Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18, выпуск 4 октябрь–декабрь, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2016

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 3–14

ON GENERALIZATION OF FOURIER AND HARTLEY TRANSFORMS FOR SOME QUOTIENT CLASS OF SEQUENCES

S. K. Q. Al-Omari

In this paper we consider a class of distributions and generate two spaces of Boehmians for certain class of integral operators. We derive a convolution theorem and generate two spaces of Boehmians. The integral operator under concern is well-defined, linear and one-to-one in the class of Boehmians. An inverse problem is also discussed in some details.

Mathematics Subject Classification (2000): 44A15, 46F12.

Key words: $H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}$ transform, Hartley transform, Fourier transform, quotient space.

1. Introduction

Integral transforms have been introduced and found their applications in applied mathematics and diverse fields of science. The Hartley transform is an integral transformation that maps a real-valued temporal or spacial function into a real-valued frequency function via the kernel $\operatorname{cas}(\cdot) = \cos(\cdot) + \sin(\cdot)$. Advantages of Hartley transforms comes over that of Fourier transforms since they avoid the use of complex arithmetic which results in faster algorithms. Hartley transforms can further be analytically continued into the complex plane, and for real functions they are Hermitian symmetry or reflection in the real axis. In this article we consider an integral transform related to Hartley and Fourier transforms defined for functions of two variables as

$$H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta} f(\zeta,\xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)(\alpha\cos\zeta x + \beta\sin\zeta x)(\rho\cos\xi y + \eta\sin\xi y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

where $(\zeta,\xi) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ are the transform variables and α, β, ρ, η are arbitrary constants.

A inversion formula of the cited integral be can easily recovered from (1) giving

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}(\zeta,\xi)(\alpha\cos\zeta x + \beta\sin\zeta x)(\rho\cos\xi y + \eta\sin\xi y)\,d\zeta\,d\xi. \tag{2}$$

In a special case, for $\alpha = \beta = 1$, $\rho = \eta = 1$, the integral transform (1) and the inversion formula (2) are respectively reduced to the double Hartley transform A^d pair (see [10])

$$A^d(\zeta,\xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)(\cos\zeta x + \sin\zeta x)(\cos\xi y + \sin\xi y)\,dx\,dy \tag{3}$$

and

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} A^d(\zeta,\xi)(\cos\zeta x + \sin\zeta x)(\cos\xi y + \sin\xi y)\, d\zeta\, d\xi. \tag{4}$$

Further, with simple computations, the kernel function

$$(\cos\zeta x + \sin\zeta x)(\cos\xi y + \sin\xi y) = \operatorname{cas}\zeta x \operatorname{cas}\xi y \tag{5}$$

inside the integral signs can be written as

$$\operatorname{cas}\zeta x \operatorname{cas} vy = \cos(\zeta x - \xi y) + \sin(\zeta x + \xi y). \tag{6}$$

Hence, the integral Equations (3) and (4) can also be rearranged in terms of (6) as

$$A^d(\zeta,\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)(\cos(\zeta x - \xi y) + \sin(\zeta x + \xi y))\, dx\, dy \tag{7}$$

and

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} A^d(\zeta,\xi)(\cos(\zeta x - \xi y) + \sin(\zeta x + \xi y))\, d\zeta\, d\xi, \tag{8}$$

respectively.

By setting $\alpha = 1, \beta = i, \rho = 1$ and $\eta = i$, we derive the double Fourier transform F^d pair,

$$F^d(\zeta,\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)(\cos\zeta x + i\sin\xi x)(\cos\zeta \mathrm{y} + i\sin\xi y)\, dx\, dy \tag{9}$$

and

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F^d(\zeta,\xi)(\cos\zeta x + i\sin\xi x)(\cos\zeta y + i\sin\xi y)\, d\zeta\, d\xi. \tag{10}$$

By factoring $A^d(\zeta,\xi)$ into even and odd components, $A^d(\zeta,\xi) = E_d(\zeta,\xi) + O_d(\zeta,\xi)$, where

$$E_d(\zeta,\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\cos(\zeta x - \xi y)\, dx\, dy \tag{11}$$

and

$$O_d(\zeta,\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\sin(\zeta x - \xi y)\, dx\, dy \tag{12}$$

we get

$$F^d(\zeta,\xi) = E_d(\zeta,\xi) - iO_d(\zeta,\xi) \text{ and } A^d(\zeta,\xi) = \operatorname{Re} F^d(\zeta,\xi) + \operatorname{Im} F^d(\zeta,\xi). \tag{13}$$

Denote by $\mathscr{L}^2$ the Lebesgue space of integrable functions over $\mathbb{R}^2$; then the convolution product of $f(x,y)$ and $g(x,y)$ in $\mathscr{L}^2$ is defined by

$$(f *^2 g)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t,w) g(x-t, y-w)\, dt\, dw.$$

We state and prove the following theorem.

Theorem 1 (Convolution Theorem). *Let $f(x,y), g(x,y) \in \mathscr{L}^2$. Then we have*

$$H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}(f *^2 g)(\zeta,\xi) = J(\zeta,\xi)G(\zeta,\xi),$$

where $J(\zeta,\xi)$ and $G(\zeta,\xi)$ are given by the integrals

$$J(\zeta,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t,w)\cos(t\zeta)\cos(w\xi)\,dt\,dw$$

and

$$G(\zeta,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} 4\beta\eta\sin(\zeta z)\sin(r\xi)g(z,r)\,dz\,dr.$$

$\lhd$ Let $f(x,y), g(x,y) \in \mathscr{L}^2$. Then by using the convolution product formula we have

$$\begin{aligned} H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}\left(f *^2 g\right)(\zeta,\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(f *^2 g\right)(x,y)(\alpha\cos(x\zeta)+\beta\sin(x\zeta)) \\ &\quad\times(\rho\cos(y\xi)+\eta\sin(y\xi))\,dx\,dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t,w)g(x-t,y-w)\,dt\,dw\Bigg) \\ &\quad\times(\alpha\cos(x\zeta)+\beta\sin(x\zeta))(\rho\cos(y\xi)+\eta\sin(y\xi))\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Change of variables $x-t=z$ and $y-w=r$ imply $dx=dz$ and $dy=dr$ and hence

$$\begin{aligned} H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}\left(f *^2 g\right)(\zeta,\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t,w)\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} g(z,r)(\alpha\cos\zeta(z+t)+\beta\sin\zeta(z+t)) \\ &\quad\times(\rho\cos\zeta(r+w)+\eta\sin(r+w)\xi)\,dz\,dr\,dt\,dw. \end{aligned}$$

By aid of the facts $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ and $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$ and using simple computations we get

$$H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}\left(f *^2 g\right)(\zeta,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t,w)\,\sigma(t,w)\,dw\,dt, \tag{14}$$

where

$$\begin{aligned} \sigma(t,w) &= \cos(t\zeta)\cos(wv)\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} g(z,r)(\alpha\cos(z\zeta)+\beta\sin(z\zeta))\times\ (\rho\cos(r\xi)+\eta\sin(r\xi))\,dz\,dr \\ &- \cos(t\zeta)\sin(w\xi)\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} g(z,r)(\alpha\cos(z\zeta)+\beta\sin(z\zeta))\times\ (\rho\sin(r\xi)-\eta\cos(r\xi))\,dz\,dr \\ &- \sin(t\zeta)\cos(w\xi)\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} g(z,r)(\alpha\sin(z\zeta)-\beta\cos(z\zeta))\,(\rho\cos(r\xi)+\eta\sin(r\xi))\,dz\,dr \\ &+ \sin(t\zeta)\sin(w\xi)\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} g(z,r)(\alpha\sin(z\zeta)-\beta\cos(z\zeta))\times\ (\rho\sin(r\xi)-\eta\cos(r\xi))\,dz\,dr. \end{aligned}$$

Hence, in view of (15), we get

$$H_{\alpha,\beta}^{\rho,\eta}\left(f *^2 g\right)(\zeta,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t,w) \begin{pmatrix} \cos(t\zeta)\cos(w\xi)\left(H_{\alpha,\beta}^{\rho,\eta} g(\zeta,\xi)\right) - \\ \cos(t\zeta)\sin(w\xi)\left(H_{\alpha,\beta}^{\rho,-\eta} g(\zeta,\xi)\right) - \\ \sin(t\zeta)\cos(w\xi)\left(H_{\alpha,-\beta}^{\rho,\eta} g(\zeta,\xi)\right) + \\ \sin(t\zeta)\sin(w\xi)\left(H_{\alpha,-\beta}^{\rho,-\eta} g(\zeta,\xi)\right) \end{pmatrix} dt\, dw$$

$$= \left(\left(H_{\alpha,\beta}^{\rho,\eta} - H_{\alpha,\beta}^{\rho,-\eta} - H_{\alpha,-\beta}^{\rho,\eta} + H_{\alpha,-\beta}^{\rho,-\eta}\right) g\right)(\zeta,\xi) \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t,w)\, \cos(t\zeta)\, \cos(w\xi)\, dt\, dw.$$

This can be put into the form

$$H_{\alpha,\beta}^{\rho,\eta}\left(f *^2 g\right)(\zeta,\xi) = \Psi(g)(\zeta,\xi) \times J(\zeta,\xi), \tag{15}$$

where $\Psi = H_{\alpha,\beta}^{\rho,\eta} - H_{\alpha,\beta}^{\rho,-\eta} - H_{\alpha,-\beta}^{\rho,\eta} + H_{\alpha,-\beta}^{\rho,-\eta}$. To complete the proof of the theorem, it is sufficiently enough we show that $\Psi(g)(\zeta,\xi) = J(\zeta,\xi)$.

By aid of (15) we derive

$$\begin{aligned}\Psi(g)(\zeta,\xi) &= \left(\left(H_{\alpha,\beta}^{\rho,\eta} - H_{\alpha,\beta}^{\rho,-\eta} - H_{\alpha,-\beta}^{\rho,\eta} + H_{\alpha,-\beta}^{\rho,-\eta}\right) g\right)(\zeta,\xi) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} (\alpha\cos(z\zeta) + \beta\sin(z\zeta))2\eta\, \sin(r\xi)\, g(z,r)\, dz\, dr \\ &- \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} (\alpha\cos(z\zeta) - \beta\sin(z\zeta))2\eta\, \sin(r\xi)\, g(z,r)\, dz\, dr.\end{aligned}$$

Hence, it follows that

$$\Psi(g)(\zeta,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} 4\beta\eta\, \sin(z\zeta)\sin(r\xi)\, g(z,r)\, dz\, dr = J(\zeta,\xi).$$

Hence the theorem is completely proved. ⊳

2. Distributional $H_{\alpha,\beta}^{\rho,\eta}$ transforms

Denote by $\mathscr{T}^2$ the space of smooth functions over φ defined on $\mathbb{R}^2$ such that

$$\wp_{k,K}(\varphi) = \sup_{\mathbf{x}\in K}\left|\mathscr{D}^k\varphi(\mathbf{x})\right| < \infty,$$

where the supremum traverses all compact subsets K of $\mathbb{R}^2$. Denote by $\mathscr{T}^{'2}$ the conjugate space $\mathscr{T}^2$ of distributions of compact supports over $\mathbb{R}^2$. Then, due to Pathak [13], $\mathscr{T}^2$ defines a norm and the collection $\wp_{k,K}$ is separating. Hence it defines a Hausdörff topology on $\mathscr{T}^2$. It is easy to notice that the kernel function

$$K(\zeta,\xi,x,y) = (\alpha\cos(\zeta x) + \beta\sin(\zeta x))(\rho\cos(\xi y) + \eta\sin(\xi y)) \tag{16}$$

of (1) is a member of $\mathscr{T}^2$ and hence, leads to the generalized definition

$$\widehat{H_{\alpha,\beta}^{\rho,\eta}} f(\zeta,\xi) = \langle f(x,y), K(\zeta,\xi,x,y)\rangle, \tag{17}$$

where f is an arbitrary distribution in $\mathscr{T}^{'2}$.

Further simple properties of $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}$ can be derived from (17) as follows:

Theorem 2. *Let $f(x,y) \in \mathscr{T}^{'2}$, then we have*
(i) $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}$ *is well-defined;*
(ii) $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}$ *is linear;*
(iii) $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}$ *is one to one;*
(iv) $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}$ *is analytic and*

$$\frac{\partial \widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}}{\partial \zeta} f(\zeta,\xi) = \left\langle f(x,y), \frac{\partial}{\partial \zeta} K(\zeta,\xi,x,y) \right\rangle$$

and

$$\frac{\partial \widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}}{\partial \xi} f(\zeta,\xi) = \left\langle f(x,y), \frac{\partial}{\partial \xi} K(\zeta,\xi,x,y) \right\rangle .$$

◁ Proof of Part (i) follows from (16). To prove Part (ii) Let $\alpha \in \mathbb{R}$ and $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} f$, $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} g$ be the $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}$ transforms of f and $g \in \mathscr{T}^{'2}$, respectively. Then we have

$$\alpha^* \left(\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} f + \widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} g \right) = \langle \alpha^*(g(x,y) + f(x,y)), K(\zeta,\xi,x,y) \rangle .$$

By the concept of addition of distributions we get

$$\alpha^* \left(\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} f + \widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} g \right) (\zeta,\xi) = \langle \alpha^* f(x,y), K(\zeta,\xi,x,y) \rangle + \langle \alpha^* g(x,y), K(\zeta,\xi,x,y) \rangle .$$

Hence, scalar multiplication in the space $\mathscr{T}^{'2}$ implies

$$\alpha^* \left(\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} f + \widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} g \right) (\zeta,\xi) = \alpha^* \widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} f + \alpha^* \widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} g.$$

This completes the proof of the linearity axiom of $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}$.

To prove that $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}$ is one-to-one, we assume $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} f = \widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} g$. Then we have $\langle f(x,y), K(\zeta,\xi,x,y) \rangle = \langle g(x,y), K(\zeta,\xi,x,y) \rangle$. Hence

$$\langle f(x,y) - g(x,y), K(\zeta,\xi,x,y) \rangle = 0$$

in the distributional sense. Therefore, it follows that $f(x,y) = g(x,y)$. This proves Part (iii). To prove Part (iv) we refer to [13]. Hence the proof is completed. ▷

The operation $*^2$ can be extended to $\mathscr{T}'^2$ as

$$\left\langle f(x,y) *^2 g(x,y), \varphi(x,y) \right\rangle = \langle f(x,y), \langle g(t,w), \varphi(t+x, y+w) \rangle \rangle .$$

We state without proof the following theorem.

Theorem 3. *Let $f(x,y), g(x,y) \in \mathscr{T}'^2$. Then we have*

$$\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} \left(f(x,y) *^2 g(x,y) \right) (\zeta,\xi) = J(\zeta,\xi) G(\zeta,\xi),$$

where

$$G(\zeta,\xi) = 4\beta\eta \, \langle g(t,w), \sin(t\zeta)\sin(w\xi) \rangle , \quad J(\zeta,\xi) = \langle f(t,w), \cos(t\zeta)\cos(w\xi) \rangle .$$

For similar proof see Theorem 1. Hence we delete the details.

3. The quotient space of Boehmians

The idea of construction of Boehmians was initiated by the concept of regular operators. Construction of Boehmians is similar to that of field of quotients and in some cases, it gives just the field of quotients. The construction of Boehmians consists of the following elements:

(i) A set $\boldsymbol{A}$;

(ii) A commutative semigroup $(\boldsymbol{B}, *)$;

(iii) An operation $\odot : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A}$ such that for each $x \in \boldsymbol{A}$ and $\upsilon_1, \upsilon_2, \in \boldsymbol{B}$,

$$x \odot (\upsilon_1 * \upsilon_2) = (x \odot \upsilon_1) \odot \upsilon_2;$$

(iv) A set $\Delta \subset \boldsymbol{B}^{\mathbb{N}}$ satisfying:

(a) If $x, y \in \boldsymbol{A}$, $(\upsilon_n) \in \Delta$, $x \odot \upsilon_n = y \odot \upsilon_n$ for all n, then $x = y$;

(b) If $(\upsilon_n), (\sigma_n) \in \Delta$, then $(\upsilon_n * \sigma_n) \in \Delta$ (Δ is the set of all delta sequences).

Consider

$$\mathscr{A} = \{(x_n, \upsilon_n) : \; x_n \in \mathbf{A}, \, (\upsilon_n) \in \Delta, \, x_n \odot \upsilon_m = x_m \odot \upsilon_n, \forall\, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

If $(x_n, \upsilon_n), (y_n, \sigma_n) \in \mathscr{A}$, $x_n \odot \sigma_m = y_m \odot \upsilon_n$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, then we say $(x_n, \upsilon_n) \sim (y_n, \sigma_n)$. The relation $\sim$ is an equivalence relation in $\mathscr{A}$. The space of equivalence classes in $\mathscr{A}$ is denoted by $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}, (\boldsymbol{B}, *), \odot, \Delta)$. Elements of $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}, (\boldsymbol{B},*), \odot, \Delta)$ are called Boehmians.

Between $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}, (\boldsymbol{B},*), \odot, \Delta)$ there is a canonical embedding expressed as

$$x \rightarrow \frac{x \odot s_n}{s_n} \;\text{ as }\; n \rightarrow \infty.$$

The operation $\odot$ can be extended to $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}, (\boldsymbol{B},*), \odot, \Delta) \times \boldsymbol{A}$ by

$$\frac{x_n}{\upsilon_n} \odot t = \frac{x_n \odot t}{\upsilon_n}.$$

In $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}, (\boldsymbol{B}, *), \odot, \Delta)$, two types of convergence:

1) A sequence $(h_n) \in \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}, (\boldsymbol{B}, *), \odot, \Delta)$ is said to be δ convergent to $h \in \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}, (\boldsymbol{B},*), \odot, \Delta)$, denoted by $h_n \xrightarrow{\delta} h$ as $n \rightarrow \infty$, if there exists a delta sequence (υ_n) such that $(h_n \odot \upsilon_n)$, $(h \odot \upsilon_n) \in \boldsymbol{A}$, $\forall\, k, n \in \mathbb{N}$, and $(h_n \odot \upsilon_k) \rightarrow (h \odot \upsilon_k)$ as $n \rightarrow \infty$, in $\boldsymbol{A}$, for every $k \in \mathbb{N}$.

2) A sequence $(h_n) \in \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}, (\boldsymbol{B},*), \odot, \Delta)$is said to be Δ convergent to $h \in \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}, (\boldsymbol{B},*), \odot, \Delta)$, denoted by $h_n \xrightarrow{\Delta} h$ as $n \rightarrow \infty$, if there exists a $(\upsilon_n) \in \Delta$ such that $(h_n - h) \odot \upsilon_n \in \boldsymbol{A}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, and $(h_n - h) \odot \upsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ in $\boldsymbol{A}$.

For further details we refer to [1–9] and [11–14].

Let $\mathscr{D}^2$ be the Schwartz space of test functions of bounded supports over $\mathbb{R}^2$ and Δ^2 be the subset of $\mathscr{D}^2$ of sequences $(\theta_n(x, y))$ such that

(i) $\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \theta_n(x, y)\, dx\, dy = 1$;

(ii) $\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\theta_n(x, y)|\, dx\, dy \leqslant M, M$ is positive real number;

(iii) $\operatorname*{supp}\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \theta_n(x, y) \rightarrow (0, 0)$ as $n \rightarrow \infty$.

Then Δ^2 is a set of delta sequences which correspond to the delta distribution $\delta(x,y)$. It is know from literature that $\delta(x,y)=0$, $x\neq 0$, $y\neq 0$ and $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\delta(x,y)\,dx\,dy=1$ ($\Rightarrow \delta(x,y)=\delta(x)\delta(y)$). It also verified that

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\delta(x-\alpha,y-\beta)\,f(x,y)\,dx\,dy=f(\alpha,\beta),$$

where α and β are constants.

Let $(\delta_n(x,y))\in\Delta^2$. Then it is easy to see that

$$\left(H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}\delta_n(x,y)\right)(\zeta,\xi)\to\frac{\alpha\rho}{2\pi}\text{ as }n\to\infty.$$

Let $\mathscr{B}\left(\mathscr{T}^2,\mathscr{D}^2,\Delta^2,*^2\right)$ be the Boehmian space having $\mathscr{T}^2$ as a group, $\mathscr{D}^2$ as a subgroup of $\mathscr{T}^2$, $\mathscr{D}^2$ as the set of delta sequences and $*^2$ being the operation on $\mathscr{T}^2$ then we introduce the following definitions.

Let $f(t,w)\in\mathscr{T}^2$, $\theta(t,w)\in\mathscr{D}^2$ and $(\theta_n(t,w))\in\Delta^2$. We will usually choose $\mathfrak{h}(\zeta,\xi)$, $\mathfrak{g}(\zeta,\xi)$ and $\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi)$ to denote

$$\mathfrak{h}(\zeta,\xi)=4\beta\eta\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}f(t,w)\sin(t\zeta)\sin(w\xi)\,dt\,dw, \tag{18}$$

$$\mathfrak{g}(\zeta,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\theta(t,w)\cos(t\zeta)\cos(w\xi)\,dt\,dw, \tag{19}$$

$$\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\theta_n(t,w)\cos(t\zeta)\cos(w\xi)\,dt\,dw \tag{20}$$

provided the integrals exist.

Let $\mathscr{H}^2_1(\zeta,\xi)$ or $\mathscr{H}^2_1$ be the space of all $H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}$ transforms of smooth functions $\mathfrak{h}(\zeta,\xi)$ such that for some $f(t,w)\in\mathscr{T}^2$ (18) satisfies. By $\mathscr{H}^2_2(\zeta,\xi)$ or $\mathscr{H}^2_2$ denote the set of transforms of $\mathfrak{g}(\zeta,\xi)$ such that $\theta(t,w)\in\mathscr{D}^2$ and (19) satisfies and, similarly, $\Delta^2_3(\zeta,\xi)$ or Δ^2_3 denote the set of all sequences $\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi)$ such that for some $(\theta_n(t,w))\in\Delta^2$ where (20) holds.

Remark 1. Let $(\theta_n(t,w))\in\Delta^2$. Then we have

$$\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\theta_n(t,w)\cos(t\zeta)\cos(w\xi)\,dt\,dw\to 1\text{ as }n\to\infty. \tag{21}$$

This remark is a straightforward result of (20). Now we are generating the Boehmian space $\mathscr{B}\left(\mathscr{H}^2_1,\mathscr{H}^2_2,\Delta^2_3,\times^2\right)$.

To this aim, we define an operation between $\mathscr{H}^2_1$ and $\mathscr{H}^2_2$ as

$$\mathfrak{h}(\zeta,\xi)\times^2\mathfrak{g}(\zeta,\xi)=\mathfrak{h}(\zeta,\xi)\mathfrak{g}(\zeta,\xi). \tag{22}$$

We proceed to establish the axioms of the first construction.

Theorem 4. *Let $\mathfrak{h}(\zeta,\xi)\in\mathscr{H}^2_1(\zeta,\xi)$ and $\mathfrak{g}(\zeta,\xi)\in\mathscr{H}^2_2(\zeta,\xi)$. Then we have $\mathfrak{h}(\zeta,\xi)\times^2\mathfrak{g}(\zeta,\xi)\in\mathscr{H}^2_1(\zeta,\xi)$.*

$\lhd$ Let $\mathfrak{h}(\zeta,\xi)\in\mathscr{H}^2_1(\zeta,\xi)$, $\mathfrak{g}(\zeta,\xi)\in\mathscr{H}^2_2(\zeta,\xi)$. Then $\mathfrak{h}(\zeta,\xi)\mathfrak{g}(\zeta,\xi)=H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}\left(f*^2\theta\right)(\zeta,\xi)$ for every $f(t,w)\in\mathscr{T}^2$ and $\theta(t,w)\in\mathscr{D}^2$. But since $f*^2\theta\in\mathscr{T}^2$ it follows that $\mathfrak{h}(\zeta,\xi)\times^2\mathfrak{g}(\zeta,\xi)\in\mathscr{H}^2_1$. This completes the proof of the theorem. $\rhd$

Theorem 5. *Let $\mathfrak{h}_1(\zeta,\xi), \mathfrak{h}_2(\zeta,\xi) \in \mathscr{H}_1^2(\zeta,\xi)$. Then for all $\mathfrak{g}(\zeta,\xi) \in \mathscr{H}_2^2(\zeta,\xi)$ we have $(\mathfrak{h}_1(\zeta,\xi)+\mathfrak{h}_2(\zeta,\xi)) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi) = \mathfrak{h}_1(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi) + \mathfrak{h}_2(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi)$.*

◁ Let $f_1(t,w), f_2(t,w) \in \mathscr{T}^2$ and $\theta(\zeta,\xi) \in \mathscr{D}^2$ be such that

$$\mathfrak{h}_1(\zeta,\xi) = 4\beta\eta \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_1(t,w)\sin(t\zeta)\sin(w\xi)\,dt\,dw,$$

$$\mathfrak{h}_2(\zeta,\xi) = 4\beta\eta \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_2(t,w)\sin(t\zeta)\sin(w\xi)\,dt\,dw$$

and

$$\mathfrak{g}(\zeta,\xi) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \theta(t,w)\cos(t\zeta)\cos(w\xi)\,dt\,dw;$$

then using the definition of $\times^2$

$$(\mathfrak{h}_1(\zeta,\xi)+\mathfrak{h}_2(\zeta,\xi)) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi) = (\mathfrak{h}_1(\zeta,\xi)+\mathfrak{h}_2(\zeta,\xi))\,\mathfrak{g}(\zeta,\xi)$$
$$= \mathfrak{h}_1(\zeta,\xi)\mathfrak{g}(\zeta,\xi) + \mathfrak{h}_2(\zeta,\xi)\mathfrak{g}(\zeta,\xi) = \mathfrak{h}_1(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi) + \mathfrak{h}_2(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi).$$

This completes the proof. ▷

Theorem 6. *Let$\mathfrak{h}_1(\zeta,\xi), \mathfrak{h}_2(\zeta,\xi) \in \mathscr{H}_1^2(\zeta,\xi)$. Then for all $\mathfrak{g}(\zeta,\xi) \in \mathscr{H}_2^2(\zeta,\xi)$ we have $(\alpha^*\mathfrak{h}_1(\zeta,\xi)) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi) = \alpha^*\big(\mathfrak{h}_1(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi)\big)$.*

◁ Proof of this theorem is analogous to the previous proof. Details are omitted. ▷

Theorem 7. *Let $\mathfrak{h}_n(\zeta,\xi) \to \mathfrak{h}(\zeta,\xi)$ in $\mathscr{H}_1^2(\zeta,\xi)$ and $\mathfrak{g}(\zeta,\xi) \in \mathscr{H}_2^2(\zeta,\xi)$; then $\mathfrak{h}_n(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi) \to \mathfrak{h}(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi)$.*

◁ Let $\mathfrak{h}_n(\zeta,\xi), \mathfrak{h}(\zeta,\xi) \in \mathscr{H}_1^2(\zeta,\xi)$ and $\mathfrak{g}(\zeta,\xi) \in \mathscr{H}_2^2(\zeta,\xi)$ satisfy for some $f_n, f \in \mathscr{T}^2$ and $\theta \in \mathscr{D}^2$. Then ofcourse $f_n \to f$ as $n \to \infty$. Therefore,

$$(\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h})(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi) = (\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h})(\zeta,\xi)\mathfrak{g}(\zeta,\xi)$$
$$= \mathfrak{g}(\zeta,\xi)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (f_n - f)(t,w)\sin(t\zeta)\sin(w\xi)\,dt\,dw \to\ 0 \text{ as } \ n \to \infty.$$

Hence, $(\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h})(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi) \to 0$ as $n \to \infty$.

From which we write,

$$(\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h})(\zeta,\xi)\mathfrak{g}(\zeta,\xi) = \mathfrak{h}_n(\zeta,\xi)\mathfrak{g}(\zeta,\xi) - \mathfrak{h}(\zeta,\xi)\mathfrak{g}(\zeta,\xi) \to 0 \ \text{ as } \ n \to \infty.$$

Thus

$$\mathfrak{h}_n(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi) \to \mathfrak{h}(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{g}(\zeta,\xi) \ \text{ as } \ n \to \infty.$$

This completes the proof of the theorem. ▷

Theorem 8. *Let $\mathfrak{h}_n(\zeta,\xi) \to \mathfrak{h}(\zeta,\xi)$ and $(\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi)) \in \Delta_3^2$. Then $\mathfrak{h}_n(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{e}_n(\zeta,\xi) \to \mathfrak{h}(\zeta,\xi)$.*

◁ Let $\mathfrak{h}_n(\zeta,\xi), \mathfrak{h}(\zeta,\xi) \in \mathscr{H}_1^2(\zeta,\xi)$ and $\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi) \in \Delta_3^2$ satisfy for some $f_n, f \in \mathscr{T}^2$ and $(\theta_n) \in \Delta^2$. Then employing Remark 1 gives

$$\mathfrak{h}_n(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{e}_n(\zeta,\xi) = \mathfrak{h}_n(\zeta,\xi)\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi) \to \mathfrak{h}_n(\zeta,\xi) \to \mathfrak{h}(\zeta,\xi) \ \text{ as } \ n \to \infty.$$

This completes the proof of the Theorem. ▷

Theorem 9. *Let $(\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi)), (\mathfrak{r}_n(\zeta,\xi)) \in \Delta_3^2$. Then $\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{r}_n(\zeta,\xi) \in \Delta_3^2$.*

$\lhd$ By (22) we have

$$\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi) \times^2 \mathfrak{r}_n(\zeta,\xi) = \mathfrak{e}_n(\zeta,\xi)\mathfrak{r}_n(\zeta,\xi) = j^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}\left(\theta_n *^2 \epsilon_n\right).$$

Hence by the fact that $\theta_n *^2 \epsilon_n \in \Delta^2$ it follows that $H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}\left(\theta_n *^2 \epsilon_n\right) \in \Delta^2_3$. Hence the Theorem 9 is proved. $\rhd$

The Boehmian space $\mathscr{B}\left(\mathscr{H}^2_1, \mathscr{H}^2_2, \Delta^2_3, \times^2\right)$ is therefore constructed.

A typical element in $\mathscr{B}\left(\mathscr{H}^2_1, \mathscr{H}^2_2, \Delta^2_3, \times^2\right)$ is of the form $\left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right]$. Addition, multiplication by a scalar, convolution and differentation in the space $\mathscr{B}\left(\mathscr{H}^2_1, \mathscr{H}^2_2, \Delta^2_3, \times^2\right)$ are defined as

$$\left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right] + \left[\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{r}_n}\right] = \left[\frac{\mathfrak{h}_n \times^2 \mathfrak{r}_n + \mathfrak{d}_n \times^2 \mathfrak{e}_n}{\mathfrak{e}_n \times^2 \mathfrak{r}_n}\right]$$

$$\kappa \left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right] = \left[\frac{\kappa\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right], \quad \kappa \text{ being complex number.}$$

$$\left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right] \times^2 \left[\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{r}_n}\right] = \left[\frac{\mathfrak{h}_n \times^2 \mathfrak{d}_n}{\mathfrak{e}_n \times^2 \mathfrak{r}_n}\right] \text{ and } \mathscr{D}^\alpha \left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right] = \left[\frac{\mathscr{D}^\alpha\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right].$$

Δ and δ-convergence are defined as usual for Boehmian spaces.

4. $H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}$ of generalized Boehmians

From previous analysis given in this article we define the $H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}$ transform of $\left[\frac{f_n}{\theta_n}\right]$ as

$$\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}\left[\frac{f_n}{\theta_n}\right] = \left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right], \tag{23}$$

where $\mathfrak{h}_n$, $\mathfrak{e}_n$ has the representation of (18) and (20).

It is clear that $\left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right] \in \mathscr{B}\left(\mathscr{H}^2_1, \mathscr{H}^2_2, \Delta^2_3, \times^2\right)$. Let $\left[\frac{f_n}{\theta_n}\right] = \left[\frac{g_n}{\epsilon_n}\right]$, then $f_n *^2 \epsilon_m = g_m *^2 \theta_n$. Applying $H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}$ transform and using the convolution theorem yield

$$\mathfrak{h}_n \times^2 \mathfrak{r}_m = \mathfrak{d}_m \times^2 \mathfrak{e}_n,$$

where $\mathfrak{h}_n$, $\mathfrak{r}_m$, $\mathfrak{d}_m$, $\mathfrak{e}_n$ have similar representations as in (18) and (20). Therefore $\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n} \sim \frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{r}_n}$. Hence $\left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right] = \left[\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{r}_n}\right]$. Therefore, we have $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}\left[\frac{f_n}{\theta_n}\right] = \widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}\left[\frac{g_n}{\epsilon_n}\right]$. Therefore (23) is well-defined.

Following two theorem are straightforward proofs. We prefer we omit details.

Theorem 10. $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} : \mathscr{B}\left(\mathscr{T}^2, \mathscr{D}^2, \Delta^2, *^2\right) \to \mathscr{B}\left(\mathscr{H}^2_1, \mathscr{H}^2_2, \Delta^2_3, \times^2\right)$ *is linear.*

Theorem 11. $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} : \mathscr{B}\left(\mathscr{T}^2, \mathscr{D}^2, \Delta^2, *^2\right) \to \mathscr{B}\left(\mathscr{H}^2_1, \mathscr{H}^2_2, \Delta^2_3, \times^2\right)$ *is one-one.*

Theorem 12. $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}} : \mathscr{B}\left(\mathscr{T}^2, \mathscr{D}^2, \Delta^2, *^2\right) \to \mathscr{B}\left(\mathscr{H}^2_1, \mathscr{H}^2_2, \Delta^2_3, \times^2\right)$ *is continuous with respect to δ convergence.*

$\lhd$ Let $\beta_n \to \beta$ in $\mathscr{B}\left(\mathscr{T}^2, \mathscr{D}^2, \Delta^2, *^2\right)$ as $n \to \infty$. We show that $\widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}\beta_n \to \widehat{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}\beta$ in $\mathscr{B}\left(\mathscr{H}^2_1, \mathscr{H}^2_2, \Delta^2_3, \times^2\right)$ as $n \to \infty$. Let $\beta_n, \beta \in \mathscr{B}\left(\mathscr{T}^2, \mathscr{D}^2, \Delta^2, *^2\right)$, then we can find $f_{n,k}, f_k \in \mathscr{T}^2$ such that $\beta_n = \left[\frac{f_{n,k}}{\theta_k}\right]$ and $\beta = \left[\frac{f_k}{\theta_k}\right]$ and $f_{n,k} \to f_k$ as $n \to \infty$, $\forall\, k \in \mathscr{N}$.

Therefore $\overbrace{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}\left[\frac{f_{n,k}}{\theta_k}\right]=\left[\frac{\mathfrak{h}_{n,k}}{\mathfrak{e}_k}\right]$ where $\mathfrak{h}_{n,k}$ and $\mathfrak{e}_k$ are the the corresponding integral equations of $f_{n,k}$ and θ_k, see (18) and (20). Hence, we have

$$\overbrace{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}\left[\frac{f_{n,k}}{\theta_k}\right]=\left[\frac{\mathfrak{h}_{n,k}}{\mathfrak{e}_k}\right]\to\left[\frac{\mathfrak{h}_k}{\mathfrak{e}_k}\right]=\beta.$$

The proof is completed. $\rhd$

Theorem 13. $\overbrace{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}:\mathscr{B}\left(\mathscr{T}^2,\mathscr{D}^2,\Delta^2,*^2\right)\to\mathscr{B}\left(\mathscr{H}_1^2,\mathscr{H}_2^2,\Delta_3^2,\times^2\right)$ *is continuous with respect to* Δ *convergence.*

$\lhd$ Let $\beta_n\overset{\Delta}{\to}\beta$ in $\mathscr{B}\left(\mathscr{T}^2,\mathscr{D}^2,\Delta^2,*^2\right)$, as $n\to\infty$. Then there is $f_n\in\mathscr{T}^2$ and $(\theta_k(\zeta,\xi))\in\Delta^2$ such that

$$(\beta_n-\beta)\times^2\theta_n=\left[\frac{f_n\times^2\theta_k}{\theta_k}\right]$$

and $f_n\to 0$ as $n\to\infty$. Hence

$$\overbrace{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}((\beta_n-\beta)\times^2\theta_k)=\overbrace{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}\left[\frac{f_n\times^2\theta_k}{\theta_k}\right]=\left[\frac{\mathfrak{h}_n\times^2\mathfrak{e}_k}{\mathfrak{e}_k}\right]\simeq\mathfrak{h}_n\to 0\ \text{ as }\ n\to\infty.$$

Hence the theorem is completely proved. $\rhd$

5. The inverse problem

Let $\left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_k}\right]\in\mathscr{B}\left(\mathscr{H}_1^2,\mathscr{H}_2^2,\Delta_3^2,\times^2\right)$. Then the inverse transform $\overbrace{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}^{-1}$ of $\overbrace{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}$ can be defined by

$$\overbrace{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}^{-1}\left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_k}\right]=\left[\frac{f_n}{\theta_n}\right]$$

in the space $\mathscr{B}\left(\mathscr{T}^2,\mathscr{D}^2,\Delta^2,*^2\right)$.

Theorem 14. $\overbrace{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}^{-1}:\mathscr{B}\left(\mathscr{H}_1^2,\mathscr{H}_2^2,\Delta_3^2,\times^2\right)\to\mathscr{B}\left(\mathscr{T}^2,\mathscr{D}^2,\Delta^2,*^2\right)$ *is a well-defined and linear.*

$\lhd$ Let $\left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right]=\left[\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{r}_n}\right]\in\mathscr{B}\left(\mathscr{H}_1^2,\mathscr{H}_2^2,\Delta_3^2,\times^2\right)$. Then it follows that $\mathfrak{h}_n(\zeta,\xi)\times^2\mathfrak{r}_m(\zeta,\xi)=\mathfrak{d}_m(\zeta,\xi)\times^2\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi)$, where

$$\mathfrak{h}_n(\zeta,\xi)=4\beta\eta\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}f_n(t,w)\sin(t\zeta)\sin(w\xi)\,dt\,dw,$$

$$\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\theta_n(t,w)\cos(t\zeta)\cos(w\xi)\,dt\,dw,$$

$$\mathfrak{d}_m(\zeta,\xi)=4\beta\eta\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}g_m(t,w)\sin(t\zeta)\sin(w\xi)\,dt\,dw,$$

and

$$\mathfrak{r}_n(\zeta,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\epsilon_n(t,w)\cos(t\zeta)\cos(w\xi)\,dt\,dw,\quad \epsilon_n,\theta_n\in\Delta^2,\quad f_n,g_n\in\mathscr{T}^2.$$

The meaning of $\times^2$ then leads to

$$\mathfrak{h}_n(\zeta,\xi)\mathfrak{r}_m(\zeta,\xi) = \mathfrak{d}_m(\zeta,\xi)\mathfrak{e}_n(\zeta,\xi).$$

Therefore, (22) gives

$$H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}\left(f_n *^2 \theta_m\right)(\zeta,\xi) = H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}\left(g_m *^2 \epsilon_n\right)(\zeta,\xi). \tag{24}$$

Since $H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}$ is one-to-one, (24) yields $f_n *^2 \theta_m = g_m *^2 \epsilon_n$. Thus $\frac{f_n}{\theta_n} \sim \frac{g_n}{\epsilon_n}$, which then confirms $\left[\frac{f_n}{\theta_n}\right] = \left[\frac{g_n}{\epsilon_n}\right]$. This establishes that our transform is well-defined.

To establish linearity, we assume there are $\alpha_1^*, \alpha_2^* \in \mathbb{C}$, field of complex numbers, $\left[\frac{f_n}{\theta_n}\right], \left[\frac{g_n}{\epsilon_n}\right] \in \mathscr{B}\left(\mathscr{T}^2, \mathscr{D}^2, \Delta^2, *^2\right)$, then

$$\overbrace{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}^{-1}\left(\left[\frac{\alpha_1^* f_n}{\theta_n}\right] + \left[\frac{\alpha_2^* g_n}{\epsilon_n}\right]\right) = \overbrace{H^{\rho,\eta}_{\alpha,\beta}}^{-1}\left(\left[\frac{\alpha_1^* f_n *^2 \epsilon_n + \alpha_2^* g_n *^2 \theta_n}{\theta_n *^2 \epsilon_n}\right]\right)$$
$$= \left[\frac{\alpha_1^*\mathfrak{h}_n \times^2 \mathfrak{r}_n + \alpha_2^*\mathfrak{d}_n \times^2 \mathfrak{e}_n}{\mathfrak{e}_n \times^2 \mathfrak{r}_n}\right] = \left[\frac{\alpha_1^*\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right] + \left[\frac{\alpha_2^*\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{r}_n}\right] = \alpha_1^*\left[\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{e}_n}\right] + \alpha_2^*\left[\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{r}_n}\right].$$

This completes the proof of the theorem. ▷

The author would like to express many thanks to the anonymous referee for his/her corrections and comments on this manuscript.

References

1. *Al-Omari S. K. Q., Loonker D., Banerji P. K., Kalla S. L.* Fourier sine (cosine) transform for ultradistributions and their extensions to tempered and ultraBoehmian spaces // Integr. Transf. Spec. Funct.—2008.—Vol. 19, № 6.—P. 453–462.
2. *Al-Omari S. K. Q., Kilicman A.* On diffraction Fresnel transforms for Boehmians // Abstr. Appl. Anal.—2011.—Vol. 2011.—11 pages.—(Article ID 712746).
3. *Al-Omari S. K. Q.* Hartley transforms on certain space of generalized functions // Georgian Math. J.—2013.—Vol. 20, № 3.—P. 415–426.
4. *Al-Omari S. K. Q., Kilicman A.* Note on Boehmians for class of optical Fresnel wavelet transforms // J. Funct. Space Appl.—2012.—Vol. 2012.—P. 1–13.—(Article ID 405368; DOI:10.1155/2012/405368).
5. *Al-Omari S. K. Q., Kilicman A.* On generalized Hartley–Hilbert and Fourier–Hilbert transforms // Adv. Diff. Equ.—2012.—Vol. 2012, № 232.—P. 1–12.—(DOI:10.1186/1687-1847-2012-232).
6. *Al-Omari S. K. Q.* On a generalized Meijer–Laplace transforms of Fox function type kernels and their extension to a class of Boehmians // Georgian Math. J.—2015.—(In Press).
7. *Al-Omari S. K. Q.* Some characteristics of S transforms in a class of rapidly decreasing Boehmians // J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.—2014.—Vol. 5, iss. 4.—P. 527–537.—(DOI:10.1007/s11868-014-0102-8).
8. *Boehme T. K.* The support of Mikusinski operators // Tran. Amer. Math. Soc.—1973.—Vol. 176.—P. 319–334.
9. *Banerji P. K., Al-Omari S. K. Q., Debnath L.* Tempered distributional Fourier sine (cosine) transform // Integr. Transf. Spec. Funct.—2006.—Vol. 17, № 11.—P. 759–768.
10. *Millane R. P.* Analytic properties of the Hartley transform and their Applications // Proc. IEEE.—1994.—Vol. 82, № 3.—P. 413–428.
11. *Nemzer D.* S-asymptotic properties of Boehmians // Integr. Transf. Spec. Funct.—2010.—Vol. 21, № 7.—P. 503–513.
12. *Nemzer D.* A note on the convergence of a series in the space of Boehmians // Bull. Pure Appl. Math.—2008.—Vol. 2.—P. 63–69.
13. *Pathak R. S.* Integral transforms of generalized functions and their applications.—Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1997.
14. *Mikusinski P.* Convergence of Boehmians // Japanese J. Math.—1983.—Vol. 9, № 1.—P. 159–179.
15. *Sundararajan N. and Srinivas Y.* Fourier–Hilbert versus Hartley–Hilbert transforms with some geophysical applications // J. Appl. Geophys.—2010.—Vol. 71, № 4.—P. 157–161.

Received December 16, 2015.

Al-Omari Shrideh Khalaf, *Prof.*
Al-Balqa Applied University,
Faculty of Engineering Technology,
Department of Physics and Applied Sciences
Amman, 11134, JORDAN

University of Dammam,
Faculty of Science (Girls),
Department of Mathematics
Dammam 31113, SAUDI ARABIA
E-mail: s.k.q.alomari@fet.edu.jo

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И ХАРТЛИ ДЛЯ ОДНОГО ФАКТОР-КЛАССА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Эль-Омари Ш. Х.

В работе рассматривается некоторый класс распределений и строятся два пространства Боэхмианов для одного класса интегральных операторов. Устанавливается конволюционная теорема относительно пространств Боэхмианов. Возникающий при этом интегральный оператор корректно определен, линеен и однозначно задается соответствующим Боэхмианом. В работе также подробно рассматривается некоторая обратная задача.

Ключевые слова: интегральное преобразование, преобразование Хартли, преобразование Фурье, фактор пространство.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 15–22

УДК **517.392**

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА

З. В. Бесаева, Ш. С. Хубежты

Предлагается новый метод приближенного решения сингулярных интегральных уравнений с применением рядов Чебышева. Коэффициенты разложения находятся с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. В отдельных условиях дается обоснование вычислительной схемы и оценки погрешности. Приводятся результаты расчетов для некоторых тестовых задач.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, ряд Чебышева, аппроксимация интеграла, оценка погрешности, ортогональный многочлен.

1. Введение

В работе рассматриваются сингулярные интегральные уравнения первого рода на отрезке с определенной весовой функцией. Сингулярные уравнения такого типа имеют широкое применение в задачах теории трещин, теории упругости, электродинамики, аэродинамики, что подчеркивает важность разработки численных методов их решения.

Наиболее ранней работой в этом направлении является работа М. А. Лаврентьева [1], в которой одна практическая задача гидродинамики сводится к сингулярному интегральному уравнению и обосновывается определенный численный метод решения таких уравнений. Про эту работу Н. И. Мусхелишвили в своей книге [2, с. 352] пишет: «Дальнейшая разработка этого и аналогичных методов приближенного решения сингулярных интегральных уравнений является, как мне кажется, одной из важнейших очередных задач теории этих уравнений». После этого рядом исследователей были разработаны различные методы численного решения сингулярных интегральных уравнений, одним из которых является «метод дискретных особенностей», предложенный С. М. Белоцерковским и обоснованный его учеником К. И. Лифановым [3–4].

Указанный метод до сих пор является одним из актуальных методов в теории приближений. Отметим, что этот метод дает приближенные значения решения в конечном числе точек. Во многих случаях требуется получить аналитическое приближение решения, годное на всем отрезке. К этому типу методов принадлежат методы, связанные с многочленами Чебышева.

В настоящей работе впервые предлагается метод с применением рядов Чебышева [5, с. 322] для приближенного решения сингулярных уравнений на отрезке интегрировния. Суть метода заключается в том, что задача решения сингулярного интегрального уравнения, после замены плотности рядом Чебышева, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов данного решения. После нахождения коэффициентов разложения $C_1, C_2, \ldots, C_n$, приближенное решение получается в аналитическом виде, что позволяет найти значения неизвестной функции во всех точках отрезка $[-1; 1]$.

2. Ряды Чебышева

Рассмотрим функцию f, определенную на отрезке $[-1,1]$ и принимающую действительные либо комплексные значения. Предположим, что на этом отрезке ее можно разложить в ряд по многочленам Чебышева первого рода, т. е. существуют постоянные $a_0, a_1, \ldots$ такие, что

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty}{}' a_l\, T_l(x). \tag{1}$$

Известно, что многочлены Чебышева $T_l(x) = \cos(\mathrm{larccosx})$ $(l = 0, 1, \ldots)$ ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ и

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\, T_k^2(x)\, dx = \begin{cases} \pi, & k = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & k > 0. \end{cases}$$

Умножая обе части равенства (1) на $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_k(x)$ и интегрируя по отрезку $[-1,1]$, получаем следующие формулы для коэффициентов a_k ряда (1):

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} f(x)\, T_k(x)\, dx, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Отсюда с помощью подстановки $x = \cos t$ получаем равносильную, и часто более выгодную формулу

$$a_k[f] = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(\cos t) \cos kt\, dt, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Величину $a_k[f]$ назовем k-*м коэффициентом Чебышева* функции f, а ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}{}' a_k[f]\, T_k(x)$$

— *рядом Чебышева* функции f. Здесь символ $\sum'$ определяется формулой

$$\sum_{j=l}^{m}{}' a_j = \frac{1}{2} a_l + a_{l+1} + \ldots + a_m, \quad m \geqslant l.$$

3. Вычислительная схема для решения сингулярного интегрального уравнения

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_0(t)}{t-x}\, dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} k(x,t)\, \varphi_0(t)\, dt = f(x), \tag{2}$$

где $k(x,t), f(x) \in H_r(\alpha)$ ($r \geqslant 1, 0 < \alpha \leqslant 1$) — заданные функции ($H_r(\alpha)$ — класс функций, имеющих непрерывные производные до порядка $r-1$, а производная порядка r удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α). Индексу $\kappa = 1$ уравнения (2) соответствует решение вида

$$\varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{3_0}$$

где $\varphi(t)$ является достаточно гладкой функцией на отрезке $[-1,1]$. Тогда уравнение (2) примет следующий вид:

$$K\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{3}$$

Заменим неизвестную функцию $\varphi(t)$ ее разложением в ряд Чебышева:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,T_{k-1}(t), \tag{4}$$

где C_k — неопределенные коэффициенты. Подставляя полученное разложение $\varphi(t)$ в уравнение (3), получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{t-x} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k\,T_{k-1}(t)\right)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{k(x,t)}{\sqrt{1-t^2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k T_{k-1}(t)\right)dt = f(x)$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{T_{k-1}(t)}{t-x}\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{k(x,t)}{\sqrt{1-t^2}}\,T_{k-1}(t)\,dt = f(x). \tag{5}$$

Используя формулу обращения (см. [3, с. 39])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{T_{k-1}(t)}{t-x}\,dt = \begin{cases} 0, & k = 1, \\ U_{k-2}(x), & k \neq 1 \end{cases} \tag{6}$$

и квадратурную формулу Мелера (см. [6, с. 132])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,f(t)\,dt \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f\left(\cos\frac{2k-1}{2m}\pi\right), \tag{7}$$

где $U_{k-2}(x)$ — многочлен Чебышева 2-го рода

$$U_{k-2}(x) = \frac{\sin((k-1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

получаем
$$\sum_{k=2}^{\infty} C_k\, U_{k-2}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} k(x,\overline{x_j})\, T_{k-1}(\overline{x_j}) = f(x), \tag{8}$$
где
$$\overline{x_j} = \cos\frac{2j-1}{2m}\pi, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Уравнение (8) имеет не единственное решение [2, с. 167, 280], это решение зависит от произвольного параметра (см. [3, с. 73], [4, с. 342]). Чтобы найти единственное решение уравнения (8) вводится условие (см. [2, с. 73], [4, с. 342], [7, с. 164])
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = C_0, \tag{9}$$
где C_0 — произвольная постоянная, определяющая $\varphi(t)$. Таким образом, единственное решение $\varphi(t)$ зависит от C_0. Подставляя в (9) вместо $\varphi(x)$ его представление (4), будем иметь
$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_{k-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = C_0. \tag{10}$$
Уравнения (8) и (10) будем рассматривать как систему. Далее в (8) придавая x значения $x_i = -1 + ih$, $h = \frac{2}{n+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, при $m = n$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$
$$\begin{cases} \sum\limits_{k=2}^{\infty} C_k\, U_{k-2}(x_i) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} k(x_i,\overline{x_j})\, T_{k-1}(\overline{x_j}) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} T_{k-1}(\overline{x_j}) = C_0. \end{cases} \tag{11}$$

В дальнейшем будем рассматривать приближенное значение функции $\varphi(t)$ в виде
$$\varphi(t) \approx \sum_{k=1}^{n} C_k\, T_{k-1}(t).$$
Тогда вместо (11) будем иметь систему линейных алгебраических уравнений порядка $n \times n$:
$$\begin{cases} \sum\limits_{k=2}^{n} C_k U_{k-2}(x_i) + \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \cdot \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} k(x_i,\overline{x_j})\, T_{k-1}(\overline{x_j}) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} T_{k-1}(\overline{x_j}) = C_0. \end{cases} \tag{12}$$

Решение системы (12) относительно неизвестных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ дает нам приближенное решение уравнения (2) в виде
$$\varphi_0(t) \approx \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} C_k\, T_{k-1}(t).$$

4. Обоснование вычислительной схемы и оценка погрешности

Пусть X — пространство функций $\varphi(t) \in H_r(\alpha)$. Норма в пространстве X определяется формулой

$$\|\varphi\| = \|\varphi(t)\|_{C[-1;1]} + \sup_{\substack{t_1 \neq t_2; \\ 0<\beta<\alpha}} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Через X_n обозначим пространство функций многочленов $\varphi_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ с нормой

$$\|\varphi_n(t)\| = \|\varphi_n(t)\|_{C_{[-1;1]}} + \sup_{\substack{t_1 \neq t_2; \\ 0<\beta<\alpha}} \frac{|\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Будем считать, что оператор K действует из пространства X в X и имеет ограниченный обратный оператор K^{-1}. Обозначим через P_n оператор, проектирующий пространство X на пространство X_n по формуле

$$P_n[\varphi(t)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_n(x)}{(t - x_k) T_n'(x_k)} \varphi(x_k).$$

Известно [9, с. 342], что для константы Лебега справедлива оценка $\|P_n\| \leqslant C \ln n$. Приближенное решение уравнения (3) будем искать в виде функции

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \, T_{k-1}(t).$$

Коэффициенты C_k определяются из системы линейных алгебраических уравнений, представленной в операторной форме уравнением

$$P_n\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot P_n^t\left[k(x,t)\varphi_n(t)\right] dt\right] = P_n[f(x)], \qquad (13)$$

где $P_n[\psi(t)]$ — оператор проектирования на множестве интерполяционных полиномов степени n по узлам нулей полиномов Чебышева первого рода. Воспользовавшись формулами (6) и (7) уравнение (13) можно переписать в виде

$$\mathbf{K}_n \varphi_n \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi_n(t)}{t-x}\,dt + P_n^x\left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot P_n^t[k(x,t)]\,\varphi_n(t)\,dt\right) = P_n[f(x)]. \quad (14)$$

Применим метод коллокации к уравнению (3). В операторной форме он имеет вид

$$\overline{\mathbf{K}}_n \varphi_n \equiv \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi_n(t)}{t-x}\,dt + P_n^x\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,k(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt\right] = P_n^x[f(x)]. \qquad (15)$$

Оценим норму разности

$$\left\|\mathbf{K}\varphi_n - \overline{\mathbf{K}}_n\varphi_n\right\| = \left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,k(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt - P_n^x\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,k(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt\right]\right\|$$

$$\leqslant \left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\big(k(x,t)-k_n^x(x,t)\big)\varphi_n(t)\,dt\right\|$$

$$+\left\|P_n^x\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\big(k(x,t)-k_n^x(x,t)\big)\varphi_n(t)\,dt\right]\right\| = I_1 + I_2,$$

где $k_n^x(x,t)$ — полином наилучшего равномерного приближения степени $n-1$ по переменной x к функции $k(x,t)$. Нетрудно видеть, что

$$I_1 \leqslant Cn^\beta \overline{E}_{n-1}^x(k(x,t))\|\varphi_n\|,$$

$$I_2 \leqslant Cn^\beta \|P_n\|\overline{E}_{n-1}^x(k(x,t))\|\varphi_n\|.$$

И, следовательно,

$$\left\|\mathbf{K}\varphi_n - \overline{\mathbf{K}}_n\varphi_n\right\| \leqslant Cn^\beta\|P_n\|\overline{E}_{n-1}^x(k(x,t))\|\varphi_n\|,$$

где $\overline{E}_n^x(k(x,t)) = \max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1} E_n^x(k(x,t))$.

Из последнего неравенства и общей теории приближенных методов для обратимых операторов [10, с. 517] следует, что при n таких, что $q = Cn^\beta\|K^{-1}\|\|P_n\|\overline{E}_{n-1}^x(k(x,t)) < 1$, существует обратный оператор $\overline{K}_n^{-1}$. Оценим норму разности $\|\overline{K}_n - K_n\|$. Очевидно,

$$\left\|\overline{\mathbf{K}}_n\varphi_n - \mathbf{K}_n\varphi_n\right\| = \left\|P_n^x\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\big(k(x,t)-P_n^t[k(x,t)]\big)\varphi_n(t)\,dt\right]\right\|$$

$$\leqslant Cn^\beta\|P_n\|\overline{E}_n^t(k(x,t))\|\varphi_n\|,$$

где $\overline{E}_n^t = \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} E_n^t[k(x,t)]$. Пусть существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$Cn^\beta\left(\|P_n\|\overline{E}_n^x(k(x,t)) + \|P_n\|\overline{E}_n^t(k(x,t))\right) < 1.$$

Из теоремы Банаха [10, с. 211] следует, что

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leqslant Cn^\beta\left(\|P_n\|\overline{E}_n^x(k(x,t)) + \|P_n\|\overline{E}_n^t(k(x,t))\right),$$

где φ^* и φ_n^* — решения уравнений (3) и (14) соответственно. Таким образом, доказана (см. также [8])

Теорема. *Пусть оператор* $\boldsymbol{K}$ *имеет обратный, функции* $k(x,t)$, $f(t) \in H_r(\alpha)$ *и* n *такой, что*

$$Cn^\beta\left\|K^{-1}\right\|\left(\overline{E}_n^x(k(x,t)) + \overline{E}_n^t(k(x,t))\right)\ln n < 1.$$

Тогда система (13) *имеет единственное решение и*

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leqslant O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\right).$$

5. Примеры

Приведем несколько простых примеров, иллюстрирующих изложенный выше метод.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot(x+t)\,\varphi(t)\,dt=x$$

с дополнительным условием

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\varphi(t)\,dt=1,$$

т. е. $C_0=1$. Точным решением этого уравнения является функция $\varphi(t)=1$. В этом случае решая систему (12) при $n=3$ получаем: $C_1=1$, $C_2=1{,}324547\cdot10^{-8}$, $C_3=-3{,}973643\cdot10^{-8}$ и приближенным решением будет функция

$$\varphi_3(t)=C_1T_0(t)+C_2T_1(t)+C_3T_2(t)=1+(1{,}324547\cdot10^{-8})t-(3{,}973643\cdot10^{-8})(2t^2-1)\approx1.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot(x+t)\,\varphi(t)\,dt=\frac{3}{2}$$

с дополнительным условием

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\varphi(t)\,dt=0,$$

т. е. $C_0=0$. Точное решение $\varphi(t)=t$. При $n=3$ получаем: $C_1=0$, $C_2=1$, $C_3=0$, т. е.

$$\varphi_3(t)=T_0(t)\cdot0+T_1(t)\cdot1+T_2(t)\cdot0=t.$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot(x+t)\,\varphi(t)\,dt=\frac{3}{2}x$$

с дополнительным условием

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\varphi(t)\,dt=\frac{1}{2},$$

т. е. $C_0=\frac{1}{2}$. Точное решение $\varphi(t)=t^2$. При $n=3$ получаем: $C_1=0{,}4999999$, $C_2=6{,}698393\cdot10^{-8}$, $C_3=0{,}5000001$, т. е.

$$\begin{aligned}\varphi_3(t)&=C_1\cdot1+C_2\,t+C_3(2t^2-1)\\&=0{,}4999999+(6{,}698393\cdot10^{-8})\,t+0{,}5000001(2t^2-1)\approx t^2.\end{aligned}$$

Вычисления проводились на языке QBasic с использованием метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений. Очевидно, что погрешность для всех $|\varepsilon(t)| \leqslant 0,2 \cdot 10^{-6}$. Эти численные результаты показывают, что выше изложенная вычислительная схема реализуется хорошо.

Литература

1. *Лаврентьев М. А.* О построении потока, обтекающего дугу заданной формы // Тр. ЦАГИ.—1932.—Вып. 118.—С. 3–56.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—511 с.
3. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.—М.: Наука, 1985.—252 с.
4. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: Янус, 1995.—520 с.
5. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.—М.: Наука, 1983.—384 с.
6. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.—М.: Наука, 1967.—500 с.
7. *Хубежты Ш. С.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2011.—232 с.
8. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.—М.: Наука, 1979.—406 с.
9. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функции.—М.–Л.: ГИФМЛ, 1949.—688 с.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—750 с.

Статья поступила 30 марта 2015 г.

Бесаева Зарина Вячеславовна
Юго-Осетинский государственный университет им. А. А. Тибилова,
преподаватель кафедры математики
ЮЖНАЯ ОСЕТИЯ, 100001, г. Цхинвал, Московская, 8
E-mail: besaeva85@mail.ru

Хубежты Шалва Соломонович
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 40;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела математического моделирования
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: shalva57@rambler.ru

APPROXIMATE SOLUTION OF A SINGULAR INTEGRAL EQUATION USING CHEBYSHEV SERIES

Besaeva Z. V., Khubezhty S. S.

A new method of approximate solution of singular integral equations with application of Chebyshev series is offered. Decomposition coefficients are determined by means of the solution of systems of simple algebraic equations. A justification of the constructed computational scheme is given and error estimate is deduced. The method is illustrated by test examples.

Key words: singular integral, Chebyshev series, approximation of integral, error estimation, orthogonal polynomial, coefficient of expansion.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 23–33

УДК **519.725**

ОБ УСЛОВИЯХ КОРРЕКТНОСТИ ДЕКОДЕРА МЯГКИХ РЕШЕНИЙ ТРОИЧНЫХ КОДОВ РИДА — МАЛЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. М. Деундяк, Н. С. Могилевская

Теоретически изучаются условия корректности работы нового декодера мягких решений кодов Рида — Маллера второго порядка над полем $\mathbb{F}_3$, экспериментальное исследование которого показало, что по корректирующей способности он значительно превосходит декодер по минимальному кодовому расстоянию Хемминга. Для дискретного канала передачи данных выделено условие гладкости, при выполнении которого доказано, что исследуемый декодер гарантировано исправляет все ошибки, число которых не превышает допустимое количество ошибок, предусмотренное конструкцией кода.

Ключевые слова: коды Рида — Маллера, мягкий декодер, доказательство корректности декодера.

Введение

Рассмотрим схему прохождения данных в моделях помехоустойчивых каналов связи с дискретным входом: источник сообщений, кодер канала, передатчик, линия связи с шумом, приемник, декодер канала и получатель сообщений [1]. При этом если приемник выдает дискретные данные, то говорят о дискретных каналах и жестких решениях приемника, а если приемник выдает аналоговые сигналы, то говорят о полунепрерывном канале и мягких решениях приемника [2]. В последнем случае имеет смысл использовать декодер мягких решений (ДМР), который обычно дает лучшие результаты по сравнению с декодированием жестких решений; эффективность ДМР основана на том, что в отсутствии демодулятора не накапливаются ошибки квантования. Обычно ДМР обладают большей сложностью [2, с. 357]. К декодерам такого типа относится обладающий значительной корректирующей способностью декодер двоичных кодов Рида — Маллера второго порядка с вещественным входом, предложенный В. М. Сидельниковым и А. С. Першаковым [3], который исследовался в работах [4, 5]. В [6] построен новый ДМР с входными данными из поля комплексных чисел, распространяющий алгоритмы декодирования из [3, 4] на случай кодов Рида — Маллера второго порядка над полем Галуа $\mathbb{F}_3$.

В настоящей работе исследуются условия корректности работы декодера из [6]. Математическая суть этого декодера состоит в том, что для поиска верного кодового слова $\bar{c}$, соответствующего информационному полиному нескольких переменных f, декодер по полученному из канала зашумленному слову $\bar{z}$ строит зашумленные версии кодовых слов для всех производных полинома f, а затем декодирует их в L_1-метрике, пропорциональной метрике Хемминга, и на основе полученных результатов восстанавливает слово $\bar{c}$. Таким образом, поиск по слову $\bar{z}$ ближайшего по метрике Хемминга слова $\bar{c}$

происходит в некотором смысле на основе применения аналога соболевской нормы [7]. Для дискретного канала передачи данных выделено условие гладкости, при выполнении которого сформулирована и доказана теорема о корректности работы этого декодера в ситуации, когда число ошибок в кодовом слове не превосходит половину минимального кодового расстояния.

Отметим, однако, что этот декодер может исправлять часть ошибок и за границей половины минимального кодового расстояния, что подтверждается проведенными экспериментами [8]. Таким образом, естественной областью применения разработанного декодера являются каналы связи низкого качества, используемые для передачи ценных сообщений, какими являются, например, отводные каналы утечки информации [9–11].

1. Коды $RM_3(2,m)$ и разностные операторы

Над полем Галуа $\mathbb{F}_3$ рассмотрим алгебру полиномов от m переменных $\mathbb{F}_3[x_1,\ldots,x_m]$, при этом, не теряя общности, будем полагать, что все мономы имеют вид $ax_1^{\gamma_1}\ldots x_m^{\gamma_m}$, $0\leqslant\gamma_j\leqslant 2$. Для произвольного $\bar\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ из линейного пространства $\mathbb{F}_3^m$ через $\rho(\bar\alpha)$ обозначим сумму координат как сумму натуральных чисел. В пространстве $\mathbb{F}_3^m$ мощности $n=3^m$ зафиксируем линейное упорядочение

$$\{\bar\alpha_1;\ldots;\bar\alpha_n\}\quad(\bar\alpha_{\mathrm{j}}=(\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\ldots,\alpha_{j_m})),\tag{1}$$

по параметру $\rho(\bar\alpha)$ от меньшего к большему, а при одинаковых значениях $\rho(\bar\alpha)$ предполагается лексикографический порядок слева направо от большего к меньшему. Полиномы из $\mathbb{F}_3[x_1,\ldots,x_m]$ будем записывать в каноническом виде

$$f(\bar x)=\sum_{\bar\alpha\in\mathbb{F}_3^m} f_{\bar\alpha}\,\bar x^{\bar\alpha},$$

где $\bar\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $\bar x=(x_1,\ldots,x_m)$, $\bar x^{\bar\alpha}=x_1^{\alpha_1}\ldots x_m^{\alpha_m}$, а порядок слагаемых в сумме соответствует упорядочению (1). Для ненулевого монома $a\bar x^{\bar\alpha}$ степень определяется как $\rho(\bar\alpha)$, а степень $\deg(f)$ полинома f определяется как максимальная степень составляющих его ненулевых мономов. Множество полиномов из $\mathbb{F}_3[x_1,\ldots,x_m]$ степени не выше r обозначим через $\mathbb{F}_3^{(\mathrm{r})}[x_1,\ldots,x_m]$. По аналогии с определением производной в булевом случае (см. [12, с. 89]) определим оператор дифференцирования по направлению $\bar b$ ($\in\mathbb{F}_3^m$)

$$D_{\bar b}:\mathbb{F}_3^{(r)}[x_1,\ldots,x_m]\to\mathbb{F}_3^{(r-1)}[x_1,\ldots,x_m]$$

правилом

$$(D_{\bar b}f)(\bar x)=f_{\bar b}(\bar x)-f(\bar x),\quad f_{\bar b}(\bar x)=f(\bar x+\bar b).\tag{2}$$

Легко видеть, что этот оператор определен корректно и является линейным.

Приведем необходимые сведения о кодах Рида — Маллера над полем $\mathbb{F}_3$:

$$RM_3(r,m)=\Big\{(f(\bar\alpha_1),\ldots,f(\bar\alpha_n)):\ f\in\mathbb{F}_3^{(\mathrm{r})}[x_1,\ldots,x_m]\Big\}$$

(см., например, [13]). Параметр r ($\leqslant m$) называется порядком кода $RM_3(r,m)$. Рассмотрим оператор кодирования $C:\mathbb{F}_3^{(r)}[x_1,\ldots,x_m]\to\mathbb{F}_3^n$, определяемый равенством

$$C(f)=(f(\bar\alpha_1),\ldots,f(\bar\alpha_n)),\quad f\in\mathbb{F}_3^{(\mathrm{r})}[x_1,\ldots,x_m].\tag{3}$$

Полиномы из $\mathbb{F}_3^{(\mathrm{r})}[x_1,\ldots,x_m]$ назовем *информационными*, а вектор, составленный из коэффициентов информационного полинома f, будем называть *информационным вектором* и обозначать через $\bar{f}$. Далее будем рассматривать коды Рида — Маллера порядка 1 и 2. Опишем параметры кода $RM_3(1,m)$: длина кода $n=3^m$, размерность $k=1+m$, минимальное кодовое расстояние $d=2\cdot 3^{m-1}$, число гарантированно исправляемых ошибок $t=3^{m-1}-1$, информационные полиномы кода имеют вид

$$a(\bar{x}) = a_{\bar{0}} + \sum_{\rho(\bar{\alpha})=1} a_{\bar{\alpha}}\bar{x}^{\bar{\alpha}}.$$

Опишем параметры кода $RM_3(2,m)$:

$$n=3^m, \quad k=1+m+C_{m+1}^2, \quad d=3^{m-1}, \quad t=\frac{3^{m-1}-1}{2},$$

информационные полиномы кода имеют вид

$$f(\bar{x}) = a_{\bar{0}} + \sum_{\rho(\bar{\alpha})=1} a_{\bar{\alpha}}\,\bar{x}^{\bar{\alpha}} + \sum_{\rho(\bar{\alpha})=2} a_{\bar{\alpha}}\,\bar{x}^{\bar{\alpha}}.$$

В этом равенстве полином $f(\bar{x})$ является суммой скаляра, линейной формы и квадратичной формы, поэтому далее будем его записать следующим образом:

$$f(\bar{x}) = a_{\bar{0}} + \langle \bar{x}, \bar{a}\rangle + \bar{x}A\bar{x}^T, \tag{4}$$

где $\bar{a}=(f_{10\ldots00}, f_{01\ldots00},\ldots,f_{00\ldots01})$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — знак скалярного произведения в $\mathbb{F}_3^m$ и

$$A=\begin{pmatrix} f_{200..00} & 2f_{110\ldots00} & 2f_{101\ldots00} & & 2f_{100\ldots10} & 2f_{100\ldots01}\\ 2f_{110\ldots00} & f_{020..00} & 2f_{011\ldots00} & \cdots & 2f_{010\ldots10} & 2f_{010\ldots01}\\ 2f_{101\ldots00} & 2f_{011\ldots00} & f_{002..00} & & 2f_{001\ldots10} & 2f_{001\ldots01}\\ & \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 2f_{100\ldots10} & 2f_{010\ldots10} & 2f_{001\ldots10} & \cdots & f_{000..20} & 2f_{000\ldots11}\\ 2f_{100\ldots01} & 2f_{010\ldots01} & 2f_{001\ldots01} & & 2f_{000\ldots11} & f_{000..02}\end{pmatrix}.$$

Отметим, что в поле $\mathbb{F}_3$ выполняется равенство $2^{-1}=2$.

Прямыми выкладками проверяется, что для произвольного полинома f вида (4) и произвольного вектора $\bar{b}$ $(\in \mathbb{F}_3^m)$

$$(D_{\bar{b}}f)(\bar{x}) = 2\bar{x}A\bar{b}^T + f(\bar{b}) - f_{00\ldots00}. \tag{5}$$

Чтобы ввести в пространстве $\mathbb{F}_3^n$ аналог оператора $D_{\bar{b}}$, рассмотрим сначала для $\bar{b}\in\mathbb{F}_3^m$ оператор сдвига $\tau_{\bar{b}}:\mathbb{F}_3^n\to\mathbb{F}_3^n$, определяемый равенством

$$\tau_{\bar{b}}(\bar{a}) = (a_{\bar{\alpha}_1+\bar{b}},\ldots,a_{\bar{\alpha}_n+\bar{b}}), \tag{6}$$

где $\bar{a}=(a_{\bar{\alpha}_1},\ldots,a_{\bar{\alpha}_n})\in\mathbb{F}_3^n$ (см. (1)). Отметим, что $\tau_{\bar{b}}$ является перемешивающим биективным отображением. Разностный оператор $\Delta_{\bar{b}}:\mathbb{F}_3^n\to\mathbb{F}_3^n$ определим формулой

$$\Delta_{\bar{b}}(\bar{a}) = \tau_{\bar{b}}(\bar{a}) - \bar{a}. \tag{7}$$

Далее $\Delta_{\bar{b}}(\bar{a})$ будем называть *производным вектором* вектора $\bar{a}$ по направлению $\bar{b}$.

Установим связь между введенными выше операторами.

Лемма 1. *Пусть* $f \in \mathbb{F}_3^2[x_1, \ldots, x_m]$, $\bar{b} \in \mathbb{F}_3^m$. *Тогда*

$$\tau_{\bar{b}}(C(f)) = C(f_{\bar{b}}), \quad C(D_{\bar{b}} f) = \Delta_{\bar{b}}(C(f)).$$

$\lhd$ Для проверки первого равенства следует использовать (3) и (6), а второе вытекает из линейности оператора кодирования C и равенств (2), (7). $\rhd$

2. Помехоустойчивый канал на кодах $RM_3(2, m)$. Гладкость канала

Рассмотрим стандартную схему прохождения данных над алфавитом $\mathbb{F}_3$ в математической модели помехоустойчивого канала связи, основанного на применении описанных выше $[n, k, d]_3$-кодов RM_3(2,m): источник сообщений (ИС), кодер канала (КК), передатчик, линия связи с шумом (ЛСШ), приемник, декодер канала (ДК) и получатель сообщений (ПС) (см. [6]). Из ИС на вход КК поступают информационные векторы $\bar{m} \in \mathbb{F}_3^k$, на выходе КК формируются кодовые векторы $\bar{c} \in \mathrm{RM}_3(2, \mathrm{m})$ $(\subset \mathbb{F}_3^n)$. Чтобы описать работу передатчика рассмотрим мультипликативную группу $\mathbb{C}_3 = \left\{e^{i\frac{2\pi}{3}j}\right\}_{j=0,1,2} (\subset \mathbb{C})$ корней третьей степени из 1, изоморфизм μ группы $\mathbb{C}_3$ на аддитивную группу поля $\mathbb{F}_3$, который определяется равенством $\mu^{-1}(j) = e^{i\frac{2}{3}\pi j}$, $j \in \mathbb{F}_3$, и соответствующее отображение пространств векторов

$$\mu_n: \ \mathbb{C}_3^n \to \mathbb{F}_3^n. \tag{8}$$

Передатчик на физическом уровне конвертирует элементы поля $\mathbb{F}_3$ в комплексные числа из $\mathbb{C}_3$, например, с помощью модуляции с непрерывной фазой (см. [2, с. 170]), и полученные на выходе КК кодовые векторы $\bar{c} \in \mathrm{RM}_3(2, \mathrm{m})$ $(\subset \mathbb{F}_3^n)$ преобразует в $\bar{z} = \mu_n(\bar{c}) \in \mathbb{C}_3^n$. Эти векторы передатчик отправляет в ЛСШ, где в силу искажений они модифицируются в векторы $\bar{z}' \in \mathbb{C}^n$ с ненулевыми координатами. Векторы $\bar{z'} = (z_1', \ldots, z_n')$ поступают на вход приемника, который в зависимости от настроек может выдавать мягкие или жесткие решения о принятом сигнале.

В случае мягких решений приемник преобразует значение каждого сигнала $z_s' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с помощью фильтрующей функции

$$\zeta: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \Xi_\varepsilon = \left\{\xi \in \mathbb{C}: \ \varepsilon \leqslant |\xi| \leqslant \varepsilon^{-1}\right\}, \tag{9}$$

с параметром $\varepsilon \in (0; 1]$, которая определяется по следующему правилу: если $\varepsilon \leqslant |\xi| \leqslant \varepsilon^{-1}$, то $\zeta(\xi) = \xi$; если $0 < |\xi| < \varepsilon$, то $\zeta(\xi) = \xi|\xi|^{-1}\varepsilon$; если $\varepsilon^{-1} < |\xi|$, то $\zeta(\xi) = \xi|\xi|^{-1}\varepsilon^{-1}$.

В случае жестких решений приемник преобразует вектор $\bar{z}' \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ в вектор $\overline{Y} \in \mathbb{C}_3^n$, используя, например, для каждой координаты принцип решающих областей [2]. В этом случае преобразованный вектор $\overline{Y}$ также принадлежит Ξ_ε^n, так как $\mathbb{C}_3^n \subset \Xi_\varepsilon^n$.

Отметим, что вне зависимости от настроек с выхода приемника вектор $\overline{Y} \in \Xi_\varepsilon^n$ направляется в декодер мягких решений, конструкция которого представлена ниже. Этот декодер вычисляет некоторый информационный вектор $\bar{m}' \in \mathbb{F}_3^k$ и передает его в ПС. Очевидно, что с учетом искажений в ЛСШ вектор $\bar{m}'$ может отличаться от исходного вектора $\bar{m}$, отправленного ИС в канал, в таком случае говорят об ошибке декодирования. В зависимости от настроек приемника можно вести речь о помехоустойчивом полунепрерывном или дискретном канале передачи.

Внутри описанного выше помехоустойчивого канала связи можно выделить внутренний непомехоустойчивый канал, свойства которого влияют на корректирующую способность кодека исходного канала. Действительно, если в описанной выше модели помехоустойчивого канала связи убрать блоки КК и ДК, то в режиме жестких решений приемника реализуется дискретный непомехоустойчивый канал, а в режиме мягких решений приемника — полунепрерывный непомехоустойчивый канал. Тогда схема прохождения данных по каналу следующая: ИС, передатчик, ЛСШ, приемник и ПС. В отсутствии кодека канала предполагается, что ИС формирует векторы, а ПС получает векторы длины n. В случае мягких решений приемника совокупное воздействие передатчика, линии связи и приемника на сообщения назовем оператором внутреннего непомехоустойчивого полунепрерывного канала, который обозначим

$$\mathrm{chn}: \ \mathbb{F}_3^n \to \Xi_\varepsilon^n.$$

В случае жестких решений приемника на вход ПС помехоустойчивого канала поступают элементы из пространства $\mathbb{C}_3^n$. Соответствующий оператор внутреннего непомехоустойчивого дискретного канала обозначим

$$\mathrm{chn}_d: \ \mathbb{F}_3^n \to \mathbb{C}_3^n.$$

Оператор chn_d и породивший его дискретный помехоустойчивый канал будем называть ***гладкими***, если зашумление вектора $C(f)$ $(\in \mathrm{RM}_3(2,\mathrm{m}))$ в канале тесно связано с зашумлением векторов $\mathrm{C}(D_{\bar b}f)$ $(\in \mathrm{RM}_3(1,\mathrm{m}))$ для всех $\bar b \in \mathbb{F}_3^m$, а именно, если

$$\Delta_{\bar b}(\mu_n(\mathrm{chn}_d(C(f)))) = \mu_n(\mathrm{chn_d}(C(D_{\bar b}f))). \tag{10}$$

Разностный оператор $\Delta_{\bar b}$ является дискретной версией оператора дифференцирования $D_{\bar b}$, поэтому условие (10) — это некоторый аналог свойства преобразования касательных расслоений, индуцированных гладким отображением многообразий (см., например, [14, с. 29]).

Лемма 2. *Рассмотрим гладкий дискретный помехоустойчивый канал. Пусть* $f \in \mathbb{F}_3^{(2)}[x_1,\dots,x_m]$, $\bar b \in \mathbb{F}_3^m$,

$$\bar e = \mu_n(\mathrm{chn}_d(C(f))) - C(f), \quad \bar\varepsilon = \mu_n(\mathrm{chn}_d(\mathrm{C}(D_{\bar b}f))) - \mathrm{C}(D_{\bar b}f).$$

Тогда, если вес Хемминга ошибки $\bar e$ *не превосходит число ошибок, гарантированно исправляемых кодом* $\mathrm{RM}_3(2,m)$, *т. е.*

$$\mathrm{wt_h}(\bar e) \leqslant t_{RM_3(2,m)} = \frac{1}{2}\left(3^{m-1}-1\right),$$

то вес Хемминга ошибки $\bar\varepsilon$ *не превосходит число ошибок, гарантированно исправляемых кодом* $\mathrm{RM}_3(1,\mathrm{m})$, *т. е.*

$$\mathrm{wt_h}(\bar\varepsilon) \leqslant t_{RM_3(1,m)} = 3^{m-1}.$$

$\lhd$ Отметим, что значения $t_{RM_3(2,m)}$ и $t_{RM_3(1,m)}$ предъявлены в разделе **1**. Используя условие (10), линейность оператора $\Delta_{\bar b}$ и лемму 1 получаем

$$\begin{aligned}\mu_n(\mathrm{chn_d}(\mathrm{C}(D_{\bar b}f))) &= \Delta_{\bar b}(\mu_n(\mathrm{chn}_d(C(f)))) = \Delta_{\bar b}(C(f)+\bar e)\\ &= \Delta_{\bar b}(C(f)) + \Delta_{\bar b}(\bar e) = C(D_{\bar b}f) + \tau_{\bar b}(\bar e) - \bar e.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar\varepsilon = \mathrm{chn}_d(\mathrm{C}(D_{\bar b}f)) - C(D_{\bar b}f) = \tau_{\bar b}(\bar e) - \bar e.$$

По условию леммы

$$\mathrm{wt_h}(\tau_{\bar b}(\bar e)) = \mathrm{wt_h}(\bar e) \leqslant \frac{1}{2}\left(3^{m-1}-1\right).$$

Следовательно,

$$\mathrm{wt_h}(\bar\varepsilon) = \mathrm{wt_h}(\tau_{\bar b}(\bar e) - \bar e) \leqslant \mathrm{wt_h}(\tau_{\bar b}(\bar e)) + \mathrm{wt_h}(\bar e) \leqslant \left(3^{m-1}-1\right). \ \rhd$$

3. Конструкция ДМР для кодов $RM_3(2,m)$

Опишем в усовершенствованном виде конструкцию ДМР для кодов $RM_3(2,m)$ из работы [6]. Для этого в пространстве Ξ_ε^n по аналогии с (2), (7) введем операторы

$$\xi_{\bar b} : \Xi_\varepsilon^n \to \Xi_\varepsilon^n, \quad \nabla_{\bar b}: \ \Xi_\varepsilon^n \to \Xi_\varepsilon^n,$$

которые действуют по правилам

$$\xi_{\bar b}(\overline{Y}) = \left(y_{\bar b+\bar\alpha_1}, \dots ,y_{\bar b+\bar\alpha_n}\right), \quad \nabla_{\bar b}(\overline{Y}) = \Big(\zeta\left(y_{\bar b+\bar\alpha_1} y_{\bar\alpha_1}^{-1}\right), \dots, \zeta\big(y_{\bar b+\bar\alpha_n} y_{\bar\alpha_n}^{-1}\big)\Big) \tag{11}$$

соответственно, где $\overline{Y} = (y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_n}) \in \Xi_\varepsilon^n$, ζ — фильтрующая функция (9).

Алгоритм. *Вход:* $[n,k,d]_3$-код $RM_3(2,m)$, полученный из канала зашумленный кодовый вектор $\overline{Y} = (Y_{\bar\alpha_1}, \dots, Y_{\bar\alpha_n}) \in \Xi_\varepsilon^n$ $(\subset \mathbb{C}^n)$.

Выход: восстановленный информационный вектор $\bar f$.

Шаг 1. Построим упорядоченный в соответствии с (1) набор векторов из Ξ_ε^n:

$$\Big\{\nabla_{\bar\gamma}(\overline{Y}) = \Big(\zeta\big(Y_{\bar\gamma+\bar\alpha_1} Y_{\bar\alpha_1}^{-1}\big), \dots, \zeta\big(Y_{\bar\gamma+\bar\alpha_n} Y_{\bar\alpha_n}^{-1}\big)\Big)\Big\}_{\bar\gamma\in\mathbb{F}_3^m,\, \bar\gamma\neq\bar 0},$$

где ζ — фильтрующая функция (9), $Y_{\bar\alpha_s}^{-1}$ — число, сопряженное к $Y_{\bar\alpha_s}$.

Шаг 2. Рассмотрим в соответствии с (1) все $\bar\gamma \in \mathbb{F}_3^m$, $\bar\gamma \neq \bar 0$, и для фиксированного $\bar\gamma$ определим

$$\overline{P} = (P_{\bar\alpha_1}, P_{\bar\alpha_2}, \dots, P_{\bar\alpha_n}) = \nabla_{\bar\gamma}(\overline{Y}).$$

Среди всех $\beta(\bar x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_m x_m$ из $\mathbb{F}_3^{(1)}[x_1, \dots, x_m]$ найдем полином, который минимизирует функционал:

$$\Psi(\overline{P}, \bar\beta) = \sum_{s=1}^{n} \left| P_{\bar\alpha_s} - e^{i\frac{2}{3}\pi\beta(\bar\alpha_s)} \right| (\in \mathbb{R}).$$

Минимальное значение функционала для текущего значения $\bar\gamma$ обозначим через $\Psi_{\bar\gamma}$, а вектор, на котором достигается минимум — через $B_{\bar\gamma} = (\beta_1^{\bar\gamma}, \dots, \beta_m^{\bar\gamma})$.

Найдем значения $\Psi_{\bar\gamma}$ и $B_{\bar\gamma}$ для каждого $\gamma \in \mathbb{F}_3^m$, $\bar\gamma \neq \bar 0$. Сформируем упорядоченный в соответствии с (1) набор $\Psi = (\Psi_{\bar\alpha_1} = \bar 0, \Psi_{\bar\alpha_2}, \Psi_{\bar\alpha_3}, \dots, \Psi_{\bar\alpha_n})$ и двумерный массив

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{\bar\alpha_1} \\ \mathrm{B}_{\bar\alpha_2} \\ \dots \\ \mathrm{B}_{\bar\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \beta_1^{\bar\alpha_2} & \dots & \beta_m^{\bar\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^{\bar\alpha_n} & \dots & \beta_m^{\bar\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Пусть $\Theta = B$:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{\bar\alpha_1} \\ \dots \\ \Theta_{\bar\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{1n} & \cdots & \theta_{mn} \end{pmatrix}.$$

При необходимости j-й столбец полученного массива будем обозначать через Θ^j, $j = 1, \dots, m$. Пусть $\mathrm{Maj}\,\{X\}$ — функция, возвращающая элемент, встречающийся наибольшее число раз в множестве X. Обновим строки массива Θ:

$$\Theta_{\bar\alpha_s} = \mathrm{Maj}\left\{\Theta_{\bar\alpha_s+\bar\beta_j} - \Theta_{\bar\beta_j}\right\}_{\bar\beta_j\in\mathbb{F}_3^m,\, \bar\beta_j\neq\bar\alpha_s}.$$

Шаг 4. Восстановим квадратичную часть $\psi(\bar{x})$ искомого информационного полинома $f(\bar{x})$, построив матрицу A (см. (4)).

Шаг 4.1. Для каждого $j \in \{1, \dots, m\}$ на множестве всех линейных однородных полиномов вида

$$\delta(\bar{x}) = \sum_{q=1}^{m} \delta_q x_q, \quad \delta_q \in \mathbb{F}_3, \tag{12}$$

находим минимум функционала, определенного в соответствии с весовой L_1-нормой:

$$T_j(\delta) = \sum_{s=1}^{n} (\Psi_{\bar{\alpha}_s} + 1) \left| e^{i\frac{2\pi}{3}(2\delta(\bar{\alpha}_s) - \theta_{js})} - 1 \right| (\in \mathbb{R}). \tag{13}$$

Минимальное значение функционала для текущего фиксированного значения j обозначим через d_j, а полином, на котором достигается минимум — через

$$\omega^{(j)}(\bar{x}) = \sum_{q=1}^{m} \omega_q^{(j)} x_q.$$

Шаг 4.2. Симметрическую матрицу A построим в виде

$$A = (a_{qj})_{q,j \in [1,\dots,m]},$$

где

$$a_{qj} = \begin{cases} \omega_j^{(q)}, & d_q < d_j, \\ \omega_q^{(j)}, & d_q \geqslant d_j. \end{cases}$$

Сформируем квадратичную часть $\psi(\bar{x})$ искомого полинома по формуле

$$\psi(\bar{x}) = \sum_{q \leqslant j} \varepsilon\, a_{qj}\, x_q\, x_j, \quad \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{F}_3^m, \quad a_{qj} \in \mathbb{F}_3, \quad q, j \in [1, \dots, m],$$

где $\varepsilon = 1$, если $q = j$, и $\varepsilon = 2$, если $q \neq j$.

Шаг 5. Среди множества всех полиномов $\zeta(\bar{x})(\in \mathbb{F}_3^{(1)}[x_1, \dots, x_m])$ найдем полином, который минимизирует значение функционала

$$\Phi(Y, \zeta) = \sum_{s=1}^{n} \left| Y_{\bar{\alpha}_s} - e^{i\frac{2}{3}\pi(\zeta(\bar{\alpha}_s) + \psi(\bar{\alpha}_s))} \right| (\in \mathbb{R}),$$

который обозначим через $\phi(\bar{x}) = c_0 + \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$. Результат декодирования строим в виде полинома $f(\bar{x}) = \psi(\bar{x}) + \phi(\bar{x})$, который определяет искомый информационный вектор $\bar{f}$.

4. Достаточное условие корректности работы ДМР

В следующей теореме показано, что алгоритм мягкого декодирования из раздела 3 корректен в случае применения его в гладком дискретном канале в ситуации, когда число ошибок не превышает половины кодового расстояния на одно кодовое слово. Но, проведенные в [8] эксперименты показали, что в действительности ДМР исправляет также и часть ошибок за пределами половины кодового расстояния. Таким образом, в целом, по корректирующей способности разработанный декодер превосходит декодер по минимальному расстоянию Хемминга. Из этого следует, что естественной областью применения разработанного декодера являются каналы связи низкого качества, которые тем не менее приходится использовать на практике для легальной или нелегальной передачи важных сообщений.

Теорема. *Рассмотрим гладкий дискретный помехоустойчивый канал передачи данных, построенный на кодах Рида — Маллера $RM_3(2,m)$. Пусть $\bar{f} \in \mathbb{F}_3^k$ — информационный вектор, а $f \in \mathbb{F}_3^{(2)}[x_1,\dots,x_m]$ — соответствующий ему информационный полином. Предположим, что по каналу передано кодовое слово $C(f) \in RM_3(2,m)$, а приемником из канала получен вектор $\overline{Y} = \mathrm{chn}_d(C(f)) \in \mathbb{C}_3^n$, причем*

$$\mathrm{wt}_h(C(f) - \mu_n(\overline{Y})) \leqslant \frac{1}{2}\left(3^{m-1}-1\right).$$

Тогда результатом работы алгоритма декодирования является $\bar{f}$.

$\lhd$ Рассмотрим работу алгоритма декодирования по шагам.

На первом шаге по полученному из дискретного канала вектору $\overline{Y} = \mathrm{chn_d}(C(f)) \in \mathbf{C}_3^n(\subset \Xi_\varepsilon^n)$ для каждого $\bar\gamma \in \mathbb{F}_3^m$, $\bar\gamma \neq \bar 0$, строится $\nabla_{\bar\gamma}(\overline{Y}) = \nabla_{\bar\gamma}(\mathrm{chn_d}(C(f))) \in \Xi_\varepsilon^n$.

Для произвольного $\bar b \in \mathbb{F}_3^m$ обозначим через

$$\widetilde{\xi}_{\bar b} : \mathbb{C}_3^n \to \mathbb{C}_3^n, \quad \widetilde{\nabla}_{\bar b} : \mathbb{C}_3^n \to \mathbb{C}_3^n$$

ограничения на $\mathbb{C}_3^n$ отображений $\xi_{\bar b}$, $\nabla_{\bar b}$ соответственно. Непосредственно проверяется, что (см. (6)–(8), (11))

$$\tau_{\bar b} \cdot \mu_n = \mu_n \cdot \widetilde{\xi}_{\bar b}, \quad \Delta_{\bar b} \cdot \mu_n = \mu_n \cdot \widetilde{\nabla}_{\bar b}. \tag{14}$$

При определении дискретного канала пространство $\mathbb{C}_3^n$ отождествлялось с изоморфным ему пространством $\mathbb{F}_3^n$, поэтому для построенного на первом шаге алгоритма вектора $\nabla_{\bar\gamma}(\overline{Y})$ получаем, используя (14) и условие гладкости (10), что

$$\begin{aligned}\mu_n(\nabla_{\bar\gamma}(\overline{Y})) &= \mu_n(\tilde\nabla_{\bar\gamma}(\overline{Y})) = \mu_n(\tilde\nabla_{\bar\gamma}(\mathrm{chn_d}(C(f)))) \\ &= \Delta_{\bar\gamma}(\mu_n(\mathrm{chn_d}(C(f)))) = \mu_n(\mathrm{chn_d}(C(D_{\bar\gamma}f))).\end{aligned}$$

Таким образом, на первом шаге по полученному из канала вектору $\overline{Y} = \mathrm{chn_d}(C(f)) \in \mathrm{C}_3^n$ фактически построено множество векторов $\mathrm{chn_d}(C(D_{\bar\gamma}f)) \in \mathbb{C}_3^n$, $\bar\gamma \in \mathbb{F}_3^m$, $\bar\gamma \neq \bar 0$. Согласно лемме 1 $C(D_{\bar\gamma}f) \in RM_3(1,m)$. В силу леммы 2 из условия теоремы получаем, что

$$\mathrm{wt_h}(C(D_{\bar\gamma}f) - \mathrm{chn_d}(C(D_{\bar\gamma}f)) \leqslant 3^{m-1}-1,$$

т. е. в построенных векторах $\mathrm{chn_d}(\mathrm{C}(\mathrm{D}_{\bar\gamma}\mathrm{f}))$ код $\mathrm{RM}_3(1,m)$ исправляет все ошибки.

На втором шаге для каждого из векторов $\nabla_{\bar\gamma}(\overline{Y}) = \mathrm{chn_d}(C(D_{\bar\gamma}f))$, $\bar\gamma \in \mathbb{F}_3^m$, $\bar\gamma \neq \bar 0$, с использованием функционала $\Psi(\overline{P},\bar\beta)$ отыскивается такой линейный полином $\beta^{\bar\gamma}(\bar x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_m x_m$, который в закодированном виде $C(\beta^{\bar\gamma}(\bar x)) = \left(e^{i\frac{2}{3}\pi\beta^{\bar\gamma_1}(\bar\alpha_s)}, \ldots, e^{i\frac{2}{3}\pi\beta^{\bar\gamma_1}(\bar\alpha_s)}\right) (\in \mathbb{C}_3^n)$ близок к $\nabla_{\bar\gamma}(\overline{Y})$ по метрике L_1. Как было отмечено выше, код $RM_3(1,m)$ позволяет гарантированно исправить все ошибки в $\nabla_{\bar\gamma}(\overline{Y}) = \mathrm{chn_d}(C(D_{\bar\gamma}f))$. Метрика L_1 пропорциональна метрике Хемминга, поэтому на шаге 2 происходит декодирование производных по минимуму расстояния Хемминга и, следовательно,

$$\beta^{\bar\gamma}(\bar x) = \beta_0 + \beta_1^{\bar\gamma}x_1 + \ldots + \beta_m^{\bar\gamma}x_m = D_{\bar\gamma}f(\bar x). \tag{15}$$

В силу (5)

$$\beta^{\bar\gamma}(\bar x) = 2\bar x A\bar\gamma^T + f(\bar\gamma) - f_{00\ldots00},$$

поэтому

$$B_{\bar\gamma} = \left(\beta_1^{\bar\gamma}, \ldots, \beta_m^{\bar\gamma}\right) = \left(2A\bar\gamma^T\right)^T = 2\bar\gamma A. \tag{16}$$

Таким образом, в строках матрицы B находятся верные значения коэффициентов однородной части $L_{\bar\gamma} f$ производной $D_{\bar\gamma} f$, $\bar\gamma \in \mathbb{F}_3^m$. Иначе говоря,

$$B_{\bar\gamma} = \overline{L_{\bar\gamma} f}. \tag{17}$$

Элементы $\Psi_{\bar\gamma}$ набора Ψ можно назвать коэффициентами недоверия к найденному значению $B_{\bar\gamma}$: чем точнее найдено $B_{\bar\gamma}$, тем меньше параметр $\Psi_{\bar\gamma}$. При отсутствии ошибок в декодируемом кодовом слове элементы $\Psi_{\bar\gamma}$ принимают нулевые значения.

Третий шаг направлен на уточнение значений элементов B. Покажем, что при описанных в формулировке теоремы условиях на канал связи значения элементов B на этом шаге не изменяются. Именно, в основе уточняющих преобразований лежат следующие соображения: из (16) вытекает, что для произвольных $\bar\alpha_s$, $\bar\beta_j \in \mathbb{F}_3^m$ имеет место равенство

$$2\bar\alpha_s A + 2\bar\beta_j A = 2(\bar\alpha_s + \bar\beta_j)A,$$

следовательно, естественно требовать выполнение условия

$$B_{\bar\alpha_s} + B_{\bar\beta_j} = B_{\bar\alpha_s + \bar\beta_j}.$$

Однако выше было показано, что векторы $B_{\bar\gamma}$ найдены верно, следовательно, после процесса обновления строк матрицы $\Theta = B$, эта матрица не изменяется.

На вход четвертого шага поступает матрица $\Theta = B$, строки которой имеют вид (17). Воспользуемся равенством

$$L_{\bar\alpha_s} f = D_{\bar\alpha_s}(S(f)), \tag{18}$$

где $S(f)$ — однородная квадратичная часть f (см. (4)), и отметим, что матрица $\Theta = B$ в качестве строк содержит коэффициенты правильно найденных производных квадратичной части информационного полинома. Строки матрицы $\Theta = B$, соответствующие производным по базисным направлениям

$$\bar\nu_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0),\ \bar\nu_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ \bar\nu_m = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1),$$

формируют симметрическую матрицу $2A$ (см. (4)). Действительно, воспользовавшись равенством (16), получаем

$$\left(\ B_{\bar\nu_1}^T | \ \ \ldots\ \ | \ B_{\bar\nu_m}^T\ \right) = \left(\ 2A\bar\nu_1^T | \ \ \ldots\ \ |2A\ \bar\nu_m^T\ \right) = 2A\left(\ \bar\nu_1^T | \ \ \ldots\ \ | \ \bar\nu_m^T\ \right) = 2A.$$

Итак, в случае гладкого дискретного помехоустойчивого канала передачи данных, в котором количество ошибок не превосходит половины кодового расстояния, матрица A уже построена, но декодер, спроектированный для более сложной ситуации, продолжает работать: на шаге 4.1 он строит вспомогательные полиномы $\delta_j(\bar x)$, а на шаге 4.2 формирует матрицу A из коэффициентов полиномов $\delta_j(\bar x)$, производя при этом ее симметризацию, которая может потребоваться в случае большого количества ошибок в канале связи. В заключение этого шага по матрице A определяется квадратичная часть $\pi(\bar x)$ искомого информационного полинома $f(\bar x)$. Теперь рассмотрим вспомогательные утверждения и покажем, что ни полиномы $\delta_j(\bar x)$, найденные на шаге 4.1, ни последующий процесс симметризации на шаге 4.2 не портят матрицу A.

Утверждение 1. *Пусть $\delta(\bar{x})$ — линейный однородный полином вида (12). Для каждого $j \in \{1, \ldots, m\}$ функционал $T_j(\delta)$ принимает нулевое значение при*

$$2\delta(\bar{x}) = (L_{\bar{\nu}_j} f)(\bar{x}).$$

$\lhd$ Из (17) следует, что элементы θ_{js} матрицы $\Theta = B$ вычисляются по формуле $\theta_{js} = \overline{L_{\bar{\alpha}_s} f} \nu_j^T$. Тогда

$$\begin{aligned} 2\delta(\bar{\alpha}_s) &= (L_{\bar{\nu}_j} f)(\bar{\alpha}_s) = \bar{\alpha}_s \left(\overline{L_{\bar{\nu}_j} f}\right)^T = \bar{\alpha}_s (B_{\nu_j}^T) = \bar{\alpha}_s 2A\bar{\nu}_j^T \\ &= 2\ \bar{\alpha}_s A \bar{\nu}_j^T = B_{\bar{\alpha}_s} \bar{\nu}_j^T = \overline{L_{\bar{\alpha}_s} f} \nu_j^T = \theta_{js}. \end{aligned}$$

В силу определения функционала $T_j(\delta)$ (см. (13)) это завершает доказательство. $\rhd$

Утверждение 2. *Рассмотрим базисные векторы $\bar{\nu}_j$, $j = 1, \ldots, m$, пространства $\mathbb{F}_3^m$. Для столбца Θ^j матрицы Θ справедливо*

$$(\Theta^j)^T = C(L_{\bar{\nu}_j} f) = C(D_{\bar{\nu}_j}(S(f))),$$

где C — оператор кодирования (3).

$\lhd$ Сначала покажем, что (см. (1))

$$D_{\bar{\alpha}_s}(S(f))(\bar{\nu}_j) = D_{\bar{\nu}_j}(S(f))(\bar{\alpha}_s). \tag{19}$$

Используя (16), (18), преобразуем обе части равенства:

$$D_{\bar{\alpha}_s}(S(f))(\bar{\nu}_j) = (L_{\bar{\alpha}_s} f)(\bar{\nu}_j) = \langle B_{\bar{\alpha}_s}, \bar{\nu}_j \rangle = B_{\bar{\alpha}_s} \bar{\nu}_j^T = 2\bar{\alpha}_s A \bar{\nu}_j^T,$$

$$D_{\bar{\nu}_j}(S(f))(\bar{\alpha}_s) = (L_{\bar{\nu}_j} f)(\bar{\alpha}_s) = 2\bar{\nu}_j A \bar{\alpha}_s^T.$$

В силу симметричности матрицы A получаем (19).

Из (15) вытекает, что $\beta_j^{\bar{\gamma}} = D_{\bar{\gamma}}(S(f))(\bar{\nu}_j)$, где $\gamma \in \mathbb{F}_3^m$ (см. (1)). По определению матрица Θ, которая в условиях теоремы совпадает с матрицей B, формируется из n строк вида $B_{\bar{\gamma}} = (\beta_1^{\bar{\gamma}}, \ldots, \beta_m^{\bar{\gamma}})$. Воспользуемся (19), тогда j-й столбец матрицы Θ имеет вид

$$(\Theta^j)^T = \left(\beta_j^{\bar{\alpha}_1}, \ldots, \beta_j^{\bar{\alpha}_n}\right)^T = (D_{\bar{\nu}_j}(S(f))(\bar{\alpha}_1), \ldots, D_{\bar{\nu}_j}(S(f))(\bar{\alpha}_n))^T = C(D_{\bar{\nu}_j}(S(f))). \ \rhd$$

Таким образом, с учетом условий теоремы, а также сформулированных утверждений, на шаге 4.1 найдены полиномы $\delta_j(\bar{x}) = 2D_{\bar{\nu}_j}(S(f))$, $j = 1, \ldots, m$, которые после кодирования формируют столбцы уже найденной матрицы $\Theta = B$. Следовательно, на выходе шага 4.2 из коэффициентов этих полиномов формируется искомая матрица A квадратичной формы (см. (4)), для которой $A = 2(B_{\nu_1}^T | \ldots | B_{\nu_m}^T)$.

Итак, на шаге 4.2 по правильно найденной матрице A восстанавливается квадратичная часть ψ искомого информационного полинома f кода $RM_3(2, m)$.

На вход пятого шага алгоритма подается полином ψ. В ходе выполнения этого шага перебором отыскивается линейная часть ϕ полинома $f = \phi + \psi$ таким образом, чтобы вектор $C(f)$ по L_1-метрике, пропорциональной метрике Хемминга, был ближайшим к полученному из канала вектору $\overline{Y}$. В силу условия теоремы, ограничивающего число ошибок в зашумленном кодовом векторе $\overline{Y}$ половиной минимального кодового расстояния кода Рида — Маллера $RM_3(2, m)$, такой полином ϕ, а, следовательно, и полином f находятся алгоритмом верно. $\rhd$

Литература

1. *Деундяк В. М., Маевский А. Э., Могилевская Н. С.* Методы помехоустойчивой защиты данных: Учеб.—Ростов н/Д.: Изд-во Южного федерального ун-та, 2014.—309 с.
2. *Прокис Дж.* Цифровая связь.—М.: Радио и связь, 2000.—800 с.
3. *Сидельников В. М., Першаков А. С.* Декодирование кодов Рида — Маллера при большом числе ошибок // Проблемы передачи информации.—1992.—Т. 28, № 3.—С. 80–94.
4. *Loidreau P., Sakkour B.* Modified version of Sidel'nikov–Pershakov decoding algorithm for binary second order Reed–Muller codes // Ninth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding theory, ACCT-9, Kranevo.—2004.—P. 266–271.
5. *Могилевская Н. С., Скоробогат В. Р., Чудаков В. С.* Экспериментальное исследование декодеров кодов Рида — Маллера второго порядка // Вестн. Донского гос. тех. ун-та.—2008.—Т. 8, № 3.— С. 231–237.
6. *Деундяк В. М., Могилевская Н. С.* Модель троичного канала передачи данных с использованием декодера мягких решений кодов Рида — Маллера второго порядка // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки.—2015.—№ 1 (182).—С. 3–10.
7. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы.—М.: Мир, 1985.—25 с.
8. *Могилевская Н. С.* Корректирующая способность декодера мягких решений троичных кодов Рида — Маллера второго порядка при большом числе ошибок // Вестн. Донского гос. тех. ун-та.— 2015.—№ 1.—С. 121–130.
9. *Деундяк В. М., Косолапов Ю. В.* О стойкости кодового зашумления к статистическому анализу наблюдаемых данных многократного повторения // Модел. и анализ информ. систем.—2012.— Т. 19, № 4.—С. 110–127.
10. *Букашкин С. А.* Метод случайного кодирования // Радиотехника.—2014.—№ 4.—С. 30–36.
11. *Косолапов Ю. В.* Коды для обобщенной модели канала с подслушиванием // Проблемы передачи информации.—2015.—Т.51, № 1.—С. 23–28.
12. *Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В.* Булевы функции в теории кодирования и криптологии.—М.: МЦНМО, 2004.—470 с.
13. *Pellikaan R., Wu X.-W.* List decoding of q-ary Reed–Muller codes // IEEE. Trans. Infor. Theory.— 2004.—Vol. 50 (4).—P. 679–682.
14. *Хирш М.* Дифференциальная топология.—М.: Мир, 1979.—280 с.

Статья поступила 11 октября 2015 г.

Деундяк Владимир Михайлович
Южный федеральный университет,
доцент кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `vl.deundyak@gmail.com`

Могилевская Надежда Сергеевна
Донской государственный технический университет,
доцент кафедры кибербезопасности информационных систем
РОССИЯ, 344000, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail: `broshka@nm.com`

ON CORRECTNESS CONDITIONS OF A SOFT-DECISIONS DECODER FOR TERNARY REED–MULLER CODES OF SECOND ORDER

Deundyak V. M., Mogilevskaya N. S.

We study theoretically conditions of correct operation of a new soft decisions decoder of Reed–Muller second order codes over the field $\mathbb{F}_3$, whose experimental research showed that its corrective ability exceeds that of the decoder of the minimum Hamming's distance. For discrete data channel allocated we indicated the smoothness condition under which the decoder guarantees correction of all errors, the number of which does not exceed the permissible number of errors referred to the code design.

Key words: Reed–Muller codes, soft decoder, decoder correctness proof.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 34–40

УДК **517.9**

ОБ АЛГЕБРЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ, СВЯЗАННОЙ С ОПЕРАТОРОМ ПОММЬЕ

О. А. Иванова, С. Н. Мелихов

Изучены свойства сверточной алгебры, образованной топологическим сопряженным к некоторому (LF)-пространству целых функций одного комплексного переменного с введенным на нем умножением-сверткой. Это умножение определено с помощью оператора сдвига для оператора Поммье.

Ключевые слова: весовое пространство целых функций, алгебра аналитических функционалов, оператор Поммье, коммутант.

1. Введение

В работе [2] описаны операторы, линейно и непрерывно действующие в некотором счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых (в $\mathbb{C}$) функций и перестановочные в нем с оператором Поммье D_{0,g_0}, ассоциированным с некоторой функцией $g_0 \in E$. Пусть E' — топологическое сопряженное к E. Как показано в [2], коммутант $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ оператора D_{0,g_0} в кольце $\mathscr{L}(E)$ всех линейных непрерывных операторов в E изоморфен алгебре E' с операцией умножения (свертки) $\otimes$, определяемой с помощью оператора сдвига для оператора Поммье. Цель настоящей работы — продолжить исследование алгебры $(E', \otimes)$. Мы доказываем, что алгебры $(E', \otimes)$ и $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ также и топологически изоморфны, если E' снабдить слабой топологией, а $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ — топологией поточечной сходимости (когда в E введена слабая топология). Указанная «топологичность» изоморфизма применяется затем при решении задачи о представлении операторов из $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ в виде $D_{g_0,0}$-операторов бесконечного порядка. Кроме того, мы описываем мультипликативные функционалы на этих алгебрах. Отметим, что в общем случае мультипликативный функционал не является единственным. Существенным побудительным мотивом к данной работе послужила статья В. А. Ткаченко [7]. В [7] установлены подобные свойства коммутанта оператора обобщенного интегрирования I_P, действующего в сильном сопряженном к весовому (LB)-пространству целых функций, индикатриса роста которых при порядке $\rho > 0$ меньше заданной ρ-тригонометрически выпуклой функции со значениями в $(-\infty, +\infty]$ (см. [3]). При этом оператор I_P является сопряженным к оператору Поммье D_{0,e^P}, где P — некоторый многочлен.

2. Предварительные сведения

Приведем некоторые сведения из [1, 2], необходимые для дальнейшего. Для непрерывной функции $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ и функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ полагаем

$$p_v(f) := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp v(z)}.$$

Далее $v_{n,k} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, — непрерывные функции такие, что на $\mathbb{C}$

$$v_{n,k+1} \leqslant v_{n,k} \leqslant v_{n+1,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Положим $p_{n,k} := p_{v_{n,k}}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Как обычно, $A(\mathbb{C})$ обозначает пространство всех целых (в $\mathbb{C}$) функций. Для $n \in \mathbb{N}$ введем весовые пространства

$$E_n := \bigl\{f \in A(\mathbb{C}) : \ p_{n,k}(f) < +\infty \ (\forall\, k \in \mathbb{N})\bigr\}.$$

Каждое пространство E_n — пространство Фреше с фундаментальной последовательностью непрерывных преднорм $(p_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$; E_n непрерывно вложено в E_{n+1} для любого $n \in \mathbb{N}$. В пространстве $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ введем топологию индуктивного предела пространств E_n относительно отображений вложения E_n в E, т. е. $E = \operatorname{ind}_{n\to} E_n$.

Далее, будем предполагать, что функции $v_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, удовлетворяют следующему условию:

$$\begin{gathered}(\forall\, n)(\exists\, m)(\forall\, k)(\exists\, s)(\exists\, C \geqslant 0) : \\ \sup_{|t-z|\leqslant 1} v_{n,s}(t) + \ln(1 + |z|) \leqslant \inf_{|t-z|\leqslant 1} v_{m,k}(t) + C \quad (z \in \mathbb{C}).\end{gathered} \tag{1}$$

Условие (1) обеспечивает инвариантность E относительно дифференцирования, сдвига и умножения на независимую переменную. По [1, замечание 1] для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что всякое ограниченное в E_n множество относительно компактно в E_m.

Считаем далее, что пространство E содержит функцию, отличную от тождественного нуля. Тогда E содержит функцию $g_0 \in E$ такую, что $g_0(0) = 1$.

Зафиксируем функцию $g_0 \in E$, для которой $g_0(0) = 1$. Оператор Поммье D_{0,g_0}, $z \in \mathbb{C}$, ассоциированный с g_0, определим равенствами

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g_0'(0)f(0), & t = 0, \end{cases}$$

$f \in E$. Оператор D_{0,g_0} линейно и непрерывно отображает E в E.

Через $\mathscr{L}(E)$ обозначим пространство всех линейных непрерывных операторов в E, через E' — топологическое сопряженное к E пространство.

Оператор сдвига T_z, $z \in \mathbb{C}$, для оператора Поммье D_{0,g_0} определяется следующим образом (см. [2, § 2]):

$$T_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{tf(t)g_0(z)-zf(z)g_0(t)}{t-z}, & t \neq z, \\ zg_0(z)f'(z) - zf(z)g_0'(z) + f(z)g_0(z), & t = z, \end{cases}$$

$f \in E$.

Следуя [2], введем в E' бинарную операцию $\otimes$. Для φ, $\psi \in E'$, $f \in E$ положим

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z\bigl(\psi(T_z(f))\bigr).$$

Из [2, лемма 9 (iii)] следует, что операция $\otimes$ корректно определена. Она ассоциативна и коммутативна.

Обозначим через $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ коммутант оператора D_{0,g_0} в кольце $\mathscr{L}(E)$, т. е. множество всех операторов $B \in \mathscr{L}(E)$ таких, что $BD_{0,g_0} = D_{0,g_0}B$ в E.

Для $\varphi \in E'$ положим

$$\kappa(\varphi)(f)(z) := \varphi(T_z(f)), \quad f \in E, \ z \in \mathbb{C}.$$

Далее δ_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, — дельта-функции: $\delta_\lambda(f) := f(\lambda)$, $f \in E$. Ясно, что $\delta_\lambda \in E'$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Отметим, что $\varphi = \delta_0(\kappa(\varphi))$, $\varphi \in E'$. Согласно [2, следствие 18] отображение $\kappa : (E', \otimes) \to \mathscr{K}(D_{0,g_0})$ — изоморфизм алгебр. При этом умножением в $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ является суперпозиция операторов.

3. Топологический изоморфизм алгебр $(E', \otimes)$ и $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$

Покажем далее, что алгебраический изоморфизм $\kappa : (E', \otimes) \to \mathscr{K}(D_{0,g_0})$ является также и топологическим, если E' и $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ наделить самыми слабыми естественными локально выпуклыми топологиями. Обозначим символом E'_σ пространство E' со слабой топологией $\sigma(E', E)$, заданной естественной двойственностью между E и E'. Через $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ обозначим пространство $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ с топологией поточечной (простой) сходимости, если в E введена слабая топология $\sigma(E, E')$ (см. [9, гл. III, § 3, с. 104, пример 4 (a)]). Такая топология (она называется *слабо-операторной*) часто используется в теории операторных алгебр, в спектральной теории (см., например, [8, гл. 4, §§ 1, 6–8]). Отметим, что вследствие бочечности E пространство $\mathscr{L}(E)$ алгебраически совпадает с пространством линейных слабо непрерывных в E операторов [10, гл. 8, § 8.6, с. 703, теорема 8.6.1]. В E'_σ топология задается семейством преднорм

$$q_\Delta(\varphi) := \sup_{f \in \Delta} |\varphi(f)|, \quad \varphi \in E',$$

где Δ — произвольное конечное подмножество E. В $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ локально выпуклая топология задается семейством преднорм

$$q_{\Delta,\Omega}(B) := \sup_{f \in \Delta, \, \varphi \in \Omega} |\varphi(B(f))|, \quad B \in \mathscr{K}(D_{0,g_0}),$$

где Δ и Ω — произвольные конечные подмножества E и E' соответственно.

Теорема 1. *Отображение $\kappa : E'_\sigma \to \mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ является топологическим изоморфизмом «на».*

$\lhd$ Покажем, что $\kappa : E'_\sigma \to \mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ непрерывно. Действительно, для любых конечных множеств $\Delta \subset E$, $\Omega \subset E'$, любого $\varphi \in E'$

$$q_{\Delta,\Omega}(\kappa(\varphi)) = \sup_{f \in \Delta, \psi \in \Omega} |\psi(\kappa(\varphi)(f))|$$
$$= \sup_{f \in \Delta, \psi \in \Omega} |\psi_z(\varphi(T_z(f)))| = \sup_{f \in \Delta, \psi \in \Omega} |(\psi \otimes \varphi)(f)| = \sup_{f \in \Delta, \psi \in \Omega} |(\varphi \otimes \psi)(f)|$$
$$= \sup_{f \in \Delta, \psi \in \Omega} |\varphi_z(\psi(T_z(f)))| = \sup_{f \in \Delta, \psi \in \Omega} |\varphi(h_f)| = q_{\widetilde{\Delta}}(\varphi),$$

где $\widetilde{\Delta} := \{h_f := \psi(T_\cdot(f)) : \psi \in \Omega\}$ — конечное подмножество E.

Поскольку T_0 — тождественный оператор, то для любого конечного множества $\Delta \subset E$, для любого $\varphi \in E'$, вследствие $\varphi = \delta_0(\kappa(\varphi))$,

$$q_\Delta(\varphi) = \sup_{f\in\Delta} |\varphi(f)| = \sup_{f\in\Delta} |\delta_0(\kappa(\varphi)(f))| = q_{\Delta,\Omega_0}(\kappa(\varphi)),$$

где $\Omega_0 := \{\delta_0\} \subset E'$. Следовательно, обратное к κ отображение $\kappa^{-1} : \mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0}) \to E'_\sigma$ непрерывно. $\triangleright$

Применим полученный топологический результат к задаче о характере аппроксимации операторов из $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ многочленами от D_{0,g_0}. В [2, следствие 20] показано, что множество $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ совпадает с замыканием множества многочленов от оператора D_{0,g_0} в $\mathscr{L}(E)$ с топологией простой (поточечной) сходимости, если E наделено своей естественной топологией (LF)-пространства. Ниже пойдет речь о представлении операторов из $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ в виде рядов по операторам D^n_{0,g_0}, $n \geqslant 0$, с постоянными коэффициентами, т. е. в виде D_{0,g_0}-операторов бесконечного порядка (с постоянными коэффициентами). Существенным при этом является следующий результат.

Лемма 2 [2, лемма 7]**.** *Для $n \in \mathbb{N}$ существуют числа $c_{k,n} \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, такие, что для функционалов $\varphi_0 := \delta_0$, $\varphi_n(f) := f^{(n)}(0)/n! + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} f^{(k)}(0)$, $f \in E$, выполняются равенства $D^n_{0,g_0} = \kappa(\varphi_n)$, $n \geqslant 0$.*

Замечание 3. (a) Если $g_0 \equiv 1$, то $\varphi_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$, $f \in E$, $n \geqslant 0$.

(b) Нетрудно видеть, что ядром оператора D^n_{0,g_0}, $n \geqslant 1$, в E является множество

$$\mathrm{Ker}(D^n_{0,g_0}) = \{Pg_0 : P \text{ — многочлен и } \deg(P) \leqslant n-1\}.$$

Введем функции $h_n(z) := z^n g_0(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $n \geqslant 0$. Тогда $h_n \in E$ и $D^n_{0,g_0}(h_n) = g_0$ для любого целого $n \geqslant 0$ и $D^n_{0,g_0}(h_k) = 0$, если $0 \leqslant k < n$.

(c) Из (b) вытекает следующее свойство единственности сходящихся в $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ рядов по системе $\{D^n_{0,g_0} : n \geqslant 0\}$:

Если ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n D^n_{0,g_0}$ $(a_n \in \mathbb{C})$ сходится в $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ к нулю, то $a_n = 0$ для любого $n \geqslant 0$.

Таким образом, проблема представления операторов из $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ в виде D_{0,g_0}-операторов бесконечного порядка — это проблема базисности системы $\left(D^n_{0,g_0}\right)_{n\geqslant 0}$ в $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ (с некоторой локально выпуклой топологией).

Далее будем последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов локально выпуклого пространства F называть *абсолютным базисом* в F, если для любого $x \in F$ существует единственная числовая последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$, причем ряд абсолютно сходится к x в F. Абсолютная сходимость в F ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ означает, что $\sum_{n=1}^\infty |a_n| q(x_n) < +\infty$ для любой непрерывной на преднормы q. Заметим, что это определение абсолютного базиса отличается от приведенного в книге А. Пича [6, § 10.1].

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает

Следствие 4. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ *является абсолютным базисом в* E'_σ*;*

(ii) $(D^n_{0,g_0})_{n\geqslant 0}$ *является абсолютным базисом в* $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$.

Замечание 5. Результаты о представлении в виде D_{0,g_0}-операторов бесконечного порядка операторов, перестановочных с обычным оператором Поммье (т. е. для $g_0 \equiv 1$) в пространстве Фреше функций, аналитических в открытом круге, ранее были получены Н. И. Нагнибидой [5], Н. Е. Линчук [4].

Пусть выполняется условие (ii). Тогда для любого $\varphi \in E'$ существует последовательность $(a_n)_{n\geqslant 0}$ комплексных чисел такая, что $\kappa(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_{0,g_0}^n$, где ряд сходится к $\kappa(\varphi)$ в следующем смысле: для любых $f \in E$, $\psi \in E'$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi(D_{0,g_0}^n(f))$ сходится абсолютно к $\psi(\kappa(\varphi))(f)$, т. е. для любого $f \in E$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n D_{0,g_0}^n(f)$ слабо сходится в E к $\kappa(\varphi)(f)$. В большом числе случаев отмеченная сходимость влечет более сильную естественную.

Это так, например, если пространство E является ядерным (см. [6, гл. 4], [9, гл. 4, § 10], [12, гл. 3, § 28]).

Приведем одно достаточное условие, при котором E ядерно.

Лемма 6. *Предположим, что выполняется следующее условие:*

$$\begin{gathered}(\forall\, n)(\forall\, k)(\exists\, s)(\exists\, C \geqslant 0): \\ \sup_{|t-z|\leqslant 1} v_{n,s}(t) + \ln(1+|z|) \leqslant \inf_{|t-z|\leqslant 1} v_{n,k}(t) + C \quad (z \in \mathbb{C}).\end{gathered} \tag{2}$$

Тогда пространство E ядерно.

◁ Отметим, что из условия (2) вытекает условие (1). Вследствие [11, предложение 2.1] каждое пространство Фреше E_n ядерно. Так как счетный индуктивный предел ядерных пространств — тоже ядерное пространство [6, 5.2.4], то E ядерно. ▷

Символом $\mathscr{K}_p(D_{0,g_0})$ обозначим пространство $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ с топологией поточечной сходимости, если E наделено его естественной топологией (LF)-пространства.

Следствие 7. *Пусть пространство E ядерно. Следующие утверждения равносильны:*

(i) $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ *является абсолютным базисом в* E'_σ*;*

(ii) $(D_{0,g_0}^n)_{n\geqslant 0}$ *является абсолютным базисом в* $\mathscr{K}_p(D_{0,g_0})$.

В частности, условия (i) *и* (ii) *равносильны, если выполняется условие* (2).

◁ Это утверждение вытекает из следствия 4 и того, что для ядерного E слабо абсолютно суммируемые и абсолютно суммируемые в E семейства — одни и те же [6, предложение 4.2.2]. ▷

4. Мультипликативные функционалы на $(E', \otimes)$

Хорошо известно, какую важную роль в теории коммутативных банаховых алгебр играют мультипликативные функционалы на этих алгебрах. Ниже мы опишем мультипликативные функционалы на алгебре $(E', \otimes)$, задаваемые элементами из E. В отличие от банахова случая множество таких функционалов оказывается «бедным»: его мощность зависит от «числа» нулей функции g_0, и если g_0 не имеет нулей, то ненулевой мультипликативный функционал единственен. Ранее единственность мультипликативного функционала на алгебре линейных непрерывных операторов, перестановочных с обобщенным интегрированием в некотором пространстве аналитических функционалов, была установлена В. А. Ткаченко [7, § 4, ж)].

Для любого $g \in E$ функционал

$$G(\varphi) := \varphi(g), \quad \varphi \in E',$$

линеен и непрерывен на E'_σ. Функционал G, $g \in E$, называется мультипликативным на $(E', \otimes)$, если $G(\varphi \otimes \psi) = G(\varphi)G(\psi)$ для любых $\varphi, \psi \in E'$.

Теорема 8. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *Функционал* G $(g \in E)$ — *ненулевой мультипликативный функционал на* $(E', \otimes)$.

(ii) $g = g_0$ *или существует нуль* $\lambda \in \mathbb{C}$ *функции* g_0 *такой, что* $g(z)(1 - z/\lambda) = g_0(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Если функция g_0 *не имеет нулей, то единственным ненулевым мультипликативным функционалом является* G *при* $g = g_0$.

$\lhd$ (i)$\Rightarrow$(ii): Пусть G — ненулевой мультипликативный функционал на $(E', \otimes)$. Тогда для любых $\varphi, \psi \in E'$

$$G(\varphi)G(\psi) = \varphi(g)\psi(g) = \varphi_v\left(\psi_u\left(\frac{ug(u)g(v) - vg(v)g(u)}{u - v}\right)\right). \tag{3}$$

С другой стороны,

$$G(\varphi)G(\psi) = G(\varphi \otimes \psi) = (\varphi \otimes \psi)(g) = \varphi_v\left(\psi_u\left(\frac{ug(u)g_0(v) - vg(v)g_0(u)}{u - v}\right)\right). \tag{4}$$

Зафиксируем $z, t \in \mathbb{C}$, $z \neq t$. Для $\varphi := \delta_z$, $\psi := \delta_t$, вследствие равенств (3), (4),

$$\frac{tg(t)g_0(z) - zg(z)g_0(t)}{t - z} = \frac{tg(t)g(z) - zg(z)g(t)}{t - z},$$

откуда

$$tg(t)g_0(z) - zg(z)g_0(t) = tg(t)g(z) - zg(z)g(t)$$

и

$$tg(t)(g_0(z) - g(z)) = zg(z)(g_0(t) - g(t)).$$

Отсюда следует, что мероморфная функция $\frac{g_0(z)-g(z)}{zg(z)}$, зависящая от z, является тождественной постоянной. Значит, найдется $c \in \mathbb{C}$ такое, что

$$g_0(z) = g(z)(1 - cz), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если $c = 0$, то $g_0 = g$. Если же $c \neq 0$, то $\lambda := 1/c$ — нуль функции g_0 и

$$g_0(z) = g(z)(1 - z/\lambda), \quad z \in \mathbb{C}.$$

(ii)$\Rightarrow$(i): Если $g \in E$ и для некоторого $c \in \mathbb{C}$ выполняется равенство $g(z)(1 - cz) = g_0(z)$, $z \in \mathbb{C}$, то для любых $\varphi, \psi \in E'$

$$G(\varphi \otimes \psi) = \varphi_t\left(\psi_z\left(\frac{tg(t)g(z)(1 - cz) - zg(z)g(t)(1 - ct)}{t - z}\right)\right) = \varphi(g)\psi(g). \rhd$$

Следствие 9. *Каждое гиперподпространство*

$$H := \{\varphi \in E' : \varphi(g_0) = 0\} \text{ и } H_\lambda := \{\varphi \in E' : \varphi(g) = 0\},$$

где $g(z) = g_0(z)/(1 - z/\lambda)$, λ — *нуль* g_0, *является* $\sigma(E', E)$-*замкнутым максимальным идеалом в алгебре* $(E', \otimes)$.

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева // Уфимск. мат. журн.—2014.—Т. 6, № 3.—С. 17—27.
2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 114–137.

3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с.
4. *Линчук Н. Е.* Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения // Мат. заметки.—1988.—Т. 44, № 6.—С. 794–802.
5. *Нагнибида Н. И.* О линейных непрерывных операторах в аналитическом пространстве, перестановочных с оператором дифференцирования // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. науч. сб. Харьковского гос. ун-та им. А. М. Горького.—Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1966.—№ 2.—С. 160–164.
6. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства.—М.: Мир, 1967.—271 с.
7. *Ткаченко В. А.* Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов // Мат. заметки.—1979.—Т. 29, № 2.—С. 271—282.
8. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу.—М.: МЦНМО, 2004.—552 с.
9. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—360 с.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
11. *Haslinger F.* Weighted spaces of entire functions // Indiana Univ. Math. J.—1986.—Vol. 35, № 1.—P. 193–208.
12. *Meise R., Vogt D.* Introduction to Functional Analysis.—N. Y.: Oxford Univ. Press, 1997.—437 p.

Статья поступила 12 августа 2016 г.

Иванова Ольга Александровна
Южный федеральный университет,
ассистент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: neo_ivolga@mail.ru

Мелихов Сергей Николаевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: melih@math.rsu.ru

ON AN ALGEBRA OF ANALYTIC FUNCTIONALS CONNECTED WITH A POMMIEZ OPERATOR

Ivanova O. A., Melikhov S. N.

We study properties of a convolution algebra formed by the dual E' of a countable inductive limit E of weighted Fréchet spaces of entire funtions of one complex variable with the multiplication-convolution $\otimes$ which is defined with the help of the shift operator for a Pommiez operator. The algebra $(E', \otimes)$ is isomorphic to the commutant of a Pommiez operator in the ring of all continuous linear operators in E. We prove that this isomorphism is topological if E' is endowed with the weak topology and the corresponding commutant is endowed with the weakly operator topology. This result we use for powers of a Pommiez operator series expansions for all continuous linear operators commuting with this Pommiez operator on E. We describe also all nonzero multiplicative functionals on the algebra $(E', \otimes)$.

Key words: weighted space of entire functions, algebra of analytic functionals, Pommiez operator, commutant.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 41–49

УДК **517.952**

О РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА СО СМЕШАННОЙ СТАРШЕЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

И. В. Рахмелевич

Проведен анализ решений многомерного дифференциального уравнения в частных производных произвольного порядка, содержащего смешанную старшую частную производную и степенные нелинейности по неизвестной функции и ее первым производным. Для исследования данного уравнения применяется метод функционального разделения переменных. В результате получены частные решения рассматриваемого уравнения. Доказаны некоторые теоремы, позволяющие понизить порядок уравнения.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, функциональное разделение переменных, степенная нелинейность.

Введение

В современной теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных большинство точных решений получено для уравнений первого и второго порядков. В то же время, как потребности развития теории,так и практических приложений приводят к задачам нахождения решений для уравнений более высокого порядка. Так, в работах [1–5] проводится исследование линейных уравнений высших порядков с переменными коэффициентами, содержащих смешанную старшую производную, в том числе получены необходимые и достаточные условия факторизации такого уравнения. Целью данной работы является исследование уравнения произвольного порядка со смешанной старшей производной, содержащего степенные нелинейности по неизвестной функции и ее первым производным. При этом используется метод разделения переменных, который является одним из наиболее эффективных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [6–10].

1. Постановка задачи. Разделение переменных в уравнении со степенными нелинейностями

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение в частных производных порядка N относительно неизвестной функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$:

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1 \ldots \partial x_N} = \varphi(u) \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}. \qquad (1)$$

Простейший случай двумерного уравнения вида (1) был рассмотрен в работе [11]. Предполагаем, что $\varphi(u) = bu^{\gamma}$, т. е. уравнение (1) содержит нелинейности степенного типа как по неизвестной функции, так и по ее первым производным, причем $\gamma \in \mathbb{R}$, $\beta_n \in \mathbb{R}$. Также должны выполняться следующие ограничения:

1) если $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (т. е. вещественное число с ненулевой дробной частью), то решение уравнения (1) $u \geqslant 0$;

2) при тех значениях n, при которых $\beta_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, производная от решения уравнения (1) $\frac{\partial u}{\partial x_n} \geqslant 0$.

Для решения уравнения (1) будем использовать метод функционального разделения переменных [6, 7]. В соответствии с указанным методом решение уравнения (1) ищем в виде:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = U(y), \quad y = \sum_{n=1}^{N} y_n(x_n). \tag{2}$$

В (2) входят неизвестные функции $U(y)$, $y_n(x_n)$, которые подлежат определению в дальнейшем. Подставляя выражение (2) в уравнение (1), приходим к соотношению:

$$\Phi(y) = \prod_{n=1}^{N} [y_n'(x_n)]^{\beta_n - 1}, \tag{3}$$

где

$$\Phi(y) \equiv \frac{U^{(N)}(y)}{b[U'(y)]^{\beta_\Sigma}[U(y)]^{\gamma}}. \tag{4}$$

Здесь и далее будем использовать обозначения: $\beta_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} \beta_n$, $I = \{1, \ldots, N\}$, — множество значений индекса n, нумерующего независимые переменные, Ω — множество значений $n \in I$, для которых $\beta_n \neq 1$; $\overline{\Omega} = I \setminus \Omega$.

Пусть $\Omega \neq \varnothing$. Тогда существует хотя бы одно значение $n = n_1$, при котором $\beta_{n_1} \neq 1$. Продифференцируем соотношение (3) по x_{n_1}. Тогда в результате элементарных преобразований с учетом второй из формул (2), находим

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} = W_{n_1}(x_{n_1}) \equiv (\beta_{n_1} - 1)\frac{y''_{n_1}(x_{n_1})}{[y'_{n_1}(x_{n_1})]^2}. \tag{5}$$

Правая часть соотношения (5) зависит только от переменной x_{n_1}. Поэтому произвольно выбрав некоторое значение $n_2 \neq n_1$ и продифференцировав (5) по x_{n_2}, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_{n_2}}\left(\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)}\right) = 0. \tag{6}$$

Будем предполагать, что искомое решение существенно зависит от всех переменных, т. е. $y_n(x_n) \neq \mathrm{const}$ для любого n. Тогда, из (6) с учетом (2) следует:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)}\right) = 0. \tag{7}$$

Решая уравнение (7) относительно $\Phi(y)$, находим:

$$\Phi(y) = \Phi_0 \exp(\alpha y), \tag{8}$$

где Φ_0, α — произвольные постоянные. Из (8) и (4) следует обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) относительно функции $U(y)$:

$$U^{(N)}(y) - B_0[U'(y)]^{\beta_\Sigma}[U(y)]^{\gamma}\exp(\alpha y) = 0, \tag{9}$$

где введена новая постоянная

$$B_0 = b\Phi_0. \tag{10}$$

Для нахождения функций $y_n(x_n)$ используем соотношение (3). Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\alpha = 0$. Тогда из (3) с учетом (8) и (10), следует

$$\prod_{n=1}^{N} [y_n'(x_n)]^{\beta_n - 1} = \frac{B_0}{b}, \tag{11}$$

откуда находим

$$y_n(x_n) = c_n x_n + y_{n0}, \quad n \in \Omega, \tag{12}$$

где $y_n(x_n)$ — произвольная функция при $n \in \overline{\Omega}$.

Приведем некоторые частные решения уравнения (9) для произвольного N, и соответствующие им решения уравнения (1).

а) Степенное решение

$$U(y) = U_0 y^{\sigma}. \tag{13}$$

Подстановка решения (13) в уравнение (9) позволяет получить выражения для постоянных U_0, σ:

$$\sigma = \frac{\beta_\Sigma - N}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}, \quad U_0 = \left(\frac{Q_N(\sigma)}{B_0 \sigma^{\beta_\Sigma}}\right)^{\frac{1}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}}, \quad Q_N(\sigma) = \sigma(\sigma - 1)\ldots(\sigma - N + 1). \tag{14}$$

Тогда, подставляя (12) в (13), получаем решение уравнения (1):

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = U_0 \left(\sum_{n \in \Omega} c_n x_n + \sum_{n \in \overline{\Omega}} y_n(x_n) + y_0 \right)^{\sigma}, \tag{15}$$

где $y_n(x_n)$ — произвольные функции, y_0, c_n — произвольные постоянные. Постоянные c_n должны удовлетворять условию, вытекающему из (11):

$$\prod_{n \in \Omega} c_n^{\beta_n - 1} = \frac{B_0}{b}. \tag{16}$$

На основании анализа выражений (14) перечислим частные случаи, в которых решение (15) не существует или вырождается в тривиальное решение:

– при $\beta_\Sigma + \gamma = 1$ решение (15) не существует;

– если $\sigma = n$ при некотором $1 \leqslant n \leqslant N - 1$, то $U_0 = 0$ при $\beta_\Sigma + \gamma > 1$, и решение (15) вырождается в тривиальное $u(x_1, x_2, \ldots, x_N) \equiv 0$, а при $\beta_\Sigma + \gamma \leqslant 1$ решение (15) не существует;

– если $\sigma = 0$ (т. е. $\beta_\Sigma = N$), то при $\gamma < 1 - N$ решение (15) вырождается в тривиальное, а при $\gamma > 1 - N$ это решение не существует.

б) Логарифмическое решение

$$U(y) = U_0 \ln(y). \tag{17}$$

Подставляя решение (17) в уравнение (9), находим, что постоянная U_0 определяется выражением

$$U_0 = \left(\frac{(-1)^{N-1}(N-1)!}{B_0} \right)^{\frac{1}{N-1}}. \tag{18}$$

Подставляя (12) в (17), получаем решение уравнения (1)

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = U_0 \ln\left(\sum_{n\in\Omega} c_n x_n + \sum_{n\in\overline{\Omega}} y_n(x_n) + y_0\right). \tag{19}$$

Здесь, так же как и в (15), $y_n(x_n)$ — произвольные функции, c_n — произвольные постоянные, удовлетворяющие условию (16). Решение (19) существует при выполнении условий $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta_\Sigma = N$.

в) Экспоненциальное решение

$$U(y) = U_0 \exp(\sigma y). \tag{20}$$

Здесь U_0 — произвольное, а σ определяется формулой:

$$\sigma = B_0^{\frac{1}{N-\beta_\Sigma}}. \tag{21}$$

Соответствующее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = U_0 \exp\left\{\sigma\left(\sum_{n\in\Omega} c_n x_n + \sum_{n\in\overline{\Omega}} y_n(x_n) + y_0\right)\right\}. \tag{22}$$

В рассматриваемом случае решение (22) существует при выполнении условий $\alpha = 0$, $\beta_\Sigma + \gamma = 1$, $\beta_\Sigma \neq N$.

Выше было сделано предположение, что $\Omega \neq \varnothing$. Если же имеет место противоположный случай $\Omega = \varnothing$, т. е. $\beta_n = 1$ при всех $n \in I$, то из (3) следует, что функции $y_n(x_n)$ являются произвольными при всех $n \in I$, а уравнение для функции $U(y)$ имеет вид (9), в котором необходимо положить $\alpha = 0$.

Случай 2. $\alpha \neq 0$. Тогда (3) с учетом (8) и (10) можно записать в виде

$$\prod_{n=1}^{N} [y_n'(x_n)]^{\beta_n - 1} = \frac{B_0}{b} \prod_{n=1}^{N} \exp[\alpha y_n(x_n)]. \tag{23}$$

Очевидно, что при $\alpha \neq 0$ соотношение (23) может быть удовлетворено только в том случае, если $\Omega = I$, т. е. $\beta_n \neq 1$ при всех $n \in I$. Из (23) следует уравнение для функций $y_n(x_n)$:

$$[y_n'(x_n)]^{\beta_n - 1} \exp[-\alpha y_n(x_n)] = \mu_n, \tag{24}$$

где μ_n — произвольные постоянные, удовлетворяющие условию

$$\prod_{n=1}^{N} \mu_n = \frac{B_0}{b}. \tag{25}$$

Решение уравнения (24) имеет вид

$$y_n(x_n) = \frac{1-\beta_n}{\alpha} \ln\left\{\frac{\alpha}{1-\beta_n} \mu_n^{1/(\beta_n - 1)} (x_n - x_{n0})\right\}. \tag{26}$$

При $\alpha \neq 0$ так же как и в предыдущем случае, уравнение (9) имеет частное решение (20). Постоянные U_0, σ определяются выражениями:

$$\sigma = \frac{\alpha}{1-(\beta_\Sigma + \gamma)}, \qquad U_0 = \left(\frac{\sigma^{N-\beta_\Sigma}}{B_0}\right)^{\frac{1}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}}.$$

Используя выражения (2), (20), (26) и условие (25), после некоторых преобразований получаем соответствующее решение уравнения (1):

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \tilde{U}_0 \prod_{n=1}^{N} (x_n - x_{n0})^{\rho_n}, \tag{27}$$

где ρ_n, $\tilde{U}_0$ определяются выражениями

$$\rho_n = \frac{\beta_n - 1}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}, \qquad \tilde{U}_0 = b^{\frac{1}{1-(\beta_\Sigma+\gamma)}} \prod_{n=1}^{N} \rho_n^{-\rho_n}. \tag{28}$$

Решение (27) не существует в случае $\beta_\Sigma + \gamma = 1$.

Таким образом, уравнение (1) имеет решения, определяемые формулами (15), (19), (22), (27), а входящие в них дополнительные параметры определяются выражениями (14), (18), (21), (28). При $\Omega = I$ ($\beta_n \neq 1$ при всех $n \in I$) формулы (15), (19) и (22) описывают решения уравнения (1) типа бегущей волны.

2. Понижение порядка уравнения

В данном параграфе рассматриваются теоремы, которые позволяют понизить порядок и размерность (число независимых переменных) уравнения (1).

Пусть множество I, введенное выше, разбито на K непересекающихся подмножеств I_k ($k = 1, \ldots, K$) и, соответственно, множество переменных $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ разбито на K непересекающихся подмножеств $X_k = \{x_n\}_{n \in I_k}$. Здесь и далее N_k — число элементов в подмножествах I_k, X_k; $\beta_{\Sigma_k} = \sum_{n \in I_k} \beta_n$. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть функции $u_k(X_k)$ при всех $k = 1, \ldots, K$ являются решениями уравнений*

$$\frac{\partial^{N_k} u_k}{\prod\limits_{n \in I_k} \partial x_n} = b_k [u_k(X_k)]^{\beta_\Sigma + \gamma - \beta_{\Sigma k}} \prod_{n \in I_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}, \tag{29}$$

где b_k — некоторые постоянные, удовлетворяющие условиям:

$$\prod_{k=1}^{K} b_k = b. \tag{30}$$

Тогда функция

$$u(X) = \prod_{k=1}^{K} u_k(X_k) \tag{31}$$

является решением уравнения (1).

◁ Рассмотрим выражение

$$\Psi(u(X)) \equiv \frac{\partial^N u}{\partial x_1 \ldots \partial x_N} u^{-\gamma} \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{-\beta_n}. \tag{32}$$

Подставим в (32) выражение (31). Тогда $\Psi(u(X))$ можно представить в виде

$$\Psi(u(X)) = \prod_{k=1}^{K} \Psi_k(u_k(X_k)), \tag{33}$$

где

$$\Psi_k(u_k(X_k)) = \frac{\partial^{N_k} u_k}{\prod\limits_{n\in I_k} \partial x_n}[u_k(X_k)]^{-(\beta_\Sigma+\gamma-\beta_{\Sigma k})} \prod_{n\in I_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_n}\right)^{-\beta_n}. \tag{34}$$

По условию теоремы, функции $u_k(X_k)$ удовлетворяют уравнениям (29), поэтому из (34) получаем, что $\Psi_k(u_k(X_k)) = b_k$. Тогда, из (33) с учетом (30) следует, что $\Psi(u(X)) = b$. Отсюда, учитывая (32), получаем, что функция (31) является решением уравнения (1). $\rhd$

Доказанная выше теорема 1 позволяет получить множество решений уравнения (1), которые могут быть представлены в виде произведения решений уравнений аналогичного вида, имеющих более низкий порядок.

Теоремы 2 и 3, которые приводятся ниже, определяют возможность понижения порядка уравнения (1) для частных случаев, когда параметры уравнения удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. В этих теоремах предполагается, что $K = 2$, т. е. множество I разбито на непересекающиеся подмножества I_1, I_2, которым соответствуют подмножества переменных X_1, X_2.

Теорема 2. *Пусть параметры, входящие в уравнение* (1), *удовлетворяют условиям:*

$$\gamma = 0, \quad \beta_n = 0, \tag{35}$$

причем второе из этих условий выполняется для всех $n \in I_1$. Тогда уравнение (1) *имеет решение вида*

$$u(X) = u_1(X_1)u_2(X_2) + u_0(X_1). \tag{36}$$

Здесь $u_0(X_1)$ — произвольная функция, а функции $u_1(X_1)$, $u_2(X_2)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^{N_1} u_1}{\prod\limits_{n\in I_1} \partial x_n} = b_1[u_1(X_1)]^{\beta_{\Sigma 2}}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial^{N_2} u_2}{\prod\limits_{n\in I_2} \partial x_n} = b_2 \prod_{n\in I_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}. \tag{38}$$

Произвольные постоянные b_1, b_2, входящие в (37), (38), *удовлетворяют условию*

$$b_1 b_2 = b. \tag{39}$$

$\lhd$ Подставим выражение (36) в уравнение (1), откуда после элементарных преобразований получаем:

$$[u_1(X_1)]^{-\beta_{\Sigma 2}} \frac{\partial^{N_1} u_1}{\prod\limits_{n\in I_1} \partial x_n} \prod_{n\in I_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)^{-\beta_n} \frac{\partial^{N_2} u_2}{\prod\limits_{n\in I_2} \partial x_n}$$
$$= b\big[u_1(X_1)u_2(X_2) + u_0(X_1)\big]^{\gamma} \prod_{n\in I_1}\left(u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}. \tag{40}$$

В силу условий (35), второй и третий сомножители в правой части уравнения (40) равны 1. Тогда это уравнение сводится к следующему:

$$\left\{[u_1(X_1)]^{-\beta_{\Sigma 2}} \frac{\partial^{N_1} u_1}{\prod\limits_{n\in I_1} \partial x_n}\right\} \cdot \left\{\prod_{n\in I_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)^{-\beta_n} \frac{\partial^{N_2} u_2}{\prod\limits_{n\in I_2} \partial x_n}\right\} = b. \tag{41}$$

Так как первый и второй сомножители в левой части (41) зависят от разных групп переменных, а их произведение равно постоянной, то отсюда следует, что функции $u_1(X_1), u_2(X_2)$ должны удовлетворять уравнениям (37), (38), а входящие в них постоянные – условию (39). $\triangleright$

Теорема 3. *Пусть параметры, входящие в уравнение* (1), *удовлетворяют условиям:*

$$\gamma = 0, \quad \beta_{\Sigma 1} = 0 \tag{42}$$

для некоторого подмножества I_1. *Тогда уравнение* (1) *имеет решение вида:*

$$u(X) = u_1(z_1)u_2(X_2) + u_0(z_1). \tag{43}$$

Переменная z_1, *входящая в* (43), *определяется выражением:*

$$z_1 = \sum_{n\in\Omega_1} c_n x_n + \sum_{n\in\overline{\Omega}_1} \zeta_n(x_n). \tag{44}$$

Здесь $\Omega_1 \subset I_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset I_1$ — *множества значений индекса* n, *для которых* $\beta_n \neq 1$, $\beta_n = 1$ *соответственно;* c_n — *произвольные постоянные,* $u_0(z_1)$, $\zeta_n(x_n)$ — *произвольные функции; функция* $u_2(X_2)$ *удовлетворяет уравнению* (38), *а функция* $u_1(z_1)$ *удовлетворяет следующему ОДУ:*

$$\frac{d^{N_1}u_1}{dz_1^{N_1}} = b_1[u_1(z_1)]^{\beta_{\Sigma 2}}. \tag{45}$$

Постоянные b_1, b_2, c_n *должны удовлетворять следующему дополнительному условию:*

$$b_1 b_2 = b \prod_{n\in\Omega_1} c_n^{\beta_n - 1}. \tag{46}$$

$\triangleleft$ Подставим выражения (43), (44) в уравнение (1). Тогда левая часть уравнения после элементарных преобразований приводится к виду:

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1 \ldots \partial x_N} = \frac{d^{N_1}u_1}{dz_1^{N_1}} \cdot \frac{\partial^{N_2} u_2}{\prod\limits_{n\in I_2} \partial x_n} \cdot \prod_{n\in\Omega_1} c_n \cdot \prod_{n\in\overline{\Omega}_1} \zeta_n'(x_n). \tag{47}$$

Преобразуем также правую часть уравнения (1) с учетом первого из условий (42)

$$\varphi(u) \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{\beta_n} = b \prod_{n\in I_1} \left(u_2(X_2)\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}\right)^{\beta_n} \cdot \prod_{n\in I_2} \left(u_1(z_1)\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}. \tag{48}$$

В свою очередь, первое произведение в правой части (48) может быть записано в виде

$$\prod_{n\in I_1} \left(u_2(X_2)\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}\right)^{\beta_n} = \left(u_2(X_2)\frac{du_1}{dz_1} + \frac{du_0}{dz_1}\right)^{\beta_{\Sigma 1}} \cdot \prod_{n\in\Omega_1} c_n^{\beta_n} \cdot \prod_{n\in\overline{\Omega}_1} \zeta_n'(x_n). \tag{49}$$

В силу второго из условий (42), первый сомножитель в правой части (49) равен 1. Тогда, используя соотношения (47)–(49), после элементарных преобразований уравнение (1) можно представить в виде

$$\left\{\frac{d^{N_1}u_1}{dz_1^{N_1}}[u_1(z_1)]^{-\beta_{\Sigma 2}}\right\} \cdot \left\{\frac{\partial^{N_2} u_2}{\prod\limits_{n\in I_2} \partial x_n} \prod_{n\in I_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)^{-\beta_n}\right\} = b \prod_{n\in\Omega_1} c_n^{\beta_n - 1}. \tag{50}$$

Так как первый и второй сомножители в фигурных скобках в левой части (50) зависят от разных переменных, а их произведение равно постоянной, то уравнение (50) можно удовлетворить только в том случае, если:

$$\frac{d^{N_1}u_1}{dz_1^{N_1}}[u_1(z_1)]^{-\beta_{\Sigma 2}} = b_1, \quad \frac{\partial^{N_2}u_2}{\prod\limits_{n\in I_2}\partial x_n}\prod_{n\in I_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)^{-\beta_n} = b_2, \tag{51}$$

где b_1, b_2 — некоторые постоянные, удовлетворяющие условию (46).

Из (51) следует, что функции $u_1(z_1)$, $u_2(X_2)$ удовлетворяют уравнениям (45), (38) соответственно. $\triangleright$

Заключение. Таким образом, в данной работе с помощью метода функционального разделения переменных исследовано многомерное дифференциальное уравнение, содержащее смешанную старшую частную производную по всем независимым переменным и степенные нелинейности по неизвестной функции и ее первым производным. Получены частные решения со степенными, экспоненциальными и логарифмическими функциями от независимых переменных. Доказаны теоремы, позволяющие понизить порядок рассматриваемого уравнения.

Литература

1. *Бондаренко Б. А.* Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных.—Ташкент: ФАН, 1987.—146 с.
2. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.—Казань: Казанское мат. об-во, 2001.—226 с.
3. *Уткина Е. А.* Об одном дифференциальном уравнении со старшей частной производной в трехмерном пространстве // Диф. уравнения.—2005.—Т. 41, № 5.—С. 697–701.
4. *Миронов А. Н.* Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}_n$ // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 584–594.
5. *Жегалов В. И., Тихонова О. А.* Факторизация уравнений с доминирующей старшей частной производной // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 1.—С. 66–72.
6. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения.—М.: Физматлит, 2002.—432 с.
7. *Полянин А. Д., Журов А. И.* Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Докл. РАН.—2002.—Т. 382, № 5.—С. 606–611.
8. *Рахмелевич И. В.* О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика.—2013.—№ 3.—С. 37–44.
9. *Рахмелевич И. В.* Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика.—2014.—№ 1.—С. 42–50.
10. *Miller J., Rubel L. A.* Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // J. of Physics A.—1993.—Vol. 26.—P. 1901–1913.
11. *Рахмелевич И. В.* О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика.—2015.—№ 1.—С. 12–19.

Статья поступила 11 августа 2015 г.

Рахмелевич Игорь Владимирович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин
РОССИЯ, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

ON THE SOLUTIONS OF MULTI-DIMENSIONAL ARBITRARY ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH MIXED SENIOR PARTIAL DERIVATIVE AND POWER-LAW NON-LINEARITIES

Rakhmelevich I. V.

We study the solutions of a multi-dimensional differential equation of arbitrary order containing mixed senior partial derivative and power-law non-linearities on unknown function and its first derivatives. The method of functional separation of variables is applied for examining of this equation. The particular solutions of the equation under consideration are obtained. Some theorems which permit to decrease the order of this equation are proved.

Key words: partial differential equation, functional separation of variables, power-law non-linearity.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 50–60

УДК **532.516**

К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

С. В. Ревина

Для отыскания вторичных течений, ответвляющихся от основного стационарного течения при уменьшении вязкости, необходимо рассмотреть линейную спектральную и линейную сопряженную задачи. В работе построена длинноволновая асимптотика линейной сопряженной задачи в двумерном случае при условии периодичности по пространственным переменным, когда один из пространственных периодов стремится к бесконечности. Выведены реккурентные формулы для нахождения k-го члена длинноволновой асимптотики скорости и давления. Показано, что если отклонение скорости от ее среднего по периоду значения является нечетной функцией, то коэффициенты разложения скорости являются четными при четных степенях и нечетными при нечетных степенях волнового числа. Получены соотношения между коэффициентами асимптотических разложений линейной спектральной и линейной сопряженной задач.

Ключевые слова: устойчивость течений вязкой жидкости, длинноволновая асимптотика, линейная сопряженная задача.

1. Введение

Рассматривается двумерное $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами $\ell_1 = 2\pi$ и $\ell_2 = 2\pi/\alpha$ соответственно, в предположении, что волновое число $\alpha \to 0$. Неизвестные поле скорости $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ и давление $p(\boldsymbol{x}, t)$ удовлетворяют системе уравнений Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

где ν — безразмерная вязкость. Через $\langle f \rangle$ будем обозначать среднее по x_1, а через $\langle\langle f \rangle\rangle$ — среднее по прямоугольнику периодов $\Omega = [0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\ell_1} \int\limits_0^{\ell_1} f(\boldsymbol{x}, t)\, dx_1, \quad \langle\langle f \rangle\rangle(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega f(\boldsymbol{x}, t)\, dx_1\, dx_2.$$

Предполагается, что поле скорости периодично по пространственным переменным с теми же периодами, что и поле внешних сил, и среднее поля скорости задано:

$$\langle\langle \boldsymbol{v} \rangle\rangle = \boldsymbol{q}.$$

Будем интересоваться потерей устойчивости основного (невозмущенного) стационарного течения общего вида

$$\boldsymbol{V} = (0, V(x_1)), \quad \langle V \rangle \neq 0, \tag{1}$$

которое называется *сдвиговым* (или *параллельным*) *течением.*

Известно, что при достаточно больших значениях вязкости ν (малых числах Рейнольдса) основное решение устойчиво. *Критическим* называется значение параметра $\nu = \nu_c$, при котором одно или несколько собственных значений линейной спектральной задачи выходят на мнимую ось. Пусть S_2 — замыкание в $L_2(\Omega)$ множества гладких соленоидальных вектор-функций, периодических по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами ℓ_1 и ℓ_2 соответственно, Π — ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство S_2 (гидродинамический проектор). Линеаризуя уравнения Навье — Стокса на основном течении (1), получим линейную спектральную задачу в S_2:

$$A\boldsymbol{\varphi} + i\omega_0\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad A\boldsymbol{\varphi} = -\nu_c \Pi \Delta \boldsymbol{\varphi} + \Pi \left[\varphi_1 V'(x_1) \boldsymbol{e_2} + V(x_1) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_2} \right], \tag{2}$$

где $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ — координатные орты. Для исследования бифуркаций невозмущенного течения применим схему метода Ляпунова — Шмидта, предложенную В. И. Юдовичем [1]. Сначала рассматривается линейная спектральная задача (2), на втором шаге находятся собственные векторы линейной сопряженной задачи

$$A^*\boldsymbol{\Phi} - i\omega_0\boldsymbol{\Phi} = 0, \quad A^*\boldsymbol{\Phi} = -\nu_c \Pi \Delta \boldsymbol{\Phi} - \Pi \left[V(x_1) \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_j} \right) \boldsymbol{e_j} \right], \tag{3}$$

где A^* — гильбертово-сопряженный к оператору A в S_2. При исследовании устойчивости относительно длинноволновых возмущений на каждом шаге метода Ляпунова — Шмидта применяются разложения в ряды по малому параметру α.

Впервые длинноволновая асимптотика ($\alpha \to 0$) задачи устойчивости двумерных параллельных пространственно-периодических течений общего вида построена в [2]. При этом поле скорости выражалось через функцию тока, для которой получалась задача Орра — Зоммерфельда. В [3] для построения первых членов асимптотики вторичных автоколебаний рассматривались непосредственно уравнения Навье — Стокса. В [4] с помощью некоторой формализации (применения интегральных операторов типа Вольтерра и вронскианов) получены рекуррентные формулы k-го члена длинноволновой асимптотики задачи устойчивости (2) стационарных сдвиговых течений с ненулевым средним (1). Настоящая работа посвящена выводу рекуррентных формул k-го члена длинноволновой асимптотики линейной сопряженной задачи (3). Подробный вывод изложен в [5]. Обоснование асимптотики в данной работе не проводится, но его можно провести, воспользовавшись теоремой о неявной функции для аналитических оператор-функций подобно тому, как это проделано в [2].

2. Первые члены асимптотики

Через H обозначим подпространство функций из $L_2(0, \ell_1)$, ортогональных единице:

$$H = \left\{ f \in L_2(0, \ell_1) : \langle f \rangle = 0 \right\}.$$

Определим интегральный оператор $I : H \to H$ по правилу

$$If = \int_0^x f(s)\, ds - \left\langle \int_0^x f(s)\, ds \right\rangle.$$

Оператор I — обратный к оператору дифференцирования и вполне непрерывный.

Через $W(f,g)$ обозначим вронскиан функций f и g:

$$W(f,g) = f\,\frac{dg}{dx} - g\,\frac{df}{dx}.$$

Фигурными скобками будем обозначать отклонение периодической функции от ее среднего значения по периоду $\{F\} = F(x) - \langle F\rangle$. Функция θ характеризует отклонение скорости от ее среднего значения:

$$\theta'' = V - \langle V\rangle, \quad \langle\theta\rangle = 0.$$

Запишем уравнение (3) в виде системы скалярных уравнений (здесь и в дальнейшем применяются обозначения $\sigma = i\omega$; $x = x_1$, $z = \alpha x_2$)

$$\sigma\Phi_1 + \nu_c\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \alpha^2\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}\right) + \alpha V\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + V(x)\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\sigma\Phi_2 + \nu_c\left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} + \alpha^2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}\right) + 2\alpha V\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = -\alpha\,\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \alpha\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0, \quad \langle\Phi_2\rangle = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi}\Phi_1\,dz = 0. \tag{6}$$

Неизвестные поле скорости $\mathbf{\Phi}$ и давление $P(x,z)$ будем разыскивать в виде рядов по степеням параметра α:

$$\mathbf{\Phi} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{\Phi}^k\alpha^k, \quad P = \sum_{k=0}^{\infty}P^k\alpha^k. \tag{7}$$

Собственные значения σ и критическое значение вязкости ν_c также представим в виде рядов

$$\sigma(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k\alpha^k, \quad \nu_c = \nu_* + \sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\alpha^k. \tag{8}$$

В случае линеаризованного оператора Навье — Стокса линейная сопряженная задача (3) является более вырожденной по сравнению с линейной спектральной (2) — несколько первых членов асимптотики обращаются в нуль. Подставив разложения (7)–(8) в систему (4)–(6) и рассмотрев уравнения при $k = 0$ и $k = 1$, несложно убедиться, что выполняются равенства

$$P_0 = \Phi_2^0 = \Phi_2^1 = 0, \quad \Phi_1^0 = e^{-\mathrm{im}\,z}, \quad \Phi_1^1 = \Phi_1^1(z), \quad \sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = \mathrm{im}\,\langle V\rangle.$$

Для давления P^1 получаем выражение

$$P^1 = q_1^*(x)\,\frac{d\Phi_1^0}{dz} + \langle P^1\rangle, \quad q_1^* = -a_0(\theta),\; a_0(\theta) = \frac{d\theta}{dx}. \tag{9}$$

Всюду в дальнейшем через a_k^* и q_k^* обозначаются функции, через которые выражаются коэффициенты скорости $\mathbf{\Phi}^k$ и давления P^k линейной сопряженной задачи, а a_k и q_k — это соответствующие коэффициенты скорости $\boldsymbol{\varphi}^k$ и давления Q^k линейной спектральной задачи, найденные в [4].

В [4] показано, что коэффициенты разложений по степеням α собственных функций линейной спектральной задачи имеют следующую структуру:

$$\varphi_1^k = -\frac{1}{\nu_*^k}\,\frac{d^k\varphi_1^0}{dz^k}\,I(a_{k-1}(\theta)) - \frac{\nu_{k-1}}{\nu_*}\,\varphi_1^1,$$

$$Q^k = \frac{1}{\nu_*^{k-1}}\,\frac{d^k\varphi_1^0}{dz^k}\,q_k(\theta) - \frac{\nu_{k-2}}{\nu_*}\,\{Q^2\},$$

$$\varphi_2^k = \frac{1}{\nu_*^{k+1}}\,\frac{d^k\varphi_1^0}{dz^k}\,a_k(\theta) - \frac{\nu_k}{\nu_*}\,\varphi_2^0,$$

где a_k, q_k выражаются через a_j, q_j при $j \leqslant k-1$. Слагаемое, содержащее ν_{k-2} в выражении коэффициентов давления Q^k, появляется при четных $k \geqslant 4$.

Коэффициенты разложения собственных значений линейной спектральной задачи и критического значения вязкости при четных k имеют вид [4]

$$\sigma_k = 0, \quad \nu_{k-2} = \frac{(\mathrm{im})^{k-2}}{2\nu_*^{k-1}}\,\big\langle \theta' a_{k-2}(\theta)\big\rangle, \tag{10}$$

а при нечетных k

$$\sigma_k = -\frac{(-\mathrm{im})^k}{\nu_*^{k-1}}\,\big\langle \theta' a_{k-2}\big\rangle, \quad \nu_{k-2} = 0. \tag{11}$$

Здесь $m \neq 0$ — волновое число.

После подстановки разложений (7)–(8) в уравнения (4)–(6) и приравнивания коэффициентов при α^k приходим к системе для нахождения k-го члена асимптотики линейной сопряженной задачи при $k \geqslant 2$:

$$\begin{gathered}\nu_*\frac{\partial^2\varPhi_1^k}{\partial x^2} = -\frac{\partial P^k}{\partial x} - \sigma_1\varPhi_1^{k-1} - V(x)\,\frac{\partial\varPhi_1^{k-1}}{\partial z} - \sigma_k\varPhi_1^0(z) - V(x)\,\frac{\partial\varPhi_2^k}{\partial x}\\ -\nu_*\frac{\partial^2\varPhi_1^{k-2}}{\partial z^2} - \nu_{k-2}\frac{d^2\varPhi_1^0}{dz^2} - \sum_{j=2}^{k-3}\nu_j\frac{\partial^2\varPhi_1^{k-j}}{\partial x^2} - \sum_{j=3}^{k-3}\sigma_j\varPhi_1^{k-j} - \sum_{j=2}^{k-5}\nu_j\frac{\partial^2\varPhi_1^{k-j-2}}{\partial z^2},\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\nu_*\frac{\partial^2\varPhi_2^k}{\partial x^2} = -\frac{\partial P^{k-1}}{\partial z} - \sigma_1\varPhi_2^{k-1} - 2V(x)\,\frac{\partial\varPhi_2^{k-1}}{\partial z} - \nu_*\frac{\partial^2\varPhi_2^{k-2}}{\partial z^2}\\ -\sum_{j=2}^{k-2}\nu_j\frac{\partial^2\varPhi_2^{k-j}}{\partial x^2} - \sum_{j=3}^{k-2}\sigma_j\varPhi_2^{k-j} - \sum_{j=2}^{k-4}\nu_j\frac{\partial^2\varPhi_2^{k-2-j}}{\partial z^2},\end{gathered} \tag{13}$$

$$\frac{\partial\varPhi_1^k}{\partial x} + \frac{\partial\varPhi_2^{k-1}}{\partial z} = 0, \quad \big\langle\varPhi_2^k\big\rangle = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi}\varPhi_1^k\,dz = 0. \tag{14}$$

Предполагается, что суммирование происходит по тем значениям j, для которых верхняя граница суммы не меньше нижней.

Будем разыскивать решения системы (12)–(14), периодические по x и по z с периодом 2π. Условием разрешимости уравнений (12) и (13) является равенство нулю среднего правой части по переменной x. Осредненное уравнение (12) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\big\langle\Phi_1^{k-j}\big\rangle + \langle V\rangle\,\frac{d\big\langle\Phi_1^{k-1}\big\rangle}{dz} + \left\langle\theta''\left(\frac{\partial\Phi_1^{k-1}}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_2^k}{\partial x}\right)\right\rangle - \sum_{j=0}^{k-2}\nu_j\,\frac{d^2}{dz^2}\,\big\langle\Phi_1^{k-2-j}\big\rangle = 0. \tag{15}$$

Среднее давления находим из условия разрешимости уравнения (13):

$$\frac{d}{dz}\left\langle P^{k-1}\right\rangle = -2\left\langle V(x)\,\frac{\partial \varPhi_2^{k-1}}{\partial z}\right\rangle. \tag{16}$$

Приведем схему нахождения k-го члена асимптотики. Пусть $\varPhi_2^{k-1}$ известно. Тогда из уравнения неразрывности (14) находим $\varPhi_1^k$:

$$\varPhi_1^k = -I\left(\frac{\partial \varPhi_2^{k-1}}{\partial z}\right) + \left\langle \varPhi_1^k\right\rangle. \tag{17}$$

Затем из условия разрешимости уравнения (13) находим среднее давления $\langle P^{k-1}\rangle$, а из уравнения (13) — $\varPhi_2^k$. Далее из условия разрешимости уравнения (12) находим σ_{k+2}, ν_k и $\langle \varPhi_1^{k-1}\rangle$. Наконец, из уравнения (12) находим P^k. Далее процесс повторяется.

Продолжим нахождение первых членов асимптотики. Пусть $k=2$. Так как $\Phi_2^1 = 0$, то из уравнения неразрывности (14) следует, что $\Phi_1^2 = \Phi_1^2(z)$. Из (16) получаем, что $\frac{d}{dz}\langle P^1\rangle = 0$. Тогда, подставив в (13) известное выражение P^1 из (9), приходим к уравнению для нахождения $\varPhi_2^2$:

$$\nu_*\frac{\partial^2 \varPhi_2^2}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varPhi_1^0}{dz^2}\,\theta'(x).$$

Отсюда

$$\varPhi_2^2 = \frac{1}{\nu_*}\,\frac{d^2\varPhi_1^0}{dz^2}\,a_2^*(\theta), \quad a_2^*(\theta) = I^2(a_0) = I\theta. \tag{18}$$

Из условия разрешимости уравнения (12) находим $\sigma_2 = 0$, $\nu_*^2 = \langle(\theta')^2\rangle$, $\Phi_1^1(z) = 0$. Подставив найденные выражения Φ_1^1, Φ_1^2, Φ_2^2 в (12) при $k=2$, получим P^2:

$$P^2 = \frac{1}{\nu_*}\,\frac{d^2\varPhi_1^0}{dz^2}\,q_2^*(x) + \left\langle P^2\right\rangle, \quad q_2^* = -I\left\{\theta''\frac{\partial a_2^*}{\partial x}\right\} - \langle V\rangle a_2^* \equiv \tilde q_2^* - \langle V\rangle a_2^*, \tag{19}$$

$a_2^*(\theta)$ определено в (18). Далее будем пользоваться обозначением $\tilde q_n^* = q_n^* + \langle V\rangle a_n^*$.

Рассмотрим систему (12)–(14) при $k=3$. Зная Φ_2^2, из уравнения неразрывности по формуле (17) находим Φ_1^3. С учетом условия разрешимости уравнение (13) принимает вид

$$\nu_*\frac{\partial^2\varPhi_2^3}{\partial x^2} = -\sigma_1\varPhi_2^2 - 2\left\{V(x)\,\frac{\partial\varPhi_2^2}{\partial z}\right\} - \frac{\partial\{P^2\}}{\partial z} - \nu_1\frac{\partial^2\varPhi_2^2}{\partial x^2}. \tag{20}$$

После подстановки P^2 из (19) и $\varPhi_2^2$ из (18) в (20) и применения интегрального оператора I дважды, выделим старшие члены относительно производных по z функции $\varPhi_1^0$:

$$\varPhi_2^3 = \frac{1}{\nu_*^2}\,\frac{d^3\varPhi_1^0}{dz^3}\,b_3^*(\theta) - \frac{\sigma_1}{\nu_*}\,I^2\varPhi_2^2 - \frac{\nu_1}{\nu_*}\,\varPhi_2^2, \quad b_3^* = -I^2\big[2V(x)I^2(a_0) + q_2^*(\theta)\big]. \tag{21}$$

Нам понадобится также форма представления $\varPhi_2^3$, в которой учтено выражение σ_1:

$$\varPhi_2^3 = \frac{1}{\nu_*^2}\,\frac{d^3\varPhi_1^0}{dz^3}\,a_3^*(\theta) - \frac{\nu_1}{\nu_*}\,\varPhi_2^2, \quad a_3^*(\theta) = -I^2\left[2\theta'' a_2^* - I\left\{\theta''\,\frac{da_2^*}{dx}\right\}\right]. \tag{22}$$

Выпишем условие разрешимости уравнения (12). Подставив в (15) при $k=3$ выражение $\varPhi_2^3$ (22), приходим к равенству

$$\langle V\rangle\left(\varPhi_1^2(z) + \frac{d\varPhi_1^2}{dz}\right) = -\sigma_3\varPhi_1^0(z) + \frac{1}{\nu_*^2}\,\frac{d^3\varPhi_1^0}{dz^3}\left\langle\theta'(a_3^*)''\right\rangle - 2\nu_1\frac{d^2\varPhi_1^0}{dz^2}. \tag{23}$$

Из условия разрешимости уравнения (23) находим

$$\sigma_3 = \frac{im^3}{\nu_*^2}\left\langle\theta'(a_3^*)''\right\rangle, \quad \nu_1 = 0. \tag{24}$$

Убедимся, что σ_3 из (11) и (24) совпадают, т. е. выполняется равенство

$$-\left\langle a_0(a_3^*)''\right\rangle = \left\langle a_1(a_2^*)''\right\rangle, \tag{25}$$

где $a_1 = -I\{W(\theta,\theta')\}$. Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма (о вронскиане)**.** *Для любых непрерывно дифференцируемых ℓ_1-периодических по x функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ справедлива формула*

$$-2\langle fgh\rangle + \left\langle fI\left\{g\,\frac{\partial h}{\partial x}\right\}\right\rangle = \left\langle W(I\{f\},g)h\right\rangle.$$

Лемму легко доказать, дважды применив интегрирование по частям.

Для проверки соотношения (25) воспользуемся выражением a_3^* (22) и применим лемму о вронскиане:

$$-\left\langle a_0(a_3^*)''\right\rangle = 2\left\langle\theta'\theta''a_2^*\right\rangle - \left\langle\theta' I\left\{\theta''\frac{\partial a_2^*}{\partial x}\right\}\right\rangle = -\left\langle W(\theta,\theta'')a_2^*\right\rangle.$$

По свойству вронскиана $W(\theta,\theta'') = \frac{d}{dx}W(\theta,\theta')$. Тогда

$$-\left\langle\frac{d}{dx}\,W(\theta,\theta')a_2^*\right\rangle = -\left\langle I\big\{W(\theta,\theta')\big\}\,\frac{d^2a_2^*}{dx^2}\right\rangle = \left\langle a_1\frac{d^2a_2^*}{dx^2}\right\rangle,$$

и равенство (25) доказано. Из (24) следует, что правая часть (23) равна нулю и $\Phi_1^2(z)$ удовлетворяет однородному уравнению. Чтобы исключить тривиальную неединственность, положим $\Phi_1^2(z) = 0$.

Найдем P^3 из уравнения (12) при $k = 3$. Воспользовавшись условием разрешимости (15), приведем данное уравнение к виду

$$-\frac{\partial P^3}{\partial x} = \left\{V(x)\,\frac{\partial\Phi_2^3}{\partial x}\right\} + \nu_*\frac{\partial^2\Phi_1^3}{\partial x^2}. \tag{26}$$

Подставив в (26) известные Φ_2^3 и Φ_1^3, находим третий член асимптотики давления

$$P^3 = \frac{1}{\nu_*^2}\,\frac{d^3\Phi_1^0}{dz^3}\,q_3^*(x) + \left\langle P^3\right\rangle, \quad q_3^* = -I\left\{\theta''\frac{\partial a_3^*}{\partial x}\right\} + \nu_*^2a_2^* - \langle V\rangle a_3^*. \tag{27}$$

Рассмотрим систему (12)–(14) при $k = 4$. Зная Φ_2^3, из уравнения неразрывности по формуле (17) находим Φ_1^4. Воспользовавшись условием разрешимости (16) при $k = 4$, уравнение (13) перепишем в виде

$$\nu_*\frac{\partial^2\Phi_2^4}{\partial x^2} = -\sigma_1\Phi_2^3 - 2\left\{V(x)\,\frac{\partial\Phi_2^3}{\partial z}\right\} - \frac{\partial\{P^3\}}{\partial z} - \nu_*\frac{\partial^2\Phi_2^2}{\partial z^2} - \nu_2\frac{\partial^2\Phi_2^2}{\partial x^2}. \tag{28}$$

Учитывая найденные ранее выражения Φ_2^2, Φ_2^3, P^3, получаем

$$\Phi_2^4 = \frac{1}{\nu_*^3}\,\frac{d^4\Phi_1^0}{dz^4}\,a_4^* - \frac{\nu_2}{\nu_*}\,\Phi_2^2, \quad a_4^*(\theta) = -I^2\big[2\{\theta''a_3^*\} + \widetilde{q_3^*} + \nu_*^2a_2^*\big]. \tag{29}$$

Подставив в (15) при $k=4$ выражение Φ_2^4 (29), приходим к равенству

$$\langle V\rangle\left(\Phi_1^3(z)+\frac{d\Phi_1^3}{dz}\right)=-\sigma_4\Phi_1^0(z)+\frac{1}{\nu_*^3}\frac{d^4\Phi_1^0}{dz^4}\left\langle\theta'\bigl((a_4^*)''-\nu_*^2a_2^*\bigr)\right\rangle-2\nu_2\frac{d^2\Phi_1^0}{dz^2}. \qquad (30)$$

Из условия разрешимости уравнения (30) находим

$$\sigma_4=0,\quad \nu_2=-\frac{m^2}{2\nu_*^3}\left\langle\theta'\bigl((a_4^*)''-\nu_*^2a_2^*\bigr)\right\rangle. \qquad (31)$$

Убедимся, что ν_2 из (10) и (31) совпадают, т. е. выполняется равенство

$$\bigl\langle a_0(a_4^*)''\bigr\rangle-\nu_*^2\bigl\langle a_0a_2^*\bigr\rangle=\bigl\langle a_2(a_2^*)''\bigr\rangle, \qquad (32)$$

где $a_2=-I^2\{W(Ia_1,\theta'')\}-3\nu_*^2I\theta$ [4].

Для проверки равенства (32) применим лемму о вронскиане дважды. Подставим в левую часть (32) выражение a_4^* из (29) и воспользуемся леммой:

$$\begin{aligned}\bigl\langle a_0\bigl((a_4^*)''-\nu_*^2a_2^*\bigr)\bigr\rangle&=-2\bigl\langle\theta'\{\theta''a_3^*\}\bigr\rangle+\bigl\langle\theta'I\{\theta''(a_3^*)'\}\bigr\rangle-3\nu_*^2\bigl\langle\theta'a_2^*\bigr\rangle\\&=\bigl\langle W(\theta,\theta'')a_3^*\bigr\rangle-3\nu_*^2\bigl\langle\theta'a_2^*\bigr\rangle=-\bigl\langle a_1(a_3^*)''\bigr\rangle-3\nu_*^2\bigl\langle\theta'a_2^*\bigr\rangle.\end{aligned} \qquad (33)$$

На втором шаге воспользуемся выражением a_3^* из (22) и вновь применим лемму:

$$\begin{aligned}-\bigl\langle a_1(a_3^*)''\bigr\rangle-3\nu_*^2\bigl\langle\theta'a_2^*\bigr\rangle&=2\bigl\langle a_1\theta''a_2^*\bigr\rangle-\bigl\langle a_1I\{\theta''(a_2^*)'\}\bigr\rangle-3\nu_*^2\bigl\langle\theta'a_2^*\bigr\rangle\\&=-\bigl\langle W(Ia_1,\theta'')a_2^*\bigr\rangle-3\nu_*^2\bigl\langle\theta'a_2^*\bigr\rangle=\bigl\langle(a_2)''a_2^*\bigr\rangle,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Заметим, что из (33) вытекает еще одно соотношение между коэффициентами линейной и линейной сопряженной задачи:

$$\bigl\langle a_0(a_4^*)''\bigr\rangle+\bigl\langle a_1(a_3^*)''\bigr\rangle+2\nu_*^2\bigl\langle a_0a_2^*\bigr\rangle=0. \qquad (34)$$

Учитывая (31), из (30) получаем, что $\Phi_1^3(z)=0$. Для четных и нечетных k соотношения, аналогичные (34), различны [5]. Применив лемму о вронскиане, при $k=3,5,7$ приходим к равенствам

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{k-2}\bigl\langle a_j(a_{k-j}^*)''\bigr\rangle+2\nu_*^2\sum_{j=0}^{k-4}\bigl\langle a_ja_{k-2-j}^*\bigr\rangle+\nu_*^4\sum_{j=0}^{k-6}\bigl\langle I^2a_ja_{k-4-j}^*\bigr\rangle\\&\qquad+\frac{\langle\theta'a_2\rangle}{2\nu_*^2}\sum_{j=0}^{k-6}\bigl\langle a_{j+1}(a_{k-3-j}^*)''\bigr\rangle=0,\end{aligned} \qquad (35)$$

а при $k=4,6$ имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{k-3}\bigl\langle a_j(a_{k-j}^*)''\bigr\rangle+2\nu_*^2\sum_{j=0}^{k-4}\bigl\langle a_ja_{k-2-j}^*\bigr\rangle+\nu_*^4\sum_{j=0}^{k-6}\bigl\langle I^2a_ja_{k-4-j}^*\bigr\rangle\\&\qquad+\frac{\langle\theta'a_2\rangle}{2\nu_*^2}\sum_{j=0}^{k-5}\bigl\langle a_j(a_{k-2-j}^*)''\bigr\rangle=\frac{\langle\theta'a_2\rangle^2}{4\nu_*^4}\sum_{j=0}^{k-6}\bigl\langle a_j(a_{k-4-j}^*)''\bigr\rangle.\end{aligned} \qquad (36)$$

3. Общий член асимптотики

К началу $k+1$ итерации при $k \leqslant 7$ известно [5], что коэффициенты разложений собственных функций линейной сопряженной задачи имеют следующую структуру:

$$\varPhi_1^k = -\frac{1}{\nu_*^{k-2}} \frac{d^k \varPhi_1^0}{dz^k} I(a_{k-1}^*) - \frac{\nu_{k-3}}{\nu_*} \varPhi_1^3, \tag{37}$$

$$\varPhi_2^k = \frac{1}{\nu_*^{k-1}} \frac{d^k \varPhi_1^0}{dz^k} a_k^* - \frac{\nu_{k-2}}{\nu_*} \varPhi_2^2, \tag{38}$$

$$P^k = \frac{1}{\nu_*^{k-1}} \frac{d^k \varPhi_1^0}{dz^k} q_k^* - \frac{\nu_{k-2}}{\nu_*} \{P^2\} + \langle P^k \rangle, \tag{39}$$

где a_k^*, q_k^* выражаются через a_j^*, q_j^* при $j \leqslant k-1$. Слагаемое, содержащее ν_{k-2} в выражении коэффициентов давления P^k, появляется при четных k, удовлетворяющих условию $k \geqslant 4$.

Более подробные выражения собственных функций имеют вид

$$\begin{gathered} \varPhi_1^k = -\frac{1}{\nu_*^{k-2}} \frac{d^k \varPhi_1^0}{dz^k} I(b_{k-1}^*) - \frac{\nu_{k-4}}{\nu_*} \varPhi_1^4 \\ -\sum_{j=3}^{k-3} \frac{\sigma_j}{\nu_*} I^2\big(\varPhi_1^{k-j}\big) - \sum_{j=2}^{k-3} \frac{\nu_j}{\nu_*} \varPhi_1^{k-j} - \sum_{j=2}^{k-6} \frac{\nu_j}{\nu_*} I^2 \left(\frac{\partial^2 \varPhi_1^{k-2-j}}{\partial z^2} \right), \end{gathered} \tag{40}$$

$$\begin{gathered} \varPhi_2^k = \frac{1}{\nu_*^{k-1}} \frac{d^k \varPhi_1^0}{dz^k} b_k^* - \frac{\nu_{k-3}}{\nu_*} \varPhi_2^3 \\ -\sum_{j=2}^{k-2} \frac{\nu_j}{\nu_*} \varPhi_2^{k-j} - \sum_{j=3}^{k-2} \frac{\sigma_j}{\nu_*} I^2\big(\varPhi_2^{k-j}\big) - \sum_{j=2}^{k-5} \frac{\nu_j}{\nu_*} I^2 \left(\frac{\partial^2 \varPhi_2^{k-2-j}}{\partial z^2} \right), \end{gathered} \tag{41}$$

где

$$b_k^* = -I^2\big[2\{\theta'' a_{k-1}^*\} + \tilde{q}_{k-1}^* + \nu_*^2 a_{k-2}^*\big], \quad q_k^* = \tilde{q}_k^* - \langle V \rangle a_k^*, \tag{42}$$

$$\tilde{q}_k^* = -I\left\{\theta''\left(\frac{da_k^*}{dx} - \nu_*^2 I(a_{k-2}^*)\right)\right\} + \nu_*^4 I^2(a_{k-3}^*) + \nu_*^2 b_{k-1}^* - \frac{\langle \theta' a_{k-4} \rangle}{2} \big(I\{\theta'' I a_2^*\} + a_3^*\big). \tag{43}$$

Последнее слагаемое в (43) присутствует только при четных k.

Так как при $k \leqslant 7$ известно, что $\langle \varPhi_1^1 \rangle = \ldots = \langle \varPhi_1^{k-2} \rangle = 0$, то уравнение (15) принимает вид

$$\langle V \rangle \left(\big\langle \varPhi_1^{k-1} \big\rangle + \frac{d}{dz} \big\langle \varPhi_1^{k-1} \big\rangle \right) = -\sigma_k \varPhi_1^0(z) - \left\langle \theta''(x) \left(\frac{\partial \varPhi_2^k}{\partial x} + \frac{\partial \varPhi_1^{k-1}}{\partial z} \right) \right\rangle - \nu_{k-2} \frac{d^2 \varPhi_1^0}{dz^2}. \tag{44}$$

Условием разрешимости уравнения (44) является ортогональность правой части решению однородного сопряженного уравнения.

Пусть k четное. Тогда из условия разрешимости, отделяя вещественную и мнимую части, находим

$$\sigma_k = 0, \quad \nu_{k-2} = \frac{(\mathrm{im})^{k-2}}{\nu_*^{k-1}} \left[\big\langle \theta'(a_k^*)'' \big\rangle - \nu_*^2 \big\langle \theta' a_{k-2}^* \big\rangle + \frac{1}{2} \big\langle \theta' a_{k-4} \big\rangle \big\langle \theta' a_2^* \big\rangle \right]. \tag{45}$$

Сравнивая (45) с (10) и учитывая, что собственные значения и критическое значение вязкости в линейной спектральной и линейной сопряженной задаче совпадают, получим связь между коэффициентами линейной и линейной сопряженной задачи при четных k:

$$\big\langle\theta'(a_k^*)''\big\rangle - \nu_*^2\big\langle\theta' a_{k-2}^*\big\rangle + \frac{1}{2}\,\big\langle\theta' a_{k-4}\big\rangle\big\langle\theta' a_2^*\big\rangle = \big\langle\theta' a_{k-2}\big\rangle. \tag{46}$$

При нечетных k вместо (45) приходим к равенствам

$$\nu_{k-2} = 0, \quad \sigma_k = \frac{(-\mathrm{im})^k}{\nu_*^{k-1}}\big[\big\langle\theta'(a_k^*)''\big\rangle - \nu_*^2\big\langle\theta' a_{k-2}^*\big\rangle\big], \tag{47}$$

а из (11) и (47) вместо (46) получим соотношения

$$\big\langle\theta'(a_k^*)''\big\rangle - \nu_*^2\big\langle\theta' a_{k-2}^*\big\rangle = -\big\langle\theta' a_{k-2}\big\rangle. \tag{48}$$

Так как правая часть (44) равна нулю, то $\langle\Phi_1^{k-1}\rangle = 0$.

Заметим, что левые части равенств (46) и (48) можно преобразовать в правые, если применить лемму о вронскиане $k-2$ раза. При этом в качестве промежуточных результатов при $k \leqslant 7$ приходим к соотношениям между коэффициентами линейной и линейной сопряженной задачи (35) и (36).

Предположим, что формулы (37)–(43), (45), (47) справедливы при $n = k$. Докажем, что они выполняются для $n = k+1$. Для нахождения Φ_1^{k+1} воспользуемся (17). Очевидно, Φ_1^{k+1} находится по формулам (40), (42)–(43), если в них k заменить на $k+1$.

Для нахождения Φ_2^{k+1} сгруппируем слагаемые в правой части (13), заменив k на $k+1$, и преобразуем их по отдельности. С учетом выражения среднего давления (16) и уравнения (20) для нахождения Φ_2^3 получим

$$\begin{aligned} \sigma_1\Phi_2^{k-1} + 2V(x)\,\frac{\partial\Phi_2^{k-1}}{\partial z} + \frac{\partial P^{k-1}}{\partial z} &= 2\Big\{\theta''\frac{\partial\Phi_2^{k-1}}{\partial z}\Big\} + \langle V\rangle\,\frac{\partial\Phi_2^{k-1}}{\partial z} + \frac{\partial\{P^{k-1}\}}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\nu_*^{k-2}}\,\frac{d^k\Phi_1^0}{dz^k}\,\big[2\{\theta'' a_{k-1}^*\} + \tilde q_{k-1}^*\big] + \nu_{k-2}\frac{\partial^2\Phi_2^3}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{49}$$

Воспользовавшись выражением Φ_2^{k-1}, из (13) и (49) выводим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi_2^{k+1}}{\partial x^2} &= \frac{1}{\nu_*^k}\,\frac{d^{k+1}\Phi_1^0}{dz^{k+1}}\big[-2\{\theta'' a_k^*\} - \tilde q_k^* - \nu_*^2 a_{k-1}^*\big] - \frac{\nu_{k-2}}{\nu_*}\,\frac{\partial^2\Phi_2^3}{\partial x^2} \\ &- \sum_{j=2}^{k-1}\frac{\nu_j}{\nu_*}\,\frac{\partial^2\Phi_2^{k+1-j}}{\partial x^2} - \sum_{j=3}^{k-1}\frac{\sigma_j}{\nu_*}\,\Phi_2^{k+1-j} - \sum_{j=2}^{k-4}\frac{\nu_j}{\nu_*}\,\frac{\partial^2\Phi_2^{k-1-j}}{\partial z^2}, \end{aligned} \tag{50}$$

отсюда находим Φ_2^{k+1} по формулам (41)–(43) (заменой k на $k+1$).

Осредненное уравнение (13) при α^{k+1} имеет вид (44), если k заменить на $k+1$. Из условия разрешимости этого уравнения находим ν_{k-1} и σ_{k+1}. Получим формулы (45), (47) с учетом указанной замены. Тогда $\langle\Phi_1^k\rangle = 0$.

С учетом найденных ν_{k-1} и σ_{k+1}, а также Φ_1^{k-1} и Φ_1^{k+1}, заменив в (12) k на $k+1$, приходим к уравнению для нахождения давления:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P^{k+1}}{\partial x} &= \Big\{\theta''\Big(\frac{\partial\Phi_2^{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_1^k}{\partial z}\Big)\Big\} + \langle V\rangle\frac{\partial\Phi_2^{k+1}}{\partial x} \\ &- \frac{1}{\nu_*^{k-4}}\,\frac{d^{k+1}\Phi_1^0}{dz^{k+1}}\,I(a_{k-2}^*) - \frac{1}{\nu_*^{k-2}}\,\frac{d^{k+1}\Phi_1^0}{dz^{k+1}}\,\frac{db_k^*}{dx} - \nu_{k-3}\frac{\partial^2\Phi_1^4}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{51}$$

Воспользовавшись известными выражениями $\varPhi_1^k$, $\varPhi_2^{k+1}$, а также уравнением для нахождения P^2, преобразуем (51) к виду

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial P^{k+1}}{\partial x} &= \frac{1}{\nu_*^k}\,\frac{d^{k+1}\varPhi_1^0}{dz^{k+1}}\left[\left\{\theta''\left(\frac{da^*_{k+1}}{dx}-\nu_*^2 I(a^*_{k-1})\right)\right\}+\langle V\rangle\,\frac{da^*_{k+1}}{dx}\right. \\
&\left.-\nu_*^4 I(a^*_{k-2})-\nu_*^2\frac{db^*_k}{dx}\right]+\frac{\nu_{k-1}}{\nu_*}\,\frac{\partial P^2}{\partial x}-\frac{\nu_{k-3}}{\nu_*}\left[\nu_*\frac{\partial^2\varPhi_1^4}{\partial x^2}+\left\{\theta''\frac{\partial\varPhi_1^3}{\partial z}\right\}\right],
\end{aligned}
\tag{52}
$$

причем слагаемые в (52), содержащие ν_{k-1} и ν_{k-3}, отличны от нуля только для нечетных k. Подставив в (52) известные выражения $\varPhi_1^3$ и $\varPhi_1^4$, а также ν_{k-3}, находим P^{k+1} по формулам (39), (43), в которых k нужно заменить на $k+1$, что и требовалось доказать.

Заключение. В настоящей работе выведены рекуррентные формулы для нахождения k-го члена длинноволновой асимптотики линейной сопряженной к задаче устойчивости стационарных двумерных сдвиговых течений вязкой жидкости с ненулевым средним $\langle V\rangle \neq 0$. Получены соотношения между коэффициентами асимптотических разложений линейной спектральной и линейной сопряженной задачи.

Пусть отклонение скорости от ее среднего значения $\{V\}$ является нечетной функцией, тогда $\theta(x)$ — нечетная функция. В этом случае из рекуррентных формул следует, что коэффициенты разложения собственных функций сопряженной задачи

$$a_k^*(\theta),\quad b_k^*(\theta),\quad \varPhi_j^k(\theta)$$

четные при k четном и нечетные при k нечетном. Аналогичное свойство коэффициентов асимптотики собственных функций выполнялось и в линейной спектральной задаче.

Что касается коэффициентов разложения давления, то в линейной сопряженной задаче при нечетной $\theta(x)$ коэффициенты

$$\tilde{q}_k^* = q_k^* + \langle V\rangle a_k^*$$

нечетные при k четном и четные при k нечетном. В то же время, для линейной спектральной задачи аналогичное свойство выполнялось непосредственно для коэффициентов разложения давления q_k.

Литература

1. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // Прикл. мат. и мех.—1971.—Т. 35, № 4.—С. 638–655.
2. *Юдович В. И.* О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач мат. физики.—М.: Наука, 1966.—С. 242–249.
3. *Мелехов А. П., Ревина С. В.* Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ.—2008.—№ 2.—С. 41–56.
4. *Ревина С. В.* Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // Журн. вычисл. мат. и мат. физ.—2013.—Т. 53, № 8.—С. 1387–1401.
5. *Ревина С. В.* Линейная сопряженная к задаче устойчивости двумерных сдвиговых течений вязкой жидкости с ненулевым средним.—М., 2014.—47 с.—Деп. в ВИНИТИ 11.08.14, № 228-В2014.

Статья поступила 31 марта 2016 г.

Ревина Светлана Васильевна
Институт математики, механики и компьютерных наук
Южного федерального университета,
доцент кафедры вычислительной математики и матем. физики
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `svrevina@sfedu.ru`

ON THE PROBLEM OF SHEAR FLOW STABILITY WITH RESPECT TO LONG-WAVE PERTURBATIONS

Revina S. V.

To find secondary flow branching to the steady flow it is necessary to consider linear spectral problem and linear adjoint problem. Long-wave asymptotics of linear adjoint problem in two-dimensional case is under consideration. We assume the periodicity with spatial variables when one of the periods tends to infinity. Recurrence formulas are obtained for the kth term of the velocity and pressure asymptotics. If the deviation of the velocity from its period-average value is an odd function of spatial variable, the velocity coefficients are odd for odd k and even for even k. The relations between coefficients of linear adjoint problem and linear spectral problem are obtained.

Key words: stability of two-dimensional viscous flows, long-wave asymptotics, linear adjoint problem.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 61–70

УДК **517.538**

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ СУММАМИ УИТТЕКЕРА И ИХ МОДИФИКАЦИЯМИ: УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ[1]

А. Я. Умаханов, И. И. Шарапудинов

Найдены достаточные условия равномерной сходимости на отрезке $[0,\pi]$ sinc-приближений — значений интерполяционнных операторов Уиттекера и некоторых модифицированных операторов.

Ключевые слова: sinc-функция, оператор Уиттекера, равномерная сходимость, условие Дини — Липшица, абсолютная непрерывность, ограниченная вариация, сумма Лейбница, преобразование Абеля.

1. Введение

Sinc-функция или кардинальный синус определяется формулой

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

и является целой функцией. При действительных значениях $x \neq 0$, ввиду известного неравенства $|\sin x| < |x|$, справедлива оценка $|\operatorname{sinc} x| < 1$. Зафиксируем натуральное n и рассмотрим сумму

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \operatorname{sinc} n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right), \tag{2}$$

которая сопоставляет каждой функции $f(x)$, определенной на $[0,\pi]$, целую функцию $L_n(f,x)$, совпадающую с $f(x)$ в узловых точках $x_k = x_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n$. Эта сумма называется *n-ой интерполяционной суммой* или *n-ым интерполяционным оператором Уиттекера.* Самого Э. Т. Уиттекера [1] интересовал вопрос о возможности восстановления функции на всей числовой прямой по ее значениям на некоторой равномерной сетке $\{kh\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $h > 0$, для чего он ввел в рассмотрение так называемую кардинальную функцию (или кардинальный ряд), сужение которой на отрезок $[0,\pi]$ в случае $h = \frac{\pi}{n}$ имеет вид (2). Независимо аналогичные ряды по sinc-функциям применяли В. А. Котельников [2] и К. Э. Шеннон [3] для однозначного восстановления сигнала по его дискретным отсчетам, и соответствующая теорема в теории информации носит имена Уиттекера, Котельникова и Шеннона. Впоследствии кардинальные ряды Уиттекера нашли широкое применение в численных методах, теории приближения и интерполяции различных классов функций, решении дифференциальных и интегральных уравнений, в теории информации. В частности, этим вопросам посвящены работы [4–13].

[1] Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00486.

Здесь нас интересует вопрос сходимости $\{L_n(f,x)\}$ на отрезке $[0,\pi]$. Первые задачи подобного рода для аналитических функций были рассмотрены в [14–18]. В [19] и [20] получен критерий равномерной сходимости сумм (2) внутри интервала $(0,\pi)$, аналогичный критерию А. А. Привалова равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа [21]. В частности, следствие из теоремы 6 в [20] утверждает, что на любом отрезке $[a,b]$, $0<a<b<\pi$, $\{L_n(f,x)\}$ равномерно сходятся к $f(x)$, если эта функция удовлетворяет условию Дини — Липщица:

$$\lim_{t\to+0}\omega(f,t)\ln t=0, \tag{3}$$

где

$$\omega(f,t)=\sup_{\substack{|x_2-x_1|\leqslant t,\\ 0\leqslant x_1,x_2\leqslant\pi}}|f(x_2)-f(x_1)|$$

— модуль непрерывности $f(x)$ на отрезке $[0,\pi]$. Но равномерной сходимости на всем отрезке $[0,\pi]$ нет даже для функции $f(x)\equiv 1$. В настоящей статье найдены достаточные условия на функцию $f(x)$, при соблюдении которых $\{L_n(f,x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[0,\pi]$. Кроме того, сконструированы модификации операторов Уиттекера, обладающие свойством равномерной сходимости на $[0,\pi]$ при несколько менее ограничительных условиях на $f(x)$.

2. Условия равномерной сходимости sinc-приближений

Впервые задача о равномерной сходимости sinc-приближений для функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0,\pi]$, была рассмотрена в [22]. В частности, в [22] доказано, что любая исчезающая на концах отрезка $[0,\pi]$ функция из класса Дини — Липшица может быть приближена операторами (2) равномерно на всем отрезке $[0,\pi]$. Мы приведем здесь доказательство этого утверждения, отличное от предложенного в работе [22], при дополнительном требовании об абсолютной непрерывности функции f на $[0,\pi]$. А именно, справедливо

Предложение 1. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Дини — Липщица на $[0,\pi]$ и пусть $f(0)=f(\pi)=0$. Тогда последовательность функций $\{L_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$, определеных формулой (2), равномерно сходится к $f(x)$ на $[0,\pi]$.*

Для доказательства этого предложения нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ — монотонная последовательность неотрицательных (неположительных) чисел. Тогда*

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right|\leqslant\max\{|a_0|,|a_n|\}. \tag{4}$$

$\lhd$ По аналогии с рядами Лейбница такие суммы будем называть суммами Лейбница. Поскольку

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(-a_k)\right|=\left|-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right|,$$

то можно считать, что $a_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, \dots, n$. Предположим также, что последовательность $\{a_k\}_{k=0}^n$ невозрастающая. Если $n = 2m$, то

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) + a_{2m} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a_k \\ = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \dots - (a_{2m-1} - a_{2m}) \leqslant a_0. \end{aligned}$$

Если же $n = 2m - 1$, то

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) = \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k a_k \\ = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \dots - (a_{2m-3} - a_{2m-2}) - a_{2m-1} \leqslant a_0. \end{aligned}$$

В случае неубывающей последовательности неотрицательных чисел аналогичные выкладки приводят к неравенству $\left|\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k\right| \leqslant a_n$. $\rhd$

Лемма 2. *При* $n \geqslant 1$, $0 \leqslant m \leqslant n$ *и* $x \in (-\infty, +\infty)$ *верно неравенство*

$$\left| \sum_{k=0}^{m} \operatorname{sinc} n \left(x - \frac{k\pi}{n} \right) \right| < 2. \tag{5}$$

$\lhd$ Если x совпадает с одним из узлов $x_k = \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, m$, то левая часть (5) равна 1 и неравенство верно. Пусть $\frac{s\pi}{n} < x < \frac{(s+1)\pi}{n}$ для некоторого целого s, $0 < s < m$. Преобразуем оцениваемую сумму к виду

$$\sum_{k=0}^{m} \operatorname{sinc} n \left(x - \frac{k\pi}{n} \right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} = \sin nx \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{nx - k\pi}$$

и разобьем ее на две части

$$S_1 = \sin nx \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k}{nx - k\pi}, \quad S_2 = \sin nx \sum_{k=s+1}^{m} \frac{(-1)^k}{nx - k\pi}.$$

Согласно выбору s, $\{nx - k\pi\}_{k=0}^s$ и $\{nx - k\pi\}_{k=s+1}^m$ — убывающие последовательности соответственно положительных и отрицательных чисел. Следовательно, обе последовательности $\{(nx - k\pi)^{-1}\}_{k=0}^s$ и $\{(nx - k\pi)^{-1}\}_{k=s+1}^m$ являются возрастающими последовательностями чисел одного знака. Таким образом, обе суммы являются суммами Лейбница, и из неравенства (4) леммы 1 получаем оценки

$$\begin{aligned} |S_1| \ \leqslant \frac{|\sin nx|}{|nx - s\pi|} = \left| \frac{\sin(nx - s\pi)}{nx - s\pi} \right| = |\operatorname{sinc}(nx - s\pi)| < 1, \\ |S_2| \ \leqslant \frac{|\sin nx|}{|nx - (s+1)\pi|} = \left| \frac{\sin(nx - (s+1)\pi)}{nx - (s+1)\pi} \right| = |\operatorname{sinc}(nx - (s+1)\pi)| < 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Складывая последние неравенства, получаем неравенство (5). Если же $x < 0$ или $x > \frac{m\pi}{n}$, то вся сумма $\sum_{k=0}^m \operatorname{sinc} n(x - \frac{k\pi}{n})$ является суммой Лейбница и по лемме 1 не превосходит $\max\{|\operatorname{sinc} nx|, |\operatorname{sinc}(nx - s\pi)|\} \leqslant 1$, так что неравенство (5) верно и в этом случае. $\rhd$

Замечание 1. Оценку (5) можно уточнить. При $0 < s < m$ и $\frac{s\pi}{n} < x < \frac{(s+1)\pi}{n}$, согласно неравенствам (6),

$$
\begin{aligned}
|S_1| + |S_2| &\leqslant |\sin nx| \left(\frac{1}{|nx - s\pi|} + \frac{1}{|nx - (s+1)\pi|} \right) \\
&= |\sin nx| \left(\frac{1}{nx - s\pi} - \frac{1}{nx - (s+1)\pi} \right) \\
&= \sin(nx - s\pi) \left(\frac{1}{nx - s\pi} + \frac{1}{\pi - (nx - s\pi)} \right) \\
&= \sin t \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\pi - t} \right) = \frac{\pi \sin t}{t(\pi - t)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(t),
\end{aligned}
$$

где $t = nx - s\pi$, $0 < t < \pi$. Так как $\varphi(t) = \operatorname{sinc} t + \operatorname{sinc}(\pi - t)$, то эта функция определена на $(-\infty, +\infty)$. В частности, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 1$. Производная $\varphi(t)$ имеет вид

$$
\varphi'(t) = \frac{\pi p(t)}{t^2(\pi - t)^2},
$$

где $p(t) = (\pi t - t^2)\cos t - (\pi - 2t)\sin t$. Легко видеть, что $p(0) = p(\frac{\pi}{2}) = p(\pi) = 0$. Далее, $p'(t) = (t^2 - \pi t + 2)\sin t = 0$ при $t = 0$, $t = \pi$, $t_1 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$ и $t_2 = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$, причем $0 < t_1 < \frac{\pi}{2} < t_2 < \pi$.

Очевидно, что $p'(t) > 0$ при $0 < t < t_1$ и $p'(t) < 0$ при $t_1 < t < \frac{\pi}{2}$. Это вместе с равенствами $p(0) = p(\frac{\pi}{2}) = 0$ влечет, что $p(t) > 0$ на $(0, \frac{\pi}{2})$. Следовательно, $\varphi'(t) > 0$ на $(0, \frac{\pi}{2})$, т. е. $\varphi(t)$ возрастает на $(0, \frac{\pi}{2})$. Отсюда и из соотношения $\varphi(t) = \varphi(\pi - t)$ вытекает, что $\varphi(t)$ убывает на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Таким образом, в точке $t = \frac{\pi}{2}$ функция $\varphi(t)$ достигает своего наибольшего значения $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi}$ и

$$
\left| \sum_{k=0}^{m} \operatorname{sinc} n \left(x - \frac{k\pi}{n} \right) \right| \leqslant \frac{4}{\pi}. \tag{7}
$$

Последняя оценка не улучшаема. Знак равенства достигается при $n = m = 1$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

Замечание 2. Неравенства (5) и (7) остаются верными и для сумм

$$
\sum_{k=m_1}^{m} \operatorname{sinc} n \left(x - \frac{k\pi}{n} \right),
$$

так как

$$
\sum_{k=m_1}^{m} \operatorname{sinc} n \left(x - \frac{k\pi}{n} \right) = \sum_{k=0}^{m-m_1} \operatorname{sinc} n \left(y - \frac{k\pi}{n} \right),
$$

где $y = x - \frac{m_1\pi}{n}$, $0 \leqslant m_1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 1$.

Лемма 3. *Пусть $\delta > 0$ и $\psi_{mn\delta}(x) = \sum_{k=0}^{m}{}' \operatorname{sinc} n \left(x - \frac{k\pi}{n} \right)$, где штрих у знака суммирования означает суммирование по значениям k, $0 \leqslant k \leqslant m$, для которых $\left| x - \frac{k\pi}{n} \right| \geqslant \delta$. Тогда*

$$
|\psi_{mn\delta}(x)| \leqslant \frac{2}{n\delta} \tag{8}
$$

при $0 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 1$ и $x \in (-\infty, +\infty)$.

$\lhd$ Обозначим через s_1 наибольшее целое значение k, для которого $k \leqslant \frac{n(x-\delta)}{\pi}$, а через s_2 — наименьшее целое значение k, для которого $k \geqslant \frac{n(x+\delta)}{\pi}$. Предположим сначала, что $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant m$. Тогда $\psi_{mn\delta}(x) = \sigma_1 + \sigma_2$, где

$$\sigma_1 = \sin nx \sum_{k=0}^{s_1} \frac{(-1)^k}{n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)}, \quad \sigma_2 = \sin nx \sum_{k=s_2}^{m} \frac{(-1)^k}{n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)}.$$

Как и при доказательстве леммы 2 убеждаемся, что обе суммы σ_1 и σ_2 являются суммами Лейбница и согласно оценке (4) леммы 1 удовлетворяют неравенствам

$$|\sigma_1| \leqslant |\sin nx| \cdot \frac{1}{n\left|x - \frac{s_1\pi}{n}\right|} \leqslant \frac{1}{n\delta}, \quad |\sigma_2| \leqslant |\sin nx| \cdot \frac{1}{n\left|x - \frac{s_2\pi}{n}\right|} \leqslant \frac{1}{n\delta},$$

откуда и следует (8). Если же $s_1 < 0$ или $s_2 > m$, то вся сумма $\psi_{mn\delta}(x)$ будет суммой Лейбница и, следовательно, оценивается как одна из сумм σ_1 или σ_2: $|\psi_{mn\delta}(x)| \leqslant \frac{1}{n\delta}$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство предложения 1. Поскольку $f(x)$ абсолютно непрерывна на промежутке $[0,\pi]$, то для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset [0,\pi]$, $j = 0, 1, \ldots, l$, из условия $\sum_{j=1}^{l}(b_j - a_j) < 2\delta$ будет следовать, что $\sum_{j=1}^{l} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. Кроме того, абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию. Обозначим полную вариацию $f(x)$ на $[0,\pi]$ через V $(V = \overset{\pi}{\underset{0}{V}}(f))$. Пусть $0 \leqslant x < 2\delta$. Выберем целое $m = m(\delta)$ так, чтобы было $\frac{m\pi}{n} < 2\delta \leqslant \frac{(m+1)\pi}{n}$ и представим оператор $L_n(f,x)$, определенный формулой (2), в виде суммы

$$L_n(f,x) = L_{n,1}(x) + L_{n,2}(x),$$

где

$$L_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) \operatorname{sinc} n(x - x_k), \quad L_{n,2}(x) = \sum_{k=m+1}^{n} f(x_k) \operatorname{sinc} n(x - x_k),$$

$$x_k = \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Применив преобразование Абеля к сумме $L_{n,1}(x)$, получим

$$L_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) \sum_{j=0}^{k} \operatorname{sinc} n(x - x_j) + f(x_m) \sum_{j=0}^{m} \operatorname{sinc} n(x - x_j).$$

Согласно неравенству (5) из леммы 2 получим

$$|L_{n,1}(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \left| \sum_{j=0}^{k} \operatorname{sinc} n(x - x_j) \right|$$
$$+ |f(x_m)| \left| \sum_{j=0}^{m} \operatorname{sinc} n(x - x_j) \right| \leqslant 2 \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| + 2\,|f(x_m)|$$
$$= 2\left(\sum_{k=0}^{m-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| + |f(x_m) - f(x_0)| \right).$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) = \frac{m\pi}{n} < 2\delta \quad \text{и} \quad 0 < x_m - x_0 = \frac{m\pi}{n} < 2\delta,$$

то из условия выбора δ для абсолютно непрерывной функции $f(x)$ следует, что при $0 \leqslant x < 2\delta$

$$|L_{n,1}(x)| < 2(\varepsilon + \varepsilon) = 4\varepsilon. \tag{9}$$

Теперь применим преобразование Абеля ко второй сумме $L_{n,2}(x)$:

$$L_{n,2}(x) = \sum_{k=m+1}^{n-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) \sum_{j=m+1}^{k} \operatorname{sinc} n(x - x_j) + f(x_n) \sum_{j=m+1}^{n} \operatorname{sinc} n(x - x_j).$$

Учитывая, что $f(x_n) = f(\pi) = 0$, согласно замечанию 2 к лемме 2 получим

$$|L_{n,2}(x)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \left| \sum_{j=m+1}^{k} \operatorname{sinc} n(x - x_j) \right|$$

$$\leqslant \frac{2}{n\delta} \sum_{k=m+1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \leqslant \frac{2V}{n\delta} < \varepsilon$$

при $n > n_0 = \left[\frac{2V}{\varepsilon\delta}\right]$. Из последнего неравенства и неравенства (9) вытекает, что

$$|L_n(f,x)| \leqslant |L_{n,1}(x)| + |L_{n,2}(x)| < 4\varepsilon + \frac{2V}{n\delta} < 4\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon$$

и, следовательно, при $n > n_0$ и $0 \leqslant x < 2\delta$

$$|L_n(f,x) - f(x)| \leqslant |L_n(f,x)| + |f(x) - f(0)| < 5\varepsilon + \varepsilon = 6\varepsilon. \tag{10}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что неравенство (10) остается верным и при $n > n_0$ и $\pi - 2\delta < x \leqslant \pi$. С другой стороны, согласно приведенному во введении следствию теоремы 6 из [20], для данного $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_1 = n_1(\varepsilon, \delta)$ такой, что при $n > n_1$ и $\delta \leqslant x \leqslant \pi - \delta$ будет $|L_n(f,x) - f(x)| < \varepsilon$. Отсюда и из (10) следует, что при $n > \max\{n_1, n_0\}$ и $0 \leqslant x \leqslant \pi$ верно неравенство $|L_n(f,x) - f(x)| < 6\varepsilon$, что означает равномерную сходимость последовательности функций $\{L_n(f,x)\}$ к $f(x)$ на всем промежутке $[0,\pi]$. $\triangleright$

Следствие 1. *Если функция $f(x) \in \mathrm{Lip}_1[0,\pi]$ и $f(0) = f(\pi) = 0$, то последовательность функций $\{L_n(f,x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на $[0,\pi]$.*

$\triangleleft$ На самом деле, из $f(x) \in \mathrm{Lip}_1[0,\pi]$ следует, что функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,\pi]$ и удовлетворяет там условию Дини — Липщица. $\triangleright$

Замечание 3. Из абсолютной непрерывности функции $f(x)$ не следует, что она удовлетворяет условию Дини — Липщица. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln\left(\frac{2\pi}{x}\right)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

является абсолютно непрерывной на $[0,\pi]$, поскольку ее производная $f'(x) = \frac{1}{x\ln^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)}$ существует при $0 < x \leqslant \pi$, является суммируемой на $[0,\pi]$ и $f(x) = \int_0^x \frac{1}{t\ln^2\left(\frac{2\pi}{t}\right)}\,dt$. В то же время модуль непрерывности этой функции $\omega(f,t) = \frac{1}{\ln\left(\frac{2\pi}{t}\right)}$, а

$$\lim_{t\to o+} \omega(f,t)\ln t = \lim_{t\to o+} \frac{\ln t}{\ln(2\pi) - \ln t} = -1 \neq 0,$$

т. е. $f(x)$ не удовлетворяет условию (3) Дини — Липщица.

3. Модифицированные операторы

В случае, если $f(0) \neq 0$ или $f(\pi) \neq 0$, значения операторов (2), как было отмечено выше, не сходятся равномерно к $f(x)$ на всем отрезке $[0, \pi]$. Для обеспечения равномерной сходимости приходится несколько видоизменить операторы Уиттекера.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Дини — Липщица на $[0, \pi]$. Тогда последовательность функций*

$$\widehat{L}_n(f, x) = L_n(F, x) + L_1(f, x), \tag{11}$$

где $L_1(f, x) = f(0) \operatorname{sinc} x + f(\pi) \operatorname{sinc}(x - \pi)$, $F(x) = f(x) - L_1(f, x)$, а $L_n(\cdot, x)$ задан формулой (2), равномерно сходится к $f(x)$ на $[0, \pi]$.

$\triangleleft$ На самом деле, $F(0) = f(0) - L_1(f, 0) = f(0) - f(0) = 0$,

$$F(\pi) = f(\pi) - L_1(f, \pi) = f(\pi) - f(\pi) = 0.$$

Так как функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Дини — Липщица на $[0, \pi]$, то $F(x)$ также абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Дини — Липщица на $[0, \pi]$. Тогда по предложению последовательность $\{L_n(F, x)\}$ равномерно на $[0, \pi]$ сходится к $F(x) = f(x) - L_1(f, x)$. Следовательно, $\widehat{L}_n(f, x) = L_n(F, x) + L_1(f, x)$ равномерно на $[0, \pi]$ сходится к $F(x) + L_1(f, x) = f(x) - L_1(f, x) + L_1(f, x) = f(x)$. $\triangleright$

Замечание 4. Оператор (11) в явном виде выглядит так

$$\widehat{L}_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f) \operatorname{sinc} n \left(x - \frac{k\pi}{n} \right),$$

где

$$A_0(f) = f(0), \quad A_n(f) = f(\pi),$$
$$A_k(f) = f\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f(0) \operatorname{sinc}\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f(\pi) \operatorname{sinc}\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Пусть теперь $f(x)$ непрерывна на $[0, \pi]$ и дифференцируема на концах этого промежутка, т. е. существуют односторонние производные $f'(0)$ и $f'(\pi)$. Тогда функция $G(x) = \frac{f(x) - L_1(f,x)}{\sin x}$ непрерывна на $(0, \pi)$ и при $x \to +0$

$$G(x) = \frac{f(x) - f(0) \operatorname{sinc} x - f(\pi) \operatorname{sinc}(x - \pi)}{\sin x} = \frac{f(x) - f(0)(1 + o(x)) - f(\pi) \frac{\sin x}{\pi - x})}{\sin x}$$
$$= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \frac{x}{\sin x} - f(0) o(1) \frac{x}{\sin x} - \frac{f(\pi)}{\pi - x} \to f'(0) - \frac{f(\pi)}{\pi}.$$

Аналогично при $x \to \pi - 0$

$$G(x) \to -f'(\pi) - \frac{f(0)}{\pi}.$$

Значит, после доопределения $G(0) = f'(0) - \frac{f(\pi)}{\pi}$ и $G(\pi) = -f'(\pi) - \frac{f(0)}{\pi}$ функция

$$G(x) = \begin{cases} f'(0) - \frac{f(\pi)}{\pi}, & x = 0, \\ \frac{f(x) - L_1(f,x)}{\sin x}, & 0 < x < \pi, \\ -f'(\pi) - \frac{f(0)}{\pi}, & x = \pi \end{cases} \tag{12}$$

становится непрерывной на всем отрезке $[0, \pi]$.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0,\pi]$ и дифференцируема на концах этого промежутка, а функция $G(x)$, определенная формулой* (12), *имеет ограниченную вариацию на $[0,\pi]$ и удовлетворяет условию Дини — Липщица. Тогда последовательность функций*

$$\widetilde{L}_n(f,x) = \sin x L_n(G,x) + L_1(f,x), \tag{13}$$

где $L_n(\cdot,x)$ — оператор, заданный формулой (2), *равномерно сходится к $f(x)$ на $[0,\pi]$.*

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 4. *Функция $\operatorname{sinc} x$, заданная формулой* (1), *при $x \neq 0$ удовлетворяет неравенствам*

$$0 < 1 - \operatorname{sinc} x < \frac{x^2}{6}. \tag{14}$$

$\lhd$ Из приведенного во введении неравенства $|\operatorname{sinc} x| < 1$ при $x \neq 0$ следует, что $0 < 1 - \operatorname{sinc} x < 2$. Следовательно, правое неравенство (14) достаточно доказать при $0 < \frac{x^2}{6} < 2$ или $0 < x^2 < 12$. Из разложения функции $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ в ряд Тейлора получим

$$1 - \operatorname{sinc} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Модуль общего члена ряда $a_k(x) = \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \to 0$ при $k \to \infty$ для любого x. Кроме того, $a_k(x) > a_{k+1}(x)$ равносильно $0 < x^2 < (2k+2)(2k+3)$. Правая часть последнего неравенства достигает наименьшего значения при $k = 1$. Следовательно, последовательность $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является убывающей при $0 < x^2 < 20$ и, в частности, при $0 < x^2 < 12$. Значит, последний ряд является рядом Лейбница и его сумма меньше модуля первого члена, т. е. $1 - \operatorname{sinc} x < \frac{x^2}{6}$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Обозначим

$$M := \sup_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |G(x)|, \quad V := \mathop{V}_{0}^{\pi}(G).$$

Применив преобразование Абеля и неравенство (5), из леммы 2 получим

$$\begin{aligned} |L_n(G,x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |G(x_k) - G(x_{k+1})| \left| \sum_{j=0}^{k} \operatorname{sinc} n(x - x_j) \right| + |G(x_n)| \left| \sum_{j=0}^{n} \operatorname{sinc} n(x - x_j) \right| \\ &\leqslant 2 \sum_{k=0}^{n-1} |G(x_k) - G(x_{k+1})| + 2\,|G(x_n)| \leqslant 2(V + M), \end{aligned} \tag{15}$$

где $x_k = \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Поскольку $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $[0,\pi]$, то для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, $0 < \delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{V+2M}\}$, что для любых x_1, x_2 из этого промежутка $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ при $|x_2 - x_1| < \delta$. Пусть $0 \leqslant x < \delta$. Тогда из (12)–(15) следует

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{L}_n(f,x) - f(x)\right| &\leqslant \left|\widetilde{L}_n(f,x) - f(0)\right| + |f(x) - f(0)| \\ &\leqslant \sin\delta\,|L_n(G,x)| + |f(0)|\,(1 - \operatorname{sinc})x + |f(\pi)|\,\frac{\sin\delta}{\pi - \delta} + \varepsilon \\ &\leqslant \delta(V + M) + M\frac{\delta^2}{6} + M\frac{\delta}{\pi - \delta} + \varepsilon \leqslant \delta(V + 2M) + \varepsilon \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{16}$$

Последняя оценка справедлива и при $\pi - \delta < x \leqslant \pi$. С другой стороны, согласно следствию теоремы 6 из [20], для данного $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$ такой, что при $n > n_0$ и $\delta \leqslant x \leqslant \pi - \delta$ будет $|L_n(G, x) - G(x)| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{L}_n(f, x) - f(x)\right| &= |\sin x L_n(G, x) + L_1(f, x) - f(x)| \\ = \left|\sin x \left(L_n(G, x) - \frac{f(x) - L_1(f, x)}{\sin x}\right)\right| &= |\sin x (L_n(G, x) - G(x))| \\ &\leqslant |L_n(G, x) - G(x)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{17}$$

Наконец, из (16), (17) получаем, что при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и $n > n_0$ выполнено неравенство $|\widetilde{L}_n(f, x) - f(x)| < 2\varepsilon$. $\rhd$

В заключение отметим, что основные результаты настоящей работы были анонсированы в [23].

Литература

1. *Whittaker E. T.* On the functions which are represented by expansions of the interpolation theory // Proc. Roy. Soc. Edinburgh.—1915.—Vol. 35.—P. 181–194.
2. *Котельников В. А.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Всесоюзный энергетический коммитет. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. По радиосекции.—М: Управление связи РККА, 1933.—С. 1–19.
3. *Shannon C. E.* A mathematical theory of communication // Bell System Tech. J.—1948.—Vol. 27.—P. 379–423, 623–656.
4. *Schoenberg I. J.* Cardinal interpolation and spline functions // J. Approx. Theory.—1969.—Vol. 2.—P. 167–206.
5. *McNamee J., Stenger F., Whitney E. L.* Whittaker's cardinal function in retrospect // Mathematics of Computation.—1971.—Vol. 25.—№ 113.—P. 141–154.
6. *Stenger F.* An analytic function which is an approximate characteristic function // SIAM J. Appl. Math.—1975.—Vol. 12.—P. 239–254.
7. *Stenger F.* Approximations via the Whittaker cardinal function // J. Approx. Theory.—1976.—Vol. 17.—P. 222–240.
8. *Higgins J. R.* Five short stories about the cardinal series // Bull. Amer. Math. Soc.—1985.—Vol. 12.—P. 45–89.
9. *Lund J., Kenneth L. B.* Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations.—Philadelphia: J. Soc. Ind. Appl. Math., 1992.—304 p.
10. *Stenger F.* Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions.—N. Y.: Springer-Verlag, 1993.—565 p.
11. *Young R. M.* An Introduction to Nonharmonic Fourier Series. Revised first edition.—San Diego: Academic Press. A Harcourt Science and Technology Company, 2001.—235 p.
12. *Жук А. С., Жук В. В.* Некоторые ортогональности в теории приближения // Зап. научн. семин. ПОМИ.—2004.—Т. 314.—С. 83–123.
13. *Antuna A., Guirao L. G., Lopez M. A.* Shannon–Whittaker–Kotel'nikov's theorem generalized // MATCH Commun. Math. Comput. Chem.—2015.—Vol. 73.—P. 385–396.
14. *Трынин А. Ю.* Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа — Штурма — Лиувилля // Тез. докл. 10 Саратовской зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения» (27 января–2 февраля 2000 г.).—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000.—С. 140–141.
15. *Трынин А. Ю.* Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам // Математика. Механика.—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005.—Т. 7.—С. 124–127.
16. *Скляров В. П.* О наилучшей равномерной sinc аппроксимации на конечном отрезке // Тез. докл. 13 Саратовской зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения» (27 января–3 февраля 2006 г.).—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.—С. 161.
17. *Trynin A. Yu., Sklyarov V. P.* Error of sinc approximation of analytic functions on an interval // Sampling Theory in Signal and Image Processing.—2008.—Vol. 7, № 3.—P. 263–270.

18. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East J. Approx.—2008.—Vol. 14, № 2.—P. 183–192.
19. *Трынин А. Ю.* Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 5.—С. 1155–1166.
20. *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. вузов. Математика.—2008.—№ 6.—С. 66–78.
21. *Привалов А. А.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки.—1986.—Т. 39, № 6.—С. 228–243.
22. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 11.—С. 61–108.
23. *Шарапудинов И. И., Умаханов А. Я.* Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости // Материалы 18-й междунар. Саратовской зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения».—Саратов, 2016.—С. 332–334.

Статья поступила 3 марта 2016 г.

Умаханов Айвар Ярахмедович
Дагестанский научный центр РАН,
научный сотрудник отдела математики и информатики
РОССИЯ, 367025, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45;

Дагестанский государственный педагогический университет,
доцент кафедры методики преподавания математики и информатики
РОССИЯ, 367013, Махачкала, ул. Гамидова, 17 а
E-mail: aivarumahanov@gmail.com

Шарапудинов Идрис Идрисович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Дагестанский государственный педагогический университет,
заведующий кафедрой математического анализа
РОССИЯ, 367013, Махачкала, ул. Гамидова, 17 а
E-mail: sharapud@mail.ru

INTERPOLATION OF FUNCTIONS BY THE WHITTAKER SUMS AND THEIR MODIFICATIONS: CONDITIONS FOR UNIFORM CONVERGENCE

Umakhanov A. Y., Sharapudinov I. I.

We consider truncated Whittaker–Kotel'nikov–Shannon operators also known as sinc-operators. Conditions on continuous functions f that guarantee uniform convergence of sinc-operators to such functions are obtained. It is shown that if a function is absolutely continuous, satisfies Dini–Lipschitz condition and vanishes at the end of the segment $[0,\pi]$, then sinc-operators converge uniformly to this function. In the case when $f(0)$ or $f(\pi)$ is not zero, sinc-operators lose the property of uniform convergence. For example, it is well known that sinc-operators have no uniform convergence to function identically equal to 1. In connection with this we introduce modified sinc-operators that possess a uniform convergence property for arbitrary absolutely continuous function, satisfying Dini–Lipschitz condition.

Key words: nonlinear system of integral equations, Hammerstein–Voltera type operator, iteration, monotonisity, primitive matrix, summerable solution.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 71–79

УДК **517.968.4**

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА — ВОЛЬТЕРРА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Х. А. Хачатрян, Ц. Э. Терджян, М. Ф. Броян

Рассматривается система нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Вольтерра в критическом случае. Доказывается существование покомпонентно положительного решения этой системы в пространстве ограниченных суммируемых функций с нулевым пределом в $+\infty$.

Ключевые слова: система нелинейных интегральных уравнений, оператор, итерация, монотонность, примитивная матрица, суммируемое решение.

1. Введение

Исследуется следующая система нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Вольтерра:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_x^\infty v_{ij}(t-x)\Omega_{ij}(t, f_j(t))\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty),\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

относительно искомой измеримой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$, определенной на $\mathbb{R}^+$ (T — знак транспонирования).

Элементы матриц-функций $v \equiv (v_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$ удовлетворяют следующим условиям:

I) $v_{ij}(\tau) \geqslant 0$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, $v_{ij} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

II) $m_1(v_{ij}) \equiv \int\limits_0^\infty \tau v_{ij}(\tau) d\tau < +\infty$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

III) (*условие критичности*)

Спектральный радиус матрицы A равен единице

$$A \equiv \left(\int_0^\infty v_{ij}(\tau)\,d\tau \right)_{i,j=1}^{n\times n}, \qquad r(A) = 1 \tag{2}$$

(т. е. модуль максимального по модулю собственного значения равен единице).

Функции $\{\Omega_{ij}(t, y)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ определены на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, принимают вещественные значения и удовлетворяют условию критичности:

$$\Omega_{ij}(t, 0) = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{3}$$

и некоторым другим дополнительным условиям (см. формулировку теоремы).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования и науки Республики Армения, проект № SCS 15T-1A033.

Система (1), кроме самостоятельного математического интереса, имеет применение в различных областях математической физики (см. [1, 2]). Соответствующая линейная система, при условии $r(A) \leqslant 1$, исследовалась в работах [3, 4]. В скалярном случае, когда $r(A) > 1$, соответствующее линейное уравнение исследовалась в работе [5]. В том случае, когда $n = 1$, а ядро имеет компактный носитель, исследованию уравнения (1), при определенных ограничениях на нелинейность, посвящены работы [6–8]. В скалярном случае, когда для ядра минорантой служит суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция, зависящая от разности своих аргументов при определенном ограничении на нелинейность, уравнение (1) исследовалось в работе [9].

В настоящей работе, при некоторых условиях на функции $\Omega_{ij}(t,y)$, $i,j = 1,2,\dots,n$, построено покомпонентно положительное решение системы (1) в пространстве ограниченных суммируемых функций с нулевым пределом в $+\infty$.

2. Некоторые обозначения и вспомогательные факты

Пусть матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$, задаваемая согласно формуле (2), является примитивной, т. е.

(i) $a_{ij} \geqslant 0$, $i,j = 1,2,\dots,n$;

(ii) существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что все элементы матрицы A^p положительны.

Тогда в силу теоремы Перрона [10] существует вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$ с положительными координатами η_i $(i = 1,2,\dots,n)$ такой, что

$$A\eta = \eta \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j = \eta_i, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции $\Omega_{ij}(t,y)$ $(i,j = 1,2,\dots,n)$, допускают следующее представление:

$$\Omega_{ij}(t,y) = G_{ij}(t,y) + \omega_{ij}(t, \lambda_i - y), \quad i,j = 1,2,\dots,n. \tag{5}$$

Здесь λ_i — числовые параметры, а $\omega_{ij}(t,y)$ — определенные на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ измеримые и вещественные функции, обладающие следующими свойствами:

a) существует число $\delta > 0$ такое, что функции $\omega_{ij}(t,y) \geqslant 0$, $(t,y) \in \mathbb{R}^+ \times [\delta, +\infty) \equiv \Omega_\delta$, $i,j = 1,2,\dots,n$;

b) при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функции $\omega_{ij}(t,y) \downarrow$ по y на $[\delta, +\infty)$, $i,j = 1,2,\dots,n$;

c) функции $\omega_{ij}(t,y)$, $i,j = 1,2,\dots,n$, удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу y на множестве Ω_δ, т. е. при каждом фиксированном $y \in [\delta, +\infty)$ функции $\omega_{ij}(t,y)$, $i,j = 1,2,\dots,n$, измеримы по $t \in \mathbb{R}^+$ и почти при всех $t \in \mathbb{R}^+$ функции $\omega_{ij}(t,y)$, $i,j = 1,2,\dots,n$, непрерывны по y на $[\delta, +\infty)$.

Это условие в дальнейшем мы вкратце запишем следующим образом:

$$\omega_{ij} \in \mathrm{Car}_y(\Omega_\delta), \quad i,j = 1,2,\dots,n.$$

d) существуют $\sup\limits_{y\geqslant\delta} \omega_{ij}(t,y) \equiv \beta_{ij}(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\beta_{ij} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, $m_1(\beta_{ij}) < +\infty$, $i,j = 1,2,\dots,n$.

Относительно функций $G_{ij}(t,y)$ предположим выполнение следующих условий:

1) $G_{ij}(t,y) \geqslant y$, $(t,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $i,j = 1,2,\dots,n$;

2) при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функции $G_{ij}(t,y) \uparrow$ по y на $y \in \mathbb{R}^+$, $i,j = 1,2,\ldots,n$;

3) существуют $\gamma_{ij}(t) = \sup\limits_{y\geqslant 0}(G_{ij}(t,y) - y)$, $\gamma_{ij} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, $m_1(\gamma_{ij}) < +\infty$, $i,j = 1,2,\ldots,n$;

4) $G_{ij}(t,y) \in \mathrm{Car}_y(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Примерами функций $G_{ij}(t,y)$ и $\omega_{ij}(t,y)$ являются следующие функции:

$$\begin{aligned}
&G_{ij}(t,y) = y + e^{-y}\gamma_{ij}(t),\\
&G_{ij}(t,y) = y + \frac{\gamma_{ij}(t)}{y+1},\\
&G_{ij}(t,y) = y + \gamma_{ij}(t)\cos\frac{y}{y+1},\\
&G_{ij}(t,y) = y + \frac{\gamma_{ij}(t)}{\gamma_{ij}(t)y+1},\\
&G_{ij}(t,y) = y + \frac{2\gamma_{ij}(t)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{y^2+4},\\
&\omega_{ij}(t,y) = \beta_{ij}(t)e^{-y^2},\\
&\omega_{ij}(t,y) = \beta_{ij}(t)\sin\frac{\pi}{\beta_{ij}^2(t)y^2+2},
\end{aligned}$$

где функции $\gamma_{ij}(t)$ и $\beta_{ij}(t)$ задаются согласно 3) и d).

Приведем также примеры функций $\gamma_{ij}(t)$ и $\beta_{ij}(t)$.

$$\begin{aligned}
&A_1)\ \ \gamma_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}e^{-t}, \quad \varepsilon_{ij} > 0,\ i,j = 1,2,\ldots,n,\\
&A_2)\ \ \gamma_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}e^{-t^2}t, \quad \varepsilon_{ij} > 0,\ i,j = 1,2,\ldots,n,\\
&B_1)\ \ \beta_{ij}(t) = q_{ij}\frac{1}{t^2+1}, \quad q_{ij} > 0,\ i,j = 1,2,\ldots,n,\\
&B_2)\ \ \beta_{ij}(t) = q_{ij}\left(e^{-t}t + \frac{1}{t^3+1}\right), \quad q_{ij} > 0,\ i,j = 1,2,\ldots,n.
\end{aligned}$$

Сначала наряду с (1) рассмотрим следующую вспомогательную систему линейных неоднородных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\psi_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{n}\int_x^\infty v_{ij}(t-x)\psi_j(t)dt, \quad i = 1,2,\ldots,n,\ x \in \mathbb{R}^+, \tag{6}$$

относительно искомой вектор-функции $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))^T$. Предполагается, что в (6) свободные члены $\{g_i(x)\}_{i=1}^n$ имеют следующую специальную структуру:

$$\begin{aligned}
g_i(x) &= \sum_{j=1}^{n}\int_x^\infty v_{ij}(t-x)\beta_{ij}(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n}\int_x^\infty v_{ij}(t-x)\gamma_{ij}(t)\,dt\\
&= \tilde{g}_i(x) + \sum_{j=1}^{n}\int_x^\infty v_{ij}(t-x)\gamma_{ij}(t)\,dt, \quad i = 1,2,\ldots,n,\ x \in \mathbb{R}^+,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\tilde{g}_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\int_x^\infty v_{ij}(t-x)\beta_{ij}(t)\,dt, \quad i = 1,2,\ldots,n,\ x \in \mathbb{R}^+. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что

$$g_i \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad m_1(g_i) < +\infty, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Следовательно, из результатов работы [4] следует, что система (6) имеет решение $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))^T$, причем

$$\psi_i(x) \geqslant 0, \quad \psi_i \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \psi_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Обозначим через

$$\kappa := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{x \geqslant 0} \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Теперь рассмотрим следующую вспомогательную систему нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Вольтерра

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_x^\infty v_{ij}(t - x)\bigl(\varphi_j(t) - \omega_{ij}(t, \varphi_j(t))\bigr)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ \ x \in \mathbb{R}^+, \tag{13}$$

и для этой системы введем в рассмотрение следующие специальные приближения:

$$\begin{gathered} \varphi_{i,\gamma}^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^n \int_x^\infty v_{ij}(t - x)\Bigl(\varphi_{j,\gamma}^{(p)}(t) - \omega_{ij}(t, \varphi_{j,\gamma}^{(p)}(t))\Bigr)\, dt, \\ \varphi_{i,\gamma}^{(0)}(x) = \gamma\eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \ p = 0, 1, 2, \ldots; \ x \in \mathbb{R}^+, \ \gamma \in \Pi, \end{gathered} \tag{14}$$

где множество параметров Π задается согласно следующей формуле:

$$\Pi := \left[\frac{\delta + 2\kappa}{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \eta_i}, +\infty\right). \tag{15}$$

Индукцией по p докажем, что

$$\varphi_{i,\gamma}^{(p)}(x) \ \downarrow \ \text{по} \ \ p \quad (\forall\, \gamma \in \Pi, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^+, \ i = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

$$\varphi_{i,\gamma}^{(p)}(x) \geqslant \gamma\eta_i - \psi_i(x) \quad (\forall\, \gamma \in \Pi, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^+, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \forall\, p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Сначала докажем (16). С учетом (2), (4), a) и I) из (14) будем иметь

$$\begin{gathered} \varphi_{i,\gamma}^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^n \int_x^\infty v_{ij}(t - x)(\eta_j\gamma - \omega_{ij}(t, \eta_j\gamma))\, dt \\ \leqslant \gamma \sum_{j=1}^n \eta_j \int_x^\infty v_{ij}(t - x)\, dt = \gamma \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j = \gamma\eta_i = \varphi_{i,\gamma}^{(0)}(x). \end{gathered}$$

В силу монотонности функций $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, по y на $[\delta, +\infty)$, предполагая, что

$$\varphi_{i,\gamma}^{(p)}(x) \leqslant \varphi_{i,\gamma}^{(p-1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

при некотором $p \in \mathbb{N}$ из (14) будем иметь

$$\varphi_{i,\gamma}^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\Big(\varphi_{j,\gamma}^{(p)}(t) - \omega_{ij}(t, \varphi_{j,\gamma}^{(p)}(t))\Big)\, dt$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\Big(\varphi_{j,\gamma}^{(p-1)}(t) - \omega_{ij}(t, \varphi_{j,\gamma}^{(p-1)}(t))\Big)\, dt = \varphi_{i,\gamma}^{(p)}(x).$$

Теперь докажем неравенства (17). При $p = 0$ эти неравенства очевидны. Предположим, что (17) выполняются при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда из (4), (6), (7), (14), с учетом b) для функций $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, имеем

$$\varphi_{i,\gamma}^{(p+1)}(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\big(\gamma\eta_j - \psi_j(t) - \omega_{ij}(t, \gamma\eta_j - \psi_j(t))\big)\, dt$$

$$= \gamma\eta_i - \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\psi_j(t)\, dt - \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\omega_{ij}\big(t, \gamma\eta_j - \psi_j(t)\big)\, dt$$

$$\geqslant \gamma\eta_i - \sum_{j=1}^{n} \int_{x}^{\infty} v_{ij}(t-x)\psi_j(t)\, dt - g_i(x) = \gamma\eta_i - \psi_i(x).$$

Из (16) и (17) следует, что последовательность вектор-функций

$$\{\varphi_{\gamma}^{(p)}(x)\}_{p=0}^{\infty}, \quad (\varphi_{\gamma}^{(p)}(x) = (\varphi_{1,\gamma}^{(p)}(x), \varphi_{2,\gamma}^{(p)}(x), \ldots, \varphi_{n,\gamma}^{(p)}(x))^T),$$

имеет поточечный предел, когда $p \to +\infty$:

$$\lim_{p\to+\infty} \varphi_{\gamma}^{(p)}(x) = \varphi_{\gamma}(x), \quad \varphi_{\gamma}(x) = (\varphi_{1,\gamma}(x), \varphi_{2,\gamma}(x), \ldots, \varphi_{n,\gamma}(x))^T,$$

причем предельная вектор-функция $\varphi_{\gamma}(x)$, $\gamma \in \Pi$, в силу условия Каратеодори, с учетом предельных теорем М. Красносельского и Б. Леви (см. [11, 12]), удовлетворяет системе (13).

Итак, система (13) обладает однопараметрическим семейством положительных решений, причем имеют место следующие соотношения:

$$\gamma\eta_i - \psi_i(x) \leqslant \varphi_{i,\gamma}(x) \leqslant \gamma\eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ \gamma \in \Pi,\ x \in \mathbb{R}^+,\ \lim_{x\to+\infty} \varphi_{i,\gamma}(x) = \gamma\eta_i. \qquad (18)$$

3. Основной результат

Теперь займемся решением основной системы (1). Справедлива следующая

Теорема. *Пусть в* (1) *ядра* $v_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяют условиям* I)–III), *функции* $\Omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, \ldots, n$, *обладают свойствами* (5), a)–d) *и* 1)–4). *Тогда для каждого* $\lambda_i \geqslant \eta_i \frac{\delta + 2\kappa}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \eta_i}$ *система* (1) *имеет положительное суммируемое и ограниченное решение* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$, *причем* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_i(x) = 0$.

$\triangleleft$ Пусть γ^* — некоторое фиксированное число из множества параметров П. Для системы (1) введем следующие специальные последовательные приближения:

$$f_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)\Big(G_{ij}(t, f_j^{(p)}(t)) + \omega_{ij}(t, \lambda_j - f_j^{(p)}(t))\Big)\,dt,$$
$$f_i^{(0)}(x) = \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x);\ x \in \mathbb{R}^+;\ \lambda_i = \gamma^*\eta_i;\ \ i = 1, 2, \dots, n;\ p = 0, 1, 2\dots;\ \gamma^* \in \Pi. \tag{19}$$

Индукцией по p докажем, что

$$f_i^{(p)}(x)\ \uparrow\ \text{по } p \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ i = 1, 2, \dots, n,\ p = 0, 1, 2, \dots), \tag{20}$$

$$f_i^{(p)}(x) \leqslant \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) + \psi_i(x) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ i = 1, 2, \dots, n,\ p = 0, 1, 2, \dots). \tag{21}$$

Сначала докажем (20). В силу монотонности функций $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, по y на $[\delta, +\infty)$ с учетом (4) и условия 1) для функций $G_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, из (19) получим

$$f_i^{(1)}(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)(\gamma^*\eta_j - \varphi_{j,\gamma^*}(t) + \omega_{ij}\big(t, \lambda_j - \gamma^*\eta_j + \varphi_{j,\gamma^*}(t)\big)\,dt$$
$$\geqslant \gamma^*\eta_i - \sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)(\varphi_{j,\gamma^*}(t) - \omega_{ij}(t, \varphi_{j,\gamma^*}(t)))dt = \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) = f_i^{(0)}(x).$$

Предполагая, что $f_i^{(p)}(x) \geqslant f_i^{(p-1)}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x \in \mathbb{R}^+$, при некотором $p \in \mathbb{N}$, из (19), учитывая монотонность функций $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, по y на $[\delta, +\infty)$, при условии 2) получим

$$f_i^{(p+1)}(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)\Big(G_{ij}\Big(t, f_j^{(p-1)}(t)\Big) + \omega_{ij}\Big(t, \lambda_j - f_j^{(p-1)}(t)\Big)\Big)\,dt = f_i^{(p)}(x),$$
$$i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Теперь докажем неравенства (21). При $p = 0$, эти неравенства очевидны, ибо

$$f_i^{(0)}(x) = \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) \leqslant \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) + \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Предположим, что (21) имеют место при некотором $p \in \mathbb{N}$. Обозначим через

$$\chi_i(x) := \gamma^*\eta_i - \varphi_{i,\gamma^*}(x) + \psi_i(x).$$

Учитывая монотонность функций $\omega_{ij}(t, y)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, по y на $[\delta, +\infty)$ и условия (4), 1)–4), a)–d), из (19) будем иметь

$$f_i^{(p+1)}(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)(G_{ij}(t,\chi_j(t))+\omega_{ij}(t,\lambda_j-\chi_j(t)))\,dt$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)(G_{ij}(t,\chi_j(t))-\chi_j(t))dt+\sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)(\chi_j(t)+\omega_{ij}(t,\lambda_j-\chi_j(t)))\,dt$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)\gamma_{ij}(t)dt+\sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)(\chi_j(t)+\omega_{ij}(t,\lambda_j-\chi_j(t)))\,dt$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)\gamma_{ij}(t)dt+\sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)(\gamma^*\eta_j-\varphi_{j,\gamma^*}(t)+\psi_j(t)$$

$$+\omega_{ij}(t,\lambda_j-\gamma^*\eta_j+\varphi_{j,\gamma^*}(t)-\psi_j(t)))dt=\sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)\gamma_{ij}(t)dt+\gamma^*\eta_i$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)(\varphi_{j,\gamma^*}(t)-\omega_{ij}(t,\lambda_j-\gamma^*\eta_j+\varphi_{j,\gamma^*}(t)-\psi_j(t)))\,dt$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)\psi_j(t)dt \leqslant \gamma^*\eta_i-\varphi_{i,\gamma^*}(x)+g_i(x)+\sum_{j=1}^{n}\int_x^{\infty} v_{ij}(t-x)\psi_j(t)\,dt$$

$$=\gamma^*\eta_i-\varphi_{i,\gamma^*}(x)+\psi_i(x).$$

Из (20) и (21) следует, что последовательность вектор-функций $\{f^{(p)}(x)\}_{p=0}^{\infty}$, $f^{(p)}(x)=(f_1^{(p)}(x),f_2^{(p)}(x),\dots,f_n^{(p)}(x))^T$ имеет предел, когда $p\to+\infty:$

$$\lim_{x\to+\infty} f_i^{(p)}(x)=f_i(x),\quad f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x))^T,$$

причем предельная функция $f(x)$, в силу условия Каратеодори, с учетом предельных теорем М. Красносельского и Б. Леви (см. [11, 12]) удовлетворяет системе (1).

Из (20) и (21) следует также, что имеют место следующие неравенства:

$$\gamma^*\eta_i-\varphi_{i,\gamma^*}(x)\leqslant f_i(x)\leqslant \gamma^*\eta_i-\varphi_{i,\gamma^*}(x)+\psi_i(x),\quad x\in\mathbb{R}^+,\ i=1,2,\dots,n.$$

Откуда, учитывая (11) и (18), будем иметь:

$$\lim_{x\to\infty} f_i(x)=0.$$

Таким образом, существование решения $f\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$ системы (1) установлено. $\triangleright$

В конце работы поясним существенность накладываемых условий I–III, a)–d) и 1)–4).

Замечание 1. Условия, накладываемые на ядерные функции $v_{ij}(t)$, $i,j=1,\dots,n$, имеют одновременно и технический, и естественный характер.

Так, например, даже в линейном случае, если ядра не обладают свойством неотрицательности, то соответствующая система во многих случаях не имеет неотрицательных решений.

Условие II) имеет технический характер и пока нам не удалось избавиться от этого условия. Условие III) связано с приложениями рассматриваемой задачи к задачам физической кинетики. В этих задачах, как правило, ядерные функции обладают свойством критичности.

Замечание 2. Основные условия, накладываемые на функции $\Omega_{ij}(t,y)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, являются естественными для получения суммируемых решений в следующих аспектах:

1) так например, в случае, когда нарушается условие 3) (на функции $G_{ij}(t,y)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$) и G_{ij} зависят лишь от y, то из результатов работы [13] следует, что соответствующая система обладает монотонно возрастающим ограниченным решением (решение не принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$);

2) именно условие монотонности на функций $G_{ij}(t,y)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, и $\omega_{ij}(t,y)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, обеспечивает получение неотрицательных нетривиальных (физических) решений;

3) без условия d) на функции $\omega_{ij}(t,y)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, даже соответствующая линейная система не может обладать суммируемым решением;

4) условие Каратеодори является в некотором смысле техническим условием, которое обеспечивает в дальнейшем предельный переход под знаком интеграла. Например, если функции $\Omega_{ij}(t,y)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, непрерывны по совокупности своих аргументов в данном множестве, то эти функции будут удовлетворять условию Каратеодори.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Литература

1. *Амбарцумян В. А.* Научные труды. Т. 1.—Ереван: Изд-во АН. АрмССР.—1960.—431 с.
2. *Енгибарян Н. Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика.—Т. 2, № 4.—1966.—С. 31–36.
3. *Арабаджян Л. Г.* Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // Диф. уравнения.—1987.—Т. 23, № 9.—С. 1618–1622.
4. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ.—1984.—Т. 22.—С. 175–242.
5. *Арабаджян Л. Г.* О разрешимости одного интегрального уравнения типа Вольтерра на полуоси // Изв. НАН Армении. Математика.—1999.—Т. 34, № 2.—С. 80–83.
6. *Zarebina M.* A numerical Solution of Nonlinear Volterra–Fredholm Integral Equations // J. of Appl. Analysis and Computation.—2013.—Vol. 3, № 1.—P. 95–104.
7. *Lauran M.* Existence results for some Nonlinear Integral Equations // Miskole Math. Notes.—2012.—Vol. 13, № 1.—P. 67–74.
8. *Karapetyants N. K., Kilbas A. A., Saigo M.* On the Solutions of Nonlinear Volterra Convolution Equation with power Nonlinearity // J. of Integral Equations and Appl.—1996.—Vol. 8, № 4—P. 429–445.
9. *Хачатрян Х. А., Григорян С. А.* О нертивиальной разрешимости одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна — Вольтерра // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, № 2.—С. 57–66.
10. *Ланкастер П.* Теория матриц.—М.: Наука, 1978.—280 с.
11. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—500 с.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин В. С.* Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1981.—544 с.
13. *Хачатрян Х. А.* Некоторые классы нелинейных интегральных уравнений Урысона // Докл. БелАН. Математика.—2011.—Т. 55, № 1.—С. 5–9.

Статья поступила 5 февраля 2016 г.

Хачатрян Хачатур Агавардович
Институт математики НАН Республики Армения,
ведущий научный сотрудник отдела методов математической физики
АРМЕНИЯ, 375019, г. Ереван, пр-т Маршала Баграмяна, 24 б
E-mail: Khach82@rambler.ru

Терджян Цолак Эрнестович
Национальный аграрный университет Армении,
доцент кафедры высшей математики и теоретической механики
АРМЕНИЯ, 3750009, г. Ереван, Теряна, 74
E-mail: Terjyan73@mail.ru

Броян Марине Фирдусовна
Национальный аграрный университет Армении,
доцент кафедры высшей математики и теоретической механики
АРМЕНИЯ, 3750009, г. Ереван, Теряна, 74
E-mail: Broyan@rambler.ru

ON SOLVABILITY OF A HAMMERSTEIN–VOLTERA TYPE NONLINEAR SYSTEM OF INTEGRAL EQUATIONS IN CRITICAL CASE

Khachatryan Kh. A., Terjyan Ts. E., Broyan M. F.

We consider Hammerstein–Voltera type nonlinear system of integral equations in critical case. Above mentioned equations have applications in rediative transfer theory and kinetic theory of gases. Using special iteration methods and method of monotone operators theory we prove the exitstence of by component positive solutions in space of bounded and summerable functions with zero limit at infinity. Some examples of corresponding equations representing separate interest are also given.

Key words: nonlinear system of integral equations, Hammerstein–Voltera type operator, iteration, monotonisity, primitive matrix, summerable solution.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 80–85

УДК **517.95**

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К. У. Хубиев

В работе доказан принцип максимума для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами. Характеристическая нагрузка представляет собой след искомого решения на линии изменения типа. Полученные результаты обобщают принцип максимума для уравнений гиперболо-параболического типа, приведенный в монографии Т. Д. Джураева, а в гиперболической части — известный принцип Агмона — Ниренберга — Проттера.

Ключевые слова: принцип максимума, нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение.

Рассмотрим в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = l$, $y = h > 0$ соответственно при $y > 0$, и характеристиками волнового уравнения $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = l$ при $y < 0$, характеристически нагруженное уравнение [1]

$$0 = \begin{cases} L_1u \equiv u_{xx} - u_y + a_1u_x + c_1u + d_1u(x,0), & y > 0, \\ L_2u \equiv u_{xx} - u_{yy} + a_2u_x + b_2u_y + c_2u + d_2u(x+y,0) + e_2u(x-y,0), & y < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $u = u(x, y)$ — неизвестная функция; $a_i = a_i(x, y)$, $c_i = c_i(x, y)$, $d_i = d_i(x, y)$, $i = 1, 2$, $b_2 = b_2(x, y)$, $e_2 = e_2(x, y)$ — заданные непрерывные в области своего определения функции.

Обозначим через Ω^+, Ω^- параболическую и гиперболическую части области Ω соответственно.

Принцип экстремума играет важную роль при исследовании задачи Трикоми для уравнений смешанного типа. Впервые принцип экстремума для задачи Трикоми был сформулирован в 1950 г. А. В. Бицадзе [2] для уравнения, которое впоследствии получило название уравнения Лаврентьева — Бицадзе. Дальнейшие исследования в этом направлении велись многими математиками, краткий обзор результатов приведен в работе [3].

В работах [4, 5] были сформулированы принципы экстремума для нагруженных интегральных уравнений и дифференциального уравнения первого порядка. В [6, с. 264], [1, с. 126] доказан принцип максимума для точечно нагруженного уравнения параболического типа, в работе [7] — принцип экстремума для характеристически нагруженного уравнения гиперболического типа второго порядка.

Полученные в данной работе результаты обобщают принцип максимума для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа, приведенный в [8, с. 10], и при $d_1 = d_2 = e_2 \equiv 0$ следствие 1 совпадает с вышеуказанным принципом максимума.

Кроме того, при $d_2 = e_2 \equiv 0$ полученный принцип экстремума для нагруженного гиперболического уравнения совпадает с принципом экстремума Агмона — Ниренберга — Проттера, сформулированным для гиперболического уравнения в [6, с. 229], и условия леммы 1 согласуются с условиями, полученными в работе [9].

Докажем сначала принцип максимума для нагруженного гиперболического уравнения в Ω^-.

Уравнение (1) в Ω^- в характеристических координатах $\xi = x+y$, $\eta = x-y$ имеет вид

$$v_{\xi\eta} + pv_\xi + qv_\eta + rv + \lambda v(\xi,\xi) + \mu v(\eta,\eta) = 0, \tag{2}$$

где $4p = a_2 + b_2$, $4q = a_2 - b_2$, $4r = c_2$, $4\lambda = d_2$, $4\mu = e_2$, $v = v(\xi,\eta) = u(x,y)$, а $\Omega^- \cup AB$ перейдет в область $D = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < l\}$.

Лемма 1. *Пусть $v(\xi,\eta)$ — регулярное в области D решение уравнения (2) из $C(\overline{D})$, удовлетворяющее условиям*

$$v_\eta \in C \ \ (0 \leqslant \xi < \eta \leqslant l), \quad v_\eta(0,\eta) + p(0,\eta)v(0,\eta) \leqslant 0. \tag{3}$$

Тогда, если p, p_ξ, q, r, λ и μ принадлежат C $(0 \leqslant \xi < \eta \leqslant l)$,

$$r_1(\xi,\eta) \leqslant 0, \quad \lambda(\xi,\eta) \leqslant 0, \quad \mu(\xi,\eta) \leqslant 0, \tag{4}$$

$$p_1(\xi,\eta) + \int\limits_0^\xi \big[r(\xi_1,\eta) + \lambda(\xi_1,\eta) + \mu(\xi_1,\eta)\big] q_1(\xi_1,\eta)\, d\xi_1 > 0, \tag{5}$$

где $r_1 = rq_1 - p_{1\xi}$, $p_1 = pq_1$, $q_1 = \exp\int_\delta^\xi q(t,\eta)\,dt$, то положительный максимум функции $v(\xi,\eta)$ в $\overline{D}$ достигается только на отрезке $0 \leqslant \xi = \eta \leqslant l$.

$\lhd$ Доказательство леммы 1 проведем методом, предложенным в [6, с. 228]. Действительно, пусть (ε,δ) — произвольным образом фиксированная точка из области D. Если p в области D имеет непрерывную производную по ξ, а q непрерывна в D, то уравнение (2) в классе функций $v = v(\xi,\eta)$, имеющих в D первые и вторые смешанные производные, эквивалентно уравнению

$$(q_1 v_\eta + p_1 v)_\xi + r_1 v + \lambda_1 v(\xi,\xi) + \mu_1 v(\eta,\eta) = 0$$

или нагруженному уравнению первого порядка

$$\begin{gathered} q_1(\xi,\eta)v_\eta(\xi,\eta) + p_1(\xi,\eta)v(\xi,\eta) + \int\limits_\varepsilon^\xi r_1(\xi_1,\eta)v(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 \\ = q_1(\varepsilon,\eta)v_\eta(\varepsilon,\eta) + p_1(\varepsilon,\eta)v(\varepsilon,\eta) - \int\limits_\varepsilon^\xi \lambda_1(\xi_1,\eta)v(\xi_1,\xi_1)\,d\xi_1 - \int\limits_\varepsilon^\xi \mu_1(\xi_1,\eta)v(\eta,\eta)\,d\xi_1, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\lambda_1 = \lambda q_1$, $\mu_1 = \mu q_1$, $0 < \xi < \eta < l$.

Перепишем (6) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
q_1(\xi,\eta)v_\eta(\xi,\eta) &= \int\limits_{\varepsilon}^{\xi} \big[v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\eta)\big]\, r_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 + q_1(\varepsilon,\eta)\big[v_\eta(\varepsilon,\eta)+p(\varepsilon,\eta)v(\varepsilon,\eta)\big] \\
&+ \int\limits_{\varepsilon}^{\xi} \big[v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\xi_1)\big]\, \lambda_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 + \int\limits_{\varepsilon}^{\xi} \big[v(\xi,\eta)-v(\eta,\eta)\big]\, \mu_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 \\
&- v(\xi,\eta)\left[p_1(\xi,\eta) + \int\limits_{\varepsilon}^{\xi} \big[r(\xi_1,\eta)q_1(\xi_1,\eta)+\lambda_1(\xi_1,\eta)+\mu_1(\xi_1,\eta)\big]\,d\xi_1\right] \\
&= \int\limits_{\varepsilon}^{\xi} \big[v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\eta)\big]\, r_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 + q_1(\varepsilon,\eta)\big[v_\eta(\varepsilon,\eta)+p(\varepsilon,\eta)v(\varepsilon,\eta)\big] \\
&+ \int\limits_{\varepsilon}^{\xi} \big[v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\xi_1)\big]\, \lambda_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 + \int\limits_{\varepsilon}^{\xi} \big[v(\xi,\eta)-v(\eta,\eta)\big]\, \mu_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 \\
&- v(\xi,\eta)\left[p_1(\varepsilon,\eta) + \int\limits_{\varepsilon}^{\xi} \big[r(\xi_1,\eta)+\lambda(\xi_1,\eta)+\mu(\xi_1,\eta)\big]\,q_1(\xi_1,\eta)\ d\xi_1\right].
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Допустим теперь, что положительный максимум функции $v(\xi,\eta)$, являющейся регулярным решением уравнения (2), в $\overline{D}$ достигается в точке (ξ_0,η_0), $0<\xi_0<\eta_0\leqslant l$. Из (7) при $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$, $\varepsilon\to 0$, имеем

$$
\begin{aligned}
q_1(\xi_0,\eta_0)v_\eta(\xi_0,\eta_0) &= \int\limits_{0}^{\xi_0} \big[v(\xi_0,\eta_0)-v(\xi_1,\eta_0)\big]\, r_1(\xi_1,\eta_0)\,d\xi_1 \\
&+ \int\limits_{0}^{\xi_0} \big[v(\xi_0,\eta_0)-v(\xi_1,\xi_1)\big]\, \lambda_1(\xi_1,\eta_0)\,d\xi_1 + \int\limits_{0}^{\xi_0} \big[v(\xi_0,\eta_0)-v(\eta_0,\eta_0)\big]\, \mu_1(\xi_1,\eta_0)\,d\xi_1 \\
&- v(\xi_0,\eta_0)\left[p_1(\xi_0,\eta_0) + \int\limits_{0}^{\xi} \big[r(\xi_1,\eta_0)+\lambda(\xi_1,\eta_0)+\mu(\xi_1,\eta_0)\big]\,q_1(\xi_1,\eta_0)\,d\xi_1\right] \\
&+ q_1(0,\eta)\big[v_\eta(0,\eta)+p(0,\eta)v(0,\eta)\big].
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Из (8), учитывая, что $q_1(\xi,\eta)>0$, и условия (3)–(5), получаем, что $v_\eta(\xi_0,\eta_0)<0$. Но это противоречит сделанному допущению, так как в точке (ξ_0,η_0) положительного максимума $v_\eta(\xi_0,\eta_0)\geqslant 0$. Следовательно, положительный максимум функции $v(\xi,\eta)$ в $\overline{D}$ достигается только на отрезке $0\leqslant\xi=\eta\leqslant l$. $\triangleright$

Аналогично доказывается, что при замене условия (3) леммы 1 на условие

$$
v_\eta\in C(0\leqslant\xi<\eta\leqslant l),\quad v_\eta(0,\eta)+p(0,\eta)v(0,\eta)\geqslant 0,
$$

отрицательный минимум функции $v(\xi,\eta)$ в $\overline{D}$ достигается только на отрезке $0\leqslant\xi=\eta\leqslant l$.

В параболической части Ω^+ смешанной области Ω справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $u(x,y)$ — регулярное в Ω^+ решение уравнения (1) из $C(\bar{\Omega}^+)$, удовлетворяющее условию $L_1 u \geqslant 0$ ($\leqslant 0$), $a_1(x,y), c_1(x,y), d_1(x,y) \in \overline{\Omega}^+$ и*

$$c_1(x,y) + d_1(x,y) < 0, \quad d_1(x,y) \geqslant 0. \tag{9}$$

Тогда положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x,y)$ в $\overline{\Omega}^+$ может достигается только на AA_0, AB, BB_0.

$\lhd$ Доказательство леммы 2 проведем аналогично [6, с. 263]. Достаточно доказать лемму 2 для случая положительного максимума, так как случай отрицательного минимума сводится к нему заменой u на $-u$. Пусть решение u уравнения $L_1 u = 0$ достигает положительного максимума в точке $(x_0, y_0) \in \Omega^+$. Необходимое условие максимума функции u в точке (x_0, y_0) имеет следующий вид: $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_{xx} \leqslant 0$. Принимая это во внимание, из (1) находим

$$c_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)u(x_0,0) = -u_{xx}(x_0,y_0) \geqslant 0.$$

С другой стороны, с учетом (9), получим

$$\begin{aligned} c_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)u(x_0,0) &= c_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)u(x_0,0) \\ &\quad + d_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) - d_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) \\ &= [c_1(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)]u(x_0,y_0) - d_1(x_0,y_0)[u(x_0,y_0) - u(x_0,0)] < 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие — результат неверного допущения, и $(x_0, y_0) \notin \Omega^+$. Утверждение, что точка максимума не принадлежит $A_0 B_0$, доказывается также, как и в случае, когда $y_0 < h$, но с той лишь разницей, что необходимое условие экстремума $u_y(x_0, y_0) = 0$ при $y_0 < h$ заменяется условием $u_y(x_0, y_0) \geqslant 0$ при $y_0 = h$.

Отметим, что замена $u = v \exp(\alpha y)$, где постоянная $\alpha > 0$, приводит к уравнению вида $L_1 v = 0$ с коэффициентом при v, равным $c_1 - \alpha$, и коэффициентом при $v(x,0)$, равным $d_1 \exp(-\alpha y)$. Если функции c_1 и d_1 непрерывны в замыкании Ω, то при достаточно больших α этот коэффициент при v строго отрицателен, кроме того, можно подобрать α таким образом, чтобы выполнялось $c_1(x,y) - \alpha + d_1(x,y)\exp(-\alpha y) < 0$. $\rhd$

Для уравнения (1) имеет место следующий принцип максимума.

Теорема 1. *Пусть*

1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^-) \cap C^2_x(\Omega^+)$, *$u(x,y)$ удовлетворяет неравенству $L_1 u \geqslant 0$ в Ω^+, и $L_2 u \leqslant 0$ в Ω^-, кроме того, функция $u(x,y)|_{AC} = 0$ и обладает свойством*

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u \in C\big(\overline{\Omega}^- \setminus \overline{AB}\big);$$

2) *в $\overline{\Omega}^-$ коэффициенты $a_2, b_2 \in C^1(\overline{\Omega}^-)$, $c_2, d_2, e_2 \in C(\overline{\Omega}^-)$, и удовлетворяют условиям леммы 1;*

3) *в $\overline{\Omega}^+$ коэффициенты a_1, c_1, d_1 непрерывны и удовлетворяют условиям леммы 2.*

Тогда функция $u(x,y)$ свой положительный максимум в $\overline{\Omega}$ принимает на отрезках AA_0 и BB_0.

$\lhd$ Из леммы 1 следует, что функция $u(x,y)$ свой положительный максимум в $\overline{\Omega}^-$ принимает в точке $(x_0, 0)$ отрезка AB, причем в точке положительного максимума

$$\nu(x_0) \geqslant 0, \tag{10}$$

где $\nu(x) = u_y(x,0)$.

В $\overline{\Omega}$ из леммы 1 и леммы 2 при выполнении условий теоремы 1 следует, что положительный максимум функции $u(x,y)$ может достигаться только на отрезках AA_0, BB_0, AB. Покажем теперь, что для функции $u(x,y)$ любая внутренняя точка $(x_0,0)$ отрезка AB не может быть точкой положительного максимума. В самом деле, в силу непрерывности производных u_x, u_y, u_{xx} из неравенства $L_1 u \geqslant 0$ мы можем перейти к пределу при $y \to +0$

$$\tau''(x) + a_1(x,0)\tau'(x) + [c_1(x,0) + d_1(x,0)]\tau(x) - \nu(x) \geqslant 0, \tag{11}$$

где $\tau(x) = u(x,0)$. Из (11) в силу условий (9) леммы 2 в точке положительного максимума имеем $\nu(x_0) < 0$, что противоречит неравенству (10), откуда следует, что функция $u(x,y)$ не может достигать положительного максимума во внутренней точке $(x_0,0)$ отрезка AB. Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 положительный максимум функции $u(x,y)$ может достигаться только на отрезках AA_0 и BB_0, что и требовалось доказать. $\triangleright$

Из теоремы 1 легко получить

Следствие 1. *Пусть*

1) *выполнены условия* 1) *теоремы* 1;

2) *в* $\overline{\Omega}^+$ *коэффициенты* a_1, c_1, d_1 *непрерывны и выполняются условия* (9);

3) *в* $\overline{\Omega}^-$ *коэффициенты* $a_2, b_2 \in C^1(\overline{\Omega}^-)$, $c_2, d_2, e_2 \in C(\overline{\Omega}^-)$, *и выполняются условия*

$$a_2^2 - b_2^2 + 2a_{2x} + 2b_{2x} + 2a_{2y} + 2b_{2y} - 4c_2 \geqslant 0, \tag{12}$$

$$a_2 + b_2 > 0, \quad c_2 + d_2 + e_2 \geqslant 0, \quad d_2 \leqslant 0, \quad e_2 \leqslant 0. \tag{13}$$

Тогда функция $u(x,y)$ *свой положительный максимум в* $\overline{\Omega}$ *принимает на отрезках* AA_0 *и* BB_0.

Действительно, легко видеть, что условия (12) и (13) гарантируют выполнение условий (4) и (5) леммы 1, и все остальные условия теоремы 1 выполнены.

При $d_1 = d_2 = e_2 \equiv 0$ следствие 1 совпадает с принципом максимума для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа, приведенного в [8, с. 10]. Заметим, что условия (12), (13) следствия 1 при $|a_2| = |b_2| \equiv \mathrm{const}$ не имеют места, если $c_2 \neq 0$, так же, как и в [8, с. 17], поэтому этот случай должен быть рассмотрен отдельно.

Замечание 1. Если в условии теоремы 1 функция $u(x,y)$ удовлетворяет строгим неравенствам $L_1 u > 0$ в Ω^+, и $L_2 u < 0$ в Ω^-, то в формулах (5) и (9) неравенства будут нестрогие.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения.—М.: Наука, 2012.—232 с.
2. *Бицадзе А. В.* О некоторых задачах смешанного типа // Докл. АН СССР.—1950.—Т. 70, № 4.—С. 561–565.
3. *Сабитов К. Б.* О принципе максимума для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения.—1988.—Т. 24, № 11.—С. 1967–1976.
4. *Нахушев А. М.* К теории краевых задач для нагруженных интегральных уравнений // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук.—2014.—Т. 16, № 3.—С. 30–34.
5. *Хубиев К. У.* О принципе экстремума для нагруженных уравнений // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук.—2014.—Т. 16, № 3.—С. 47–50.
6. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высш. шк., 1995.—301 с.

7. *Хубиев К. У.* О принципе максимума для характеристически нагруженного уравнения гиперболического типа // Материалы III Междунар. Российско-Казахского симп. «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Нальчик–Терскол, 3–7 декабря 2014 г.).— С. 219–221.
8. *Джураев Т. Д., Сопуев А. С., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.—Ташкент: ФАН, 1986.—220 с.
9. *Agmon S., Nirenberg L., Protter M.* A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Commun. Pure Appl. Math.—1953.— Vol. 6.—P. 455–470.

Статья поступила 21 апреля 2016 г.

Хубиев Казбек Узеирович
Институт прикладной математики и автоматизации,
старший научный сотрудник отдела уравнений смешанного типа
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а
E-mail: khubiev_math@mail.ru

A MAXIMUM PRINCIPLE FOR A LOADED HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

Khubiev K. U.

We prove the maximum principle for a loaded equation of hyperbolic-parabolic type with variable coefficients. The characteristic load term is given on the degenerate line. The obtained results generalize the maximum principle for hyperbolic-parabolic equations provided in T. D. Dzhuraev's monograph, and in the hyperbolic domain the well-known Agmon–Nirenberg–Protter principle.

Key words: maximum principle, loaded equation, equation of mixed type, hyperbolic-parabolic equation.

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи в порядке цитирования или по алфавиту. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов (≈ 12 стр. формата А4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Авторские права на журнал в целом принадлежат Южному математическому институту — филиалу ВНЦ РАН и Редколлегии журнала, которые обладают исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на журнал.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 53-84-62;
E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18

Выпуск 4

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-50223 от 15 июня 2012 г.

Подписано в печать 15.12.2016. Дата выхода в свет 28.12.2016.
Формат бумаги $60\times84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 10,00. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель и издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.