообраз в G группы $O_{\pi'}(G/O_\pi(G))$, $O_{\pi,\pi',\pi}(G)$ — полный прообраз в G группы $O_\pi(G/O_{\pi,\pi'}(G))$ и т. д.

Ряд

$$1 = P_0(G) \leqslant N_0(G) \leqslant P_1(G) \leqslant N_1(G) \leqslant \dots \leqslant P_n(G) \leqslant N_n(G) \leqslant \dots \qquad (1)$$

называется *верхним π-рядом* группы G, если

$$N_0(G) = O_{\pi'}(G), \quad P_1(G) = O_{\pi,\pi'}(G), \quad N_1(G) = O_{\pi,\pi',\pi}(G),$$

а для $i > 1$ $P_i(G)$ — полный прообраз в G группы $O_\pi(G/N_{i-1}(G))$, $N_i(G)$ — полный прообраз в G группы $O_{\pi'}(G/P_i(G))$.

Лемма 1. (а) *Если $1 = P_0 \leqslant N_0 \leqslant P_1 \leqslant N_1 \leqslant \dots \leqslant P_n \leqslant N_n \leqslant \dots$ — ряд нормальных подгрупп группы G, в котором для любого i N_i/P_i — π'-группа, P_{i+1}/N_i — π-группа, то $P_i \leqslant P_i(G)$.*

(б) *Если группа G π-разделима, то ее верхний π-ряд (1) доходит до G, и если $N_{m-1}(G) \neq P_m(G) \leqslant N_m(G) = G$, то π-длина G равна m.*

(в) *Если H — подгруппа группы G, то $H \cap P_i(G) \leqslant P_i(H)$, $H \cap N_i(G) \leqslant N_i(H)$, для всех $i \geqslant 0$.*

(г) *Если H — подгруппа или фактор-группа π-разделимой группы G, то H π-разделима и ее π-длина не превосходит π-длины G.*

$\lhd$ (а) Индукция по i.

По определению $P_0 = P_0(G)$, $N_0 \leqslant N_0(G)$. Пусть для некоторого i $P_i \leqslant P_i(G)$, $N_0 \leqslant N_0(G)$. Тогда $N_i \leqslant N_i(G) \cap P_{i+1}(G)$, откуда

$$(N_i(G)P_{i+1})/N_i(G) \simeq P_{i+1}/(N_i(G) \cap P_{i+1}) \simeq (P_{i+1}/N_i)/((N_i(G) \cap P_{i+1})/N_i).$$

Таким образом, $(N_i(G)P_{i+1}/N_i(G))$ изоморфна фактор-группе π-группы P_{i+1}/N_i и, следовательно, является π-группой.

Поскольку $(N_i(G)P_{i+1})/N_i(G) \trianglelefteq G/N_i(G)$, то $(N_i(G)P_{i+1})/N_i(G) \leqslant O_\pi(G/N_i(G))$, т. е. $N_i(G)P_{i+1} \leqslant P_{i+1}$, откуда $P_{i+1} \leqslant P_{i+1}(G)$. Аналогично доказывается, что $N_{i+1} \leqslant N_{i+1}(G)$.

(б) Пусть G — π-разделимая группа. Это означает, что в ней существует ряд нормальных подгрупп $1 = P_0 \leqslant N_0 \leqslant P_1 \leqslant N_1 \leqslant \dots \leqslant P_m \leqslant N_m = G$, для которых N_i/P_i — π'-группа, а P_{i+1}/N_1 — π-группа при всех $i \geqslant 0$. Выберем этот ряд так, чтобы m было наименьшим из возможных.

Покажем, что число m равно π-длине G.

По пункту (а) $G = N_m \leqslant N_m(G)$, т. е. $N_m(G) = G$. Если при этом $N_{m-1}(G) = P_m(G)$, то G/P_{m-1} является π'-группой, т. е. $N_{m-1}(G) = G$ и ряд $P_0(G) \leqslant N_0(G) < \dots < N_m(G) = G$ имеет π-длину равную m.

(в) Индукция по i. Понятно, что $H \cap N_0(G)$ — нормальная π'-подгруппа в H, поэтому $H \cap N_0(G) \leqslant N_0(H)$, и лемма справедлива для $i = 0$.

Пусть для некоторого i $H \cap P_i(G) \leqslant P_i(H)$, $H \cap N_i(G) \leqslant N_i(H)$. Тогда $(P_{i+1}(G) \cap H)/N_i(H)$ — нормальная в $H/N_i(H)$ подгруппа. Для любого $x \in P_{i+1}(G) \cap H$, по определению $P_{i+1}(G)$, существует π-число n, для которого $x^n \in N_i(G) \cap H \leqslant N_i(H)$, поэтому $(P_{i+1}(G) \cap H)/N_i(H)$ является π-подгруппой, что означает $(P_{i+1}(G) \cap H)/N_i(H) \leqslant$

$O_\pi(H/N_i(H))$, т. е. $P_{i+1}(G) \cap H \leqslant P_{i+1}(H)$. Теперь аналогично доказывается, что $N_{i+1}(G) \cap H \leqslant N_{i+1}(H)$. Это заканчивает доказательство пункта (в).

(г) Если H — подгруппа G, то по (в) $H = H \cap N_m(G) \leqslant N_m(H)$, где m — π-длина G, поэтому $N_m(H) = H$, т. е. H π-разделима π-длины, не превосходящей m.

Пусть $H = G/K$. Тогда $1 = K/K \leqslant N_1(G)K/K \leqslant P_1(G)K/K \leqslant \cdots \leqslant G/K$ — π-ряд H, π-длина которого не превосходит π-длины G. Поэтому H π-разделима и ее π-длина не превосходит π-длины G. Пункт (г) доказан. $\rhd$

Лемма 2 (теорема Цассенхауза [8, теоремы T.18.1 и T.18.2] с учетом [4]). *Пусть N — нормальная подгруппа конечной группы G и $(|N|, |G : N|) = 1$. Тогда в G существует дополнение к N и все дополнения к N сопряжены в G.*

Группа G называется *примарной*, если существует такое простое число p, что порядок каждого элемента группы G — степень p. Элемент g группы называется *примарным*, если его порядок равен степени некоторого простого числа.

Следующие простые замечания хорошо известны.

Лемма 3. (а) (*замечание Фраттини*). *Если H — конечная нормальная подгруппа группы G и P — силовская подгруппа H, то $G = HN_G(P)$.*

(*б*) *Любой элемент g конечного порядка в группе представим в виде $g = g_1g_2\dots g_s$, где каждый элемент g_i, $i = 1, 2, \dots, s$, примарен и является степенью g.*

(*в*) *Если G — конечная группа и для каждого простого числа p_i, делящего $|G|$, P_i означает ее некоторую силовскую p_i-подгруппу, то $G = \langle P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_s\rangle$,* где *$s$ — число простых делителей порядка группы G.*

Если группа A действует на группе B, то обозначим через $C_B(A)$ подгруппу $\{b \in B:\ b^\alpha = b$ для всех $\alpha \in A\}$, а через $[B, A]$ подгруппу

$$\left\langle [b, \alpha] = b^{-1}b^\alpha :\ b \in B,\ \alpha \in A \right\rangle.$$

Заметим, что если при этом B и A — подгруппы некоторой общей группы, то $C_B(A)$ — обычный централизатор A в B, а $[B, A]$ — обычный взаимный коммутант B и A.

Лемма 4. *Пусть p — простое число, A — p'-группа, действующая на конечной p-группе P.*

(а) [9, теорема 3.3.1]. *Если P — элементарная абелева и P_0 — A-инвариантная подгруппа в P, то $P = P_0 \times P_1$, где P_1 A-инвариантна.*

(*б*) [9, теорема 5.3.5]. *$P = C_p(A) \cdot [P, A]$. В частности, если $[P, A] \leqslant \Phi(P)$, то $P = C_p(A)$.*

(*в*) [9, теорема 5.3.6]. *$[[P, A], A] = [P, A]$.*

Лемма 5. *Если N — нормальная подгруппа конечной группы G и G/N разрешима, то существует разрешимая подгруппа H, для которой $G = NH$.*

$\lhd$ Очевидно, $G = NG$. Пусть H — подгруппа наименьшего порядка, для которой $G = NH$. Если $N \cap H \nleqslant \Phi(H)$, то существует максимальная подгруппа $H_1 \leqslant H$, для которой $N \cap H \nleqslant H_1$, т. е. $\langle N \cap H, H_1\rangle = H$. Но тогда $G = NH = N \cdot \langle N \cap H, H_1\rangle = NH_1$, вопреки выбору H. Таким образом, $H \cap N \leqslant \Phi(H)$ нильпотентна и H разрешима. $\rhd$

Если H — нормальная подгруппа группы G, $N \leqslant K \leqslant G$ и $L \leqslant G$, то централизатором K/N в L назовем подгруппу $C_L(K/N) = \{x \in L :\ [k, x] \in N$ для всех $k \in K\}$.

Лемма 6. *Пусть G — локально конечная π-разделимая группа.*

(а) *Если $O_{\pi'}(G) = 1$, то $C_G(O_\pi(G) \leqslant O_\pi(G)$.*

(*б*) *$C_G(O_{\pi,\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)) \leqslant O_{\pi,\pi'}(G)$.*

$\lhd$ (а) Положим $K = O_\pi(G)C_G(O_\pi(G))$. Тогда K — характеристическая подгруппа в G и $O_\pi(G) = O_\pi(K)$. Поскольку $O_{\pi'}(K)$ — нормальная π'-подгруппа в G, то $O_{\pi'}(K) \leqslant O_{\pi'}(G) = 1$. По пункту (г) леммы 1 K π-разделима. Если $K \neq O_\pi(K) = O_\pi(G)$, то $M = O_{\pi,\pi'}(K) \neq O_\pi(K)$. Поскольку $C_G(O_\pi(G)) \trianglerighteq G$ и $K/C_G(O_\pi(G))$ является π-группой, как фактор-группа π-группы $O_\pi(G)$, то все π'-элементы из M содержатся в $C_G(O_\pi(G))$.

Пусть x, y — π'-элементы из M. По условию группа $U = \langle x, y\rangle$ конечна. По лемме 1 (в) $U = O_{\pi,\pi'}(U)$ и $O_\pi(U) \leqslant Z(U)$. По лемме 2 $U = O_\pi(U) \times H$, где H — π'-группа, поэтому $x, y \in H$, $U = H$ и $\langle x, y\rangle$ является π'-группой. Таким образом, произведение любых двух π'-элементов из M является π'-элементом, т. е. совокупность M_0 всех π'-элементов из M составляет подгруппу, которая характеристична в M, следовательно, инвариантна в G и содержится в $O_{\pi'}(G) = 1$. Поэтому $M_0 = 1$ и $M = O_\pi(K)$; противоречие.

(б) Если $c \in C_G(O_{\pi,\pi'}(G)/O_{\pi'}(G))$, то в $G/O_{\pi'}(G)$ элемент $CO_{\pi'}(G)$, централизует $O_\pi(G/O_{\pi'}(G))$. По пункту (а), примененному к $G/O_{\pi'}(G)$, $CO_{\pi'}(G) \in O_\pi(G/O_{\pi'}(G)) = O_{\pi,\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)$. Поэтому $c \in O_{\pi,\pi'}(G)$. $\rhd$

Лемма 7. *Если G — локально конечная группа, для которой $G = O_{\pi,\pi'}(G)$ и $C_G(O_{\pi'}(G)) \leqslant O_{\pi'}(G)$, то для любого p-элемента $a \in G\backslash O_{\pi'}(G)$, где $p \in \pi$, найдется нетривиальный примарный элемент $b \in O_{\pi'}(G)$ такой, что $\langle a, b\rangle = B(a)$, где B — примарная группа, $\langle a\rangle$ действует нетривиально и неприводимо на $B/\Phi(B)$ и, в частности, $b \in [B, \langle a\rangle]$.*

$\lhd$ По условию a не централизует $O_{\pi'}(G)$, поэтому найдется $b \in O_{\pi'}(G)$, для которого $[b, a] \neq 1$. По лемме 3 (б) $b = b_1 \dots b_s$, где $b_1, \dots, b_s$ — примарные элементы и каждый из них является степенью b.

Понятно, что все b_i принадлежат $O_{\pi'}(G)$ и $[b_i, a] \neq 1$ для некоторого $i \in \{1, \dots, s\}$, поэтому можно считать, что b примарен. Положим $H = \langle b, a\rangle$. По пункту (в) леммы 6 $H = G \cap H = O_{\pi',\pi}(G) \cap H \leqslant O_{\pi',\pi}(H)$, т. е. $O_{\pi',\pi}(H) = H$ и $b \in O_{\pi'}(G) \cap H \leqslant O_{\pi'}(H)$. По условию $H = \langle b, a\rangle$ — конечная группа. Выберем b так, чтобы порядок H был наименьшим. Очевидно $H = B \cdot \langle a\rangle$, где $B = \langle b^x :\ x \in \langle a\rangle\rangle$ и $B = O_{\pi'}(H)$. Кроме того, $\langle a\rangle$ — силовская подгруппа в B. Пусть P — некоторая силовская подгруппа в B. По замечанию Фраттини (лемма 3 (а)) $H = BN_H(P)$. В частности, $N_H(P)$ содержит силовскую подгруппу, сопряженную с $\langle a\rangle$. Поэтому $a \in N_H(p^h)$ для некоторого $h \in H$. Таким образом, для каждого простого $p \in \pi'$, делящего порядок B, a нормализует некоторую силовскую p-подгруппу S_p из B. Если a централизует каждую подгруппу S_p, то a централизует B, что противоречит выбору элемента b. Таким образом, a нормализует, но не централизует некоторую силовскую подгруппу P из B. В силу минимальности порядка H $B = P$ и по пункту (б) леммы 4 $B = [B, \langle a\rangle]$. Кроме того, $\langle a\rangle$ действует нетривиально на $B/\Phi(B)$. Если $\langle a\rangle$ действует приводимо на $B/\Phi(B)$, то по лемме 4 (а)

$$B/\Phi(B) = B_1/\Phi(B) \times B_2/\Phi(B),$$

где B_1 и B_2 — собственные a-инвариантные подгруппы группы B. В силу минимальности порядка H такая ситуация невозможна, т. е. $\langle a\rangle$ действует неприводимо и нетривиально на $B/\Phi(B)$. $\rhd$

2. Доказательство теоремы

Пусть G — локально конечная π-разделимая группа π-длины m.

Опорной последовательностью G при $m > 1$ назовем набор примарных элементов $a_1, b_1, \dots, b_{m-1}, a_m$, обладающий следующими свойствами:

(1) для $i = 1, \ldots, m$: $a_i \in P_i(G) \backslash P_{i-1}(G)$; для $j = 1, \ldots, m-1$: $b_j \in N_j(G) \backslash N_{j-1}(G)$;

(2) для $i = 2, \ldots, m$ подгруппа $H_i = \langle \overline{a}_i, \overline{b}_{i-1} \rangle$ из $\overline{P}_i = P_i(G)/P_{i-1}(G)$, где $\overline{a}_i = P_{i-1}(G) \cdot a_i$, $\overline{b}_{i-1} = P_{i-1}(G) \cdot b_{i-1}$, равна $B_{i-1} \langle \overline{a}_i \rangle$, где $B_{i-1} = \langle \overline{b}^x_{i-1} : x \in \langle a_i \rangle \rangle$ — примарная, $\langle a_i \rangle$ действует нетривиально и неприводимо на $B_i/\Phi(B)$, а $\overline{b}_{i-1} \in [B_i, \langle a_i \rangle]$; в частности, $b_{i-1} \in \left[\langle b^x_{i-1} : x \in \langle a_i \rangle \rangle, \langle a_i \rangle \right] P_{i-1}(G)$.

(3) для $j = 1, \ldots, m-1$ подгруппа $L_i = \langle \overline{b}_j, \overline{a}_j \rangle$ из $\overline{N}_j = N_j(G)/N_{j-1}(G)$, где $\overline{b}_j = N_{j-1}(G) b_j$, $\overline{a}_j = N_{j-1}(G) a_j$, равна $A_j \langle \overline{b}_j \rangle$, где группа $A_j = \langle \overline{a}^x_j \mid x \in \langle b_j \rangle \rangle$ — примарна, $\langle b_j \rangle$ действует нетривиально и неприводимо на $A_j/\Phi(A_j)$ и $\overline{a}_j \in [A_j, \langle b_j \rangle]$. В частности, $a_j \in [\langle a^x_j \mid x \in \langle b_j \rangle \rangle, \langle b_j \rangle] \cdot N_{i-1}(G)$.

Если же π-длина G равна 1, то опорной последовательностью G назовем набор из одного элемента a_1, где a_1 — любой примарный элемент из $P_1(G) \backslash N_0(G)$.

Доказательство теоремы разделим на две леммы.

Лемма 8. *Для любой локально конечной π-разделимой группы π-длины m и любого примарного элемента $a \in P_m(G) \backslash N_{m-1}(G)$ существует опорная последовательность $a_1, b_1, \ldots, a_m$, для которой $a_m = 0$.*

$\triangleleft$ Индукция по m. Заключение очевидным образом верно при $m = 1$. Пусть $m > 1$ и $\overline{P}_m = P_m(G)/P_{m-1}(G)$. Очевидно, $\overline{P}_m = O_{\pi',\pi}\left(\overline{P}_m\right)$ и $O_\pi\left(\overline{P}_m\right) = 1$.

По лемме 6 (а) (с заменой π на π') $C_{\overline{P}_m}\left(O_{\pi'}\left(\overline{P}_m\right)\right) \leqslant O_{\pi'}\left(\overline{P}_m\right)$.

Положим $a_m = a$, $\overline{a} = P_{m-1} a$. По лемме 6 (в) найдется нетривиальный примарный элемент $\overline{b} \in O_{\pi'}\left(\overline{P}_m\right)$, для которого $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle = B \langle \overline{a} \rangle$, $B = \langle \overline{b}^x \mid x \in \langle \overline{a} \rangle \rangle$ — примарная группа и действует нетривиально и неприводимо на B, и $\overline{b} \in [B, \langle \overline{a} \rangle] = [B, \langle a \rangle]$. Пусть b_{m-1} — примарный прообраз элемента $\overline{b}$ в G. Понятно, что $b_{m-1} \in N_{m-1}(G) \backslash P_{m-1}(G)$.

Аналогично, по лемме 6 (б) (с заменой π на π'), в $P_{m-1}(G) \backslash N_{m-2}(G)$ найдется примарный элемент a_{m-1}, для которого $\overline{a}_{m-1} = a_{m-1} N_{m-2}$, $\overline{b}_{m-1} = b_{m-1} N_{m-2}$ порождают подгруппу L_{m-1}, свойства которой перечислены в определении опорной последовательности.

По индукции $P_{m-1}(G)$ обладает опорной последовательностью a_1, b_1, $\ldots$, a_{m-1} и $a_1, \ldots, a_{m-1}, b_{m-1}, a_m$ — искомая опорная последовательность группы G. $\triangleright$

Лемма 9. *Если $A = \{a_1, b_1, \ldots, b_{m-1}, a_m\}$ — опорная последовательность локально конечной π-разделимой группы G π-длины m и $A \leqslant H \leqslant G$, то π-длина H равна m и A является опорной последовательностью группы H. В частности, в группе G есть конечная подгруппа π-длины m.*

$\triangleleft$ По лемме 1 (в) $H = H \cap G = H \cap N_{m+1}(G) \leqslant N_{m+1}(H)$, поэтому $N_{m+1}(H) = 1$, т. е. H π-разделима и ее π-длина не превосходит m. По определению опорной последовательности $a_1 \in P_1(G) \cap H \leqslant P_1(H)$ и $a_1 \notin P_0(H) = 1$. Предположим, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ $a_i \in P_i(H) \backslash P_{i-1}(H)$. Так как $a_i \in [\langle a^x_i \mid x \in \langle b_i \rangle \rangle, \langle b_i \rangle] N_{i-1}(G)$, то $b_i \notin N_{i-1}(H)$, иначе $a_i \in (N_{i-1}(H) N_{i-1}(G)) \cap H = N_{i-1}(H)\left((N_i(G)) \cap H\right) \leqslant N_i(H) N_i(H) = N_i(H)$; противоречие. Поскольку $b_i \in (N_i(G)) \cap H \leqslant N_i(H)$, $b_i \in N_i(H) \backslash N_{i-1}(H)$.

Аналогично, $a_{i+1} \in P_{i+1}(H) \backslash P_i(H)$. Эти рассуждения показывают по индукции, что для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ элемент $a_i \in P_i(H) \backslash P_{i-1}(H)$, а $b_i \in N_i(H) \backslash N_{i-1}(H)$.

Таким образом, выполнен пункт (1) определения опорной последовательности для H. Остальные пункты проверяются непосредственно. Лемма доказана. Она завершает доказательство теоремы. $\triangleright$

Литература

1. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп.—Минск: Наука и техника, 1964.
2. *Чунихин С. А., Шеметков Л. А.* Конечные группы. Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия.—М.: ВИНИТИ, 1971.—С. 7–70.
3. *Чунихин С. А.* О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН СССР.—1950—Vol. 73.—С. 29–32.
4. *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order. Pacific // J. Math.—1963.—Vol. 13, № 3.—P. 775–1029.
5. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc.—1956.—Vol. 6, № 3.—P. 286–304.
6. *Khukhro E. I.* Problems of bounding the p-length and Fitting height of finite soluble groups // J. Sib. Federal Univ. Mathematics & Physics.—2013.—Vol. 6, № 4.—P. 462–470.
7. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук.—2011.—Т. 66, № 5 (401).—С. 3–46.
8. *Huppert B.* Endliche Gruppen I.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 1979.
9. *Gorenstein D.* Finite groups.—N. Y.: Chelsea, 1980.

Статья поступила 24 апреля 2015 г.

Журтов Арчил Хазешович
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
зав. кафедрой геометрии и высшей алгебры
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: archil@ns.kbsu.ru

Селяева Зулиха Борисовна
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
аспирант кафедры геометрии и высшей алгебры
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: kgivakbgu@mail.ru

ON LOCALLY FINITE π-SEPARABLE GROUPS

Zhurtov A. H., Seljaeva Z. B.

It is shown that the π-length of a locally finite π-separable group G is bounded by a natural m if the π-length of every finite subgroup of G is bounded by m.

Key words: locally finite group, π-separable group, π-length of the group.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 22–31

УДК **519.542**

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С НЕБОЛЬШИМ ПРОСТЫМ СПЕКТРОМ, II[1]

А. С. Кондратьев

К 60-летию
Владимира Амурхановича Койбаева

Обзор недавно полученных автором совместно со своими учениками результатов относительно конечных групп, граф простых чисел которых имеет небольшое число вершин. Уточнено описание главных факторов 4-примарных конечных групп с несвязным графом простых чисел. Описаны конечные почти простые 5-примарные и 6-примарные группы и их графы простых чисел. Описаны главные факторы конечных неразрешимых 5-примарных группах G с несвязным графом Грюнберга — Кегеля таких, что $|\pi(G/F(G))| \leqslant 4$. Решена задача реализации абстрактных графов с числом вершин, не превосходящим пяти, как графов простых чисел конечных групп. Описаны конечные почти простые группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами. Описаны конечные почти простые группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. Доказана распознаваемость групп $E_7(2)$, $E_7(3)$ и ${}^2E_6(2)$ по графу простых чисел. Классифицированы абсолютно неприводимые $SL_n(p^f)$-модули над полем простой характеристики p, на которые элемент заданного простого порядка m из цикла Зингера группы $SL_n(p^f)$ действует свободно, в следующих трех случаях: а) вычет числа p^f по модулю m порождает мультипликативную группу поля порядка m (это условие выполняется, в частности, для $m = 3$); б) $m = 5$; в) $n = 2$.

Ключевые слова: конечная группа, почти простая группа, главный фактор, простой спектр, граф простых чисел, распознаваемость, модулярное представление.

Введение

Изучение конечных групп в зависимости от их арифметических свойств (порядков элементов и подгрупп, мощностей классов сопряженных элементов, различных π-свойств, степеней неприводимых характеров и т. д.) является важным направлением в теории конечных групп, имеющим богатую историю. Классификация конечных простых групп во многом сводит это изучение к случаю *почти простых* групп, т. е. групп A со свойством $\mathrm{Inn}(P) \leqslant A \leqslant \mathrm{Aut}(P)$, где P — некоторая конечная неабелева простая группа.

Пусть G — конечная группа. Множество простых делителей числа $|G|$ будем называть *простым спектром* группы G и обозначать через $\pi(G)$. *Спектром* же группы G называется множество $\omega(G)$ порядков ее элементов. Спектр $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором множество вершин есть $\pi(G)$ и две вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Граф

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00469, Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 15-16-1-5, и в рамках проекта повышения конкурентоспособности, соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006.

$\Gamma(G)$ можно рассматривать как подмножество спектра $\omega(G)$, состоящее из произведений двух различных простых чисел, входящих в $\omega(G)$.

Понятие графа простых чисел возникло при исследовании некоторых когомологических вопросов, связанных с целочисленными представлениями конечных групп, и оказалось весьма плодотворным.

Малоизвестен факт, что граф $\Gamma(G)$, в отличие от спектра $\omega(G)$, может быть однозначно определен по таблице характеров группы G.

Граф коммутативности $\Delta(G)$ группы G есть граф с множеством вершин $G \setminus Z(G)$, две вершины x, y которого смежны тогда и только тогда, когда $xy = yx$. Графы коммутативности впервые были исследованы Брауэром и Фаулером в 1955 г. для того, чтобы доказать фундаментальный результат для классификации конечных простых групп о конечности множества изоморфных типов конечных простых групп с заданным централизатором инволюции. С тех пор эти графы являются популярным предметом изучения в теории групп. Несложно доказать, что если конечные неабелевы группы G и H, порядки центров которых совпадают, имеют изоморфные графы коммутативности, то $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Приведенные факты показывают, что граф $\Gamma(G)$, наряду со спектром $\omega(G)$, является фундаментальным арифметическим инвариантом группы G.

Интерес многих исследователей вызывают различные проблемы распознаваемости — характеризации группы по некоторому набору ее параметров с точностью до изоморфизма. Примерами таких проблем являются проблемы распознаваемости конечных групп по спектру или по графу простых чисел. Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру* (соответственно *по графу простых чисел*), если для любой конечной группы H равенство $\omega(H) = \omega(G)$ (соответственно $\Gamma(G) = \Gamma(H)$) влечет изоморфизм $H \cong G$.

К настоящему времени по проблеме распознаваемости по спектру конечных простых групп достигнут впечатляющий прогресс. Так, она практически сведена к случаю почти простых групп.

Задача распознаваемости конечных групп по графу простых чисел является частным случаем общей задачи изучения конечных групп по свойствам их графов простых чисел. В рамках этой общей задачи прежде всего наше внимание привлекает более подробное изучение класса конечных групп с несвязным графом простых чисел. Конечные почти простые группы с несвязным графом простых чисел описаны в работах Уильямса [1], автора [2], Иийри и Ямаки [3] и Лучидо [4]. Весьма полезный критерий смежности вершин в графах простых чисел конечных простых групп найден в работах А. В. Васильева и Е. П. Вдовина [5, 6].

В данной работе дан обзор недавно полученных автором совместно со своими учениками результатов относительно конечных групп, граф простых чисел которых имеет небольшое число вершин. Он продолжает обзор автора [7] на ту же тему.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [8–10]. Конечная группа G называется *n-примарной*, если $|\pi(G)| = n$.

1. Конечные n-примарные группы для $n \leqslant 6$

В рамках задачи подробного изучения класса конечных групп с несвязным графом простых чисел в работах автора и И. В. Храмцова (см. [11–14]) были проведены исследования конечных групп, граф простых чисел которых несвязен и имеет 3 или 4 вершины. В недавних работах [15–18] нами было уточнено описание главных факторов 4-примарных конечных групп с несвязным графом простых чисел.

В дальнейшем исследование конечных n-примарных групп для небольших n было продолжено. Главной целью здесь является описание главных факторов конечных неразрешимых не почти простых групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля.

В работах [19, 20] автором были определены конечные почти простые 5-примарные группы и их графы простых чисел. В частности, доказана следующая теорема, которую мы приводим в исправленном и уточненном виде.

Теорема 1. *Конечная почти простая группа G с цоколем P является 5-примарной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа P изоморфна одной из групп A_{11}, A_{12}, $L_2(q)$ для $q \in \{2^6, 2^8, 2^9, 5^3, 5^4, 7^3, 7^4, 11^2, 17^2, 19^2\}$, $L_3(9)$, $L_3(27)$, $L_4(q)$ для $q \in \{4, 5, 7\}$, $L_5(2)$, $L_5(3)$, $L_6(2)$, $U_3(q)$ для $q \in \{16, 17, 25, 81\}$, $U_4(q)$ для $q \in \{4, 5, 7, 9\}$, $U_5(3)$, $U_6(2)$, $S_4(q)$ для $q \in \{8, 16, 17, 25, 49\}$, $S_6(3)$, $S_8(2)$, $O_7(3)$, $O_8^+(3)$, $O_8^-(2)$, $G_2(q)$ для $q \in \{4, 5, 7, 8\}$, M_{22}, J_3, HS, He или M^cL;*

(2) *$G \cong L_2(2^p)$, где $p \geqslant 11$ — простое число и $|\pi(2^{2p} - 1)| = 4$;*

(3) *$G \cong \mathrm{Aut}(L_2(2^p))$, где $p \geqslant 7$, $2^p - 1$ и $(2^p + 1)/3$ — различные простые числа;*

(4) *$G \cong \mathrm{Aut}(L_2(3^p))$ или $O^2(\mathrm{Aut}(L_2(3^p)))$, где $p \geqslant 5$ — простое число и $|\pi((3^p - 1)/2)| = |\pi((3^p + 1)/4)| = 1$;*

(5) *$G \cong L_2(p)$ или $PGL_2(p)$, где $p \geqslant 29$ — простое число и $|\pi(p^2 - 1)| = 4$;*

(6) *$G \cong L_2(p^r)$ или $PGL_2(p^r)$, где $p \in \{3, 5, 7, 17\}$, r — простое число, $3 < r \neq p$ и $|\pi(p^{2r} - 1)| = 4$;*

(7) *$U_3(2^p) \leqslant G \leqslant PGU_3(2^p) : 2$, где $p \geqslant 5$ и $2^p - 1$ — простые числа и $|\pi((2^p + 1)/3)| = |\pi((2^{2p} - 2^p + 1)/3)| = 1$;*

(8) *группа P изоморфна $L_3^\epsilon(p)$, где $\epsilon \in \{+, -\}$, p — простое число, $17 \neq p \geqslant 11$, $|\pi(p^2 - 1)| = 3$ и $\left|\pi(\frac{p^2+\epsilon p+1}{(3,p-\epsilon 1)})\right| = 1$;*

(9) *$G \cong S_4(p)$ или $PGSp_4(p)$, где $p \geqslant 11$ — простое число, $|\pi(p^2 - 1)| = 3$ и $p^2 + 1 = 2r$ или $2r^2$ для некоторого нечетного простого числа r;*

(10) *$G \cong Sz(2^p)$, где $p \geqslant 7$ и $2^p - 1$ — простые числа и $|\pi(2^{2p} + 1)| = 3$;*

(11) *$G \cong \mathrm{Aut}(Sz(8))$.*

В качестве следствия теоремы 1 существенно уточнен список конечных простых 5-примарных групп, полученный в [21, 22]. Результаты статьи [20] показывают также, что конечные простые 5-примарные группы, кроме групп $L_4(q)$ для $q \in \{4, 7\}$ и $U_4(q)$ для $q \in \{4, 5, 7, 9\}$, имеют несвязный граф простых чисел.

Используя результаты работ [11] и [12] и вычисления в системе компьютерной алгебры GAP [23], В. А. Колпакова и автор в [24] получили описание главных факторов коммутантов конечных неразрешимых 5-примарных групп G с несвязным графом $\Gamma(G)$ в случае, когда $G/F(G)$ — почти простая n-примарная группа для $n \leqslant 4$.

Недавно В. А. Колпакова и автор в [25] определили конечные почти простые 6-примарные группы и их графы простых чисел. В частности, доказана следующая теорема, которую мы приводим в исправленном и уточненном виде.

Теорема 2. *Если конечная почти простая группа G с цоколем P является 6-примарной, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа P изоморфна одной из групп A_n для $n \in \{13, 14, 15, 16\}$, $L_2(q)$ для $q \in \{2^{10}, 2^{16}, 3^6, 3^8, 3^{10}, 5^5, 11^4, 17^3, 17^4\}$, $L_3(q)$ для $q \in \{2^4, 2^7, 2^9, 5^2, 7^2\}$, $L_4(q)$ для $q \in \{2^3, 3^2, 17\}$, $L_5(7)$, $L_6(3)$, $L_7(2)$, $U_3(q)$ для $q \in \{2^9, 3^3, 5^3, 5^4, 7^2, 7^3, 17^2\}$, $U_4(q)$ для $q \in \{2^3, 2^4, 5^2\}$, $U_5(q)$ для $q \in \{4, 5, 9\}$, $U_6(3)$, $U_7(2)$, $O_7(q)$ для $q \in \{5, 7\}$, $O_9(3)$, $PSp_4(q)$ для $q \in \{2^5, 3^3, 3^4, 3^5, 11^2, 17^2\}$, $PSp_6(q)$ для $q \in \{4, 5, 7\}$, $PSp_8(3)$, $O_8^+(q)$ для $q \in \{4, 5, 7\}$,*

$O_8^-(3)$, $O_{10}^+(2)$, $O_{10}^-(2)$, ${}^3D_4(q)$ *для* $q \in \{4, 5\}$, $G_2(q)$ *для* $q \in \{3^2, 17\}$, ${}^2G_2(3^3)$, $F_4(2)$, Suz, Ru, Co_2, Co_3, M_{23}, M_{24}, J_1, Fi_{22}, HN;

(2) $G \cong \mathrm{Aut}(L_2(2^r))$, *где* $r \geqslant 11$ *— простое число,* $r \notin \pi(P)$ *и* $|\pi(2^{2r} - 1)| = 4$;

(3) $G \cong L_2(2^r)$, *где* $r \geqslant 37$ *— простое число,* $r \notin \pi(P)$ *и* $|\pi(2^{2r} - 1)| = 5$;

(4) $G \cong L_2(2^{2r})$ *или* $O^r(\mathrm{Aut}(L_2(2^{2r})))$, *где* $r \geqslant 7$ *и* $2^r - 1$ *— простые нечетные числа,* $r \notin \pi(G)$, $|\pi(\frac{2^r+1}{3})| = 1$ *и* $|\pi(2^{2r} + 1)| = 2$;

(5) $G \cong L_2(2^{r^2})$, *где* $r \geqslant 7$ *— простое число,* $r \notin \pi(G)$, $|\pi(2^{r^2} - 1)| = 2$ *и* $|\pi(2^{r^2} + 1)| = |\pi(2^{2r} - 1)| = 3$;

(6) $P \cong L_2(3^{2r})$ *и* $G \leqslant O^r(\mathrm{Aut}(P))$, *где* $r > 13$ *— простое число,* $r \notin \pi(P)$, $|\pi(\frac{3^r-1}{2})| = |\pi(\frac{3^r+1}{4})| = 1$ *и* $|\pi(\frac{3^{2r}+1}{2})| = 2$;

(7) $P \cong L_2(3^{r^2})$ *или* $O^r(\mathrm{Aut}(P))$, *где* r *— простое число,* $r \notin \pi(P)$, $|\pi(\frac{3^r+1}{4})| = |\pi(\frac{3^r-1}{2})| = 1$ *и* $|\pi(3^{2r^2} - 1)| = 5$;

(8) $P \cong L_2(p)$, *где* $p \geqslant 131$ *— простое число и* $|\pi(p^2 - 1)| = 5$;

(9) $P \cong L_2(p^2)$, *где* $p \geqslant 29$ *— простое число,* $|\pi(p^2 - 1)| = 4$ *и* $|\pi(p^2 + 1)| = 2$;

(10) $P \cong L_2(p^2)$, *где* $p \geqslant 13$ *— простое число и* $|\pi(p^2 - 1)| = |\pi(p^2 + 1)| = 3$;

(11) $G \cong L_2(p^r) : r$ *или* $\mathrm{Aut}(L_2(p^r))$, *где* $p \in \{3, 5, 7, 17\}$ *и* r *— простые числа,* $r \notin \pi(P)$, $p^r \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ *для* $\varepsilon \in \{+, -\}$, *и* $|\pi(p^r - \varepsilon 1)| = |\pi(\frac{p^r+\varepsilon 1}{2})| = 2$;

(12) $G \cong L_2(p^r)$ *или* $PGL_2(p^r)))$, *где* p *и* r *— нечетные простые числа,* $r \notin \pi(P)$ *и* $|\pi(p^{2r} - 1)| = 5$;

(13) $P \cong L_3^{\varepsilon}(2^r)$ *и* $G \leqslant O^r(\mathrm{Aut}(P))$, *где* $\varepsilon \in \{+, -\}$, r *и* $2^r - 1$ *— простые числа,* $r \geqslant 5$ *при* $\varepsilon = +$ *и* $r \geqslant 19$ *при* $\varepsilon = -$, $r \notin \pi(P)$, $|\pi(\frac{2^r+1}{3})| = 1$ *и* $|\pi(\frac{2^{2r}+\varepsilon 2^r+1}{(3,\, 2^r-\varepsilon 1)})| = 2$;

(14) $G \cong L_3^{\varepsilon}(3^r)$ *или* $L_3^{\varepsilon}(3^r) : 2$, *где* $\varepsilon \in \{+, -\}$, r *— простое число,* $r \geqslant 7$ *при* $\varepsilon = +$ *и* $r \geqslant 5$ *при* $\varepsilon = -$, $r \notin \pi(P)$, $|\pi(\frac{3^r-1}{2})| = |\pi(\frac{3^r+1}{4})| = 1$ *и* $|\pi(3^{2r} + \varepsilon 3^r + 1)| = 2$;

(15) $P \cong L_3^{\varepsilon}(p)$, *где* $p \geqslant 41$ *— простое число,* $\varepsilon \in \{+, -\}$, $|\pi(p^2 - 1)| = 4$ *и* $|\pi(\frac{p^2+\varepsilon p+1}{(3,\, p-\varepsilon 1)})| = 1$;

(16) $P \cong L_3^{\varepsilon}(p)$, *где* p *— простое число,* $\varepsilon \in \{+, -\}$, $p \geqslant 11$ *при* $\varepsilon = +$ *и* $p \geqslant 31$ *при* $\varepsilon = -$, $|\pi(p^2 - 1)| = 3$ *и* $|\pi(\frac{p^2+\varepsilon p+1}{(3,\, p-\varepsilon 1)})| = 2$;

(17) $P \cong U_3(2^r)$ *и* $P : r \leqslant G$, *где* $r \geqslant 5$ *и* $2^r - 1$ *— простые числа,* $r \notin \pi(G)$ *и* $|\pi(\frac{2^r+1}{3})| = |\pi(\frac{2^{2r}-2^r+1}{3})| = 1$;

(18) $P \cong L_4^{\varepsilon}(p)$, *где* $\varepsilon \in \{+, -\}$, p *— простое число,* $p \geqslant 19$ *для* $\varepsilon = +$ *и* $p \geqslant 11$ *для* $\varepsilon = -$, $|\pi(p^2 - 1)| = 3$ *и* $|\pi(\frac{p^2+\varepsilon p+1}{(3,\, p-\varepsilon 1)})| = |\pi(\frac{p^2+1}{2})| = 1$;

(19) $G \cong PSp_4(2^r)$, *где* $r > 5$ *и* $2^r - 1$ *— простые числа,* $r \notin \pi(G)$, $|\pi(\frac{2^r+1}{3})| = 1$ *и* $|\pi(2^{2r} + 1)| = 2$;

(20) $G \cong PSp_4(3^r)$ *или* $PGp_4(3^r)$, *где* $r > 5$ *— простое число,* $r \notin \pi(G)$, $|\pi(\frac{3^r-1}{2})| = |\pi(\frac{3^r+1}{4})| = 1$ *и* $|\pi(3^{2r} + 1)| = 3$;

(21) $P \cong PSp_4(p)$, *где* $p \geqslant 29$ *— простое число,* $|\pi(p^2 - 1)| = 4$ *и* $|\pi(\frac{p^2+1}{2})| = 1$;

(22) $P \cong PSp_4(p)$, *где* $p \geqslant 13$ *— простое число,* $|\pi(p^2 - 1)| = 3$ *и* $|\pi(\frac{p^2+1}{2})| = 2$;

(23) $G \cong G_2(p)$, *где* $p \geqslant 13$ *— простое число,* $|\pi(p^2 - 1)| = 3$ *и* $|\pi(\frac{p^2+\epsilon p+1}{(3,p-\epsilon 1)})| = 1$ *для* $\epsilon \in \{+, -\}$;

(24) $G \cong Sz(2^r)$, *где* $r \geqslant 13$ *— простое число,* $r \notin \pi(P)$, $|\pi(2^r - 1)| = 1$ *и* $|\pi(2^{2r} + 1)| = 4$;

(25) $G \cong Sz(2^r)$, *где* $r \geqslant 11$ *— простое число,* $r \notin \pi(P)$, $|\pi(2^r - 1)| = 2$ *и* $|\pi(2^{2r} + 1)| = 3$;

(26) $G \cong \mathrm{Aut}(Sz(2^r))$, *где* $r \geqslant 7$ *и* $2^r - 1$ *— простые числа, и* $|\pi(2^{2r} + 1)| = 3$.

В качестве следствия теоремы 2 существенно уточнен список конечных простых 6-примарных групп, полученный Джафарзаде и Иранманешем в [21]. В этой же их статье была поставлена следующая проблема 3.12: *для каких степеней q простых чисел число q^2-1 имеет не более пяти различных простых делителей?*

Частный случай этой проблемы, когда $|\pi(q^2-1)| \leqslant 2$, хорошо известен (см., например, статью Герцога [26]): $|\pi(q^2-1)| \leqslant 2$ тогда и только тогда, когда $q \in \{2,3,4,5,7,8,9,17\}$.

Случаи, когда число $|\pi(q^2-1)|$ равно 3, 4 и 5 рассмотрены соответственно автором и И. В. Храмцовым [11, 12], автором [20] и В. А. Колпаковой и автором [25]. Таким образом, получена классификация степеней q простых чисел таких, что $|\pi(q^2-1)| \leqslant 5$. Дальнейшее уточнение этой классификации приводит к диофантовым уравнениям, решение которых трудно и для современной теории чисел. Например, уже вопрос конечности множества степеней q простых чисел таких, что $|\pi(q^2-1)| = 3$, равносилен до сих пор открытому вопросу Ши 13.65 из «Коуровской тетради» [27].

2. Конечные группы с заданными свойствами графа простых чисел и смежные вопросы

В работе [28] автором доказано, что группы $E_7(2)$ и $E_7(3)$ распознаются по графу простых чисел. Как следствие, завершено положительное решение поставленной в обзоре [29] проблемы В. Д. Мазурова о том, что любая конечная простая группа, граф простых чисел которой имеет по крайней мере три компоненты связности, либо распознаваема по спектру, либо изоморфна A_6. В недавней работе [30] автором доказано, что группа ${}^2E_6(2)$ распознается по графу простых чисел. Заметим, что графы простых чисел групп ${}^2E_6(2)$, $E_7(2)$ и $E_7(3)$ состоят соответственно из 8, 12 и 15 вершин.

Вызывает интерес проблема о реализуемости абстрактного конечного графа в виде графа простых чисел некоторой конечной группы. Работ, посвященных этой проблеме совсем не много. В неопубликованной бакалаврской работе И. Н. Жаркова, студента В. Д. Мазурова, было доказано, что цепь реализуется как граф простых чисел некоторой конечной группы тогда и только тогда, когда ее длина не превосходит 4. Интересно, что аналогичная проблема рассматривалась Тонг — Вьетом [31] для графа, который строится по конечной группе G по следующему правилу: множеством его вершин являются простые делители степеней неприводимых характеров группы G, и две вершины p и q смежны в нем тогда и только тогда, когда pq делит степень некоторого неприводимого характера группы G.

Конечно, в общем случае сформулированная проблема имеет отрицательное решение. Например, из [1–3] легко следует, что граф, состоящий из пяти попарно не смежных вершин (5-коклика) не может быть графом простых чисел конечной группы. Однако в работе А. Л. Гаврилюка, автора, Н. В. Масловой и И. В. Храмцова [32] было показано, что для любого графа, имеющего не более пяти вершин, кроме 5-коклики, эта проблема имеет положительное решение.

Лючидо [32] описала конечные простые группы G такие, что связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются деревьями, т. е. связными графами, не содержащими циклы. Кроме того, в этой работе описано строение конечной группы, граф простых чисел которой является деревом. О. А. Алексеева и автор рассматривают более общую задачу описания строения конечной группы G такой, что граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников (3-циклов). В случае, когда исследуемая группа G почти проста, в работе [34] мы получили следующий результат.

Теорема 3. *Пусть G — конечная почти простая группа с цоколем P. Если граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа P изоморфна одной из групп A_n для $n \in \{5,6,7\}$, $L_2(q)$ для $q \in \{7,2^3,3^4,11,13,17,5^2,7^2,2^9\}$, $L_3(q)$ для $q \in \{3,4,5,17\}$, $U_3(q)$ для $q \in \{3,7\}$, $L_4(3)$, $U_4(q)$ для $q \in \{2,3\}$, $G_2(3)$, ${}^2F_4(2)'$, M_{11}, M_{22};*

(2) *группа G изоморфна одной из групп A_8, $L_2(q)$ для $q \in \{2^4,2^6\}$, $L_3(q)$ для $q \in \{7,8,9\}$, $L_3(7):2$, $L_3(9):2$, $U_3(q)$ для $q \in \{4,5,8\}$, $U_3(5):2$, $U_3(8):3$, $U_5(2)$, ${}^2G_2(27)$;*

(3) *$P \cong L_2(q)$ для $q \in \{5^3,17^2\}$ и $PGL_2(q) \not\leqslant G$;*

(4) *$P \cong L_2(q)$, где $q \in \{2^p,3^p\}$, p — нечетное простое число и $|\pi(q-1)| \leqslant 2 \geqslant |\pi(q+1)|$;*

(5) *$G \cong L_2(p)$, где $p > 17$ — простое число и $|\pi(p-1)| \leqslant 2 \geqslant |\pi(p+1)|$;*

(6) *$G \cong PGL_2(p)$, где $p > 17$ — простое число, отличное от чисел Ферма и Мерсенна и $|\pi(p^2-1)| = 3$;*

(7) *$G \cong L_2(q)$, где $q = p^r$, $p \in \{3,5,7,17\}$, r — простое число, r не делит $|G|$, $q \equiv \varepsilon 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ для $\varepsilon \in \{+,-\}$, $|\pi(q-\varepsilon 1)| = \pi((q+\varepsilon 1)/2)| = 2$;*

(8) *$G \cong U_3(q)$, где $q = 2^p$, $p \geqslant 5$, $q-1$ и $(q+1)/3$ — простые числа, $|\pi((q^2-q+1)/3)| = 1$ и p не делит $|G|$;*

(9) *$P \cong L_3^{\epsilon}(p)$, где $\epsilon \in \{+,-\}$, $p \geqslant 11$ — простое число, отличное от чисел Ферма и Мерсенна, $(p-\epsilon 1)_3 = 3$, $|\pi(p^2-1)| = 3$ и $|\pi((p^2+\epsilon p+1)/3)| = 1$;*

(10) *$P \cong Sz(2^f)$, где либо $f = 9$, либо f — нечетное простое число и $\max\{|\pi(q-1)|, |\pi(q-\sqrt{2q}+1)|, |\pi(q+\sqrt{2q}+1)|\} \leqslant 2$;*

(11) *$G \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^p$, $p \geqslant 5$ — простое число, не делящее $|G|$, $|\pi((q-1)/2)| = |\pi((q+1)/4)| = 1$ и $|\pi(q-\sqrt{3q}+1)| \leqslant 2 \geqslant |\pi(q+\sqrt{3q}+1)|$.*

Из теоремы 3 и [1–3] легко выводится

Следствие. *Пусть G — конечная почти простая группа и граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников. Тогда*

(1) *каждая связная компонента графа $\Gamma(G)$ является деревом;*

(2) *если группа G проста, то граф $\Gamma(G)$ несвязен;*

(3) *$|\pi(G)| \leqslant 8$ и равенство достигается, если $G \cong \mathrm{Aut}(Sz(2^9))$.*

Заметим, что теорема 3 существенно уточняет полученный в [33] список конечных простых групп таких, что связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются деревьями. Доказательство теоремы 3 использует результаты о конечных почти простых n-примарных групп для $n \leqslant 6$ (см. [11, 12, 20, 25]).

Лючидо и Могхаддамфар [35] определили конечные простые неабелевы группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются полными графами (кликами). А. В. Васильев и Е. П. Вдовин [5] устранили ошибки и неточности, допущенные в этой статье. М. Р. Зиновьева и В. Д. Мазуров [37] определили конечные простые неабелевы группы, графы простых чисел которых совпадают с графами простых чисел групп Фробениуса или 2-фробениусовых групп.

В работе М. Р. Зиновьевой и автора [38] классифицированы конечные почти простые группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами. Получен следующий результат.

Теорема 4. *Пусть G — конечная почти простая, но не простая, группа. Все связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются кликами тогда и только тогда, когда граф $\Gamma(G)$ несвязен и G изоморфна группе из следующего списка:*

(1) *S_6, M_{10}, $PGL_2(9)$, S_8, S_{12}, $\mathrm{Aut}(L_2(8))$, $\mathrm{Aut}(L_3(3))$, $L_3(4):2_1$, $L_3(8):2$, $L_3(8):3$, $\mathrm{Aut}(L_3(8))$, $\mathrm{Aut}(U_3(3))$, $U_3(9):2$, $\mathrm{Aut}(U_3(9))$, $\mathrm{Aut}(U_5(2))$, $\mathrm{Aut}({}^3D_4(2))$, $\mathrm{Aut}(Sz(32))$;*

(2) *$L_2(2^m))\langle f\rangle$, где f — полевой автоморфизм группы $L_2(2^m)$ и $|f| = 2^k > 1$;*

(3) *$PGL_2(p)$, где $p > 3$ — простое число Ферма или Мерсенна;*

(4) $L_2(p^m)\langle df\rangle$, *где* p *— нечетное простое число,* m *четно,* d *и* f *— диагональный и инволютивный полевой автоморфизмы группы* $L_2(p^m)$ *соответственно;*

(5) $L_3(2^m)\langle x\rangle$, *где* $m \geqslant 5$, $(2^m-1)_3 \neq 3$, $|x| = 2\cdot 3^k$, x^2 *— полевой автоморфизм, а* x^{3^k} *— графовый автоморфизмы группы* $L_3(2^m)$*;*

(6) $L_3(p):2$, *где* $p \geqslant 127$ *— простое число Мерсенна и* $(p-1)_3 \geqslant 9$*;*

(7) $U_3(2^m)\langle f\rangle$, *где* $(2^m+1)_3 \neq 3$, f *— полевой автоморфизм группы* $U_3(2^m)$ *и* $|f| = 2^l\cdot 3^k$ *для* $l > 0$*;*

(8) $U_3(p):2$, *где* $p \geqslant 17$ *— простое число Ферма и* $(p+1)_3 \geqslant 9$*;*

(9) $G_2(3^m))\langle f\rangle$, *где* f *— полевой автоморфизм группы* $G_2(3^m)$ *и* $\varnothing \neq \pi(|f|) \subseteq \{2,3\}$*;*

(10) $PSp_4(q)\langle f\rangle)$, *где* f *— полевой автоморфизм группы* $PSp_4(q)$ *и* $|f| = 2^k > 1$*;*

(11) $PSp_4(q))\langle df\rangle$, *где* d *и* f *— диагональный и полевой автоморфизмы группы* $PSp_4(q)$ *соответственно и* $|f| = 2^k > 1$.

Доказательство теоремы 4 использует результаты Лючидо [4] о конечных почти простых группах с несвязными графами простых чисел.

Пусть G — конечная группа и V — G-модуль над некоторым полем. Говорят, что нетривиальный элемент группы G действует *свободно* (или *без неподвижных точек*) на V, если он не имеет ненулевых неподвижных векторов в V. Большой интерес вызывает проблема *описания неприводимых G-модулей, где некоторый элемент простого порядка из G действует свободно.* Результаты по этой проблеме находят многочисленные приложения, в частности, при исследовании распознаваемости конечных простых групп по спектру или по графу простых чисел, а также при изучении строения конечных групп с несвязным графом простых чисел (см., например, обзоры [7, 28] и работу И. Д. Супруненко и А. Е. Залесского [39]).

Пусть p — простое число, $q = p^l$, $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, P — алгебраически замкнутое поле характеристики p и $G = SL_n(q)$ — специальная линейная группа степени $n \geqslant 2$ над полем $\mathbb{F}_q$. *Циклом Зингера* группы G (соответственно $G/Z(G) = L_n(q)$) называется любая ее циклическая подгруппа порядка $(q^n-1)/(q-1)$ (соответственно $(q^n-1)/(q-1)(n,q-1)$) (см. теорему II.7.3 из [8]). Автором была поставлена задача *классификации неприводимых G-модулей над полем P, где нецентральный элемент заданного простого порядка m из цикла Зингера группы G действует свободно.* Именно так действуют нетривиальные элементы из цикла Зингера группы G на ее естественном модуле над полем P. Заметим также, что если H — конечная группа с несвязным графом простых чисел такая, что $F(H) \neq 1$, $\overline{H} = H/F(G) \cong L_n(q)$ и $n \geqslant 3$, то действие (сопряжением) группы H на $F(H)$ индуцирует на каждом главном факторе группы H, входящем в $F(H)$, точный неприводимый $\overline{H}$-модуль (над некоторым полем простого порядка), на котором все нетривиальные элементы из цикла Зингера группы $\overline{H}$ действуют свободно [7]. Поэтому уточнение строения группы H во многом сводится к изучению таких $\overline{H}$-модулей.

Автор, А. А. Осиновская и И. Д. Супруненко в работе [40] решили эту сложную задачу в следующих трех случаях: а) вычет числа p^f по модулю m порождает мультипликативную группу поля порядка m (это условие выполняется, в частности, для $m = 3$); б) $m = 5$; в) $n = 2$. Это обобщает, в частности, результаты Г. Хигмена (см. теорему 8.2 из [41]) и У. Стюарта (см. [42, предложение 3.2]), которые были получены в случае, когда $m = 3$ и $n = 2$. Р. Уилсон [43] определил неприводимые представления в характеристике 2 квазипростых групп Шевалле над конечными полями характеристики 2, где некоторый элемент порядка 3 не имеет собственного значения 1, т. е. действует в соответствующем модуле без неподвижных точек. А. Е. Залесский, В. Лемпкен и П. Фляйшманн (см. [44, теорему 0.1]) описали абсолютно неприводимые подгруппы полной линейной группы над конечным полем характеристики 2, порожденные классом сопряженных элементов порядка 3, действующих без неподвижных точек. В статье А. Е. Залесского [45] приведен обзор результатов о собственных значениях элементов в представлениях алгебраических групп и конечных групп Шевалле, особое внимание уделяется собственному значению 1, что связано с указанной выше проблемой.

Литература

1. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra.—1981.—Vol. 69, № 2.—P. 487–513.
2. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб.—1989.—Т. 180, № 6.—С. 787–797.
3. *Iiyori N., Yamaki H.* Prime graph components of the simple groups of Lie type over the fields of even characteristic // J. Algebra.—1993.—Vol. 155, № 2.—P. 335–343; Corrigenda: J. Algebra.—1996.—Vol. 181, № 2.— P. 659.
4. *Lucido M. S.* Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.—1999.—Vol. 102.—P. 1–22; Addendum: Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.—2002.—Vol. 107.—P. 189–190.
5. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика.—2005.—Т. 44, № 6.—С. 682–725.
6. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика.—2011.—Т. 50, № 4.—С. 425–470.
7. *Кондратьев А. С.* О конечных группах с небольшим простым спектром // Мат. форум. Т. 6. Группы и графы.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.—С. 52–70.—(Итоги науки. Юг России).
8. *Huppert B.* Endliche Gruppen I.—Berlin: Springer-Verlag, 1967.—793 s.
9. *Aschbacher M.* Finite group theory.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.—274 p.
10. *Conway J. H. et. al.* Atlas of finite groups.—Oxford: Clarendon Press, 1985.—252 p.
11. *Кондратьев А. С., Храмцов И. В.* О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН.— 2010.—Т. 16, № 3.—С. 150–158.
12. *Кондратьев А. С., Храмцов И. В.* О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН.— 2011.—Т. 17, № 4.—С. 142–159.
13. *Кондратьев А. С., Храмцов И. В.* О непростых конечных трипримарных группах с несвязным графом простых чисел // Сиб. электрон. мат. изв.—2012.—Т. 9.—С. 472–477.
14. *Кондратьев А. С., Храмцов И. В.* Вполне приводимость некоторых $GF(2)A_7$-модулей // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН.—2012.—Т. 18, № 3.—С. 139–143.
15. *Храмцов И. В.* О конечных непростых 4-примарных группах // Сиб. электрон. мат. изв.—2014.—Т. 11.—С. 695–708.
16. *Кондратьев А. С., Храмцов И. В.* О конечных группах, которые имеют несвязный граф простых чисел и композиционный фактор, изоморфный $L_3(17)$ // Алгебра и мат. логика: теория и приложения.—Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014.—С. 81–82.
17. *Кондратьев А. С., Супруненко И. Д., Храмцов И. В.* О модулярных представлениях группы $L_3(17)$ // Тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения».—Новосибирск: ИМ СО РАН и НГУ, 2014.—С. 63.
18. *Храмцов И. В.* О конечных группах, которые имеют несвязный граф простых чисел и композиционный фактор, изоморфный группе $L_2(81)$ // Тр. междунар. школы-конф. по теории групп, посвящ. 70-летию В. В. Кабанова.—Нальчик: Изд-во КБГУ, 2014.—С. 56–58.
19. *Kondrat'ev A. S.* Finite almost simple 5-primary groups and their Gruenberg–Kegel graphs // Изв. Гомельского гос. ун-та.—2014.—№ 3 (84).—С. 58–60.
20. *Kondrat'ev A. S.* Finite almost simple 5-primary groups and their Gruenberg–Kegel graphs // Сиб. эл. матем. изв.—2014.—Т. 11.—С. 634–674.
21. *Jafarzadeh A., Iranmanesh A.* On simple K_n-groups for $n = 5, 6$ // London Math. Soc. Lecture Note Ser.—2007.—Vol. 340.—P. 517–526.
22. *Zhang L., Shi W., Lv H., Yu D., Chen S.* OD-characterization of finite simple K_5-groups.—Preprint, 2011.
23. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.4.12.—2008.—URL: http://www.gap-system.org.
24. *Колпакова В. А., Кондратьев А. С.* О конечных неразрешимых 5-примарных группах G с несвязным графом Грюнберга — Кегеля таких, что $|\pi(G/F(G))| \leqslant 4$ // Тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения».—Новосибирск: ИМ и НГУ, 2014.—С. 62.

25. *Колпакова В. А., Кондратьев А. С.* Конечные почти простые 6-примарные группы и их графы Грюнберга — Кегеля // Алгебра и приложения: Тр. междунар. конф. по алгебре, посвящ. 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина.—Нальчик: КБГУ, 2014.—С. 63–66.
26. *Herzog M.* On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra.—1968.—Vol. 10, № 3.—P.—P. 383–388.
27. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 17-е изд. Ред. Мазуров В. Д., Хухро В. И.—Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010.
28. *Кондратьев А. С.* Распознаваемость групп $E_7(2)$ и $E_7(3)$ по графу простых чисел // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН.—2014.—Т. 20, № 2.—С. 223–229.
29. *Мазуров В. Д.* Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та.—2005.—№ 36.—С. 119–138.—(Математика и механика. Вып. 7).
30. *Кондратьев А. С.* Распознаваемость по графу простых чисел группы ${}^2E_6(2)$ // Материалы Междунар. симпозиума «Абелевы группы», посвящ. 100-летию со дня рождения Л. Я. Куликова.—М.: МПГУ, 2014.—С. 35–37.
31. *Tong-Viet H. P.* Groups whose prime graphs have no triangles // J. Algebra.—2013.—Vol. 378.—P. 196–206.
32. *Gavrilyuk A. L., Khramtsov I. V., Kondrat'ev A. S., Maslova N. V.* On realizability of a graph as the prime graph of a finite group // Сиб. эл. матем. изв.—2014.—Т. 11.—С. 246–257.
33. *Lucido M. C.* Groups in which the prime graph is a tree // Boll. Unione Mat. Ital. (8).—2002.—Vol. 5-B, № 1.—P. 131–148.
34. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* Конечные почти простые группы, графы Грюнберга — Кегеля которых не содержат треугольников // Тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения».—Новосибирск: ИМ и НГУ, 2014.—С. 50.
35. *Lucido M. S., Moghaddamfar A. R.* Groups with complete prime graph connected components // J. Group Theory.—2004.—Vol. 7, № 3.—P. 373–384.
36. *Зиновьева М. Р., Мазуров В. Д.* О конечных группах с несвязным графом простых чисел // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН.—2012.—Т. 18, № 3.—С. 99–105.
37. *Зиновьева М. Р., Кондратьев А. С.* Классификация конечных почти простых групп с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами // Теория групп и ее приложения: Тр. межднар. школы-конф. по теории групп, посвящ. 70-летию В. В. Кабанова.—Нальчик: Изд-во КБГУ, 2014.—С. 25–26.
38. *Suprunenko I. D., Zalesski A. E.* Fixed vectors for elements in modules for algebraic groups // Intern. J. Algebra Comput.—2007.—Vol. 17, № 5–6.—P. 1249–1261.
39. *Кондратьев А. С., Осиновская А. А., Супруненко И. Д.* О поведении элементов простого порядка из цикла Зингера в представлениях специальной линейной группы // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН.—2013.—Т. 19, № 3.—С. 179–186.
40. *Higman G.* Odd Characterizations of Finite Simple Groups: Lecture Notes.—Michigan: Univ. Michigan, 1968.—77 p.
41. *Stewart W. B.* Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc.—1973.—Vol. 426, № 4.—P. 653–680.
42. *Wilson R.* Certain representations of Chevalley groups over $CF(2^n)$ // Comm. Algebra.—1975.—Vol. 3, № 4.—P. 319–364.
43. *Fleischmann P., Lempken W., Zalesskii A. E.* Linear groups over $GF(2^k)$ generated by a conjugacy class of a fixed point free element of order 3 // J. Algebra.—2001.—Vol. 244, № 2.—P. 631–663.
44. *Suprunenko I. D., Zalesski A. E.* Fixed vectors for elements in modules for algebraic groups // Intern. J. Algebra Comput.—2007.—Vol. 17, № 5–6.—P. 1249–1261.
45. *Zalesski A. E.* On eigenvalues of group elements in representations of algebraic groups and finite Chevalley groups // Acta Appl. Math.—2009.—Vol. 108, № 1.—P. 175–195.

Статья поступила 29 апреля 2015 г.

Кондратьев Анатолий Семенович
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
зав. сектором
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
профессор
РОССИЯ, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

ON FINITE GROUPS WITH SMALL SIMPLE SPECTRUM, II

Kondratiev A. S.

This is a survey of the results about finite groups whose prime graphs have a small number of vertices obtained recently by the author jointly with his pupils. It is refined a description of the chief factors of 4-primary groups, whose prime graphs are disconnected. The finite almost simple 5-primary and 6-primary groups and their Gruenberg–Kegel graphs are determined. The chief factors of the commutator subgroups of finite non-solvable groups G with disconnected Gruenberg–Kegel graph having exactly 5 vertices are described in the case when $G/F(G)$ is an almost simple n-primary group for $n \leqslant 4$. The problem of the realizability of a graph with at most five vertices as the prime graph of a finite group is solved. The finite almost simple groups with prime graphs, whose the connected components are complete graphs, are determined. The finite almost simple groups whose prime graphs do not contain triangles are determined. It is proved that the groups ${}^2E_6(2)$, $E_7(2)$ and $E_7(3)$ are recognizable by the prime graph. Absolutely irreducible $SL_n(p^f)$-modules over a field of prime characteristic p, where an element of a given prime order m from a Zinger cycle of $SL_n(p^f)$ acts freely, are classified in the following three cases: a) the residue of q modulo m generates the multiplicative group of the field of order m (in particular, this holds for $m = 3$); b) $m = 5$; c) $n = 2$.

Key words: finite group, almost simple group, chief factor, prime spectrum, prime graph, recognizability, modular representation.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 32–36

УДК **510.67+512.55**

ARTIN'S THEOREM FOR f-RINGS[1]

A. G. Kusraev

To Vladimir Kojbaev
on occasion of his 60th birthday

The main result states that each positive polynomial p in N variables with coefficients in a unital Archimedean f-ring K is representable as a sum of squares of rational functions over the complete ring of quotients of K provided that p is positive on the real closure of K. This is proved by means of Boolean valued interpretation of Artin's famous theorem which answers Hilbert's 17th problem affirmatively.

Mathematics Subject Classification (2010): 03C25, 12D15, 13B25.

Key words: f-ring, complete ring of quotients, real closure, polynomial, rational function, Artin's theorem, Hilbert 17th problem, Boolean valued representation.

The aim of this note is to prove that each positive polynomial p in N variables with coefficients in a unital Archimedean f-ring K is representable as a sum of squares of rational functions over the complete ring of quotients of K provided that p is positive on the real closure of K. For an ordered field K this is Artin's famous theorem which answers Hilbert's 17th problem affirmatively.

Recall some basic notions of the theory of rings; see J. Lambek [11]. Everywhere below K is a commutative unital ring. The *complete ring of quotients* of a commutative ring K is denoted by $Q(K)$. We call K *rationally complete* if $Q(K) \simeq K$ canonically or, equivalently, every irreducible fraction has domain K. Given a subset A of a commutative ring K, define the *annihilator* of A as $A^* := \{k \in K : kA = \{0\}\}$. The ideals of the form A^* are called *annihilator ideals*. Thus J is an annihilator ideal if and only if $J = A^*$ for some subset A of K, and this is equivalent to saying that $J^{**} := (J^*)^* = J$. A commutative ring K is called *semiprime* if its prime radical is 0, that is if it has no nonzero nilpotent elements. The annihilator ideals in a commutative semiprime ring K form a complete Boolean algebra $\mathbb{A}(K)$, with intersection as infimum and annihilator as complementation. If K is commutative, semiprime, and rationally complete, then every annihilator of K is a direct summand and $\mathbb{P}(K) \simeq \mathbb{A}(K)$ with $\mathbb{P}(K)$ being the Boolean algebra of idempotents of K. The *lateral* (or *orthogonal*) completion of a commutative semiprime ring K is the least subring $K' \subset Q(K)$ such that for all families $(x)_{\xi\in\Xi}$ in K and $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ in $\mathbb{P}(Q(K))$ with $e_\xi e_\eta = 0$ $(\xi \neq \eta)$ there exists $x \in K'$ such that $e_\xi x = e_\xi x_\xi$ for all $\xi \in \Xi$.

The ring K is called *formally real* if $a_1^2 + \dots + a_n^2 \in J$ implies $a_1, \dots, a_n \in J$ for every finite collection $a_1, \dots, a_n \in K$ and every $J \in \mathbb{A}(K)$ or, in terminology of J. Bochnak, M. Coste,

[1]The study was supported by a grant from the Russian Foundation for Basic Research, project 14-01-91339.

and M.-F. Roy [3, Definition 4.1.3], every annihilator ideal in K is real. A semiprime regular ring K is real if and only if $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0$ implies $a_1 = \dots = a_n = 0$ for all $a_1, \dots, a_n \in K$ and $n \in \mathbb{N}$, since every principal annihilator ideal is a direct summand.

Consider commutative unital rings K and L. Say that L *extends* K if K is a subring of L and the mapping $J \mapsto J \cap K$ is one-to-one from $\mathbb{A}(L)$ onto $\mathbb{A}(K)$. Say also that L is *locally algebraic* over K whenever L extends K and, given $x \in L$ and a nonzero $I \in \mathbb{A}(K)$, there exist a nonzero $J \in \mathbb{A}(K)$, natural $n \in \mathbb{N}$, and $a_0, \dots, a_n \in K$ such that $J \subset I$ and $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in J^*$. In the case of of semiprime regular rings L is locally algebraic over K if and only if $\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(L)$ and, given $x \in L$, for every nonzero $d \in \mathbb{P}(K)$ there exist a nonzero $e \in \mathbb{P}(K)$, natural $n \in \mathbb{N}$, and $a_0, \dots, a_n \in K$ such that $e \leqslant d$ and $e(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = 0$.

An *f-ring* is a lattice-ordered ring K such that $y \wedge z = 0$ implies $xy \wedge z = yx \wedge z = 0$ for all $x, y, z \in K_+$. A *band* (or *polar*) in K is each set of the form $A^\perp := \{k \in K : (\forall a \in A)\, |k| \wedge |a| = 0\}$ with $\varnothing \neq A \subset K$. The set of all bands $\mathbb{B}(K)$ in a semiprime Archimedean f-ring K coincides with $\mathbb{A}(K)$ and hence is a complete Boolean algebra, since $A^* = A^\perp$ for every $A \subset K$. In this note we consider only Archimedean f-rings. See more details in [2].

For a unital f-ring K the complete ring of quotients $Q(A)$ can be uniquely made an f-ring with K a sublattice of $Q(A)$. This result is due to F. W. Anderson [1]; see also [8, § 10]. Moreover, the Boolean algebras $\mathbb{P}(Q(K))$ and $\mathbb{A}(K)$ are isomorphic.

A *real closure* of a unital f-ring K is a rationally complete f-ring $\overline{K}$ satisfying the following conditions: 1) $Q(K)$ is a subring and sublattice of $\overline{K}$ with $\overline{K}$ extending $Q(K)$, 2) $\overline{K}$ is locally algebraic over $Q(A)$, and 3) if K' is rationally complete f-ring containing $\overline{K}$ as a subring and sublattice and locally algebraic over $Q(K)$ then $K' = \overline{K}$. Say that K is *real closed* whenever $K = \overline{K}$. See the general concept of real closed rings in [15]. The main result is stated next.

Theorem. *Let K be an Archimedean unital f-ring and let $\overline{K}$ be its real closure, so that the embeddings $K \subset Q(K) \subset \overline{K}$ hold. If a polynomial $p \in K[x_1, \dots, x_N]$ is positive, that is $p(a_1, \dots, a_N) \geqslant 0$ for all $(a_1, \dots, a_N) \in \overline{K}^N$, then the representation $q^2 p = \sum_{j=1}^m k_j p_j^2$ holds for some non-zero-divisors $0 < k_1, \dots, k_m \in Q(K)$ and some polynomials $p_1, \dots, p_m, q \in Q(K)[x_1, \dots, x_N]$ with $eq(a_1, \dots, a_N) = 0$ equivalent to $ep(a_1, \dots, a_N) = 0$ for all $e \in \mathbb{P}(Q(K))$ and $a_1, \dots, a_N \in K$.*

Remark 1. Our proof uses *Boolean valued analysis* which signifies the technique of studying properties of an arbitrary mathematical object by means of comparison between its representations in two different set-theoretic models, the *von Neumann universe* $\mathbb{V}$ and a specially-trimmed *Boolean-valued universe* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Comparative analysis is carried out by means of some interplay between $\mathbb{V}$ and $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ which rests on the functors of *canonical embedding* (or *standard name*) $X \mapsto X^\wedge \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ ($X \in \mathbb{V}$), *descent* $\mathscr{X} \mapsto \mathscr{X}{\downarrow} \in \mathbb{V}$ ($\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$), and *ascent* $Y \mapsto Y{\uparrow} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ ($Y \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$). Accordingly, our proof is merely an interpretation of Artin's theorem within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, thus demonstrating how does a Boolean valued transfer principle work in real algebra (as presented in [3] and [14]).

Remark 2. In particular, each Archimedean unital f-ring K has a real closure unique up to K-isomorphism. This is a Boolean valued interpretation of Artin–Schreier Theorem for ordered fields; see [14, Theorem 1.3.14] and [13, Theorem 28.7].

Remark 3. For every $0 \neq a \in Q(K)$ there exists a least element $e_a \in \mathbb{P}(Q(K))$ with $e_a a = a$. Moreover, a is a non-zero-divisor of $Q(e_a K)$ and a^{-1} exists in $Q(e_a K)$. Now, given $p, q \in Q(K)[x_1, \dots, x_N]$, we can define $(p/q)(a_1, \dots, a_N) := p(a_1, \dots, a_N) q(a_1, \dots, a_N)^{-1}$ if $q(a_1, \dots, a_N) \neq 0$, while $(p/q)(a_1, \dots, a_N) := 0$, whenever $q(a_1, \dots, a_N) = 0$. Say that p/q is a *rational function* over $Q(K)$ and denote by $Q(K)(x_1, \dots, x_N)$ the set of all rational functions over $Q(K)$. Thus the above representation can be written as $p = \sum_{j=1}^m k_j (p_j^2/q^2)$.

Throughout the sequel $\mathbb{B}$ is a complete Boolean algebra with unit $\mathbb{1}$ and zero $\mathbb{O}$, while $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ is the corresponding Boolean valued model of set theory and $[\![\varphi]\!] \in \mathbb{B}$ is the Boolean truth value of a set theoretic formula φ. All necessary information concerning Boolean values analysis can be found in [9] and [10].

We need the following important result due to E. I. Gordon [6]. Let K be a commutative semiprime ring and $\mathbb{B}$ the Boolean algebra of its annihilator ideals. Then there exist $\mathscr{K}, \mathscr{F} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ such that $[\![\, \mathscr{K}$ is an integral domain and $\mathscr{F}$ is the quotient field of $\mathscr{K} \,]\!] = \mathbb{1}$, $\mathscr{K}{\downarrow}$ is the lateral completion of K and $\mathscr{F}{\downarrow}$ is the complete ring of quotients of K. In this event $\mathscr{K}$ is called the *Boolean valued representation* of K. Details can be found in [9, Theorem 8.3.5].

Lemma 1. *Let K be a commutative semiprime ring and $\mathscr{K}$ be its Boolean valued representation in $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ with $\mathbb{B} = \mathbb{A}(K)$. If L is a subring of K and $\mathscr{L} := L{\uparrow} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ then*

(1) $[\![\, \mathscr{L}$ *is a subring of* $\mathscr{K} \,]\!] = \mathbb{1} \iff K$ *extends* L.

(2) $[\![\, \mathscr{K}$ *is algebraic over* $\mathscr{L} \,]\!] = \mathbb{1} \iff K$ *is locally algebraic over* L.

(3) $[\![\, \mathscr{K}$ *is algebraic closure of* $\mathscr{L} \,]\!] = \mathbb{1} \iff K$ *is algebraic closure of* L.

$\lhd$ This fact can be derived from Gordon's result [6] by straightforward calculation of Boolean truth values; cp. [9, Section 8.3]. $\rhd$

Lemma 2. *Let K, $\mathscr{K}$, L, and $\mathscr{K}$ be the same as in Lemma 1 and, moreover, K is an Archimedean f-ring extending L, while L is a sublattice of K. Then $[\![\mathscr{K}$ and $\mathscr{L}$ are totally ordered integral domains with K extending $\mathscr{L}]\!] = \mathbb{1}$ and K is a real algebraic closure of L if and only if $[\![\mathscr{K}$ is a field, a real algebraic closure of $\mathscr{L} \,]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ The claim can be proved combining the above mentioned result by Anderson and Lemma 1 in the manner similar to that of [9, Theorem 8.5.6] taking into account the fact that an ordered field $\mathscr{K}$ admits a unique real closure up to $\mathscr{K}$-isomorphism; see [3, Theorem 1.3.2]. $\rhd$

Lemma 3. *Let $\mathscr{K}$ be a totally ordered integral domain, $\mathscr{K}'$ be its field of quotients and $\overline{\mathscr{K}}$ is a real closure of $\mathscr{K}'$. If a polynomial $p \in \mathscr{K}[x_1, \dots, x_N]$ is positive, i.e. $p(a_1, \dots, a_N) \geqslant 0$ for all $(a_1, \dots, a_N) \in \overline{\mathscr{K}}^N$, then $q^2 p = k_1 p_1^2 + \dots + k_m p_m^2$ for some $0 < k_1, \dots, k_m \in K'$, $p_1, \dots, p_m, q \in \mathscr{K}'[x_1, \dots, x_N]$ with $q(x_1, \dots, x_N) = 0$ if and only if $p(x_1, \dots, x_N) = 0$.*

$\lhd$ This is an improved version of Artin's theorem; see [3, Theorem 6.1.3], [12, Theorem 1.4.4], [13, Theorem 28.11], and [14, Theorem 2.1.12]. $\rhd$

Lemma 4. *Let K be an Archimedean unital f-algebra, $\mathbb{B} = \mathbb{P}(K)$, and let $\mathscr{K} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ be its Boolean valued representation. If $[\![\rho \in \mathscr{K}[x_1, \dots, x_N]]\!] = \mathbb{1}$ and $[\![\deg(\rho) \leqslant d^\wedge]\!]$ for some $d \in \mathbb{N}$ then $\rho{\downarrow} \in K'[x_1, \dots, x_N]$ with $K' := \mathscr{K}{\downarrow}$.*

$\lhd$ Assume that $[\![\rho \in \mathscr{K}[x_1, \dots, x_N]\,]\!] = \mathbb{1}$ and fix $u_1, \dots, u_N \in K$. Define $\mathbb{N}_d := \{1, \dots, d\}$ and identify N with $\{0, 1, \dots, N-1\}$. Observe that $(\mathbb{N}_d^\wedge)^{N^\wedge} = (\mathbb{N}_d^N)^\wedge$. There exist two mappings $\alpha, \varkappa : (\mathbb{N}_d^\wedge)^{N^\wedge} \to \mathscr{K}$ such that

$$\rho(u_1, \dots, u_N) = \sum_{\nu \in (\mathbb{N}_d^N)^\wedge} \alpha(\nu)\varkappa(\nu), \quad \varkappa(\nu) = \prod_{j \in N^\wedge} u_j^{\nu(j)}.$$

Let $a := \alpha{\downarrow}$ and $k{\downarrow}$ stand for the modified descents of α and $\varkappa$, respectively, so that $a, k : \mathbb{N}_d^N \to K'$ and $[\![a(\nu) = \alpha(\nu^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$, $[\![k(\nu) = \varkappa(\nu^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$ for all $\nu \in \mathbb{N}_d^N$, see [9, 5.7.7] and [10, § 1.5]. Define $p \in K'[x_1, \dots, x_N]$ as $p(x_1, \dots, x_N) := \sum_{\nu \in \mathbb{N}_d^N} a_\nu x_1^{\nu(1)} \cdot \ldots \cdot x_N^{\nu(N)}$, $a_\nu := a(\nu)$, and observe that for all $u_1, \dots, u_N \in K'$ we have

$$\left[\!\!\left[\rho(u_1, \dots, u_N) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_d^N} a_\nu \prod_{j \in N} u_j^{\nu(j)} = p(u_1, \dots, u_N)\right]\!\!\right] = \mathbb{1}.$$

It follows that $\rho{\downarrow} = p$. $\rhd$

$\lhd$ Proof of the Theorem. Let $\mathscr{K} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ be the Boolean valued representation of K with $\mathbb{B} = \mathbb{A}(K)$. Then $\mathscr{K}$ is an integral domain within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. By the Boolean valued transfer principle and the maximum principle, within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ there exist the field of quotients $\mathscr{K}'$ of $\mathscr{K}$ and the real closure $\overline{\mathscr{K}}$ of $\mathscr{K}'$. We may assume that $Q(K) = \mathscr{K}'{\downarrow}$ by the above mentioned Gordon's result and $\overline{K} = \overline{\mathscr{K}}{\downarrow}$ by Lemma 2. Take a polynomial $p \in K[x_1, \dots, x_N]$ and assume that $p(a_1, \dots, a_N) \geqslant 0$ for all $(a_1, \dots, a_N) \in \overline{K}^N$. Putting $\pi := p{\uparrow}$, one can prove by direct calculation of Boolean truth values that $\pi \in \mathscr{K}[x_1, \dots, x_N]$ and $\pi(a_1, \dots, a_N) \geqslant 0$ for all $(a_1, \dots, a_N) \in \overline{\mathscr{K}}^N$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. By the transfer principle, Lemma 3 holds true within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ and by the maximum principle there exist $m \in \mathbb{N}^{\wedge}$, $\pi_1, \dots, \pi_m, \rho \in \mathscr{K}'[x_1, \dots, x_N]$ such that $\rho^2\pi = \pi_1^2 + \dots + \pi_m^2$ and $\rho(x_1, \dots, x_N) = 0$ if and only if $\pi(x_1, \dots, x_N) = 0$ for all $x_1, \dots, x_N \in \mathscr{K}'$. Moreover, the number of squares $m \leqslant 2^{\wedge N^{\wedge}}$ (see [13, Theorem (Pfister) 29.3]) and the degrees of π_j^2 for every j and ρ^2 bounded by $D = 2^{2^{2^{\alpha}}}$, $\alpha := \deg(\pi)^{4^{N^{\wedge}}}$ (see [12, Theorem 1.4.4]). Observe now that $m \leqslant (2^{\wedge})^{A^{\wedge}} = (2^A)^{\wedge}$ for any finite set A, since $(\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(A))^{\wedge} = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(A^{\wedge})$, see [9, Proposition 5.1.9]. Thus, we have $(2^N)^{\wedge} = 2^{N^{\wedge}}$ and $\alpha \leqslant \big(\deg(p)^{4^N}\big)^{\wedge}$. (We identify 2 with $2^{\wedge}$ and 4 with $4^{\wedge}$.) It follows the existence of $l \in \mathbb{N}$ with $D \leqslant l^{\wedge}$. Denote $q := \rho{\downarrow}$ and $p := \pi_j{\downarrow}$ $(j := 1, \dots, m)$. Then $q^2 p = \sum_{j=1}^{2^N} k_j p_j^2$ and $\pi_j, q \in Q(K)[x_1, \dots, x_N]$ by Lemma 4. $\rhd$

Let $\mathscr{R}$ be the field of reals within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Then $\mathbf{R} := \mathscr{R}{\downarrow} \in \mathbb{V}$ (with the descended operations and order; see [9]) is a universally complete vector lattice, i. e. the externalization $\mathbf{R}$ of the internal Boolean valued reals $\mathscr{R}$ is a universally complete vector lattice. This remarkable result discovered by E. I. Gordon [5] tells us that each theorem on the reals (in the framework of Zermelo–Fraenkel set theory) has its counterpart for the corresponding universally complete vector lattices. In particular, $\mathbf{R}$ admits a unique f-ring multiplication for which a given order unit, a positive element $\mathbb{1} \in \mathbf{R}$ with $\{\mathbb{1}\}^{\perp} = \{0\}$, is a ring unit.

Corollary 1. *The vector lattice $\mathbf{R}$ is a real closed f-ring and each positive polynomial in $\mathbf{R}[x_1, \dots, x_N]$ is a sum of squares of rational functions in $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_N)$.*

Two important particular cases of $\mathbf{R}$ were independently studied by G. Takeuti, who observed that the vector lattice of cosets of (almost everywhere equal) measurable function and a commutative algebra of (unbounded) self-adjoint operators in Hilbert space can be considered as instances of Boolean valued reals [16, 17].

Corollary 2. *Let (Ω, Σ, μ) be a Maharam measure space and let $L^0 := L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ be the f-ring of all cosets of real measurable functions on Ω. Then any positive polynomial in $L^0[x_1, \dots, x_N]$ is a sum of squares of rational functions in $L^0(x_1, \dots, x_N)$.*

$\lhd$ A vector lattice $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ is a universally complete f-algebra (with identically one function as a ring unit) if and only if the measure space (Ω, Σ, μ) is Maharam (= localizable). $\rhd$

Given a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ of projections in a Hilbert space H, denote by $\mathfrak{S}(\mathbb{B})$ the space of all selfadjoint operators on H whose spectral decompositions are in $\mathbb{B}$; i. e., $A \in \mathfrak{S}(\mathbb{B})$ if and only if $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE_{\lambda}$ with $E_{\lambda} \in \mathbb{B}$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$, see [17]. For $A, B \in \mathfrak{S}(\mathbb{B})$ put $A \leqslant B$ if and only if $(Ax, x) \leqslant (Bx, x)$ for all $x \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(B)$.

Corollary 3. *Let H be a complex Hilbert space and $\mathbb{B}$ a complete Boolean algebra of projections on H. Then any positive polynomial in $\mathfrak{S}(\mathbb{B})[x_1, \dots, x_N]$ is a sum of squares of rational functions in $\mathfrak{S}(\mathbb{B})(x_1, \dots, x_N)$.*

$\lhd$ $\mathfrak{S}(\mathbb{B})$ is a universally complete f-algebra (and hence a unital f-ring) [17, Ch. 1, § 3]. $\rhd$

Remark 4. Corollary 2 can be considered (and also proved) as a measurable version of the 'continuous' solution of Hilbert's 17th problem obtained by C. N. Delzell and re-discovered by L. González-Vega and H. Lombardi, see [4] and [14, Theorem 4.3.4].

References

1. *Anderson F. W.* Lattice-ordered rings of quotients // Canad. J. Math.—1965.—Vol. 17.—P. 434–448.
2. *Bigard A., Keimel K., and Wolfenstein S.* Groupes et Anneaux Réticulés.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977.—xi+334 p.—(Lecture Notes in Math., Vol. 608).
3. *Bochnak J., Coste M., and Roy M.-F.* Real Algebraic Geometry.—Berlin a. o.: Springer, 1998.—x+430 p.
4. *Delzell C. N., González-Vega L., and Lombardi H.* A continuous and rational solution to Hilbert's 17th problem and several cases of the Positivstellensatz // Computational Alg. Geom. / Eds. F. Eyssette and A. Galligo.—Birkhäuser: Boston a. o., 1993.—P. 61–75.—(Progress in Math., Vol. 109).
5. *Gordon E. I.* Real numbers in Boolean-valued models of set theory and K-spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1977.—Vol. 237, № 4.—P. 773–775.
6. *Gordon E. I.* Rationally Complete Semiprime Commutative Rings in Boolean Valued Models of Set Theory.—Gor'kiĭ, 1983.—35 p.—(VINITI, № 3286-83).
7. *Henriksen M. and Isbell J. R.* Lattice-ordered rings and function rings // Pacific J. Math.—1962.—Vol. 12.—P. 533–565.
8. *Knebusch M. and Zhang D.* Convexity, Valuations and Prüfer extensions in real algebra // Documenta Math.—2005.—Vol. 10.—P. 1–109.
9. *Kusraev A. G. and Kutateladze S. S.* Introduction to Boolean Valued Analysis [in Russian].—M.: Nauka, 2005.—526 p.
10. *Kusraev A. G. and Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.
11. *Lambek J.* Lectures on rings and modules.—Toronto: Blaisdell Publ. Comp., 1966.—183 p.—(AMS Chelesea publishing. Providence, R. I.).
12. *Lombardi H., Perrucci D., and Roy M.-F.* An elementary recursive bound for effective Positivstellensatz and Hilbert 17th problem.—2014.—arXiv:1404.2338v2 [math.AG].
13. *Prasolov V. V.* Polynomials.—Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.—301 p.
14. *Prestel A. and Delzell Ch. N.* Positive Polynomials: From Hilbert's 17th Problem to Real Algebra.—Berlin a. o.: Springer, 2001.—viii+267 p.
15. *Schwartz N.* The basic theory of real closed spaces.—Providence (R. I.): Amer. Math. Soc., 1989.—122 p.—(Mem. Amer. Math. Soc. Vol. 77 (397)).
16. *Takeuti G.* Two Applications of Logic to Mathematics.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1978.
17. *Takeuti G.* A transfer principle in harmonic analysis // Symbolic Logic.—1979.—Vol. 44, № 3.—P. 417–440.

Received February 16, 2015.

Kusraev Anatoly Georgievich
Southern Mathematical Institute
Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Director*
22 Markus street, Vladikavkaz, 362027, Russia
E-mail: `kusraev@smath.ru`

ТЕОРЕМА АРТИНА ДЛЯ f-КОЛЕЦ

Кусраев А. Г.

Основной результат заметки утверждает, что полином p от N переменных с коэфиициентами из унитарного архимедова f-кольца K представляется в виде суммы квадратов рациональных фукнций над полным кольцом частных кольца K, если только p положителен на вещественном замыкании K. Доказательство состоит в булевозначной интерпретации классической теоремы Артина, содержащей положительное решение 17-й проблемы Гильберта.

Ключевые слова: f-кольцо, полное кольцо частных, вещественное замыкание, полином, рациональная функция, теорема Артина, 17-я проблема Гильберта, булевозначное представление.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 37–46

УДК **512.554**

НИЛЬТРЕУГОЛЬНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБР ШЕВАЛЛЕ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

В. М. Левчук, А. В. Литаврин, Н. Д. Ходюня, В. В. Цыганков

Владимиру Амурхановичу Койбаеву
к его шестидесятилетию

Рассматриваются вопросы описания идеалов и автоморфизмов нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов над полем и их нефинитарных обобщений, а также автоморфизмы присоединенных групп. Лиев идеал алгебры $NT(n,K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц (лиев тип A_{n-1}) охарактеризован через базис набором констант основного поля K. Когда $K = GF(q)$, это дает комбинаторное выражение числа лиевых идеалов и, в случае простого q, также числа нормальных подгрупп унитреугольной группы $UT(n,q)$.

Ключевые слова: алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, нефинитарные обобщения, максимальные абелевы идеалы, автоморфизмы, присоединенные группы.

1. Нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле и их финитарные обобщения

Алгебру Шевалле над полем K, ассоциированную с системой корней Φ, характеризуют базисом Шевалле, состоящим из элементов e_r ($r \in \Phi$) и базы подалгебры Картана [1, § 4.4]. Подалгебру $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r : \ r \in \Phi^+\}$ называем *нильтреугольной.* Для типа A_{n-1} ее отождествляют с ассоциированной алгеброй Ли алгебры $NT(n,K)$ нильтреугольных $(n \times n)$-матриц над K, т. е. с базой из матричных единиц $\{e_{ij} : \ 1 \leqslant j < i \leqslant n\}$. Хорошо известно, что отображение $\alpha \to e+\alpha$ (e — единичная матрица) дает изоморфизм присоединенной группы $(NT(n,K), \circ)$, $\alpha \circ \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta$, на унитреугольную группу $UT(n,K)$.

В [2] выявились тесные связи автоморфизмов, а также нормальных подгрупп группы $UT(n,K)$ и идеалов кольца Ли $NT(n,K)$ над любым ассоциативным кольцом K с единицей. В [3] они изучались для более общей алгебры $R = NT(\Gamma,K)$ финитарных нильтреугольных Γ-матриц $\|a_{ij}\|_{i,j\in\Gamma}$ над K с произвольной цепью (линейно упорядоченным множеством) Γ индексов и отношением порядка $<$. Базу здесь дают Γ-матрицы e_{ij} ($i,j \in \Gamma$, $j < i$) с обычными правилами сложения и умножения матричных единиц, в частности, $e_{uv}e_{ij} = e_{uj}$ при $v = i$, а остальные произведения равны нулю. Построенная ассоциативная алгебра локально нильпотентная и поэтому радикальная, т. е. присоединенная полугруппа $(R, \circ)$ есть группа; последняя изоморфна финитарной унитреугольной группе $UT(\Gamma,K)$. Подобные общие конструкции рассматривал А. И. Мальцев [4].

В [2] и [3] установлено следующее структурное соответствие.

Теорема 1.1. *Идеалы кольца Ли $\Lambda(R)$, ассоциированного с кольцом $R = NT(\Gamma, K)$, и только они есть нормальные подгруппы присоединенной группы $G(R) = (R, \circ)$.*

Группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, R = \mathrm{Aut}\,\Lambda(R) \cap \mathrm{Aut}\, G(R)$, $\mathrm{Aut}\,\Lambda(R)$ и $\mathrm{Aut}\, G(R)$ описаны в [2] при $3 < |\Gamma| < \infty$ и в [3] (взаимосвязано с максимальными абелевыми идеалами), когда K — кольцо без делителей нуля. В частности: *если в цепи Γ нет первого или последнего элемента, то группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\Lambda(R)$ и $\mathrm{Aut}\, G(R)$ совпадают с $\mathrm{Aut}\, R$ и все автоморфизмы стандартны.*

Произвол в выборе цепи Γ позволяет легко получать примеры алгебр и групп с аномальными свойствами по сравнению со случаем конечной цепи Γ. Всякая группа $G(NT(\Gamma, K))$ является локально нильпотентной группой, а при $K = GF(p)$ также локально конечной p-группой. В то же время, она имеет тривиальный центр, если в цепи Γ нет первого или последнего элемента, и совпадает с коммутантом для любой плотной цепи Γ; для цепи рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ и $K = GF(p)$ это отмечает И. Д. Адо [5] и, аналогично, Д. Маклэйн [6] строит пример характеристически простой локально нильпотентной группы. Другие примеры указал в 1994 г. Ю. И. Мерзляков [7].

Унипотентный радикал $U = U\Phi(K)$ подгруппы Бореля группы Шевалле типа Φ над K с помощью канонической формы элементов в [8] представлен в $N\Phi(K)$ присоединенной группой. Развитие методов [2] позволило описать автоморфизмы унипотентных подгрупп U групп лиева типа (включая скрученные типы) над полем, завершив решение проблемы описания $\mathrm{Aut}\, U$; для конечного поля K это — проблема 1.5 из обзора [9].

Существенность описаний автоморфизмов для решения теоретико-модельных вопросов отмечалась в [10] и [11]. Применимость методов [8] в описаниях автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ показана там же для типа D_4; другие случаи изучались в [12] и [13]. В целом, вопрос описания $\mathrm{Aut}\, N\Phi(K)$ остается нерешенным (см. далее § 2).

Алгебры Ли $N\Phi(K)$ классических типов B_n, D_n и C_n представлены в [8] специальными матрицами с базисом из матричных единиц e_{iv}, соответственно,

$$-i < v < i \leqslant n, \quad 1 \leqslant |v| < i \leqslant n, \quad -i \leqslant v < i \leqslant n, \quad v \neq 0. \tag{1}$$

Это естественно приводит [14] к финитарным обобщениям алгебр $N\Phi(K)$ типа B_Γ, C_Γ и D_Γ групп U классических типов, вопросам перенесения теоремы 1 и описания автоморфизмов. Автоморфизмы финитарных групп U (включая скрученные) над полем изучены [15].

В § 3 показывается, что все нильтреугольные Γ-матрицы над K образуют радикальное кольцо $GNT(\Gamma, (K)$, когда $\Gamma = Z^{(+)}$ — цепь целых чисел > 0. (Аналогично, получаем кольцо треугольных Γ-матриц.) Нефинитарные обобщения унитреугольных и треугольных групп изучает Р. Словик ([16] и др.). Присоединенная группа кольца $GNT(\Gamma, (K))$ изоморфна группе $UT_\infty(K)$ из [16] и к ее исследованию также применимы методы [3].

В § 4 устанавливается канонический базис произвольного лиева идеала алгебры $NT(n, K)$ над полем K и исследуется для лиева типа A_n записанная в [17] задача о комбинаторном выражении числа всех идеалов алгебры $N\Phi(GF(q))$ классического типа.

2. Автоморфизмы нильтреугольных алгебр классического типа

Известно [1], что любой элемент $\gamma \in U = U\Phi(K)$ однозначно записывается произведением корневых элементов $x_r(\gamma_r)$ $(r \in \Phi^+)$, расположенных согласно фиксированному (произвольно) упорядочению корней. *Присоединенную группу* $\langle N\Phi(K), \circ\rangle$ и изоморфизм

π группы $U\Phi(K)$ на нее получаем, как и в [8], полагая

$$\pi(\gamma) = \sum_{r \in \Phi^+} \gamma_r e_r \quad (\gamma \in U\Phi(K)),$$
$$\alpha \circ \beta = \pi(\pi^{-1}(\alpha)\pi^{-1}(\beta)) \quad (\alpha, \beta \in N\Phi(K)).$$

В этом параграфе методы [8] переносятся к описанию автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$.

К основным автоморфизмам (их произведения называем *стандартными автоморфизмами*) кольца Ли $N\Phi(K)$ и унипотентных групп U относим центральные (тождественные по модулю центра) автоморфизмы, внутренние и диагональные автоморфизмы [1, § 7.1] и автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами основного кольца K.

Граф Кокстера систем корней типа A_n и D_n допускает симметрию 2-го порядка. В случае кольца K с автоморфизмом порядка 2 ей сопоставляют графовый автоморфизм τ порядка 2 кольца Ли $N\Phi(K)$ и присоединенной группы. Используем также

Определение 2.1 [14]. Автоморфизм группы или кольца Ли называют *гиперцентральным* высоты m, если он является внешним по модулю $(m-1)$-го гиперцентра и тождественным по модулю m-го гиперцентра.

Заметим, что в алгебрах Ли $N\Phi(K)$ классических типов B_n, D_n и C_n база из матричных единиц e_{iv} с индексами (1), соответственно, получена в [8] переобозначением индексов из элементов базы Шевалле. Пользуясь теоремой Шевалле о базисе, получаем [8, лемма 2].

Лемма 2.2. *Знаки структурных констант базиса Шевалле можно выбрать так, что $e_{ij} * e_{jv} = e_{iv}$ и, кроме того, выполняются следующие равенства.*

$$\Phi = B_n, D_n : \quad e_{jv} * e_{i,-v} = e_{i,-j} \quad (i > j >| v |> 0);$$

$$\Phi = C_n : \ e_{jm} * e_{i,-m} = e_{im} * e_{j,-m} = e_{i,-j} \quad (i > j > m \geqslant 1);$$

$$\Phi = B_n : \ e_{i0} * e_{j0} = 2e_{i,-j}, \quad \Phi = C_n : \ e_{ij} * e_{i,-j} = 2e_{i,-i} \quad (i > j \geqslant 1).$$

Каждый элемент алгебры Ли $N\Phi(K)$ записывается в виде $\sum a_{iv}e_{iv}$ и представляется Φ^+-матрицей $\|a_{iv}\|$ соответствующего типа. Так, B_n^+-матрица имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_{10} & & & \\
 & & a_{2,-1} & a_{20} & a_{21} & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
a_{n,-n+1} & \cdots & a_{n,-1} & a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1}.
\end{array}$$

Исключая нулевой столбец, получим D_n^+-матрицу. C_n^+-матрица имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_{1,-1} & & & \\
 & & a_{2,-2} & a_{2,-1} & a_{21} & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
a_{n,-n} & \cdots & a_{n,-2} & a_{n,-1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1}.
\end{array}$$

Пусть T_{iv} для каждой матричной позиции (iv) есть идеал в $N\Phi(K)$, состоящий из всех матриц с нулевыми строками с номерами $< i$ и столбцами с номерами $> v$. По определению, T_{1v} — совокупность матриц с нулевыми столбцами с номерами $> v$.

Пользуясь предыдущей леммой, индукцией по i находим члены Z_i гиперцентрального или верхнего, а также нижнего центральных рядов кольца Ли $N\Phi(K)$, причем для любого ассоциативно коммутативного кольца K с единицей. Все они, а также их централизаторы являются характеристическими идеалами. Известно, что при $2K = K$ верхний и нижний центральные ряды кольца Ли $N\Phi(K)$ совпадают со стандартным центральным рядом $L_1 = N\Phi(K) \supset L_2 \supset \dots$, где L_i — сумма всех Ke_r для корней высоты $\geqslant i$.

Подробнее рассмотрим тип C_n. Аннулятор в K элемента t обозначим через $\mathrm{Ann}(t)$.

Лемма 2.3. *Для кольца Ли $NC_n(K)$ $(n \geqslant 3)$ верны равенства:*

$$C(T_{ij}) = T_{1,-j-1} \quad (-i \leqslant j < i < n),$$
$$C(T_{nj}) = T_{1,-j-1} + \mathrm{Ann}(2) \cdot T_{nn-1} \quad (-n \leqslant j < n);$$

$$Z_i = L_{2n-i} + \mathrm{Ann}(2) \cdot L_{2n-i-1} \quad (1 \leqslant i < 2n-1), \quad Z_{2n-1} = L_1.$$

Кроме того, все идеалы T_{ij}, $-n < j < i < n$, являются характеристическими.

Далее замечаем, что фактор-кольцо $NC_n(K)/T_{2,-2}$ изоморфно кольцу Ли $NA_n(K)$, так что его автоморфизмы описаны в [2]. Тем самым, описание $\mathrm{Aut}\, NC_n(K)$ редуцируется к гиперцентральным автоморфизмам, которые также описаны явно.

Теорема 2.4 [13]**.** *Пусть K — ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. Всякий автоморфизм кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа C_n $(n > 4)$ есть произведение стандартного и гиперцентрального высоты $\leqslant 5$ автоморфизмов.*

Неулучшаемость оценки в теореме дает при любом $t \in \mathrm{Ann}(2)$ следующий автоморфизм алгебры $NC_n(K)$, тождественный на всех матричных единицах, кроме

$$\begin{gathered} e_{nn-1} \to e_{nn-1} + te_{n-2,-n+3}, \quad e_{nn-2} \to e_{nn-2} + te_{n-1,-n+3}, \\ e_{nn-3} \to e_{nn-3} + te_{n-1,-n+2}. \end{gathered} \tag{2}$$

Автоморфизмы алгебры Ли $NC_n(K)$ были описаны ранее [12] при условии $2K = K$ и $\mathrm{Ann}(3) = 0$; высота гиперцентральных автоморфизмов в этих случаях $\leqslant 3$.

Остаются неизученными автоморфизмы введенных в [14] финитарных обобщений колец Ли $N\Phi(K)$ типов B_Γ, C_Γ и D_Γ с произвольной цепью Γ. Для их описания эффективно использовать методы [3] и [15], см. также [18], [14, теорема 10], [19] и [20].

3. Нефинитарные обобщения

Если в ассоциативном кольце $R = (R; +, \cdot)$ заменить умножение лиевым $\alpha * \beta = \alpha\beta - \beta\alpha$, то получают ассоциированное кольцо Ли $\Lambda(R) = (R; +, *)$.

Ассоциативное кольцо R всегда является полугруппой с единицей 0 относительно присоединенного умножения $\alpha \circ \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta$. Кольцо R называется *радикальным*, если $(R, \circ)$ — группа, т. е. при любом $\alpha \in R$ имеем

$$\alpha + \alpha' + \alpha\alpha' = \alpha' + \alpha + \alpha'\alpha = 0$$

для некоторого элемента $\alpha' \in R$, называемого *квазиобратным* к α.

Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей и Γ — произвольное линейно упорядоченное множество или цепь. Ясно, что совокупность $GNT(\Gamma, K)$ всех Γ-матриц $\alpha = \|a_{ij}\|_{i,j\in\Gamma}$ с условием нильтреугольности (т. е. $a_{ij} = 0$ при $i \leqslant j$) есть аддитивная группа относительно обычного сложения матриц. Произведение Γ-матриц в общем случае не определено, так как в кольце не определены суммы с бесконечным числом ненулевых слагаемых.

Однако, в случае цепи $\Gamma = Z^{\{+\}} := \{1, 2, 3, \dots\}$ натуральных чисел обычное умножение матриц корректно и получаем кольцо $GNT(\Gamma, K) \supset NT(\Gamma, K)$. Более того, справедлива

Лемма 3.1. *Кольцо $R = GNT(Z^{\{+\}}, K)$ — радикальное и не является ниль-кольцом.*

$\lhd$ В кольце $GNT(Z^{\{+\}}, K)$ матрицы $\|a_{ij}\|$ с условием $a_{ij} = 0$ при $i - j < k$ образуют идеал L_k. Получаем убывающий центральный ряд

$$L_1 = GNT(Z^{\{+\}}, K) \supset L_2 \supset \dots \supset L_k \supset \dots, \quad \cap_{k=1}^{\infty} L_k = 0, \quad L_k * L_m \subseteq L_{k+m}.$$

Все фактор-алгебры L_1/L_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ являются нильпотентными и, следовательно, радикальными. Выберем $\alpha = \|a_{ij}\| \in L_1$. Чтобы построить матрицу $\gamma = \|c_{ij}\|$, квазиобратную к α, достаточно определить ее k-ую диагональ $\{c_{ij} : i - j = k\}$ для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ Пусть $c_{ij} = -a_{ij}$ при $i - j = 1$ и при любом $k \geqslant 1$ первые $k - 1$ диагоналей матрицы γ выбраны так, что

$$\gamma = \sum_{m=1}^{k-1} (-\alpha)^m = -\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \dots + (-\alpha)^k \mod L_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как выбор диагоналей при возрастании k не изменяет диагонали с меньшими номерами, то указанный алгоритм построения дает матрицу $\gamma = \|c_{ij}\| \in L_1$. (Корректность записи $\sum_{m=1}^{k-1} (-\alpha)^m$ матрицы следует также из того, любой ее элемент есть сумма с конечным числом ненулевых слагаемых.)

С другой стороны, при любом $k = 1, 2, \dots$ фактор-алгебры L_1/L_{k+1} нильпотентны и $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha = 0 \mod L_{k+1}$. Таким образом, γ — квазиобратный элемент к α, кольцо L_1 — радикальное и, например, его элемент $\sum_{k=1}^{\infty} e_{k+1k}$ не является нильпотентным. $\rhd$

Определение идеалов T_{iv} $(i, v \in Z^{\{+\}},\ i > v)$ из § 2 корректно и для алгебры $NT(Z^{\{+\}}, K)$. Аналогично определяем идеалы GN_{ij} алгебры $GNT(Z^{\{+\}}, K)$.

Пусть H максимальный абелев идеал кольца Ли $GNT(Z^{\{+\}}, K)$ и m — наименьший номер ненулевой строки для всех матриц из H, скажем, с ненулевой (m, j)-проекцией H_{mj}. Пользуясь включениями

$$(Ke_{sm} * H) * Ke_{jv} = (KH_{mj}K)e_{sv} \subset H \subseteq C((KH_{mj}K)e_{sv}), \quad 1 \leqslant v < j < m < s,$$

для кольца K без делителей нуля находим $H \subseteq GN_{1m-1} \cap GNT(Z^{\{+\}}, KH_{mj}K)$ и, более того, $H \subseteq GN_{mm-1}$. По аналогии с [3], получаем

Теорема 3.2. *Пусть K — кольцо без делителей нуля. Идеалы $GN_{i+1,i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, исчерпывают все максимальные абелевы идеалы в кольцах $R = GNT(Z^{\{+\}}, K)$ и $\Lambda(R)$, а также все максимальные абелевы нормальные подгруппы присоединенной группы.*

Показывается, что в условиях теоремы группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} \Lambda(R)$ и $\operatorname{Aut} G(R)$ совпадают с $\operatorname{Aut} R$ и всякий автоморфизм является произведением сопряжения обратимой треугольной $Z^{\{+\}}$-матрицей на автоморфизм, индуцированный автоморфизмом основного кольца K. Р. Словик [16] исследовала $\operatorname{Aut} G(R)$ в случае поля $|K| > 2$.

4. Канонический базис лиева идеала алгебры $NT(n,K)$

В этом параграфе устанавливается (первым и третьим авторами) канонический базис произвольного лиева идеала алгебры $NT(n,K)$ над полем K и исследуется для лиева типа A_n записанная в [17] задача о комбинаторном выражении числа всех лиевых идеалов.

Частичное упорядочение на матричных позициях вводим, полагая $(u,v) \geqslant (i,j)$, если $1 \leqslant v \leqslant j < i \leqslant u \leqslant n$. Выделим идеалы

$$T_{ij} = T(i,j) := \sum_{(u,v)\geqslant(i,j)} Ke_{uv}, \quad Q(i,j) := \sum_{(u,v)>(i,j)} Ke_{uv}.$$

Определение 4.1. *Множеством углов степени* n называют всякое множество матричных позиций вида

$$\mathscr{L} = \{(i_1,j_1),(i_2,j_2),\ldots,(i_m,j_m)\},$$

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_m, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n, \quad j_t < i_t \quad (1 \leqslant t \leqslant m).$$

Множеством углов непустого ненулевого подмножества $H \subseteq NT(n,K)$ называем множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(H)$ матричных позиций такое, что

$$H \subseteq T(\mathscr{L}) := \sum_{(i,j)\in\mathscr{L}} T(i,j),$$

но при любой замене $T(i,j)$ на $Q(i,j)$ в сумме включение нарушается.

Лиевы идеалы кольца $NT(n,K)$ (т. е. идеалы ассоциированного кольца Ли) над полем или телом K описывает следующая

Теорема 4.2 [2, теорема 2 (I)]. *Пусть K — тело. Ненулевая аддитивная подгруппа H кольца $NT(n,K)$ является его лиевым идеалом тогда и только тогда, когда:*

а) $Ke_{ij} \subseteq H$ для любой позиции (i,j), лежащей на или под лестницей $\mathscr{L}(H)$; исключение могут составлять лишь углы лестницы $\mathscr{L}(H)$ и, кроме того, позиции (s,k) и $(k+1,m)$ в том случае, когда позиции $(s,k+1)$ и (k,m) одновременно являются углами;

б) если $(s,k+1)$ и (k,m) — углы лестницы $\mathscr{L}(H)$, то либо $H \supseteq Ke_{k+1,m} + Ke_{sk}$, либо отображение $\varphi : a_{km} \to a_{s,k+1}$, $\|a_{uv}\| \in H$, есть изоморфизм аддитивной группы H_{km} всех (k,m)-координат матриц из H на $H_{k+1,m}$ и $H \supseteq \{xae_{k+1,m} - a^{\varphi}xe_{sk} : x \in K, a \in H_{km}\}$; в случае, когда K — поле, $\varphi : a \to ca$, $a \in H_{km}$, для некоторого $c \neq 0$ из K.

Определение 4.3. Аддитивную подгруппу S пространства V_m строк длины m над полем (или телом) K называем *собственной*, если при любом i, $1 \leqslant i \leqslant m$, в S существует элемент с ненулевой i-ой координатой.

Чтобы задать произвольный идеал $H \neq 0$ кольца $NT(n,K)$ над телом K, зафиксируем $\mathscr{L}(H)$ и собственную подгруппу (подпространство, когда H — идеал алгебры) S m-ой декартовой степени аддитивной группы тела K. Для $Q(\mathscr{L}) := \sum_{(i,j)\in\mathscr{L}} Q(i,j)$ полагаем

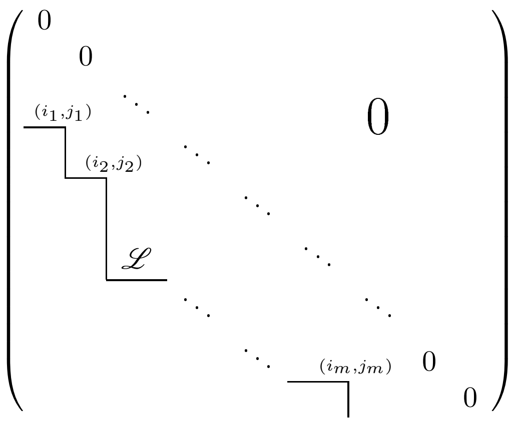
$$H(\mathscr{L},S) = Q(\mathscr{L}) + \{a_1e_{i_1,j_1} + a_2e_{i_2,j_2} + \cdots + a_me_{i_m,j_m} : (a_1,a_2,\ldots,a_m) \in S\}. \qquad (3)$$

Согласно [23, теорема 9] (для алгебр) и [24, следствие 4.2] справедлива

Теорема 4.4. *Всякий ненулевой идеал кольца $NT(n,K)$ над полем K однозначно представляется идеалом вида $H(\mathscr{L},S)$ при подходящем выборе множества $\mathscr{L}$ углов степени n и собственной аддитивной подгруппы S в V_m. При этом различным парам $(\mathscr{L},S)$ соответствуют различные идеалы.*

Для построения идеалов в [23, § 7] введено понятие *матричной лестницы.*

Определение 4.5. *Матричной лестницей* с углами $\mathscr{L}$ назовем линию (обозначаем также через $\mathscr{L}$), проходящую в $n \times n$-матрице, как в квадрате с n^2 точками, следующим образом: по i_1-строке от 1-го столбца до позиции (i_1, j_1), от нее по j_1-му столбцу до i_2-й строки и по ней до (i_2, j_2) и т. д., по i_m-й строке от j_{m-1}-го столбца до позиции (i_m, j_m), от нее по j_m-му столбцу до n-ой строки.



Для описания идеала $H \neq 0$ кольца $NT(n, K)$ достаточно указать взаимосвязь элементов матриц из H в углах лестницы $\mathscr{L}$. Для лиевых идеалов этого недостаточно.

Укажем сейчас алгоритм построения базиса в лиевом идеале H алгебры $NT(n, K)$ с фиксированным множеством углов $\mathscr{L} = \mathscr{L}(H)$ степени n. Угол (k, v) в H назовем *связанным*, если $Q(k, v) \nsubseteq H$ и либо в H существует угол $(s, k+1)$ и $Q(s, k+1) \nsubseteq H$ (случай $(k+1, k)$-*связанной пары углов*), либо существует угол $(v-1, j)$ и $Q(v-1, j) \nsubseteq H$.

Отметим, что случай ассоциативного идеала H алгебры $NT(n, K)$, т. е. когда $Q(\mathscr{L}) \subseteq H$, изучен в 4.2. Поэтому далее $Q(\mathscr{L}) \nsubseteq H$, так что по теореме 4.2, множество $n(H)$ всех номеров k с $(k+1, k)$-связанной парой углов $(k, v(k))$ и $(s(k), k+1)$ в H непустое и $n(H) \subseteq \{2, 3, \ldots, n-2\}$ $(n \geqslant 4)$. Обозначим через $Q^*(\mathscr{L})$ подалгебру, базис которой составляют матричные единицы $e_{uv} \in H$ такие, что $(u, v) > (i, j)$ хотя бы при одном $(i, j) \in \mathscr{L}$. Из теоремы 4.2 легко вытекает

Лемма 4.6. *Пусть H — лиев идеал алгебры $NT(n, K)$ и $Q(\mathscr{L}) \nsubseteq H$. Тогда база подалгебры $Q^*(\mathscr{L})$ дополняется до базы в $Q(\mathscr{L}) \cap H$ однозначно определенными элементами*

$$\beta_k = e_{k+1, v(k)} - b_k e_{s(k), k} \in Q^*(\mathscr{L}) + e_{k+1,k} * H \quad (k \in n(H)). \tag{4}$$

Произвольный элемент $\alpha \in H$ представляется однозначно по модулю $Q(\mathscr{L}) \cap H$ в виде

$$\alpha = \sum_{k \in n(H)} a_k e_{s(k),k} + \sum_{(u,v) \in \mathscr{L}} a_{uv} e_{uv}. \tag{5}$$

Выберем угол (i_1, j_1) в H с наименьшим номером $j_1 \geqslant 1$; через H_1 обозначим подалгебру матриц в H с нулевой (i_1, j_1)-ой координатой. Выберем по лемме 4.6 базисный элемент $\alpha_1 = e_{i_1 j_1} + \alpha'_1 \in H$ вида (5) так, что $\alpha'_1 \in H_1$. Если пересечение $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}(H_1)$ не пустое, то угол (i_2, j_2) из него выберем с наименьшим номером $j_2 > j_1$. Через H_2 обозначим подалгебру матриц в H_1 с нулевой (i_2, j_2)-координатой. Выберем по лемме 4.6 базисный элемент $\alpha_2 = e_{i_2 j_2} + \alpha'_2 \in H_1$ вида (5) так, что $\alpha'_2 \in H_2$, и т. д.

На каком-то t-ом шаге получим матрицу $\alpha_t = e_{i_t j_t} + \ldots$ из H_{t-1} с углом $(i_t, j_t) \in \mathscr{L} \cap \mathscr{L}(H_{t-1})$ такую, что подпространство H_t матриц из H_{t-1} с нулевой (i_t, j_t)-координатой лежит в $Q(\mathscr{L}) \cap H$. Не теряя общности, считаем, что j_2-ая координата вектора α_1 нулевая, ..., j_t-ые координаты векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}$ нулевые. По лемме 4.6 получаем в H элементы

$$\alpha_i = \sum_{k \in n(H)} \widetilde{a}^i_k e_{s(k),k} + \sum_{(u,v)\in\mathscr{L}} a^i_{uv} e_{uv}, \quad 1 \leqslant i \leqslant t. \tag{6}$$

Ясно, что $H + Q(\mathscr{L})$ — идеал алгебры $NT(n, K)$. По теореме 4.2, он записывается в виде $H(\mathscr{L}, S)$ из (3), где S — собственное подпространство V_m, $m = |\mathscr{L}|$ и $\dim_K S = t$, $1 \leqslant t \leqslant m$. Каждому из векторов α_1, α_2, ..., α_t в базе из матричных единиц e_{uv} ($(u, v) \in \mathscr{L}$) с фиксированным упорядочением, определенным нашим построением, соответствует координатная строка из V_m (см. [21, § 2]):

$$[\alpha_1] = (1, a^1_2, \dots, a^1_{j_2-1}, 0, a^1_{j_2+1}, \dots, a^1_{j_t-1}, 0, a^1_{j_t+1}, \dots, a^1_m),$$
$$[\alpha_2] = (0, \dots, 0, 1, a^2_{j_2+1}, \dots, a^2_{j_3-1}, 0, a^2_{j_3+1}, \dots, a^2_{j_t-1}, 0, a^2_{j_t+1}, \dots, a^2_m),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$[\alpha_t] = (0, \dots, 0, 1, a^t_{j_t+1}, \dots, a^t_{m-1}, a^t_m).$$

Такая база в S единственна и в [21, § 2] она названа канонической базой собственного t-мерного подпространства S. Согласно [21], каждый из $j_2 - 2$ коэффициентов $a^1_2, a^1_3, \dots, a^1_{j_2-1}$ независимо пробегает $K \setminus \{0\}$. Каждая из $j_3 - j_2 - 1$ пар $(a^1_i,\, a^2_i)$ при $j_2 < i < j_3$ независимо пробегает значения в декартовом квадрате (K, K), кроме нулевого $(0, 0)$ (иначе подпространство S не будет собственным), и т. д.

Аналогично устанавливаем возможные значения всех координат с номерами $\leqslant j_t$. Наконец, при каждом i, $j_t < i \leqslant m$, значение набора $(a^1_i, a^2_i, \dots, a^t_i)$ может быть любым из t-й декартовой степени $(K, K, \dots, K)$, исключая нулевое.

Каноническую базу лиева идеала в H, учитывая лемму 4.6, дают элементы a_i из (6), матричные единицы $e_{uv} \in H$ такие, что $(u, v) > (i, j)$ хотя бы при одном $(i, j) \in \mathscr{L}$ и $|n(H)|$ элементов β_k из (4). В силу леммы 4.6, указанные элементы e_{uv} и β_k полностью определяются выбором элементов α_i, и, следовательно, не влияют на перечисление лиевых идеалов.

Заметим, что любым двум $(k+1, k)$-связанным углам в H соответствуют два пропорциональных столбца в $(t \times m)$-матрице, составленной из строк $[\alpha_1], \dots, [\alpha_t]$. В частности, если j_2 столбец пропорционален какому-либо l-ому столбцу, то $l > j_2$ и $a^i_l = 0$, т. е. приходим к уменьшению на единицу числа параметров элемента α_i, $1 \leqslant i \leqslant t$, $i \neq 2$.

Для каждого элемента α_i из (6) любой из $|n(H)|$ коэффициентов $\widetilde{a}^i_k$ принимает различные значения в K для различных лиевых идеалов.

Таким образом, мы получаем однозначно определенный предыдущими условиями базис лиева идеала H, состоящий из всех элементов α_i, β_k и всех матричных единиц идеала $Q^*(\mathscr{L})$. Его называем *каноническим базисом лиева идеала* H.

При $K = GF(q)$ в [21] найдено число собственных t-мерных подпространств и доказана

Теорема 4.7. Число $\Lambda(n, q)$ ненулевых идеалов алгебры $NT(n, q)$ равно

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}\sum_{t=1}^{m}\sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m}\frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}}\cdot\prod_{k=2}^{t-1}\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)^{j_{k+1}-j_k-1}.$$

Канонические базисы лиевых идеалов позволяют записать явно комбинаторное выражение числа $\Omega(n, q)$ всех лиевых идеалов кольца $NT(n, K)$. Значения $\Omega(n, q)$ для малых $n \leqslant 6$ указывает следующая таблица.

Таблица 1

Перечисление лиевых идеалов $NT(n,q)$

n	$\Omega(n,q)$
2	1
3	$q+3$
4	$3q^2+4q+7$
5	$q^4+7q^3+14q^2+9q+10$
6	$2q^6+5q^5+20q^4+46q^3+27q^2+16q+15$

В общем случае явную формулу числа $\Omega(n,q)$ дает

Теорема 4.8. *Число идеалов для данной лестницы $\mathscr{L}$ равно*

$$\sum_{s=0}^{n(\mathscr{L})}(q-1)^s\sum_{t=1}^{m-s}q^{st}\sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m-s}\frac{(q^t-1)^{m-s-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}}\cdot\prod_{k=2}^{t-1}\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)^{j_{k+1}-j_k-1}, \qquad (7)$$

где $n(\mathscr{L})$ — число всех $(k+1,k)$-связанных пар углов в $\mathscr{L}$.

Литература

1. *Carter R.* Simple groups of Lie type.—N. Y.: Wiley and Sons, 1972.—364 p.
2. *Левчук В. М.* Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами // Алгебра и логика.—1976.—Т. 1, № 5.—С. 558–578.
3. *Левчук В. М.* Некоторые локально нильпотентные кольца и их присоединенные группы.—Мат. заметки.—1987.—Т. 42, № 5.—С. 631–641.
4. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб.—1949.—Т. 25, № 3.—Р. 347–366.
5. *Адо И. Д.* О нильпотентных алгебрах и p-группах // Докл. АН СССР.—1943.—Т. 40, № 8.—С. 339–342.
6. *McLain D. H.* A characteristically-simple group // Proc. Cambridge Phil. Soc.—1954.—Vol. 50.—P. 641–642.
7. *Мерзляков Ю. И.* Эквиподгруппы унитреугольных групп: критерий самонормализуемости // Докл. РАН.—1994.—Т. 339, № 6.—С. 732–735.
8. *Левчук В. М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика.—1990.—Т. 29, № 3.—С. 315–338.
9. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук.—1986.—Т. 41, № 1 (247).—С. 57–96.
10. *Videla C. R.* On the Mal'cev correspondence // Proceed. AMS.—1990.—Vol. 109, № 2.—P. 493–502.
11. *Левчук В. М.* Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле // Сер. Мат. форум. Т. 6. Группы и графы.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.—С. 75–84.—(Итоги науки. Юг России).
12. *Cao Y., Jiang D., Wang D.* Automorphisms of certain nilpotent algebras over commutative rings // J. Algebra.—2007.—Vol. 17, № 3.—P. 527–555.
13. *Литаврин А. В.* Автоморфизмы нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле симплектического типа // Изв. ИркГУ. Сер. мат-ка.—2015.—Т. 8, № 2.—С. 43–58.
14. *Levchuk V. M.* Chevalley groups and their unipotent subgroups // Contemp. Math., AMS.—1992.—Vol. 131, part 1.—P. 227–242.
15. *Levchuk V. M., Suleimanova G. S.* Automorphisms and normal structure of unipotent subgroups of finitary Chevalley groups // Proceed. Steklov Inst. Math.—Pleiades Publ., Ltd, 2009.—Vol. 3.—P. 118–127.
16. *Slowik R.* Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators // Linear and Multilinear Algebra.—2013.—Vol. 61, № 8.—P. 1028–1040.
17. *Egorychev G. P., Levchuk V. M.* Enumeration in the Chevalley algebras // ACM SIGSAM Bulletin.—2001.—Vol. 35, № 2.—P. 439–452.

18. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов.—М.: Наука, 1978.—119 с.
19. *Левчук В. М., Мартынова Л. А.* Нормальное строение унипотентных подгрупп групп Шевалле и идеалы ассоциированного кольца Ли // Конструкции в алгебре и логике.—Тверь: ТГУ, 1990.—С. 60–66.
20. *Мартынова Л. А.* Нормальное строение и автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиевых типов: Дисс. ... к. ф.-м. н.—М.: МГУ, 1994.
21. *Кривоколеско В. П., Левчук В. М.* Перечисление идеалов исключительных нильпотентных матричных алгебр // Труды ИММ УрО РАН.—2015.—Т. 21, № 1.—С. 166–171.
22. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм.—Новосибирск: Наука, 1977.—271 с. *Egorychev G. P.* Integral represantation and computation combinatorial sums.—Americ. Math. Soc., 1984.—300 p.—(Transl. of Math. Monogr. Vol. 59); 2-d ed. in 1989.
23. *Dubish R., Perlis S.* On total nilpotent algebras // Amer. J. Math.—1951.—Vol. 73.—P. 439–452.
24. *Левчук В. М.* Подгруппы унитреугольной группы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1974.—Vol. 38, № 6.—P. 1202–1220.
25. *Egorychev G. P., Kuzucuoglu F., Levchuk V. M.* Enumeration of ideals of some nilpotent matrix rings // J. Algebra and Its Applications.—2013.—Vol. 12, № 1.—1250140 [11 pages].

Статья поступила 30 апреля 2015 г.

Левчук Владимир Михайлович
Сибирский федеральный университет,
заведующий кафедрой алгебры и математической логики
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru;

Литаврин Андрей Викторович
Сибирский федеральный университет,
аспирант кафедры алгебры и математической логики
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: anm11@rambler.ru;

Ходюня Николай Дмитриевич
Сибирский федеральный университет,
бакалавр кафедры алгебры и математической логики
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: nkhodyunya@gmail.com;

Цыганков Виталий Владимирович
Сибирский федеральный университет,
аспирант кафедры алгебры и математической логики
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: tsygankov@partner.tiu.ru

NILTRIANGULAR SUBALGEBRAS OF THE CHEVALLEY ALGEBRAS AND THEIR GENERALIZATIONS

Levchuk V. M., Litavrin A. V., Hodyunya N. D., Tsigankov V. V.

We study some problems concerned with ideals and automorphisms of niltriangular subalgebras of classical Lie type Chevalley algebras over a field K and of their non-finitary generalizations and also automorphisms of adjoint group. We characterize (for Lie type A_{n-1}) every Lie ideal of algebra $NT(n,K)$ of all niltriangular $n \times n$ matrices by a selection of constants from K. When $K = GF(q)$, this gives a combinatorial expression of number of Lie ideals and, for a simple q, also the number of normal subgroups in unitriangular group $UT(n,q)$.

Key words: Chevalley algebra, niltriangular subalgebra, non-finitary generalizations, maximal abelian ideals, automorphisms, adjoint group.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 47–55

УДК **512.542**

НЕРАСПОЗНАВАЕМЫЕ ПО СПЕКТРУ КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ И ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ИМ ГРУППЫ[1]

В. Д. Мазуров

К 60-летию
Владимира Амурхановича Койбаева

Работа является обзором результатов, касающихся строения групп, изоспектральных нераспознаваемым по спектру конечным простым группам.

Ключевые слова: конечная группа, распознаваемость по спектру, изоспектральные группы, критическая группа.

В работе рассматриваются только конечные группы. Пусть G — группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* G, т. е. множество всех порядков элементов G. Группы с одинаковым спектром будем называть *изоспектральными.* Поскольку множество $\omega(G)$ замкнуто по отношению делимости, оно однозначно определяется любым своим подмножеством, замыкание которого по делимости совпадает с $\omega(G)$. Обозначим через $\mu(G)$ множество максимальных по делимости элементов спектра G. Более общо, если M — любое конечное непустое множество натуральных чисел, то через $\mu(M)$ будем обозначать множество максимальных по делимости элементов M. Ясно, что $\mu(G) = \mu(\omega(G))$.

Скажем, что G *распознаваема* (более точно, распознаваема по спектру в классе конечных групп), если любая конечная группа, изоспектральная G, изоморфна G. Группа G *нераспознаваема по спектру*, если существует бесконечно много попарно неизоморфных групп, изоспектральных G. *Накрытием* G называется любая группа H, содержащая нормальную подгруппу N (называемую *ядром* накрытия), для которой $H/N \simeq G$. Группа G *распознаваема среди своих накрытий*, если любое ее накрытие, изоспектральное G, изоморфно G.

Работа представляет собой обзор результатов, касающихся строения групп, изоспектральных нераспознаваемым по спектру конечным простым группам. Предполагается, что в будущем ее расширенный вариант станет частью большого обзора, посвященного вопросам распознаваемости конечных групп по спектру.

В. Дж. Ши [1] первым отметил, что группа G, содержащая нетривиальную абелеву нормальную подгруппу V, нераспознаваема. В [2] приведен набросок доказательства того, что это утверждение остается верным, если требование коммутативности V заменить на принадлежность экспоненты V к спектру G. В действительности, такое обобщение не верно: противоречащий пример построен в [3].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-90013.

В [4] доказано, что группа нераспознаваема тогда и только тогда, когда она изоспектральна группе, содержащей нетривиальную разрешимую нормальную подгруппу. В этой же работе сформулировано определение критической группы. Группа G называется *критической* относительно данного конечного множества ω (или ω-критической), если $\omega(G) = \omega$ и спектр любой собственной секции группы G (т. е. фактор группы H/K, где $K \lhd H \leqslant G$ и либо $K \neq 1$, либо $H \neq G$), отличен от ω. Там же доказано, что для любого ω, число ω-критических групп конечно.

Нам потребуется несколько дополнительных понятий. Действие группы A на группе B называется *свободным*, если для $a \in A$, $b \in B$ равенство $b^a = b$ выполняется только в случаях $a = 1$ или $b = 1$. *Группой Фробениуса* называется полупрямое произведение группы B на группу A, в котором действие A на B сопряжениями является свободным. *Удвоенной группой Фробениуса* называется группа G, содержащая нормальную подгруппу Фробениуса H с ядром A такую, что G/A является группой Фробениуса с ядром H/A. Можно показать, что удвоенная группа Фробениуса G представима в виде $G = ABC$, где AB — нормальная в G группа фробениуса с нильпотентным ядром A и циклическим дополнением B, а CB — группа Фробениуса с ядром B и циклическим дополнением C.

Таблица 1

Нераспознаваемые простые группы

	G	Условия на G	$\mu(L)$	H
1	A_6		3,4,5	$2^4 : A_5$
2	A_{10}		8,9,10,12,15,21	$(7^4 \times 3^{12}) : (2.L_2(5).2)$
3	$L_3(3)$		6,8,13	$13^4 : (2.S_4)$
4	$L_4(q)$	$q = 13^{24}$	$13(q-1), q^2-1, 13(q^2-1)/4,$	$13^{2304} : L_4(q)$
			$(q^3-1)/4, (q^3+q^2+q+1)/4$	
5	$U_3(3)$		7,8,12	$2^6 : U_3(3)$
6	$U_3(5)$		6,7,8,10	$2^9 : L_3(4)$
7	$U_3(7)$		43,48,56	$2^{42} : U_3(7)$
8	$U_4(2)$		5,9,12	$3^4 : S_5$
9	$U_5(2)$		8,11,12,15,18	$3^5 : M_{11}$
10	$S_4(q)$	$q = 3$	5,9,12	$3^4 : S_5$
		$q = 2^m$, $m > 1$	$4, 2(q \pm 1), q^2 \pm 1$	$2^{8m} : L_2(q^2)$
		$q = 3^{2m}$	$9, 3(q \pm 1), (q^2 \pm 1)/2$	$3^{28m} : L_2(q^2)$
		$q = p^m$, $p > 3$ простое	$p(q \pm 1), (q^2 \pm 1)/2$	$p^{8m} : (L_2(q^2).2)$
11	$O_9(q)$	$q = p^m, p$ простое	$\mu(M)$ где M состоит из	$p^{8m} : O_8^-(q)$
			$(q^4 \pm 1)/(2, q-1),$	
			$p(q^3 \pm 1)/(2, q-1),$	
			$(q^2 \pm q + 1)(q^2 - 1)/(2, q-1),$	
			$p(q^2+1)(q \pm 1)/(2, q-1),$	
			$p(q^2-1);$	
			$4(q^2 \pm 1, 8(q \pm 1)$, если $p = 2;$	
			$9(q^2 \pm 1)/2$, если $p = 3;$	
			$25(q \pm 1)/2$, если $p = 5;$	
			49, если $p = 7$.	
12	${}^3D_4(2)$		8,12,13,18,21,28	2^{24}: ${}^3D_4(2)$
13	J_2		7,8,10,12,15	$2^6 : A_8$

На протяжении всей работы используются обозначения из [5].

Все известные к настоящему времени нераспознаваемые по спектру конечные простые группы перечислены в таблице 1.

В столбце H таблицы указано композиционное строение одной из групп, изоспектральных группе G и содержащих нетривиальную абелеву нормальную подгруппу. Как уже отмечалось, из существования одной такой группы вытекает нераспознаваемость группы G.

Ниже приведена известная к настоящему времени информация о строении групп, изоспектральных перечисленным в таблице группам.

1. A_6. Пусть V — естественный двумерный модуль для $SL_2(4) \simeq A_5$ над полем порядка 4 и H — полупрямое произведение V на $SL_2(4)$. Тогда $\omega(H) = \omega(A_6)$. Любая группа, изоспектральная A_6 и отличная от A_6, является расширением элементарной абелевой 2-группы посредством A_5 [6]. Список $\omega(A_6)$-критических групп с точностью до изоморфизма исчерпывается двумя группами: A_6 и H [7].

2. A_{10}. Пусть $\overline{S}$ — подгруппа $L_2(5^2)$, изоморфная S_5, и S — ее прообраз в $SL_2(5^2)$. Он является расширением группы порядка 2 посредством S_5, обладающим единственной инволюцией. Кроме того, S содержит подгруппу S_0 индекса 2, изоморфную $SL_2(5)$. Группа S_0 изоморфна подгруппе группы $SL_2(7^2)$, поэтому естественный $SL_2(7^2)$-модуль V размерности 2 над полем порядка 7^2 можно рассматривать как точный S_0-модуль. Пусть $W = V^S$ — S-модуль, индуцированный модулем V, R — нормализатор в S подгруппы X порядка 5. Тогда R — полупрямое произведение группы X на циклическую подгруппу, порожденную элементом y порядка 8, индуцирующим в X автоморфизм порядка 4. Пусть A — одномерный R-модуль над конечным полем порядка 9, точный на $\langle y \rangle$, и $B = A^S$ — соответствующий индуцированный S-модуль. Для естественного полупрямого произведения $H = (W \times B) : S$ справедливо равенство $\omega(A_{10}) = \omega(H)$ [8].

Любая группа, изоспектральная A_{10} и отличная от A_{10}, является полупрямым произведением абелевой $\{3, 7\}$-группы на S [9]. Любая $\omega(A_{10})$-критическая группа изоморфна A_{10} или определенной выше в этом пункте группе H [10].

3. $L_3(3)$. Группа $SL_2(13)$ содержит подгруппу $U \simeq SL_2(3)$, которая действует свободно на естественном двумерном $SL_2(13)$-модуле W над полем порядка 13. Пусть K — расширение U посредством группы порядка 2, обладающее единственной инволюцией (такое расширение существует: см. выше пункт 2, посвященный нераспознаваемости A_{10}) и V — модуль для K, полученный индуцированием с модуля W, рассматриваемого как U-модуль. Для естественного полупрямого произведения $H = V : K$ справедливо равенство $\omega(L_3(3)) = \omega(H)$ [8]. Группу H можно следующим образом задать с помощью образующих и определяющих соотношений. Подгруппа K изоморфна $\langle x, y | x^4 = y^3 = (xy)^8 = x^2(xy)^4 = 1 \rangle$ и отображение

$$x \to \begin{bmatrix} \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -1 & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad y \to \begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -1 & 5 \\ \dots & \dots & 5 & \dots \end{bmatrix}$$

после выбора базиса v_1, v_2, v_3, v_4 в V продолжается до вложения K в $GL(V)$. Отсюда непосредственно могут быть получены определяющие соотношения для H в образующих x, y, v_1, v_2, v_3, v_4. Список $\omega(L_3(3))$-критических подгрупп исчерпывается группой H и самой группой $L_3(3)$ [7].

4. $L_4(q)$. Пусть p — простое число, F — поле порядка $q = p^n$ и $G = SL_4(q)$. Для FG-модуля U обозначим через U^{ρ^i}, $i = 0, 1, \ldots$, скручивание U с помощью i-ой степени автоморфизма Фробениуса ρ поля F, посылающего каждый элемент $x \in F$ в x^p. Обозначим через $\Lambda^2 U$ внешний квадрат модуля U.

Если $q = 13^{24}$, V — естественный 4-мерный модуль для G над F и

$$W = V^{\rho^5} \otimes V^{\rho^{11}} \otimes \Lambda^2 V,$$

то W является $L_4(q)$-модулем и полупрямое произведение $W : L_4(q)$ изоспектрально $L_4(q)$. В частности, $L_4(13^{24})$ нераспознаваема среди своих накрытий [11]. Видимо, подобные примеры существуют и для некоторых других q.

5. $U_3(3)$. Группа $U_3(3)$ обладает абсолютно неприводимым 6-мерным обыкновенным представлением (см. [5]). Его редукция по модулю 2 реализуется над полем порядка 2. Пусть H — расщепляемое расширение соответствующего 6-мерного пространства V над полем порядка 2 посредством $U_3(3)$. Тогда $\omega(U_3(3)) = \omega(H)$ [8]. В частности, $U_3(3)$ не распознаваема среди накрытий.

Линейные преобразования векторного пространства V, представленные в некотором базисе матрицами

$$a = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & 1 & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & \ldots \\ \ldots & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

над полем порядка 2 порождают подгруппу U изоморфную $U_3(3)$. Соответствующее расщепляемое расширение V посредством U изоморфно H [13].

Если A — группа, порожденная следующими матрицами над полем порядка 7:

$$a = \begin{bmatrix} 2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 2 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 4 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & -1 & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 & \ldots & \ldots \end{bmatrix},$$

то A изоморфна некоммутативному полупрямому произведению группы порядка 3 на циклическую группу порядка 8 и полупрямое произведение соответствующей элементарной абелевой группы порядка 7^4 на A является группой Фробениуса, изоспектральной $U_3(3)$ [14].

6. $U_3(5)$. Пусть $L = L_3(4)$, V — абсолютно неприводимый 9-мерный L-модуль над полем порядка 2 и H — расщепляемое расширение V посредством L. Тогда $\omega(U_3(5)) = \omega(H)$ [12].

Группа L изоморфна $\langle a, b : \ a^2 = b^4 = (ab)^7 = (ab^2)^5 = (abab^2)^7 = (abababab^2ab^{-1})^5 = 1 \rangle$. Линейные преобразования векторного пространства V, представленные в его некотором базисе матрицами

$$
[a] = \begin{bmatrix}
1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots
\end{bmatrix},
$$

$$
[b] = \begin{bmatrix}
\dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\
1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\
\dots & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1
\end{bmatrix}
$$

задают соответствующее действие L на V [13].

7. $U_3(7)$. Группа $L = U_3(7)$ обладает абсолютно неприводимым обыкновенным представлением размерности 42 с характером $\chi = \chi_2$ в обозначениях [5]. Его 2-редукция Φ реализуется над полем порядка 2. Если V — соответствующий L-модуль и H — естественное полупрямое произведение группы V на L, то $\omega(L) = \omega(H)$ [12].

Две матрицы размерности 42 над полем порядка 2, порождающие подгруппу $GL(42,2)$, которая реализует Φ, приведены в [13].

8. $U_4(2) \simeq S_4(3)$. Пусть W — подстановочный модуль над полем порядка 3 для группы $S = S_5$, т. е. модуль с базой $w_1, \dots, w_5$, на которой любая подстановка $\pi \in S$ действует по правилу: $w_i\pi = w_{i\pi}$, $i = 1, \dots, 5$. Пусть V — тензорное произведение модуля $W/\langle w_1 + \dots + w_5 \rangle$ на нетривиальный одномерный S-модуль. Группа S_5 порождается подстановками $a = (1,2,3,4,5)$ и $(1,2)$. Базис V можно выбрать так, чтобы элементы a и b представлялись в нем матрицами

$$
\begin{bmatrix}
\dots & 1 & \dots & \dots \\
\dots & \dots & 1 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & 1 \\
2 & 2 & 2 & 2
\end{bmatrix}, \quad
\begin{bmatrix}
\dots & 2 & \dots & \dots \\
2 & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & 2 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & 2
\end{bmatrix},
$$

соответственно. Пусть H — естественное полупрямое произведение модуля V на S. Тогда $\omega(U_4(2)) = \omega(H)$ [12].

Определим следующие (4×4)-матрицы над полем F порядка 3:

$$
a = \begin{bmatrix}
\dots & 1 & \dots & \dots \\
\dots & \dots & 1 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & 1 \\
2 & 2 & 2 & 2
\end{bmatrix}, \quad
b = \begin{bmatrix}
1 & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & 1 & \dots \\
2 & 2 & 2 & 2 \\
\dots & 1 & \dots & \dots
\end{bmatrix}.
$$

Они порождают в $GL(4,3)$ группу Фробениуса K порядка 20. Обозначим через V соответствующий четырехмерный KF-модуль.

Введем четыре матрицы 17×17, записанные в блочном виде следующим образом:

$$A=\operatorname{diag}(1,a,a,a,a),\quad B=\operatorname{diag}(1,b,b,b,b),$$

$$C=\begin{bmatrix}1&\dots&\dots&\dots&\dots\\ \dots&1&b&b^2&\dots\\ \dots&\dots&1&\dots&-b^2\\ \dots&\dots&\dots&1&b^3\\ \dots&\dots&\dots&\dots&1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&d&\dots&\dots&\dots\\ \dots&1&\dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&1&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots&1&\dots\\ \dots&\dots&\dots&\dots&1\end{bmatrix},$$

где $d=(1,0,0,0)\in F^4$.

Группа $H=\langle A,B,C,D\rangle=(V\oplus V\oplus V\oplus V):(V.V):K$ является удвоенной группой Фробениуса порядка $5648590729620=2^2\cdot 3^{24}\cdot 5$, изоспектральной $U_4(2)$ [15].

9. $U_5(2)$. Пусть $M=M_{11}$ и V — абсолютно неприводимый 5-мерный M-модуль над полем порядка 3 с характером Брауэра, значения которого представлены в таблице 2 (см. [16]):

Таблица 2

g^M	1A	2A	4A	5A	8A	8B	11A	11B
$\chi(g)$	5	1	-1	0	$-1+\sqrt{-2}$	$-1-\sqrt{-2}$	$-1+\sqrt{-11}$	$-1-\sqrt{-11}$

Если H — расщепляемое расширение V посредством M, то $\omega(U_5(2))=\omega(H)$ [12].

Группа M порождается подстановками

$$a=(2,6)(4,9)(5,11)(8,10),\quad b=(1,4,3,10)(6,7,9,11).$$

В подходящем базисе V действие M на V определяется матрицами

$$[a]=\begin{bmatrix}\dots&1&2&\dots&\dots\\ 1&2&2&1&1\\ \dots&2&2&1&1\\ 2&\dots&1&1&2\\ 2&1&1&1&\dots\end{bmatrix},\quad [b]=\begin{bmatrix}\dots&\dots&1&\dots&1\\ 2&2&1&1&\dots\\ 1&1&1&1&1\\ 2&1&2&2&\dots\\ 1&1&\dots&1&2\end{bmatrix}.$$

Если V — 5-мерный $U_5(2)$-модуль над полем порядка 9, то полупрямое произведение V на $U_5(2)$ изоспектрально $U_5(2)$. В частности, $U_5(2)$ нераспознаваема среди накрытий [17].

Группа $U=U_5(2)$ изоморфна $\simeq\big\langle a,b\,|\,a^2=b^5=(ab)^{11}=[a,b]^3=[a,b^2]^3=[a,bab]^3=[a,bab^2]^3=1\big\rangle$. Действие U на модуле V, рассматриваемом как 10-мерное векторное пространство над полем порядка 3 задается в подходящем базисе V матрицами (см. [13])

$$[a]=\begin{bmatrix}\dots&2&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 2&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots&\dots&2&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 1&1&2&1&2&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&2&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&2&\dots&2&1&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 1&1&2&\dots&2&\dots&1&\dots&\dots&\dots\\ 2&2&1&\dots&1&\dots&\dots&1&\dots&\dots\\ 2&2&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&1&\dots\\ \dots&\dots&2&\dots&2&\dots&\dots&\dots&\dots&1\end{bmatrix},$$

$$[b] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 \\ 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

10. $S_4(q)$. Группа $S_4(3)$ изоморфна $U_4(2)$ (см. п. 8 выше).

Пусть F — конечное поле порядка $q = p^n > 3$, где p — простое число, и $W_i = W_i(q)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$, — пространство однородных полиномов степени i от переменных x_1, x_2 над F. Пусть α — автоморфизм F, отображающий каждый элемент из F в его p-ю степень. Для $j = 0, \dots, n-1$ превратим W_i в $SL_2(q)$-модуль $W_i^j = W_i^j(q)$, полагая для $f(x_1, x_2) \in W_i$ и $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL_2(q)$

$$f(x_1, x_2)a = f(a_{11}^{\alpha^j} x_1 + a_{12}^{\alpha^j} x_2, a_{21}^{\alpha^j} x_1 + a_{22}^{\alpha^j} x_2).$$

В частности, W_0^j — тривиальный одномерный $SL_2(q)$-модуль. Модули $W(i_0, \dots, i_{n-1}) = \bigotimes_{j=0}^{n-1} W_{i_j}^j$ составляют полное множество попарно неэквивалентных абсолютно неприводимых $SL_2(q)$-модулей над полем характеристики p. Если q нечетно, то центр группы $SL_2(q)$ действует тривиально на $W(i_0, \dots, i_{n-1})$ (и поэтому $W(i_0, \dots, i_{n-1})$ является $L_2(q)$-модулем) в точности тогда, когда $i_0 + \dots + i_{n-1}$ — четное число. Пусть $L = L_2(q^2)$.

Если $q = p^n$, где $p > 3$ — простое число, то положим $V = W_1^0 \otimes W_1^n$. Пусть σ — полевой автоморфизм порядка 2 группы L. Определим действие σ на $W_1^0 \otimes W_1^n$ правилом

$$\Bigl(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_i \otimes x_j)\Bigr)\sigma = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_j \otimes x_i).$$

Тем самым V превращается в $\overline{L}$-модуль, где $\overline{L} = L\langle\sigma\rangle$. Для естественного полупрямого произведения $H = V\overline{L}$ имеет место равенство $\omega(H) = \omega(S_4(q))$ [12].

Если $q = 3^{2m}$, то положим $V = W_1^{2m} \otimes W_1^{2m+1} \otimes W_2^0$. Пусть $H = VL$ — естественное полупрямое произведение V на L. Тогда $\omega(H) = \omega(S_4(q))$ [12].

Если $q = 2^n$, где $n > 1$, то положим $V = W_1^0 \otimes W_1^n$. Пусть $H = VL$ — естественное полупрямое произведение V на L. Тогда $\omega(H) = \omega(S_4(q))$ [18].

11. $O_9(q)$. Пусть V — естественный 8-мерный модуль для $L = O_8^-(q)$ над полем порядка q и $H = VL$ — естественное полупрямое произведение V на L. Тогда $\omega(H) = \omega(O_9(q))$ [19].

Если $q = 2$, I — группа, изоспектральная $O_9(2)$, и $L = O_8^-(2)$, то I изоморфна $O_9(q)$ или $O_8^-(2).2$, или же $I/N \simeq O_8^-(2)$, где N — нетривиальная 2-группа и существует I-главный фактор N, изоморфный V. Любой I-главный фактор N изоморфен либо V, либо одному из алгебраически сопряженных 8-мерных I-модулей над полем порядка 4 [20].

12. ${}^3D_4(2)$. Пусть $G = {}^3D_4(2)$, V — 24-мерный G-модуль над полем порядка 2, эквивалентный модулю, возникающему при действии G на аддитивной группе 8-мерного

G-модуля над полем порядка 8. Тогда полупрямое произведение H модуля V на G изоспектрально G. В частности, G нераспознаваема по спектру среди своих накрытий.

G обладает единственным с точностью до алгебраической сопряженности 8-мерным модулем V над полем F порядка 8. В подходящем базисе V

$$a = \begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^6 & z^6 & \dots & z^6 & z^6 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ z^4 & z^4 & \dots & z^3 & z^3 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} z & z & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & z & \dots \\ z & z^5 & \dots & z & \dots & z^6 & \dots & z^6 \end{bmatrix},$$

где z — порождающий элемент мультипликативной группы F.

Если H изоспектральна G, то H — накрытие G, ядро которого — 2-группа N, и каждый G-главный фактор N как G-модуль подобен V [21].

13. J_2. Пусть W — 8-мерный подстановочный модуль для $A = A_8$ над полем порядка 2, V — 6-мерный композиционный фактор W и H — расщепляемое полупрямое произведение V на A. Тогда $\omega(H) = \omega(J_2)$ [22]. Если I — группа, изоспектральная J_2, то I изоморфна или J_2, или S_8, или расширению такой нетривиальной 2-группы U посредством A_8, что любой I-главный фактор U изоморфен V [23]. Любая критическая относительно $\omega(J_2)$ группа изоморфна J_2, S_8 или H [10].

Литература

1. *Shi W. J.* A characteristic property of the Mathieu groups // Chinese Ann. Math. Ser. A.—1988.—Vol. 9, № 5.—P. 575–580.—(in Chinese).
2. *Chigira N. and Shi W. J.* More on the set of element orders in finite groups // Northeast. Math. J.—1996.—Vol. 12, № 3.—P. 257–260.
3. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных непростых групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика.—1997.—Т. 36, № 3.—С. 304–322.
4. *Мазуров В. Д., Ши В. Дж.* Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика.—2012.—Т. 51, № 2.—С. 239–243.
5. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of Finite Groups.—Oxford: Clarendon Press, 1985.
6. *Brandl R., Shi W. J.* Finite groups whose element orders are cosecutive integers // J. Algebra.—1991.—Vol. 143, № 2.—P. 388–400.
7. *Lytkin Yu. V.* On groups critical with respect to a set of natural numbers // Sib. Èlektron. Mat. Izv.—2013.—Vol. 10.—P. 666–675.
8. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика.—1998.—Т. 37, № 6.—С. 651–666.
9. *Старолетов А. М.* Группы, изоспектральные знакопеременной группе степени 10 // Сиб. мат. журн.—2010.—Т. 51, № 3.—С. 638–648.

10. Лыткин Ю. В. Группы, критические относительно спектров знакопеременных и спорадических групп // Сиб. мат. журн.—2015.—Т. 56, № 1.—С. 122–128.
11. *Zavarnitsine A. V.* Exceptional action of the simple groups $L_4(q)$ in the defining characteristic // Sib. Èlektron. Mat. Izv.—2008.—Vol. 5.—P. 68–74.
12. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика.—2002.—Т. 41, № 2.—С. 166–198.
13. *Wilson R. et. al.* Atlas of finite group representations.—[URL: http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/].
14. *Алеева М. Р.* О конечных простых группах с множеством порядков элементов, как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Мат. заметки.—2003.—Т. 73, № 3.—С. 323–339.
15. *Заварницин А. В.* Разрешимая группа, изоспектральная группе $S_4(3)$ // Сиб. мат. журн.—2010.—Т. 51, № 1.—С. 26–31.
16. *Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R.* An Atlas of Brauer Characters.—Oxford: Clarendon Press, 1995.
17. *Grechkoseeva M. A.* On element orders in covers of finite simple classical groups // J. Algebra.—2011.—Vol. 339.—P. 304–319.
18. *Мазуров В. Д., Су М. Ч., Чао Ч. П.* Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика.—2000.—Т. 39, № 5.—С. 567–585.
19. *Grechkoseeva M. A., Staroletov A. M.* Unrecognizability by spectrum of finite simple orthogonal groups of dimension nine // Sib. Èlektron. Mat. Izv.—2014.—Vol. 11.—P. 921–928.
20. *Mazurov V. D., Moghaddamfar A. R.* The recognition of the simple group $S_8(2)$ by its spectrum // Algebra Colloquium.—2006.—Vol. 3, № 4.—P. 643–646.
21. *Мазуров В. Д.* Нераспознаваемость конечной простой группы ${}^3D_4(2)$ по спектру // Алгебра и логика.—2013.—Т. 52, № 5.—С. 601–605.
22. *Praeger C. E., Shi W. J.* A characterization of some alternating and symmetric groups // Commun. Algebra.—1994.—Vol. 22, № 5.—P. 1507–1530.
23. *Mazurov V. D., Shi W. J.* A note to the characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloquium.—1998.—Vol. 5, № 3.—P. 285–288.

Статья поступила 29 апреля 2015 г.

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр-т Академика Коптюга, 4
E-mail: mazurov@math.nsc.ru

UNRECOGNIZABLE BY SPECTRUM FINITE SIMPLE GROUPS AND THEIR ISOSPECTRAL GROUPS

Mazurov V. D.

This is a survey of results concerning the structure of groups isospectral with finite simple groups which are unrecognizable by spectrum.

Key words: finite group, recognizability by spectrum, isospectral groups, critical group.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 56–61

УДК **512.544.2**

О НАДГРУППАХ УНИПОТЕНТНОЙ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ ШЕВАЛЛЕ РАНГА 2 НАД ПОЛЕМ

Я. Н. Нужин, Т. А. Осетрова

Посвящается шестидесятилетию
Владимира Амурхановича Койбаева

Описаны подгруппы группы Шевалле ранга 2 над полем, содержащие ее унипотентную подгруппу.

Ключевые слова: группа Шевалле над полем, унипотентная подгруппа.

Далее Φ — приведенная неразложимая система корней, $\Pi = \{r_1, \ldots, r_l\}$ — множество ее фундаментальных корней, Φ^+ — множество положительных корней относительно Π. Пусть $\Phi(F)$ — группа Шевалле типа Φ ранга l над полем F. Группа $\Phi(F)$ порождается корневыми подгруппами

$$X_r = \{x_r(t) : t \in F\}, \quad r \in \Phi,$$

где $x_r(t)$ — соответствующий корневой элемент в группе $\Phi(F)$. Нам потребуются следующие естественные подгруппы группы $\Phi(F)$:

унипотентная подгруппа

$$U = \langle X_r : r \in \Phi^+ \rangle,$$

мономиальная подгруппа

$$N = \langle n_r(t) : r \in \Phi, t \in F^* \rangle,$$

диагональная подгруппа

$$H = \langle h_r(t) : r \in \Phi, t \in F^* \rangle \text{ и}$$

борелевская подгруппа

$$B = UH.$$

Здесь $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M, F^* — мультипликативная группа поля F и

$$n_r(t) = x_r(t)\, x_{-r}(-t^{-1})\, x_r(t),$$
$$h_r(t) = n_r(t)\, n_r(-1).$$

Положим также

$$n_r = n_r(1),$$
$$I = \{1, 2, \ldots, l\}.$$

Надгруппы борелевской подгруппы B и сопряженные с ними называются параболическими. В силу известного результата Ж. Титса параболические подгруппы, содержащие подгруппу B, исчерпываются подгруппами P_J, $J \subseteq I$, где

$$P_J = \langle B, n_{r_j} : \ j \in J \rangle.$$

Используя только каноническое разложение элементов группы Шевалле над полем, получен следующий частичный результат.

Теорема 1. *Пусть M — подгруппа группы Шевалле $\Phi(F)$ ранга 2 над полем, содержащая унипотентную подгруппу U. Тогда для подходящей диагональной подгруппы $H_M \leqslant H$ и некоторого подмножества $J \subseteq I$ подгруппа M совпадает с группой*

$$P_{J,M} = \langle U, n_{r_j}, H_M : \ j \in J \rangle.$$

Авторы предполагают, что аналог теоремы 1 справедлив для всех групп лиева типа над полями. Для группы Шевалле типа A_l это следует из результатов статьи Д. А. Супруненко [1], в которой описаны надгруппы унитреугольной подгруппы общей линейной группы над произвольным телом.

1. Обозначения и предварительные результаты

Все обозначения и определения, указанные во введении, используются и далее. Запись $A \leqslant B$ означает, что A есть подгруппа группы B.

Через $N^{\pm}$ обозначим подгруппу порожденную мономиальными элементами

$$n_r = n_r(1) = x_r(1)\, x_{-r}(-1)\, x_r(1), \quad r \in \Phi,$$

а через $H^{\pm}$ обозначим подгруппу порожденную диагональными элементами

$$h_r(-1) = n_r^2, \quad r \in \Phi.$$

Ясно, что $N = HN^{\pm} = N^{\pm}H$. Следующие равенства обычно называются разложениями Брюа

$$\Phi(F) = BNB = UNU = UHN^{\pm}U = UN^{\pm}HU.$$

Таким образом, любой элемент $g \in \Phi(F)$ представляется в виде

$$g = u_1 n h u_2, \quad \text{где } u_1, u_2 \in U, \ n \in N^{\pm}, \ h \in H. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть Π — база системы корней Φ. Тогда группа Шевалле $\Phi(F)$ над полем F порождается корневыми подгруппами X_r, $r \in \Pi \cup -\Pi$.*

$\lhd$ Пусть $G = \langle X_r : \ r \in \Pi \cup -\Pi \rangle$. Тогда подгруппа $\langle n_r : \ r \in \Pi \rangle$ лежит в G и совпадает с $N^{\pm}$, так как фактор-группа $N^{\pm}/H^{\pm}$ изоморфна группе Вейля W типа Φ, которая порождается фундаментальными отражениями w_r, $r \in \Pi$. Группа $N^{\pm}$ действует сопряжениями транзитивно на корневых подгруппах, индексированных корнями одинаковой длины, по правилу:

$$n_w X_r n_w^{-1} = X_{w(r)},$$

где n_w — прообраз элемента w группы Вейля W при гомоморфизме $N^{\pm}$ на W. Таким образом, G содержит все корневые подгруппы X_r и, следовательно, совпадает со всей группой Шевалле $\Phi(F)$. $\rhd$

Положим $\Phi^- = -\Phi^+$ и $V = \langle X_r :\ r \in \Phi^- \rangle$.

Лемма 2. *Пусть M — подгруппа группы Шевалле $\Phi(F)$ ранга 2 над полем F, содержащая унипотентную подгруппу $U = \langle X_r :\ r \in \Phi^+ \rangle$. Тогда, если корневые элементы $x_r(1)$ и $x_s(1)$ лежат в M для $r, s \in \Phi^-$ таких, что либо $\{r, s\}$, либо $\{r, -s\}$ есть база системы корней Φ, то $M = \Phi(F)$.*

$\lhd$ Из предположений леммы следует, что для некоторой базы $\{r, s\}$ системы корней Φ в M лежит подгруппа $\langle n_r, n_s \rangle$, которая совпадает с $N^{\pm}$. Так как группа $N^{\pm}$ действует сопряжениями транзитивно на корневых подгруппах, индексированных корнями одинаковой длины, и $U \leqslant M$, то и $V \leqslant M$. Отсюда $M = \Phi(F)$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Пусть $\{a, b\}$ — база системы корней Φ ранга 2, причем a — короткий корень. Переформулируем теорему 1 в следующем более удобном для доказательства виде.

Если подгруппа M группы Шевалле $\Phi(F)$ ранга 2 над полем F содержит унипотентную подгруппу U, то либо $M = \Phi(F)$, либо M совпадает с одной из собственных подгрупп $\langle U, H_M \rangle$, $\langle U, n_a, H_M \rangle$ или $\langle U, n_b, H_M \rangle$ для подходящей диагональной подгруппы $H_M \leqslant H$.

Если элемент g вида (1) лежит в M, то $nh \in M$ и, следовательно,

$$nhX_rh^{-1}n^{-1} = nX_rn^{-1} \leqslant M \quad \text{для всех } r \in \Phi^+. \tag{2}$$

Далее каждый из трех типов A_2, B_2, G_2 системы корней ранга 2 рассматривается отдельно.

Тип A_2. В этом случае $U = X_aX_bX_{a+b}$ и так как группа Вейля типа A_2 есть диэдральная группа порядка 6, то для элемента n из представления (1) возможны следующие шесть случаев: 1) $n = 1$; 2) $n = n_a$; 3) $n = n_b$; 4) $n = n_{a+b}$; 5) $n = n_an_b$; 6) $n = n_bn_a$.

Предположим, что для всех элементов g подгруппы M, не лежащих в подгруппе U, возможен только один из перечисленных выше шести случаев для элемента n из представления элемента g в виде (1).

1) В этом случае, очевидно, $M = \langle U, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

2) В силу (2)

$$nUn^{-1} = n_aX_aX_bX_{a+b}n_a^{-1} = X_{-a}X_{a+b}X_b \leqslant M.$$

Следовательно, $M = \langle U, n_a, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

3) Аналогично предыдущему случаю

$$nUn^{-1} = n_bX_aX_bX_{a+b}n_b^{-1} = X_{a+b}X_{-b}X_a \leqslant M.$$

Следовательно, $M = \langle U, n_b, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

4) В силу (2)

$$nUn^{-1} = n_{a+b}X_aX_bX_{a+b}n_{a+b}^{-1} = X_{-b}X_{-a}X_{-a-b} = V \leqslant M.$$

Следовательно, $M = \Phi(F)$.

5) В этом случае в силу (2)

$$nX_bn^{-1} = n_an_bX_bn_b^{-1}n_a^{-1} = X_{-a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b}n^{-1} = n_an_bX_{a+b}n_b^{-1}n_a^{-1} = X_{-a} \leqslant M.$$

Так как $\{-a-b, a\}$ — база системы корней типа A_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

Случай 6) подобен случаю 5), так как $n_b n_a = n_a n_b h$ для некоторого $h \in H^{\pm}$.

Если в M есть два элемента g_1 и g_2, в представлении (1) которых элемент n такой как в случае 2) и 3) соответственно, то $X_{-a}, X_{-b} \leqslant M$ и по лемме 1 $M = \Phi(F)$.

Таким образом, для типа A_2 теорема 1 доказана.

Тип B_2. В этом случае $U = X_a X_b X_{a+b} X_{2a+b}$ и так как группа Вейля типа B_2 есть диэдральная группа порядка 8, то для элемента n из представления (1) возможны следующие восемь случаев: 1) $n = 1$; 2) $n = n_a$; 3) $n = n_b$; 4) $n = n_a n_b$; 5) $n = n_b n_a$; 6) $n = n_{a+b}$; 7) $n = n_{2a+b}$; 8) $n = n_a n_{a+b}$.

Предположим, что для всех элементов g подгруппы M, не лежащих в подгруппе U, возможен только один из перечисленных выше восьми случаев для элемента n из представления элемента g в виде (1).

1) В этом случае, очевидно, $M = \langle U, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

2) Так же как и для типа A_2 в этом случае $M = \langle U, n_a, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

3) Аналогично предыдущему случаю $M = \langle U, n_b, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

4) В силу (2)

$$nX_b n^{-1} = n_a n_b X_b n_b^{-1} n_a^{-1} = X_{-2a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b} n^{-1} = n_a n_b X_{a+b} n_b^{-1} n_a^{-1} = X_{-a} \leqslant M.$$

Так как $\{-2a-b, a\}$ — база системы корней типа B_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

Случай 5) подобен случаю 4), так как $n_b n_a = n_a n_b h$ для некоторого $h \in H^{\pm}$.

6) В силу (2)

$$nX_b n^{-1} = n_{a+b} X_b n_{a+b}^{-1} = X_{-2a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b} n^{-1} = n_{a+b} X_{a+b} n_{a+b}^{-1} = X_{-a-b} \leqslant M.$$

Так как $\{-2a-b, a+b\}$ — база системы корней типа B_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

7) В силу (2)

$$nX_a n^{-1} = n_{2a+b} X_a n_{2a+b}^{-1} = X_{-a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{2a+b} n^{-1} = n_{2a+b} X_{2a+b} n_{2a+b}^{-1} = X_{-2a-b} \leqslant M.$$

Так как $\{-2a-b, a+b\}$ — база системы корней типа B_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

В случае 8) $nUn^{-1} = n_a n_{a+b} U n_{a+b}^{-1} n_a^{-1} = V \leqslant M$ и, следовательно, $M = \Phi(F)$.

Если в M есть два элемента g_1 и g_2, в представлении (1) которых элемент n такой как в случае 2) и 3) соответственно, то $X_{-a}, X_{-b} \leqslant M$ и по лемме 1 $M = \Phi(F)$.

Таким образом, для типа B_2 теорема 1 доказана.

Тип G_2. В этом случае $U = X_a X_b X_{a+b} X_{2a+b} X_{3a+b} X_{3a+2b}$ и так как группа Вейля типа G_2 есть диэдральная группа порядка 12, то для элемента n из представления (1) возможны следующие 12 случаев:

1) $n = n_a n_b$;
2) $n = (n_a n_b)^2 = n_a n_{a+b}$;
3) $n = (n_a n_b)^3 = (n_a n_{a+b}) n_a n_b = n_{2a+b} n_b$;
4) $n = (n_a n_b)^4 = (n_a n_b)^{-2} = n_{a+b} n_a$;
5) $n = (n_a n_b)^5 = (n_a n_b)^{-1} = n_b n_a$;
6) $n = (n_a n_b)^6 = 1$;
7) $n = (n_a n_b) n_b = n_a$;
8) $n = (n_a n_{a+b}) n_b = n_a n_b n_a = n_{3a+b}$;
9) $n = (n_{2a+b} n_b) n_b = n_{2a+b}$;

10) $n = (n_{a+b}n_a)n_b = n_{a+b}n_bn_{a+b} = n_{3a+2b}$;

11) $n = (n_bn_a)n_b = n_{a+b}$;

12) $n = n_b$.

Здесь последние шесть случаев получены соответственно из первых шести умножением на элемент n_b, причем равенства в этих 12 случаях выполняются по модулю диагональных элементов из подгруппы $H^{\pm}$.

Предположим, что для всех элементов g подгруппы M, не лежащих в подгруппе U, возможен только один из перечисленных выше 12 случаев для элемента n из представления элемента g в виде (1).

1) В силу (2)

$$nX_bn^{-1} = n_an_bX_bn_b^{-1}n_a^{-1} = X_{-3a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b}n^{-1} = n_an_bX_{a+b}n_b^{-1}n_a^{-1}.$$

Так как $\{-3a-b, a\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

2) В силу (2)

$$nX_{a+b}n^{-1} = n_an_{a+b}X_{a+b}n_{a+b}^{-1}n_a^{-1} = X_{-2a-b} \leqslant M,$$

$$nX_bn^{-1} = n_an_{a+b}X_bn_{a+b}^{-1}n_a^{-1} = X_{-3a-2b} \leqslant M.$$

Так как $\{-3a-2b, 2a+b\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

В случае 3) $nUn^{-1} = n_{2a+b}n_bUn_b^{-1}n_{2a+b}^{-1} = V \leqslant M$ и, следовательно, $M = \Phi(F)$.

Случай 4) подобен случаю 2), так как $n_{a+b}n_a = n_an_{a+b}h$ для некоторого $h \in H^{\pm}$.

Случай 5) подобен случаю 1), так как $n_bn_a = n_an_bh$ для некоторого $h \in H^{\pm}$.

6) В этом случае, очевидно, $M = \langle U, H_M\rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

7) Так же как и для типа A_2 в этом случае $M = \langle U, n_a, H_M\rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

8) В силу (2)

$$nX_{2a+b}n^{-1} = n_{3a+b}X_{2a+b}n_{3a+b}^{-1} = X_{-a} \leqslant M,$$

$$nX_{3a+b}n^{-1} = n_{3a+b}X_{3a+b}n_{3a+b}^{-1} = X_{-3a-b} \leqslant M.$$

Так как $\{-3a-b, a\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

9) В силу (2)

$$nX_an^{-1} = n_{2a+b}X_an_{2a+b}^{-1} = X_{-a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{3a+b}n^{-1} = n_{2a+b}X_{3a+b}n_{2a+b}^{-1} = X_{-3a-2b} \leqslant M.$$

Так как $\{-3a-2b, a+b\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

10) В силу (2)

$$nX_bn^{-1} = n_{3a+2b}X_bn_{3a+2b}^{-1} = X_{-3a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b}n^{-1} = n_{3a+2b}X_{a+b}n_{3a+2b}^{-1} = X_{-2a-b} \leqslant M.$$

Так как $\{-3a-b, 2a+b\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

11) В силу (2)

$$nX_bn^{-1} = n_{a+b}X_bn_{a+b}^{-1} = X_{-3a-2b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b}n^{-1} = n_{a+b}X_{a+b}n_{a+b}^{-1} = X_{-a-b} \leqslant M.$$

Так как $\{-3a-2b, a+b\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

12) Так же как и для типа A_2 в этом случае $M = \langle U, n_b, H_M\rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

Если в M есть два элемента g_1 и g_2, в представлении (1) которых элемент n такой как в случае 7) и 12) соответственно, то $X_{-a}, X_{-b} \leqslant M$ и по лемме 1 $M = \Phi(F)$.

Таким образом, для типа G_2, а следовательно, и в полном объеме теорема 1 доказана. $\triangleright$

Литература

1. *Супруненко Д. А.* Подгруппы полной линейной группы над телом D, содержащие группу всех специальных треугольных матриц $U(n, D)$ // Докл. АН БССР.—1970.—Т. 14, № 4.—С. 305–308.

Статья поступила 20 апреля 2015 г.

Нужин Яков Нифантьевич
Сибирский федеральный университет, *профессор*
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: `nuzhin2008@rambler.ru`

Осетрова Татьяна Александровна
Сибирский федеральный университет, *доцент*
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: `ota53@mail.ru`

ON OVERGROUPS OF THE UNIPOTENT SUBGROUP OF THE CHEVALLEY GROUP OF RANK 2 OVER A FIELD

Nuzhin Ya. N., Osetrova T. A.

Subgroups of the Chevalley group of rank 2 containing its unipotent subgroup are described.

Key words: Chevalley group over a field, unipotent subgroup.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 62–67

УДК **511.517**

О ЧИСЛЕ ПРИМИТИВНЫХ НЕАССОЦИИРОВАННЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ n, ДЕЛЯЩИХСЯ НА ЗАДАННУЮ МАТРИЦУ

У. М. Пачев

Посвящается 60-летию со дня рождения
Владимира Амурхановича Койбаева

Получены формулы для числа примитивных неассоциированных матриц второго порядка заданного нечетного определителя, а также для числа таких матриц, делящихся справа (слева) на заданную матрицу, используемые в вопросах представимости целых чисел неопределенными тернарными квадратичными формами.

Ключевые слова: дискретный эргодический метод, целочисленная примитивная матрица, норма (определитель) матрицы, делимость матриц, неассоциированные справа (слева) матрицы.

В связи с применениями дискретного эргодического метода [1] к вопросу представления целых чисел неопределенными тернарными квадратичными формами возникает необходимость использования примитивных неассоциированных матриц $M \in M_2(Z)$ второго порядка, заданного определителя. Чтобы обеспечить конечность числа целых матриц заданной нормы накладывается условие их неассоциированности справа или слева. В [1–3] неассоциированные матрицы второго порядка, заданной нормы, используются в доказательстве асимптотической формулы для числа целых точек на гиперболоидах и леммы о делимости матриц большой нормы. Вопрос о делимости матриц на неассоциированные матрицы мы рассматриваем в общем виде, а именно, если $N(M) = q^n$ и $A \setminus M$ или M/A (делимость слева или справа) и $N(A)/q^n$, то $N(A)$ не обязательно равна q^k при $1 \leqslant k \leqslant n$ и составном q (здесь $N(A) = \det A$).

Для полноты изложения приведем необходимые сведения из арифметики матриц второго порядка (более полные сведения см. [2]). Мы рассматриваем кольцо целых матриц второго порядка $M_2(Z)$. Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называем *целой*, если $a_{ij} \in Z(i)$ $(i = 1, 2)$. Говорим, что целая матрица A *примитивна*, если НОД$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = 1$. Число

$$t = t(A) = \text{НОД}(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

называется *числовым делителем матрицы* A.

Если для некоторого целого числа $g > 0$ числовой делитель $t(A)$ взаимно прост с g, то матрица A называется *примитивной по модулю* g. Целая матрица U называется *обратимой* (или *единицей* в широком смысле), если $U^{-1} \in M_2(Z)$. В кольце $M_2(Z)$ любая обратимая матрица U имеет норму $N(U) = \pm 1$.

Определим в кольце $M_2(Z)$ ассоциированность матриц слева и справа.

Матрицу A_1 называем *ассоциированной слева* с матрицей A, если найдется такая целая матрица U с нормой $N(U) = 1$, для которой $A_1 = UA$. Аналогично говорим, что A_1 *ассоциирована справа* с A, если найдется $V \in M_2(Z)$, что $N(V) = 1$ и $A_1 = AV$.

Отношение ассоциированности разбивает $M_2(Z)$ на классы ассоциированных матриц. В классе ассоциированных справа матриц можно выбрать единственным образом каноническую треугольную матрицу.

Лемма 1 (о каноническом виде матриц)**.** *Для всякой невырожденной матрицы $A \in M_2(Z)$ найдется ассоциированная ей справа матрица вида*

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant c < a, \ \ b < 0.$$

При этом, если матрицы T и

$$T' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant c' < a', \ \ b' > 0,$$

ассоциированы справа, то $T' = T$.

Это есть частный случай общего утверждения для квадратных целочисленных матриц любого порядка (см. [4, гл. II]). Эту лемму можно доказать с помощью алгоритма Евклида и элементарных преобразований матриц второго порядка.

Говорим, что в кольце $M_2(Z)$ матрица A делится на матрицу B справа и пишем A/B, если найдется матрица Q, для которой $A = QB$. Если B невырождена, то делимость A/B равносильна условию $AB^{-1} \in M_2(Z)$.

Говорим, что матрица A делится на B слева и пишем $B \setminus A$, если найдется матрица $Q \in M_2(Z)$ с условием $A = BQ$ (о теории делимости матриц второго порядка см. [2]).

Следующее утверждение является аналогом основной теоремы арифметики о единственности разложения на простые множители.

Лемма 2 (матричный аналог основной теоремы арифметики)**.**

1) *Пусть A — целая невырожденная матрица второго порядка, причем $N(A) = b \cdot c$, где $b, c \in Z$. Тогда найдутся такие матрицы B, C, что*

$$A = BC, \quad N(B) = b, \quad N(C) = c. \tag{$*$}$$

2) *Если при этом матрица A примитивна* $(\mathrm{mod}\, c)$, *то представление* $(*)$ *единственно с точностью до ассоциированности, т. е. если*

$$A = BC = B_1C_1,$$

$$N(C_1) = N(C) = c,$$

то найдется матрица E, $N(E) = 1$, для которой $C_1 = EC$, $B_1 = BE^{-1}$.

Доказательство см. в [2, § 2].

Опираясь на леммы 1 и 2, получим результаты о неассоциированных матрицах из $M_2(Z)$ заданного определителя n (см. также [5], где дается только набросок доказательства; здесь мы даем развернутое изложение).

Теорема 1. *Пусть n — нечетное число и $\sigma_0(n)$ — число примитивных неассоциированных справа (слева) целочисленных матриц второго порядка определителя n. Тогда*

$$\sigma_0(n) = n \prod_{p/b} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \tag{1}$$

где произведение берется по всем простым делителям числа n.

$\lhd$ 1^0. Будем проводить доказательство только для случая неассоциированных справа матриц. Сначала рассмотрим случай когда n есть степень нечетного простого числа p, т. е. $n = p^a$. В силу леммы 1 примитивными неассоциированными справа матрицами второго порядка определителя p^a будут матрицы вида

$$\begin{pmatrix} p^k & \xi \\ 0 & p^m \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где

$$k + m = a, \quad \text{НОД}(\xi, p) = 1, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant p^k - 1 \tag{3}$$

при всевозможных значениях $0 \leqslant k, m \leqslant a$.

Действительно, умножая матрицу

$$\begin{pmatrix} p^k & \xi \\ 0 & p^m \end{pmatrix}$$

справа на целочисленную унимодулярную матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{pmatrix} p^k & \xi \\ 0 & p^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^k\alpha + \xi\gamma & p^k\beta + \xi\delta \\ p^m\gamma & p^m\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^s & \eta \\ 0 & p^t \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant \eta \leqslant p^s - 1$, $s + t = a$.

Отсюда следует, что $\gamma = 0$. Тогда

$$\begin{pmatrix} p^k\alpha & p^k\beta + \xi\delta \\ 0 & p^m\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^s & \eta \\ 0 & p^t \end{pmatrix}.$$

Переходя к определителям, будем иметь $p^{k+m}\alpha\delta = p^{s+t}$, т. е. $p^a\alpha\delta = p^a$, откуда $\alpha\delta = 1$. Так как α, δ — целые числа и $\alpha, \delta > 0$, то $\alpha = \delta = 1$. В таком случае получаем

$$\begin{pmatrix} p^k & p^k\beta + \xi\delta \\ 0 & p^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^s & \eta \\ 0 & p^t \end{pmatrix},$$

откуда $s = k$, $t = m$ и $\eta = p^k\beta + \xi$.

Так как по условию $0 \leqslant \eta \leqslant p^s - 1$, то теперь, учитывая, что $s = k$, получаем $0 \leqslant p^k\beta + \xi \leqslant p^k - 1$, откуда $\beta = 0$.

Значит,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и поэтому различные матрицы вида (2) с условиями (3) попарно неассоциированы справа.

Найдем теперь $\sigma_0(p^a)$. При фиксированном $1 \leqslant k \leqslant a-1$ число матриц вида (2) с условиями (3) будет равно $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. При $k=0$ получаем только одну матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & p^k \end{pmatrix}$$

при $\xi = 0$, а при $k = a$ получаем матрицы вида

$$\begin{pmatrix} p^a & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\xi = 0, 1, \ldots, p^a - 1$, в этом случае получим p^a таких матриц. Тогда

$$\sigma_0(p^a) = 1 + p^a + \sum_{k=1}^{a-1} \left(p^k - p^{k-1}\right) = p^a \left(1 + \frac{1}{p}\right). \tag{4}$$

Итак, формула (1) в случае $n = p^a$ доказана.

2^0. Докажем теперь мультпликативность функции $\sigma_0(n)$, т. е. что

$$\sigma_0(b \cdot c) = \sigma_0(b) \cdot \sigma_0(c) \quad \text{при} \quad (b, c) = 1. \tag{5}$$

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_{\sigma_0(b)}$ — полный набор примитивных неассоциированных справа матриц определителя b, а $C_1, C_2, \ldots, C_{\sigma_0(c)}$ — все примитивные попарно неассоциированные слева матрицы определителя c, причем НОД$(b, c) = 1$.

Тогда по лемме 2 имеем, что матрицы B_iC_j примитивны и неассоциированы справа. Действительно, предположим, что матрицы B_iC_j и $B_{i'}C_{j'}$ ($i' \neq i$, $j' \neq j$) ассоциированы справа, т. е.

$$B_{i'}C_{j'} = B_iC_jU, \tag{6}$$

где U — целочисленная унимодулярная матрица. Тогда по лемме 2 будем иметь равенства

$$B_{i'} = B_iE, \quad C_{j'} = E^{-1}C_jU, \tag{7}$$

где E — целочисленная унимодулярная матрица. Для того, чтобы имелись представления указанных видов (7) в силу леммы 2 нужно, чтобы матрица $A = BC$ была примитивной по модулю $c = \det C$.

Покажем, что последнее условие выполняется для нашего случая. Действительно, пусть

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \xi \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & \xi \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant \xi \leqslant b_1 - 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant c_1 - 1$ и НОД $= (b_1b_2, c_1c_2) = 1$, и пусть при этом t — числовой делитель матрицы $A = BC$. Надо показать, что НОД $= (t, c) = 1$. Имеем

$$A = BC = \begin{pmatrix} b_1 & \xi \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & \xi \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1c_1 & b_1\eta + c_2\xi \\ 0 & b_2c_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Тогда $t|b_1c_1$, $t|b_2c_2$. Так как НОД$(b, c) = 1$, то $t|b$ или $t|c$.

Рассмотрим случай

$$t|b, \quad t/c_1. \tag{9}$$

Тогда из (8) следует, что $t|c_2\xi$. Возможны два случая: а) $t|c_2$, б) t/ξ.

В случае а) из (8), учитывая (9), имеем, что t/b и t/c поскольку t/c_2.

Но так как НОД$(b,c) = 1$, то $t = 1$. В случае б) аналогично получаем, что $t = 1$. Следовательно, НОД$(t,n) = 1$. Итак, в наших условиях выполняются равенства (7). Но это противоречит тому, что матрицы B_i, $B_{i'}$ неассоциированы. Значит, наше допущение, что матрицы B_iC_j ассоциированы справа приводит к противоречию. Следовательно, матрицы B_iC_j $(i = 1,\dots,\sigma(b),\ j = 1,\dots,\sigma(c))$ попарно неассоциированы справа.

Попутно было установлено, что матрицы B_iC_j примитивны. Тем самым мультипликативность функции $\sigma_0(n)$ доказана. Из (4) и (5) уже следует теорема 1, т. е. формула (1). $\triangleright$

Замечание. Доказательство примитивности матриц B_iC_j можно было провести и следующим образом. Так как матрицы B_iC_j примитивны по условию, то они примитивны по любому модулю $g > 0$. Так как

$$\text{НОД}(\det B_i, \det B_j) = 1,$$

то в силу следствия 2 предложения 2.7 статьи [2] имеем, что B_iC_j примитивны по любому модулю g. Отсюда следует, что $t(B_i, C_j) = 1$, т. е. матрица B_iC_j примитивна.

Перейдем теперь к вопросу о числе примитивных неассоциированных матриц $M \in M_2(Z)$ определителя n, делящихся на матрицу $A \in M_2(Z)$.

Обозначим через $\sigma_0(n,A)$ число примитивных неассоциированных матриц $M \in M_2(Z)$ определителя n, делящихся на матрицу $A \in M_2(Z)$.

Опираясь на теорему 1, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Для числа $\sigma_0(n,A)$ справедливо соотношение*

$$\sigma_0(n,A) = \frac{n}{\det A} \prod_{p \,\big|\, \frac{n}{|\det A|}} \left(p + \frac{1}{p}\right),$$

где произведение берется по всем простым делителям числа $\frac{n}{|\det A|}$.

$\triangleleft$ Пусть $M_1, M_2, \dots, M_r$ — набор всех неассоциированных справа примитивных матриц второго порядка определителя n, делящихся слева на матрицу $A \in M_2(Z)$, где $r = \sigma_0(n,A)$, при этом случай неассоциированности слева и соответственно делимости справа рассматривается аналогично.

В силу делимости матриц $M_1, M_2, \dots, M_r$ слева на матрицу A имеем

$$M_1 = A\widetilde{M}_1,\ M_2 = A\widetilde{M}_2,\ \dots,\ M_r = A\widetilde{M}_r,$$

где $\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2, \dots, \widetilde{M}_r \in M_2(Z)$.

Покажем, что $\widetilde{M}_i$ $(i = 1,\dots,r)$ неассоциированы справа. Допустим, что это не так. Тогда $\widetilde{M}_i = \widetilde{M}_jE$ — целочисленная унимодулярная матрица, $i \neq j$. В таком случае $M_i = A\widetilde{M}_i = (A\widetilde{M}_j)E = M_jE$, а это противоречит неассоциированности матриц M_i и M_j справа при $i \neq j$. Покажем еще примитивность матриц $\widetilde{M}_i$ $(i = 1,\dots,r)$. Допустим, что $\widetilde{M}_i$ не является примитивной. Тогда $\widetilde{M}_i = t\widetilde{M}_i'$, где $t > 0$, $\widetilde{M}_i' \in M_2(Z)$. Подставляя это в матрицу $\widetilde{M}_i$ будем иметь $M_i = A \cdot t\widetilde{M}_i' = tA \cdot \widetilde{M}_i'$, где $t > 1$, но это противоречит условию примитивности матрицы M_i. Таким образом, матрицы $\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2, \dots, \widetilde{M}_r$ — неассоциированы справа и примитивны. Но тогда в силу того, что $\det \widetilde{M}_i = \frac{n}{\det A}$, по теореме 1 получаем формулу для $\sigma_0(n,A)$. $\triangleright$

Замечание. Если рассматриваемые матрицы $M \in M_2(Z)$ лежат в некоторой области Ω на детерминантной поверхности $\det M = n$, то вместо точных формул могут быть получены только асимптотические формулы при $n \to \infty$ (см. [1]).

Литература

1. *Линник Ю. В.* Эргодические свойства алгебраических полей.—Изд-во ЛГУ, 1967.
2. *Малышев А. В., Пачев У. М.* Об арифметике матриц второго порядка // Записки научных семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 93.—С. 41–86.
3. *Пачев У. М.* Представление целых чисел изотропными тернарными квадратными формами // Изв. РАН. Сер. мат.—2006.—Т. 70, № 3.—С. 167–184.
4. *Newman M.* Integral matrices.—N. Y. L.: AP, 1972.—224 p.
5. *Пачев У. М.* О числе приведенных целочисленных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов // Чебышевский сб.—2003.—Т. 4, вып. 3 (7).—С. 92–105.

Статья поступила 21 апреля 2015 г.

Пачев Урусби Мухамедович
Кабардино-Балкарский государственный
университет им. Х. М. Бербекова, *профессор*
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail:urusbi@rambler.ru

ABOUT THE NUMBER OF PRIMITIVE NON-ASSOCIATED SECOND ORDER MATRICES OF DETERMINANT n DIVISIBLE BY A GIVEN MATRIX

Pachev U. M.

We obtained formulae for the number of primitive non-associated second order matrices of given odd determinant, as well as for the number of such matrices divisible on the right (left) by the given matrix used in questions of representability of integers by indefinite ternary quadratic forms.

Key words: discrete ergidic method, primitive matrix of integers, norm (determinant) of a matrix, divisibility of matrices, non-associated matrices on the right (left).

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 68–70

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 60-ЛЕТИЮ ВЛАДИМИРА АМУРХАНОВИЧА КОЙБАЕВА

В этом году исполняется 60 лет известному российскому алгебраисту, доктору физико-математических наук, профессору Койбаеву Владимиру Амурхановичу.

Владимир Амурханович — яркий представитель ленинградской-петербуржской алгебраической школы, ученик З. И. Боревича. Все, кому довелось быть знакомым с Владимиром Амурхановичем, отмечают его незаурядные личные качества, яркий математический талант и человеческое обаяние.

Владимир Амурханович прошел насыщенный жизненный путь. Он родился 8 июня 1955 г. в городе Баку в семье военного. В 1972 г. окончил математический класс школы № 134 г. Баку (ныне академическая гимназия). С самого детства он проявлял незаурядные способности к математике. В школе был победителем и призером городской (Баку) и республиканских олимпиад. После окончания школы поступил на механико-математический факультет Азербайджанского госуниверситета, отучился год, затем семья переехала на родину в Осетию. Владимир Амурханович перевелся на физико-математический факультет СОГУ, где одаренного студента заметил известный ленинградский профессор З. И. Боревич, который приезжал с лекциями во Владикавказ. Начиная с 1975 г. Койбаев учится на математико-механическом факультете ЛГУ (СПбГУ), который оканчивает в 1978 г.

Серьезно заниматься наукой он начал еще студентом. Его научным руководителем стал Зенон Иванович Боревич. В 1974 г. В. А. Койбаев — победитель студенческой олимпиады по математике «Студент и научно-технический прогресс» (г. Ростов), в 1977 г. он получил премию математико-механического факультета СПбГУ за студенческую научную работу. Свою первую статью Владимир Амурханович опубликовал в журнале «Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР» в 1977 г. будучи студентом 4-го курса. Статья называлась «Примеры немономиальных линейных групп без трансвекций» и оказалась очень полезной. Дело в том, что в 1976 г. З. И. Боревич опубликовал основополагающую статью, в которой было дано описание промежуточных подгрупп полной линейной группы $GL(n, k)$ над полем k, содержащих группу диагональных матриц. При этом предполагалось, что поле k содержит не менее семи элементов. Используя понятие сети, З. И. Боревич показал, что всякая промежуточная подгруппа заключена между сетевой группой и ее нормализатором (т. е. имеет место стандартное описание промежуточных подгрупп). Примеры, построенные В. А. Койбаевым показали, что ограничение на число элементов поля существенно, и стандартное описание промежуточных подгрупп для полей с числом элементов менее семи уже не имеет места. Уже в своей кандидатской диссертации, введя понятие просети, В. А. Койбаеву удалось дать описание указанных промежуточных подгрупп для полей из 3, 4 и 5-ти элементов. В 1982 г. после окончания аспирантуры математико-механического факультета ЛГУ и защиты кандидатской диссертации на тему «Расположение подгрупп в линейных группах над конечными полями» Владимир Амурханович решает вернуться в Осетию, где возглавляет кафедру алгебры и геометрии Северо-Осетинского государственного университета и продолжает активно заниматься научной работой. В 1983–1984 гг. удалось дать описание подгрупп ортогональной группы, содержащих группу диагональных матриц.

В начале 1980-х гг. выдающийся представитель ленинградской-петербуржской алгебраической школы Н. А. Вавилов занялся реализацией программы описания подгрупп специальной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц и дал описание указанных промежуточных подгрупп. По аналогии с полной линейной группой, всякая промежуточная подгруппа оказалась заключенной между элементарной сетевой подгруппой и ее нормализатором. В серии работ 1982–1985 гг., продолжая большой цикл работ профессора Н. А. Вавилова, Койбаеву В. А. удалось дать описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу элементарных клеточно-диагональных матриц (доведя размеры клеток до 2), а затем было получено описание подгрупп специальной линейной группы над полями из 4 и 5 элементов, содержащих группу диагональных матриц.

В 1989–1990 гг. начинается работа по описанию подгрупп полной линейной группы степени 2 над бесконечным полем, содержащих нерасщепимый максимальный тор. Прорывной работой в этом направлении явилась статья 1990 гг., опубликованная в ДАН СССР, в которой были исследованы (а в дальнейших работах было дано описание) указанные промежуточные подгруппы.

Следующая важная ступень в научной карьере Владимира Амурхановича — докторантура на кафедре алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского государственного университета. После защиты докторской диссертации он возвращается в Северо-Осетинский государственный университет, где продолжает возглавлять кафедру алгебры и геометрии. На математическом факультете организовывается совместно с профессором А. Г. Кусраевым и доцентом В. Т. Худаловым семинар «Алгебра и анализ», которому в этом году исполняется 20 лет.

Помимо активной научной работы, В. А. Койбаев занимается педагогической и просветительской деятельностью. Владимир Амурханович старается привлекать к занятиям наукой способных студентов, организует алгебраические кружки, пропагандирует среди молодежи занятия наукой. В. А. Койбаев уделяет большое внимание школьной математике. Ежегодно он возглавляет экспертную комиссию всероссийской олимпиады республиканского этапа. Кафедра алгебры и геометрии СОГУ отвечает за проведение республиканской олимпиады по математике и информатике. В этом году она собрала более 200 участников.

Хочется отметить, что Владимир Амурханович постоянно работает над новыми научными проблемами и задачами. В 2009 г. была опубликована важная работа, в которой было показано, что любая надгруппа нерасщепимого максимального (минизотропного) тора с одномерным преобразованием в полной линейной группе содержит элементарную трансвекцию на любой позиции. В этом же году В. А. Койбаев публикует монографию «Подгруппы группы $GL(2,k)$, содержащие нерасщепимый тор». Другое направление, к которому В. А. Койбаев проявляет интерес, — это исследование элементарных сетей, где он плодотворно сотрудничает с представителями красноярской алгебраической школы. В серии работ, начиная с 2010 г. были исследованы элементарные сети, замкнутые (допустимые) сети, введено понятие производной сети в специальной линейной группе (позже Я. Н. Нужин перенес это понятие на произвольные группы Шевалле).

В. А. Койбаевым опубликовано более 70 научных работ в ведущих изданиях. Он является членом редколлегии Владикавказского математического журнала. Неоднократно участвовал в организации и проведении международных алгебраических конференций, а также был председателем оргкомитета IX Международной школы-конференции по теории групп (Владикавказ, 9–15 июля 2012 г.).

От всей души поздравляем Владимира Амурхановича Койбаева со знаменательным юбилеем и пожелать ему и его близким крепкого здоровья, счастья и благополучия!

Мы желаем Владимиру Амурхановичу долгие и долгие годы оставаться таким же бодрым, энергичным и полным творческих планов и идей!

Н. А. Вавилов, А. Х. Журтов, А. С. Кондратьев, А. Г. Кусраев,
В. М. Левчук, В. Д. Мазуров, А. А. Махнев, Я. Н. Нужин,
У. М. Пачев, Б. И. Плоткин, Н. С. Романовский

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов ($\approx$ 12 стр. формата А4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 53-84-62;
E-mail: `rio@smath.ru`
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17

Выпуск 2

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-50223 от 15 июня 2012 г.

Подписано в печать 05.06.2015. Формат бумаги $60\times84^1/_8$.
Гарн. шрифта Computer modern. Усл. п. л. 8,14. Тираж 100 экз.

Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН и РСО-А
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.