Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17, выпуск 1 январь–март, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2015

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 3–13

УДК **517.9**

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО НЕТОЧНЫМ ГРАНИЧНЫМ ДАННЫМ

Е. В. Абрамова

В работе рассматривается задача о наилучшем (оптимальном) восстановлении решения задачи Дирихле для верхней полуплоскости по точно или приближенно известному преобразованию Фурье граничной функции. Построена серия оптимальных методов восстановления и вычислена соответствующая погрешность восстановления.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, экстремальная задача, задача Дирихле, преобразование Фурье.

Введение

Общая постановка задачи оптимального восстановления линейного функционала на некотором классе по точной информации об элементах этого класса впервые появилась в диссертации С. А. Смоляка [1], а по неточной — в работе [2]. Для линейных операторов эта тематика была развита в работах [3–8]. В задаче оптимального восстановления оптимальные методы ищутся сразу для всех функций из данного класса и в этом смысле данная задача идейно восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-х гг. прошлого века о нахождении наилучшего подпространства среди всех подпространств фиксированной размерности, приближающего данный класс функций. Заметим, что с точки зрения приложений вполне естественно считать, что мы имеем дело не с индивидуальным элементом, а лишь с представителем некоторого семейства. В данной работе решается задача о наилучшем восстановлении решения задачи Дирихле для верхней полуплоскости на прямой, параллельной оси абсцисс в метрике L_2 по неточно заданному преобразованию Фурье граничной функции, определенной на оси абсцисс.

1. Постановка задачи

Пусть r — натуральное число. Обозначим через $W_2^r(\mathbb{R})$ соболевский класс функций на прямой

$$W_2^r(\mathbb{R}) = \left\{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : f^{(r-1)}(\cdot) \in LAC(\mathbb{R}), \quad \left\| f^{(r)}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1 \right\},$$

где $LAC(\mathbb{R})$ обозначает множество функций на $\mathbb{R}$, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке.

Пусть Δ — оператор Лапласа на плоскости $\mathbb{R}^2$ и $f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R})$. Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)=0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y>0,\\ u(\cdot,0)=f(\cdot),\end{cases} \tag{1}$$

заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхней полуплоскости, для которой $f(\cdot)$ является граничной функцией. Последнее понимается так: $u(\cdot,y)\to f(\cdot)$ при $y\to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Решением этой задачи, как хорошо известно (см., например, [9]), является интеграл Пуассона

$$u(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}} P(x-t,y)f(t)\,dt, \tag{2}$$

где $P(x,y)=\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$.

Пусть $Y>0$. Ставится задача о наилучшем восстановлении функции $u(\cdot,Y)$ — решении задачи Дирихле на прямой $y=Y$ — по следующей информации: на отрезке $[-\sigma,\sigma]$, $\sigma>0$ известно преобразование Фурье $F[f](\cdot)$ функции $f(\cdot)$ либо точно, либо приближенно в метрике $L_2([-\sigma,\sigma])$, т. е. известна функция $g(\cdot)\in L_2([-\sigma,\sigma])$ такая, что $\|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta$, где $\delta\geqslant 0$ (случай $\delta=0$ соответствует точному знанию $F[f](\cdot)$ на $[-\sigma,\sigma]$). Для удобства будем считать, что функция $g(\cdot)=0$ вне отрезка $[-\sigma,\sigma]$.

Задача оптимального восстановления $u(\cdot,Y)$ по указанной информации понимается следующим образом. Любое отображение $m\colon L_2([-\sigma,\sigma])\to L_2(\mathbb{R})$ называется *методом восстановления*, а величина

$$e(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma,m)=\sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\\ g(\cdot)\in L_2([-\sigma,\sigma]),\\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}}\|u(\cdot,Y)-m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

— *погрешностью метода* m.

Если $\delta=0$, то это записывается так:

$$e(Y,W_2^r(\mathbb{R}),0,\sigma,m)=\sup_{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R})}\|u(\cdot,Y)-m(F[f](\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует метод, на котором погрешность принимает минимальное значение. Точнее говоря, нас интересует величина

$$E(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma)=\inf_{m\colon L_2([-\sigma,\sigma])\to L_2(\mathbb{R})}e(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma,m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma)=e(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma,\widehat{m}).$$

Такие методы мы называем *оптимальными методами восстановления задачи Дирихле*.

Нашей целью является построение оптимальных методов восстановления и нахождение соответствующей погрешности оптимального восстановления.

2. Формулировка основного результата

Теорема. 1) *Пусть $\delta > 0$. Тогда погрешность оптимального восстановления задачи Дирихле имеет вид*

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \sqrt{\delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}, \quad \delta_1^2 = \delta^2/2\pi.$$

Для любой измеримой функции $a_1(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ такой, что

$$\left|a_1(\xi) - \frac{1}{1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}}\right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}}{(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2} \times \left(e^{2Y|\xi|}(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}) - 1\right), \quad \text{для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma],$$

линейный непрерывный оператор $\Lambda_{a_1} : L_2([-\sigma, \sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу

$$F[\Lambda_{a_1} g(\cdot)](\xi) = a_1(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|},$$

является оптимальным методом.

2) *Если $\delta = 0$, то погрешность оптимального восстановления задачи Дирихле имеет вид:*

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma\right) = \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}.$$

Для любой измеримой функции $a_2(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ такой, что

$$|a_2(\xi) - 1| \leqslant (\xi/\sigma)^r \cdot e^{-Y\sigma}, \quad \text{для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma],$$

линейный непрерывный оператор $\Lambda_{a_2} : L_2([-\sigma, \sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу

$$F[\Lambda_{a_2} g(\cdot)](\xi) = a_2(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|},$$

является оптимальным методом.

Доказательство приведем в следующих двух параграфах.

3. Оценка снизу погрешности оптимального восстановления

1. Пусть $u(\cdot, Y)$ — решение задачи Дирихле (1) и m — произвольный метод восстановления. Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R}), \quad \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta. \tag{3}$$

Обозначим ее значение через S, т. е.

$$S = \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R}), \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta}} \|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Покажем, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения этой задачи: $E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma\right) \geqslant S$. Оценим сверху максимизируемый функционал в (3):

$$\begin{aligned}
2\|u(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \|u(\cdot,Y) - m(0) - (-u(\cdot,Y) - m(0))\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant \|u(\cdot,Y) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|-u(\cdot,Y) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}))} \\
&\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\\ \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot,Y) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\\ g(\cdot)\in L_2([-\sigma,\sigma]),\\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u\left(\cdot,Y\right) - m\left(g(\cdot)\right)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 2e\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\|u(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant e\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m\right).$

Переходя слева к верхней грани по всем функциям $f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$, таким, что $\|F[f]\left(\cdot\right)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta$, а справа к нижней грани по всем методам $m : L_2\left([-\sigma,\sigma]\right) \to L_2(\mathbb{R})$, получим:

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma\right) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\\ \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

т. е.

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma\right) \geqslant S.$$

2. Найдем значение величины S. Так как $F[u(\cdot,Y)](\cdot) = e^{-Y|\xi|} \cdot F[f](\cdot)$ (см., например, [9]), то согласно теореме Планшереля квадрат значения задачи (3) равен значению следующей задачи:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \cdot |F[f](\xi)|^2\, d\xi \to \max, \\
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi)|F[f]\left(\xi\right)|^2 d\xi \leqslant \frac{\delta^2}{2\pi}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi^{2r}|F[f]\left(\xi\right)|^2\, d\xi \leqslant 1,
\end{gathered} \tag{4}$$

где $\chi_{(-\sigma,\sigma)}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $(-\sigma,\sigma)$. Нетрудно показать, что эта задача не имеет решения. Поэтому, формально заменяя $d\mu\left(\xi\right) = \frac{1}{2\pi}|F[f](\xi)|^2\, d\xi$, рассмотрим более общую задачу на произвольных положительных борелевских мерах на прямой («расширение» задачи (4)):

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\, d\mu(\xi) \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi)\, d\mu(\xi) \leqslant \delta_1^2, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\, d\mu(\xi) \leqslant 1, \quad \delta_1^2 = \frac{\delta^2}{2\pi}. \tag{5}$$

3. Рассмотрим вначале случай, когда информация задана неточно ($\delta > 0$). Найдем значение «расширенной» задачи (5). Будем решать равносильную задачу на минимум:

$$-\int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} d\mu(\xi) \to \min, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi) d\mu(\xi) \leqslant \delta_1^2, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\mu(\xi) \leqslant 1. \tag{6}$$

Это выпуклая задача. Составим ее функцию Лагранжа:

$$
\begin{aligned}
&L\left(d\mu\left(\xi\right), \lambda_1, \lambda_2\right) \\
&\quad = -\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\, d\mu\left(\xi\right) + \lambda_1 \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi)\, d\mu\left(\xi\right) - \delta_1^2\right) + \lambda_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\mu\left(\xi\right) - 1\right) \\
&\qquad = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + \lambda_1 \chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \lambda_2 \xi^{2r}\right) d\mu\left(\xi\right) - \left(\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2\right).
\end{aligned}
$$

По теореме Каруша — Куна — Такера (см., например, [10]), если существует допустимая мера $d\widehat{\mu}\left(\cdot\right)$ в (6) и коэффициенты $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ такие, что выполняются условия:

a) $\hat{\lambda}_1 \geqslant 0$; $\hat{\lambda}_2 \geqslant 0$;

b) $\hat{\lambda}_1 \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi)\, d\mu\left(\xi\right) - \delta_1^2\right) = 0, \;\; \hat{\lambda}_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\mu\left(\xi\right) - 1\right) = 0;$

c) $\min\limits_{d\mu(\cdot) \geqslant 0} L\left(d\mu(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2\right) = L\left(d\widehat{\mu}\left(\cdot\right), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2\right),$

то $d\widehat{\mu}\left(\cdot\right)$ — решение задачи (6). Условие c) равносильно следующему неравенству:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + \hat{\lambda}_1 \chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r}\right) d\mu\left(\xi\right) \\
&\qquad \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + \hat{\lambda}_1 \chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r}\right) d\widehat{\mu}\left(\xi\right),
\end{aligned}
$$

справедливому для любой меры $d\mu(\cdot) \geqslant 0$.

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$
q(\xi) = -e^{-2Y|\xi|} + \hat{\lambda}_1 \chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r}.
$$

Положим $\hat{\lambda}_1 = 1$ и $\hat{\lambda}_2 = \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}$. При этом функция $q(\xi)$ примет вид:

$$
q(\xi) = \begin{cases} 1 - e^{-2Y|\xi|} + e^{-2Y\sigma} \left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^{2r}, & \xi \in \left(-\sigma; \sigma\right); \\ e^{-2Y\sigma} \left(\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^{2r} - e^{-2Y(|\xi| - \sigma)}\right), & \xi \notin \left(-\sigma; \sigma\right). \end{cases}
$$

Легко проверить, что функция $q(\cdot)$ всюду неотрицательна и обращается в нуль в точках $\xi = 0$ и $\xi = \sigma$ (т. е. $q\left(0\right) = 0$ и $q\left(\sigma\right) = 0$).

Пусть, далее, $d\widehat{\mu}(\xi) = A\delta\left(\xi\right) + B\delta\left(\xi - \sigma\right)$, где $\delta\left(\xi - \xi_0\right)$ — дельта-функция в точке ξ_0. Из условий

$$
\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi) : d\hat{\mu}\left(\xi\right) = \delta_1^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\hat{\mu}\left(\xi\right) = 1,
$$

находим коэффициенты

$$
A = \delta_1^2, \quad B = \frac{1}{\sigma^{2r}}.
$$

Таким образом, с заданными $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ и $d\hat{\mu}(\cdot)$ условия *a*), *b*) и *c*) выполнены. Значит, $d\hat{\mu}(\xi) = \delta_1^2 \cdot \delta(\xi) + \frac{\delta(\xi - \sigma)}{\sigma^{2r}}$ — решение задач (5), (6).

Подставляя найденное выражение для меры в максимизируемый функционал задачи (5), вычислим ее значение

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}. \qquad (7)$$

Понятно, что значение задачи (4) не больше значения ее «расширения». Покажем, что на самом деле они совпадают.

Рассмотрим семейство функций $f_n(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид:

$$F[f_n]\,(\xi) = \begin{cases} K_1(n), & \text{если } \xi \in (0; 1/n)\,; \\ K_2(n), & \text{если } \xi \in (\sigma; \sigma + 1/n)\,; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $K_1^2(n) = 2\pi n \delta_1^2$, $K_2^2(n) = 2\pi n \frac{1-\delta_1^2/n^{2r}}{(\sigma+1/n)^{2r}}$. Легко проверить, что функции $f_n(\cdot)$ допустимы в задаче (4). Значение максимизируемого функционала в (4) на этих функциях:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[f_n]\,(\xi)\,|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi}\left(K_1^2(n)\int\limits_0^{1/n} e^{-2Y\xi} d\xi + K_2^2(n)\int\limits_{\sigma}^{\sigma+1/n} e^{-2Y\xi} d\xi\right) \\ &\geqslant \frac{e^{-2Y/n}}{2\pi n}\left(K_1^2(n) + K_2^2(n) e^{-2Y\sigma}\right) = e^{-2Y/n}\left(\delta_1^2 + \frac{1-\delta_1^2/n^{2r}}{(\sigma+1/n)^{2r}}\, e^{-2Y\sigma}\right). \end{aligned}$$

Ясно, что величина справа стремится к $\delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}$ и, тем самым, значения задач (4) и (5) совпадают. Откуда следует, что в случае неточно заданной информации ($\delta > 0$), значение нижней границы погрешности оптимального восстановления

$$S = \sqrt{\delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}.$$

Таким образом, показано, что в случае $\delta > 0$ для погрешности оптимального восстановления справедлива следующая оценка снизу:

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma\right) \geqslant \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}. \qquad (8)$$

В случае, когда информация задана точно ($\delta = 0$), аналогичные выкладки приводят к следующему результату:

$$S = \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r},$$

и, тем самым,

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma\right) \geqslant \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}. \qquad (9)$$

4. Оценка сверху погрешности оптимального восстановления и оптимальные методы

Будем искать оптимальные методы среди методов вида:

$$m\left(g\left(\cdot\right)\right) = \Lambda g\left(\cdot\right), \qquad (10)$$

где $\Lambda : L_2\left([-\sigma, \sigma]\right) \to L_2\left(\mathbb{R}\right)$ — линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид:

$$F[\Lambda g(\cdot)](\xi) = a(\xi)g(\xi)e^{-Y|\xi|}, \quad a(\cdot) \in L_\infty([-\sigma,\sigma]). \tag{11}$$

1. Вначале исследуем случай неточно заданной информации ($\delta > 0$). Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\|u(\cdot,Y) - m(g)(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \ \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta, \quad \left\|f^{(r)}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1.$$

Применяя теорему Планшереля, получим, что квадрат значения этой задачи равен значению следующей задачи:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}[f](\xi) - a(\xi)g(\xi)\right)|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\mathbb{F}[f](\xi) - g(\xi)|^2 d\xi \leqslant \delta_1^2, \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}|\mathbb{F}[f](\xi)|^2 d\xi \leqslant 1.$$

Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ — некоторые положительные числа. Оценим сверху подынтегральное выражение в максимизируемом функционале, используя неравенство Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned}
&\left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}[f](\xi) - a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 \\
&= \left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}[f](\xi) - a(\xi)F[f](\xi) + a(\xi)F[f](\xi) - a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 \\
&= e^{-2Y|\xi|}\left|(1-a(\xi))\,\mathbb{F}[f](\xi) + a(\xi)\left(\mathbb{F}[f](\xi) - g(\xi)\right)\right|^2 \\
&= e^{-2Y|\xi|}\left|\frac{1-a(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}\xi^r}\sqrt{\lambda_2}\xi^r\mathbb{F}[f](\xi) + \frac{a(\xi)}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{\lambda_1}\left(\mathbb{F}[f](\xi) - g(\xi)\right)\right|^2 \\
&\leqslant e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\right)\left(\lambda_2\xi^{2r}\,|\mathbb{F}[f](\xi)|^2 + \lambda_1\,|\mathbb{F}[f](\xi) - g(\xi)|^2\right).
\end{aligned}$$

Обозначим

$$S(\xi) = e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\right), \quad \xi \in [-\sigma,\sigma].$$

Пусть $A = \operatorname{ess\,sup}_{\xi\in[-\sigma,\sigma]} S(\xi)$. Тогда на отрезке $[-\sigma,\sigma]$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}[f](\xi) - a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi \\
&\qquad\leqslant \frac{A}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left(\lambda_2\xi^{2r}|\mathbb{F}[f](\xi)|^2 + \lambda_1\,|\mathbb{F}[f](\xi) - g(\xi)|^2\right) d\xi \\
&\qquad\qquad\leqslant \frac{\lambda_2 A}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\xi^{2r}\,|\mathbb{F}[f](\xi)|^2\, d\xi + \lambda_1 A\delta_1^2.
\end{aligned}$$

Если $\xi \in \mathbb{R}\backslash[-\sigma,\sigma]$, то $g(\xi)=0$, поэтому, учитывая, что $|\xi/\sigma|>1$, можем записать

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-\sigma,\sigma]}\left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-\sigma,\sigma]}\left|e^{-Y|\xi|}\mathbb{F}\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\sigma^{2r}}\int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-\sigma,\sigma]}\xi^{2r}\left|\mathbb{F}\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi.$$

Складывая эти неравенства, получим оценку на всей оси

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi$$

$$\leqslant \frac{\lambda_2 A}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\xi^{2r}\left|\mathbb{F}\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi+\frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\cdot\sigma^{2r}}\int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-\sigma,\sigma]}\xi^{2r}\left|\mathbb{F}\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi+\lambda_1 A\delta_1^2.$$

Все вышесказанное справедливо для произвольных положительных чисел λ_1 и λ_2.

Пусть теперь $\hat\lambda_1 = 1$, $\hat\lambda_2 = e^{-2Y\sigma}/\sigma^{2r}$. Дополнительно потребуем, чтобы $A = \operatorname{ess\,sup}_{\xi\in[-\sigma,\sigma]} S(\xi) \leqslant 1$. Тогда, учитывая что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}|\mathbb{F}\left[f\right](\xi)|^2 d\xi \leqslant 1,$$

получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi \leqslant \frac{\lambda_2}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\left|\mathbb{F}\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi+\delta_1^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}+\delta_1^2. \quad (12)$$

Таким образом, если метод восстановления m удовлетворяет условиям (10)–(11), причем $A = \operatorname{ess\,sup}_{\xi\in[-\sigma,\sigma]} S(\xi) \leqslant 1$, то для его погрешности справедлива оценка

$$e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m) \leqslant \sqrt{\delta_1^2+\frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}. \quad (13)$$

Эта оценка совпадает со значением нижней границы погрешности оптимального восстановления (8).

2. Проанализируем, какое условие на функцию $a(\xi)$ накладывает требование $S(\xi) \leqslant 1$, $\xi \in [-\sigma,\sigma]$. Имеем, выделяя полный квадрат,

$$S(\xi) = e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2r}}+\frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\right)$$

$$= e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2r}}{\lambda_1\lambda_2\xi^{2r}}\left|a(\xi)-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2r}}\right|^2+\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2r}}\right) \leqslant 1.$$

Откуда

$$\left|a(\xi)-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2\,\xi^{2r}}\right|^2 \leqslant \frac{\lambda_1\lambda_2\xi^{2r}\left(\left(\lambda_1+\lambda_2\xi^{2r}\right)e^{2Y|\xi|}-1\right)}{(\lambda_1+\lambda_2\xi^{2r})^2}.$$

Подставим выбранные нами ранее значения $\hat{\lambda}_1 = 1$ и $\hat{\lambda}_2 = \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}$:

$$\left|a(\xi) - \frac{1}{1+(\xi/\sigma)^{2r}e^{-2Y\sigma}}\right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}\left(\left(1+e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}\right)e^{2Y|\xi|}-1\right)}{(1+e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2}.$$

Следовательно, если функция $a(\cdot)$ удовлетворяет данному соотношению, то для погрешности соответствующего метода восстановления справедлива оценка (13).

3. Теперь перейдем к случаю точно заданной информации ($\delta = 0$). Аналогично предыдущему случаю рассмотрим экстремальную задачу:

$$\|u(\cdot, Y) - m(g)(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max,$$
$$\left\|f^{(r)}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1, \quad F[f](\cdot) = g(\cdot) \ \text{ для п.в. } \ \xi \in [-\sigma, \sigma].$$

Применяя теорему Планшереля, получим, что квадрат значения этой задачи равен значению следующей задачи:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}[f](\xi) - a(\xi)g(\xi)\right)|^2 d\xi \to \max, \\ F[f](\cdot) = 0 \ \text{ для п.в. } \ \xi \in [-\sigma,\sigma], \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\left|\mathbb{F}[f](\xi)\right|^2 d\xi \leqslant 1. \end{gathered} \tag{14}$$

Оценим максимизируемый функционал. Так как $g(\cdot) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}\backslash[-\sigma,\sigma]$ и $Y > 0$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|\mathbb{F}[f](\xi) - a(\xi)g(\xi)\right|^2$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{-2Y|\xi|}\cdot|a(\xi)-1|^2\left|\mathbb{F}[f](\xi)\right|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-\sigma,\sigma]} e^{-2Y|\xi|}\left|\mathbb{F}[f](\xi)\right|^2 d\xi$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |a(\xi)-1|^2\left|\mathbb{F}[f](\xi)\right|^2 d\xi + \frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\sigma^{2r}}\int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-\sigma,\sigma]} \xi^{2r}\left|\mathbb{F}[f](\xi)\right|^2 d\xi.$$

Потребуем, чтобы функция $a(\cdot)$ удовлетворяла следующему условию:

$$|a(\xi)-1|^2 \leqslant e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}, \quad \xi \in [-\sigma,\sigma].$$

Тогда неравенство примет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|\mathbb{F}[f](\xi) - a(\xi)g(\xi)\right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\sigma^{2r}}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\left|\mathbb{F}[f](\xi)\right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}.$$

Значит, если метод восстановления m удовлетворяет условиям (10)–(11), причем

$$|a(\xi)-1|^2 \leqslant e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}, \quad \xi \in [-\sigma,\sigma],$$

то

$$e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma, m) \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}.$$

Полученная оценка снова совпадает со значением нижней границы погрешности оптимального восстановления (8).

В § 3 доказано, что для погрешности оптимального восстановления справедливы следующие оценки снизу:

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma\right) \geqslant \sqrt{\delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}, \quad \delta > 0,$$
$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma\right) \geqslant \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}, \quad \delta = 0.$$

В § 4 показано, что если метод m имеет вид

$$m\left(g\left(\cdot\right)\right) = \Lambda g\left(\cdot\right),$$

где $\Lambda : L_2\left([-\sigma, \sigma]\right) \to L_2\left(\mathbb{R}\right)$ — линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид:

$$F[\Lambda g\left(\cdot\right)](\xi) = a(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|},$$

и функция $a(\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$a\left(\cdot\right) \in L_\infty\left([-\sigma, \sigma]\right),$$
$$\left| a(\xi) - \frac{1}{1 + (\xi/\sigma)^{2r} \cdot e^{-2Y\sigma}} \right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}\left(\left(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}\right) e^{2Y|\xi|} - 1\right)}{(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2}, \quad \delta > 0;$$
$$|a(\xi) - 1| \leqslant e^{-Y\sigma}(\xi/\sigma)^r, \quad \text{если } \delta = 0,$$

то погрешность соответствующего метода не превышает таких же величин и тем самым он оптимален.

Приведем пример оптимального метода.

1. Случай неточно заданной информации $(\delta > 0)$.

Можно показать, что метод вида (10)–(11), где $a\left(\xi\right) = \frac{1}{1+(\xi/\sigma)^{2r} \cdot e^{-2Y\sigma}}$, $\xi \in [-\sigma, \sigma]$, удовлетворяет всем требуемым условиям. Тогда

$$F[m(g)]\left(\xi\right) = \begin{cases} \frac{e^{-Y|\xi|} \cdot g(\xi)}{1+(\xi/\sigma) \cdot e^{-2Y\sigma}}, & \xi \in [-\sigma, \sigma]; \\ 0, & \xi \notin [-\sigma, \sigma]. \end{cases}$$

В этом случае восстановленное решение имеет вид:

$$u\left(x, Y\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \frac{e^{-Y|\xi|} \cdot g\left(\xi\right)}{1 + \left(\xi/\sigma\right)^{2r} \cdot e^{-2Y\sigma}} e^{i\xi x}\, d\xi,$$

где $C = \frac{1}{1+(\xi/\sigma)^{2r} \cdot e^{-2Y\sigma}}$ — сглаживающий множитель.

2. Случай точно заданной информации $(\delta = 0)$.

Функция $a\left(\cdot\right) = 1$, $\xi \in [-\sigma, \sigma]$, очевидно, удовлетворяет всем требованиям теоремы. Тогда восстановленное решение имеет вид

$$u\left(x, Y\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{-Y|\xi|} g\left(\xi\right) e^{i\xi x} d\xi.$$

Легко заметить, что это решение относится к классу оптимальных и в первом случае.

Автор выражает искреннюю благодарность Г. Г. Магарил-Ильяеву за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. ... к. ф.-м. н.—М.: МГУ, 1965.
2. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
3. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory.—N. Y.: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
4. *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal.—1979.—P. 87–105.
5. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery // Lecture Notes in Mathematics.—Berlin: Springer, 1985.—Vol. 1129.—P. 21–93.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его приложения.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // Тр. МИАН.—2010.—Vol. 269.—P. 181–192.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его приложения.—2010.—Т. 44.—С. 76–79.
9. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М., 1974.
10. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения (3-е изд.).—М.: Эдиториал УРСС, 2011.
11. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа (4-е изд.).—М.: Наука, 1976.

Статья поступила 2 сентября 2014 г.

Абрамова Елена Владимировна
Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики,
старший преподаватель
РОССИЯ, 119454, Москва, пр-т Вернадского, д. 78
E-mail: abramova_elena@inbox.ru

ON OPTIMAL RECOVERY OF DIRICHLET PROBLEM FROM A BOUNDARY FUNCTION KNOWN APPROXIMATELY

Abramova E. V.

The problem of best (optimal) recovery of a solution of the Dirichlet problem for the upper half-plane from the Fourier transform of the boundary functions known approximately in considered. A series of optimal recovery methods are foud and the corresponding errors recovery are calculated.

Key words: optimal recovery, extremal problem, Dirichlet's problem, Fourier transform.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 14–20

УДК **517.983**

ОБ ОДНОМ ФУРЬЕ-МУЛЬТИПЛИКАТОРЕ

М. Н. Гуров, Д. Н. Карасев, В. А. Ногин

Изучается один Фурье-мультипликатор, вырождающийся или имеющий особенности на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности этого мультипликатора классу Хермандера M_p^q.

Ключевые слова: мультипликатор, ограниченность, потенциал.

Введение

В работе изучается вопрос о принадлежности классу M_p^q [1] мультипликатора

$$b_\lambda(|\xi|) = \begin{cases} \varkappa(|\xi|) A_\lambda (1-|\xi|+i0)^\lambda, & \lambda \notin \mathbb{Z}, \\ \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|)^\lambda (A'_\lambda + A''_\lambda \ln(1-|\xi|+i0)), & \lambda \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{1}$$

где $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$, A_λ, A'_λ, A''_λ — постоянные из леммы 2.1, $n \in \mathbb{N}$. Функция $\varkappa(r) \in C^\infty(0,+\infty)$ такова, что $0 \leqslant \varkappa(r) \leqslant 1$; $\varkappa(r)=1$, если $|1-r| \leqslant \delta/4$, $\varkappa(r)=0$, если $|1-r| \geqslant \delta/2$. Здесь δ, $0<\delta<1$, — некоторое число, о его выборе будет сказано ниже.

Мультипликаторы такого вида возникают при исследовании свойств ограниченности операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами (см. [2–8]). В частности, подобные мультипликаторы возникают при получении $(L_p - L_q)$-оценок для дробных акустических потенциалов [9].

Нетривиальность представленных результатов объясняется тем, что к функции $b_\lambda(|\xi|)$ не применимы классические мультипликаторные теоремы типа Михлина — Хермандера.

1. Основной результат

Ниже мы будем использовать следующие обозначения: $(A, B, \dots, K)$ — открытый многоугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами в точках $A, B, \dots, K$; $[A, B, \dots, K]$ — его замыкание. Пусть $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$. Обозначим

$$A = \left(1; 1 - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}\right), \quad A' = \left(\frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}; 0\right),$$

$$C = \left(\frac{3}{2} - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{n-1}; \frac{3}{2} - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{n-1}\right),$$

$$C' = \left(\frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{n-1} - \frac{1}{2}; \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{n-1} - \frac{1}{2}\right),$$

$$E = (1;0), \quad F = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),$$

$$G = \left(1 - \frac{(n+1+2\operatorname{Re}\lambda)(n-1)}{2n(n+3)}; 1 - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}\right),$$

$$G' = \left(\frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}; \frac{(n+1+2\operatorname{Re}\lambda)(n-1)}{2n(n+3)}\right),$$

$$H = \left(1 - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}; 1 - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}\right), \quad H' = \left(\frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}; \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}\right),$$

$$O = (1;1), \quad O' = (0;0),$$

$$K = \left(\frac{n+1-2\operatorname{Re}\lambda}{n+1} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad K' = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{n+1-2\operatorname{Re}\lambda}{n+1}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{(n-1)(n+1+2\operatorname{Re}\lambda)}{2n(n+1)}; 1 - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}\right),$$

$$B' = \left(\frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}; \frac{(n-1)(n+1+2\operatorname{Re}\lambda)}{2n(n+1)}\right).$$

Для формулировки основных результатов нам понадобится следующее множество на $(1/p, 1/q)$-плоскости (см. рис. 1, 2 для случаев $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$ и $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < 0$ соответственно):

$$\mathscr{L}_1(\lambda, n) = \begin{cases} [A', H', H, A, E] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), & \frac{n-1}{2(n+1)} \leqslant \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', C', C, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (C', C), & 0 < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2(n+1)}, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup \{F\}, & \operatorname{Re}\lambda = 0, \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \lambda = 0, \\ (A', G', K', K, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup [K', K], & -1/2 < \operatorname{Re}\lambda < 0, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & -\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\frac{1}{2}, \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (B', B), & -\frac{n+1}{2} < \lambda \leqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Теорема 1.1. *Пусть* $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$. *Тогда*

$$b_\lambda(|\xi|) \in M_p^q, \quad \textit{если} \quad (1/p, 1/q) \in \mathscr{L}_1(\lambda, n); \tag{2}$$

$$b_\lambda(|\xi|) \notin M_p^q, \quad \textit{если} \quad (1/p, 1/q) \in [A, H, O] \cup [A', H', O']. \tag{3}$$

При $\operatorname{Re}\lambda = \frac{n-1}{2}$ *имеем*

$$b_\lambda(|\xi|) \in M_p^q \quad \Leftrightarrow \quad (1/p, 1/q) \in [O', E, O] \setminus (\{O'\} \cup \{O\}). \tag{4}$$

Если $\operatorname{Re}\lambda > \frac{n-1}{2}$, *то*

$$b_\lambda(|\xi|) \in M_p^q \quad \Leftrightarrow \quad (1/p, 1/q) \in [O', E, O]. \tag{5}$$

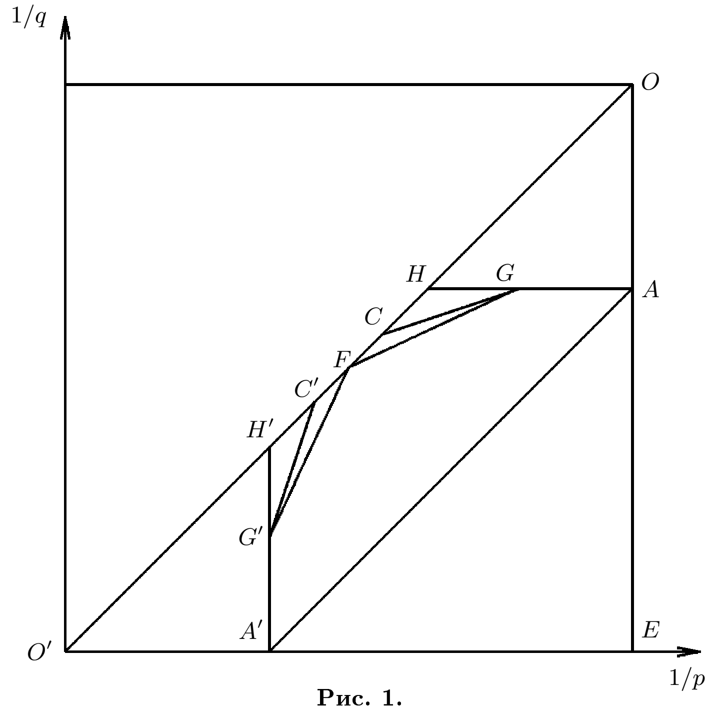

Рис. 1.

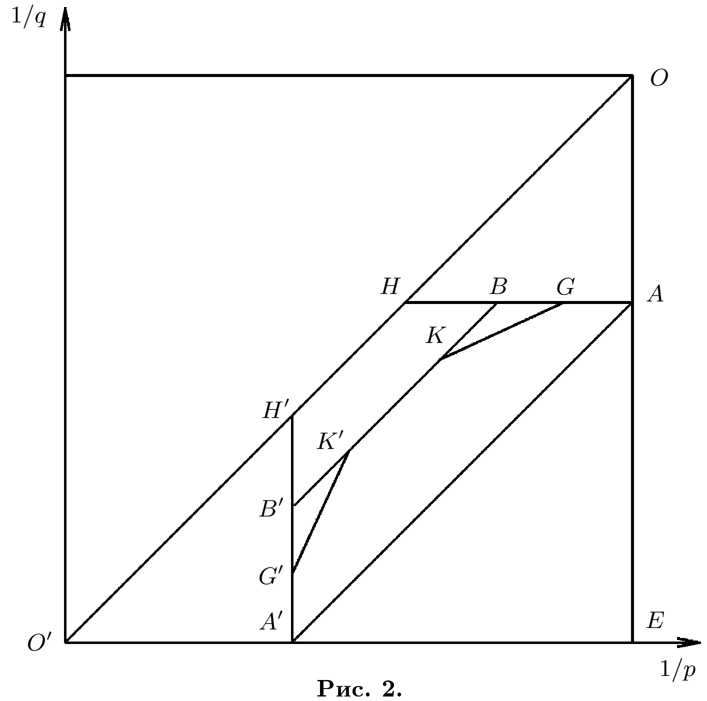

Рис. 2.

2. Вспомогательные сведения и утверждения

2.1 Обозначения. $\mathscr{R}_0 = \{\varphi : \varphi = Ff,\ f \in L_1\}$ — банахова алгебра преобразований Фурье интегрируемых функций; S — класс Шварца быстро убывающих гладких функций; L_p^q — класс ядер $k \in S'$ таких, что $\|k * f\|_q \leqslant C\|f\|_p$, где $f \in S$, постоянная $C > 0$ не зависит от f; $M_p^q = F(L_p^q)$ — класс $(p-q)$-мультипликаторов. Классы L_p^q и M_p^q были введены Л. Хермандером в [1].

2.2. Асимптотическое представление для некоторых интегралов, содержащих осциллирующую экспоненту. Пусть $v(r) \in C^\infty(\mathbb{R}^1_+)$, $0 \leqslant v(r) \leqslant 1$, $v(r) = 0$, если $r \leqslant 1$ и $v(r) = 1$, если $r \geqslant 2$. Справедлива следующая

Лемма 2.1 [10]. *Пусть $\beta \in \mathbb{C}$. Для $\varepsilon > 0$ положим*

$$I_{\beta,\varepsilon}(t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_0^\infty v(s) s^{-\beta-1} e^{ist-\varepsilon s}\, ds.$$

Тогда $I_{\beta,\varepsilon}(t)$ равномерно сходится при $\varepsilon \to 0$, если $|t| > \delta$ для любого $\delta > 0$, и для предельной функции $I_\beta(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_{\beta,\varepsilon}(t)$ справедливо равенство

$$I_\beta(t) = \begin{cases} A_\beta(t+i0)^\beta + \tilde{I}_\beta(t), & \beta \notin \mathbb{Z}, \\ t^\beta(A'_\beta + A''_\beta \ln(t+i0)) + \tilde{I}_\beta(t), & \beta \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

где $\tilde{I}_\beta(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $A_\beta = (2\pi)^{-n} e^{-\frac{i\pi\beta}{2}} \Gamma(-\beta)$,

$$A'_\beta = (2\pi)^{-n} \frac{\left(\psi(\beta+1) + i\frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{i\pi\beta}{2}}}{\beta!}, \quad A''_\beta = -(2\pi)^{-n} \frac{e^{\frac{i\pi\beta}{2}}}{\beta!},$$

$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ и $I_\beta(t) = O(|t|^{-M})$ при $t \to \infty$, $M > 0$.

В [10] доказано, что $I_\beta \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ и

$$\left| \left(\frac{d}{dt}\right)^j I_\beta(t) \right| \leqslant C|t|^{-M}, \quad t \to \infty,\ j = 0,1,2,\dots,$$

для любого $M \in \mathbb{N}$.

2.3. О свойствах символа оператора S^λ. Доказательство теоремы 1.1 основано на использовании свойств символа оператора

$$(S^\lambda \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(|t|) \frac{e^{i|t|}}{|t|^{\frac{n+1}{2}+\lambda}} \varphi(x-t)\, dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > -\frac{n+1}{2},$$

где функция $\chi(r) \in C^\infty(0;\infty)$ такова, что $0 \leqslant \chi(r) \leqslant 1$, $\chi(r) = 0$, если $r \leqslant N$ ($N \in \mathbb{N}$), $\chi(r) = 1$, если $r \geqslant 2N$. Обозначим ядро этого оператора через $k^\lambda(|t|)$, а его символ — через $\widehat{k^\lambda}(|\xi|)$.

Анализируя представление для функции $\widehat{k^\lambda}(|\xi|)$ в окрестности единичной сферы, полученное в работе [2], с учетом леммы 2.1, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.2. *Пусть $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$. Справедливо представление*

$$\widehat{k^\lambda}(|\xi|) = \begin{cases} \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^\lambda \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_k A_{-\lambda-k-\frac{1}{2}} |\xi|^{\frac{1-n}{2}-k} (1-|\xi|)^k + J_\lambda(|\xi|), & \lambda \notin \mathbb{Z}, \\ \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|)^\lambda \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_k (A'_{-\lambda-k-\frac{1}{2}} + A''_{-\lambda-k-\frac{1}{2}} \\ \qquad \times \ln(1-|\xi|+i0)) |\xi|^{\frac{1-n}{2}-k} (1-|\xi|)^k + J_\lambda(|\xi|), & \lambda \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{6}$$

где $J_\lambda(|\xi|) \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n)$ и $|D^\nu J_\lambda(|\xi|)| \leqslant C|\xi|^{-M}$, $\nu = 0,1,2,\dots$, $|\xi| \to \infty$, $M \in \mathbb{N}$. Константы C_k определены в [2].

Применяя теоремы 8.1 и 8.2 из [12], получаем, что $J_\lambda(|\xi|) \in \mathscr{R}_0$, следовательно, $J_\lambda(|\xi|) \in M_p^q$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.

В [2–6] доказано следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть* $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$, *тогда*

$$\widehat{k^\lambda}(|\xi|) \in M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in \mathscr{L}_1(\lambda, n). \tag{7}$$

Кроме того,

$$\widehat{k^\lambda}(|\xi|) \notin M_p^q, \quad \textit{если} \ (1/p, 1/q) \in [A, H, O] \cup [A', H', O']. \tag{8}$$

3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$, $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Введем вспомогательную функцию

$$P_N(|\xi|) \equiv \sum_{k=0}^{N} C_k A_{-\lambda-k-\frac{1}{2}} |\xi|^{\frac{1-n}{2}-k}(1-|\xi|)^k.$$

Заметим, что $P_N(|\xi|) \neq 0$ при $|\xi| = 1$. Выберем δ, $0 < \delta < 1$, так, чтобы это соотношение выполнялось для всех ξ таких, что $|1-|\xi|| \leqslant \delta$. Именно это δ фигурирует в определении функций $\varkappa(r)$. Пусть далее функция $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)$ такова, что $0 \leqslant \widetilde{\varkappa}(|\xi|) \leqslant 1$, $\widetilde{\varkappa}(|\xi|) = 0$, если $|1-|\xi|| \geqslant \delta$ и $\widetilde{\varkappa}(|\xi|) = 1$, если $|1-|\xi|| \leqslant \delta/2$. Тогда $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)\varkappa(|\xi|) = \varkappa(|\xi|)$.

Из леммы 2.1 получаем

$$b_\lambda(|\xi|) = \widehat{k^\lambda}(|\xi|)\frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)}{P_N(|\xi|)} - \frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)J_\lambda(|\xi|)}{P_N(|\xi|)}. \tag{9}$$

Заметим, что $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)J_\lambda(|\xi|)/P_N(|\xi|) \in \mathscr{R}_0 \cap L_1$ с учетом теоремы 8.1 из [12]. Тогда эта функция принадлежит M_p^q, $(1/p, 1/q) \in [O', O, E]$. Используя (7), получаем (2), с учетом того, что $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)/P_N(|\xi|) \in C_0^\infty$.

Очевидно, что $\widehat{k^\lambda}(\xi) \in M_p^q \Leftrightarrow (1/p, 1/q) \in [O', O, E] \setminus (\{O'\} \cup \{O\})$, если $\operatorname{Re}\lambda = \frac{n-1}{2}$ и $\widehat{k^\lambda}(\xi) \in M_p^q \Leftrightarrow (1/p, 1/q) \in [O', O, E]$, если $\operatorname{Re}\lambda > \frac{n-1}{2}$. Поэтому из (9) следует (4) и (5).

Докажем (3). Для этого, в силу соображений выпуклости и двойственности, достаточно показать, что $b_\lambda(|\xi|) \notin M_p^q$, если $(1/p, 1/q) \in [A, H]$. Применяя к функции $r^{\frac{1-n}{2}}$ $(r = |\xi|)$ в представлении (6) формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, получаем

$$r^{\frac{1-n}{2}} = 1 + \frac{(1-n)(r-1)}{2}\int_0^1 (1-(r-1)t)^{-\frac{1+n}{2}}\,dt,$$

откуда

$$\widehat{k^\lambda}(|\xi|) = b_\lambda(|\xi|) + T_\lambda(|\xi|). \tag{10}$$

Здесь

$$T_\lambda(|\xi|) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k \frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}\varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^{\lambda+k} + q_\lambda(|\xi|),$$

где

$$q_\lambda(|\xi|) = J_\lambda(|\xi|) + \frac{1-n}{2}\varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^\lambda \widetilde{\varkappa}(|\xi|)\int_0^1 (1-(|\xi|-1)t)^{-\frac{1+n}{2}}\,dt.$$

Заметим, что $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)/|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k} \in C_0^\infty$. С учетом (2), (4), (5) и вложения $\mathscr{L}_1(\lambda-1,n) \supset \mathscr{L}_1(\lambda,n)$, $\operatorname{Re}\lambda > 1$, заключаем, что $\varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^{\lambda+k} \in M_p^q$, $k \geqslant 1$, если $(1/p,1/q) \in [A,H]$. Кроме того, $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)\int\limits_0^1 (1-(|\xi|-1)t)^{-\frac{1+n}{2}}dt \in C_0^\infty$. Отсюда получаем

$$T_\lambda(|\xi|) \in M_p^q, \quad (1/p,1/q) \in [A,H]. \tag{11}$$

На основании (8) и (11), из (10) получаем (3) при $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{Z}$. Введем вспомогательную функцию

$$Q_N(|\xi|) \equiv \sum_{k=0}^{N} C_k(A'_{-\lambda-k-\frac{1}{2}} + A''_{-\lambda-k-\frac{1}{2}}\ln(1-|\xi|+i0))|\xi|^{\frac{1-n}{2}-k}(1-|\xi|)^k.$$

Из леммы 2.1 получаем

$$b_\lambda(|\xi|) = \widehat{k^\lambda}(|\xi|)\frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)}{Q_N(|\xi|)} - \frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)J_\lambda(|\xi|)}{Q_N(|\xi|)}. \tag{12}$$

Заметим, что $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)J_\lambda(|\xi|)/Q_N(|\xi|) \in \mathscr{R}_0 \cap L_1$ с учетом теоремы 8.1 из [12]. Тогда, с учетом того, что $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)/Q_N(|\xi|) \in C_0^\infty$ и соотношения (7), получаем (2).

Так как $\widehat{k^\lambda}(\xi) \in M_p^q \Leftrightarrow (1/p,1/q) \in [O',O,E] \setminus (\{O'\} \cup \{O\})$, если $\operatorname{Re}\lambda = \frac{n-1}{2}$ и $\widehat{k^\lambda}(\xi) \in M_p^q \Leftrightarrow (1/p,1/q) \in [O',O,E]$, если $\operatorname{Re}\lambda > \frac{n-1}{2}$, то из (12) следует (4) и (5) в случае $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Соотношение (3) в случае $\lambda \in \mathbb{Z}$ доказывается аналогично случаю $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

Литература

1. *Hörmander L.* Estimates for translation invariant operators in L^p spaces // Acta Mathematica.—1960.—Vol. 104.—P. 93–140.
2. *Карапетянц А. Н., Карасев Д. Н., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Изв. НАН Армении.—2003.—Т. 38, вып. 2.—С. 37–62.
3. *Betilgiriev M. A., Karasev D. N., Nogin V. A.* $L_p - L_q$ estimates for some potential type operators with oscillating kernels // Fractional Calculus & Applied Analysis.—2004.—Vol. 7, № 2.—P. 213–241.
4. *Карасев Д. Н.* $L_p - L_q$-оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 3.—С. 418–420.
5. *Karasev D. N.* $L_p \to L_q$-estimates for some potential-type operators with oscillating kernels // Fractional Calculus & Applied Analysis.—2002.—Vol. 5, № 2.—P. 131–153.
6. *Karasev D. N., Nogin V. A.* Inversion of some potential-type operators with oscillating kernels in the elliptic and non-elliptic cases. Integral Transforms & Special Functions.—2002.—Vol. 13.—P. 529–545.
7. *Börjeson L.* Estimates for the Bochner–Riesz operator with negative index // Ind. Univ. Math. J.—1986.—Vol. 35, № 2.—P. 225–233.
8. *Sogge C. D.* Eigenfunction and Bochner–Riesz estimates on manifolds with boundary // Math. Res. Lett.—2002.—Vol. 9.—P. 205–216.
9. *Ногин В. А., Рубин Б. С.* Оценки для потенциалов с осциллирующими ядрами, связанных с уравнением Гельмгольца // Диф. уравнения.—1990.—Т. 26, № 9.—С. 1608–1613.
10. *Miyachi A.* On some estimates for the wave equation in L^p and H^p // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA.—1980.—Vol. 27.—P. 331–354.
11. *Karasev D. N., Nogin V. A.* On boundedness of some potential-type operators with oscillating kernels // Math. Nachr.—2005.—Vol. 274, № 5.—P. 554–574.
12. *Самко С. Г., Костецкая Г. С.* Абсолютная интегрируемость интегралов Фурье // Вестн. РУДН (Математика).—1994.—№ 1.—С. 138–168.
13. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and their Applications.—London–N. Y.: Taylor&Frances, 2002.—358+xvii p.—(Ser. Anal. Methods and Special Functions, Vol. 5.).

Статья поступила 1 июля 2014 г.

Гуров Михаил Николаевич
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
младший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
аспирант кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: MGurov@inbox.ru

Карасев Денис Николаевич
Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),
декан факультета компьютерных технологий и информационной безопасности
РОССИЯ, 344002, Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 69
E-mail: oscillatingman@mail.ru

Ногин Владимир Александрович
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: nogin@math.rsu.ru

ON A CERTAIN FOURIER MULTIPLIER

Gurov M. N., Karasev D. N., Nogin V. A.

We study a certain Fourier multiplier which degenerate or have singularities on the unit sphere in $\mathbb{R}^n$. Necessary and sufficient conditions are obtained for this multiplier to be in the Hörmander class M_p^q.

Key words: multiplier, boundedness, potential.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 21–30

УДК **519.17**

РАСШИРЕНИЯ ПСЕВДОГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ ДЛЯ $pG_{s-4}(s,t)$[1]

А. К. Гутнова, А. А. Махнев

В работе найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для $pG_{s-4}(s,t)$.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, псевдогеометрический граф, собственное значение графа.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е., подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован. Положим $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Пусть $\mathscr{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathscr{F}$-графом*, если $[a]$ лежит в $\mathscr{F}$ для любой вершины a графа Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathscr{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a, l) \in (P, \mathscr{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекаюших l (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$,

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013.

$\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением $\leqslant t$ для данного натурального числа t. Заметим, что сильно регулярный граф с нецелым собственным значением является графом в половинном случае, а вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы в половинном случае, либо имеет диаметр 2, либо является графом Тэйлора. Таким образом, задача Кулена сводится к описанию дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением t для $t = 1, 2, \ldots$

В [1] завершено решение задачи Кулена для $t = 3$. В работе [2] получена редукция задачи Кулена для $t = 4$ к случаю когда окрестности вершин — исключительные графы с неглавным собственным значением 4. В данной работе рассматриваются вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $pG_{s-4}(s,t)$.

Теорема 1. *Пусть Γ — вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $pG_{s-4}(s,t)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *диаметр Γ больше 3, либо $s = 5$ и $t \in \{3,5,7\}$, либо $s = 6$ и $t = 1$;*

(2) *$d(\Gamma) = 3$, либо $s = 8$ и Γ — граф Тэйлора, либо $5 \leqslant s \leqslant 7$.*

Теорема 2. *Пусть Γ — вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(5,t)$, $t \in \{3,5,7,10,15,19,20,25\}$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) *Γ — сильно регулярный граф и либо*

(i) *$t = 3$ и Γ имеет параметры $(322,96,20,32)$ или $(697,96,20,12)$, либо*

(ii) *$t = 5$ и Γ имеет параметры $(1782,156,30,12)$ или $(532,156,30,52)$, либо*

(iii) *$t = 7$ и Γ имеет параметры $(1792,216,40,24)$, либо*

(iv) *$t = 20$ и Γ имеет параметры $(2107,606,105,202)$;*

(2) *$d(\Gamma) = 3$ и либо*

(i) *$t = 3$ и $\mu \in \{6,8,9,10,12,15,16,18,20,25,30,32,36,40,45,48,50\}$, либо*

(ii) *$t = 5$ и $\mu \in \{13,15,20,25,26,30,39,50,52,60,65,75,78\}$, либо*

(iii) *$t = 7$ и $\mu \in \{25,27,28,30,35,36,40,42,45,50,54,56,60,63,70,72,75,84,90,100,105,108,120,126,135,140\}$, либо*

(iv) *$t = 10$ и $\mu \in \{50,60,68,90,100,102,150,170,180,204\}$, либо*

(v) *$t = 15$ и $\mu \in \{75,76,90,95,100,114,120,125,150,152,171,180,190,200,228,250,285,300\}$, либо*

(vi) *$t = 19$ и $\mu \in \{100,120,125,128,144,150,180,192,200,225,240,250,256,288,300,360,375,384,400\}$, либо*

(vii) *$t = 20$ и $\mu \in \{120,150,200,202,250,300,404\}$, либо*

(viii) *$t = 25$ и $\mu \in \{125,126,135,140,150,180,189,210,250,252,270,300,315,350,375,378,420,450,500,525,540\}$;*

(3) *$d(\Gamma) > 3$ и $t \in \{3,5,7\}$.*

Следствие. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geqslant 3$, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $pG_{s-4}(s,t)$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $s = 8$ *и* Γ *— граф Тэйлора;*

(2) $s = 6, t = 1$ *и* Γ *— половинный 8-куб;*

(3) $s = 5$ *и либо* $t = 1$ *и* Γ *— граф Джонсона* $J(12,6)$ *или его стандартное частное, либо* $t = 3$ *и* Γ *— граф с массивом пересечений* $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$ *на* 644 *вершинах.*

2. Вполне регулярные локально псевдо $pG_{s-4}(s,t)$-графы

Лемма 1. *Пусть* Γ *— псевдогеометрический граф для* $pG_{s-4}(s,t)$, Δ *— регулярный подграф степени* $(s-4)(t+1)$ *на* w *вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $v(st-4t+s-8)/(st+s-4) \leqslant w \leqslant (s-3)v/(s+1)$, *если одно из этих нестрогих неравенств превращается в равенство, то любая вершина из* $\Gamma-\Delta$ *смежна с* $4(t+1)w/(v-w)$ *вершинами из* Δ;

(2) *если* X_i *— множество вершин из* $\Gamma-\Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ, $x_i = |X_i|$, *то* $(2st+2s+t-3)^2 w\cdot x_0 \leqslant (v-w)(v-x_0)(t+5)^2$;

(3) *если* $w = x_0$, *то* $2(st+t+s+1)x_0 \leqslant v(t+5)$.

$\lhd$ Ввиду [3] верны неравенства $-(t+1) \leqslant (s-4)(t+1) - 4(t+1)w/(v-w) \leqslant 4$.

Отсюда $v(st-4t+s-8)/(st+s-4) \leqslant w \leqslant (s-3)v/(s+1)$. Если одно из этих нестрогих неравенств превращается в равенство, то ввиду [3] любая вершина из $\Gamma-\Delta$ смежна точно с $4(t+1)w/(v-w)$ вершинами из Δ.

По предложению 4.6.1 из [4] имеем $w\cdot x_0 \leqslant (v-w)(v-x_0)(t+5)^2/(2s(t+1)-4+(t+1))^2$. Поэтому $(2st+2s+t-3)^2 w\cdot x_0 \leqslant (v-w)(v-x_0)(t+5)^2$.

Если $w = x_0$, то $(2st+2s+t-3)x_0 \leqslant (v-x_0)(t+5)$, поэтому $(2st+2s+2t+2)x_0 \leqslant v(t+5)$. $\rhd$

Лемма 2. *Если диаметр* Γ *больше* 3, *то либо* $s = 5$ *и* $t \in \{3,5,7\}$, *либо* $s = 6$ *и* $t = 1$.

$\lhd$ Пусть Γ содержит геодезический 4-путь u, w, x, y, z. Тогда в графе $[x]$ между $[u]\cap[x]$ и $[x]\cap[z]$ нет ребер и ввиду леммы 1 имеем $v(st-4t+s-8)/(st+s-4) \leqslant w \leqslant v(t+5)/(2st+2s+2t+2)$. Поэтому $2(st+s+t+1)(st-4t+s-8) \leqslant (st+s-4)(t+5)$.

В случае $s = 5$ имеем $12(t+1)(t-3) \leqslant (5t+1)(t+5)$, поэтому $t \leqslant 7$. Ввиду предложения $t \in \{3,5,7\}$.

В случае $s = 6$ имеем $14(t+1)2(t-1) \leqslant 2(3t+1)(t+5)$, поэтому $t \leqslant 2$. Так как псевдогеометрический граф для $pG_2(6,2)$ не является исключительным графом, то $t = 1$.

В случае $s = 7$ имеем $16(t+1)4t \leqslant 4(2t-1)(t+5)$, противоречие. $\rhd$

Лемма 3. *Если диаметр* Γ *равен* 3, *то либо* $s = 8$ *и* Γ *— граф Тэйлора, либо* $5 \leqslant s \leqslant 7$.

$\lhd$ Если $s = 8$, то Γ — граф Тэйлора.

Пусть $s \neq 8$. Тогда $k = v' = (s+1)(1+st/(s-4))$, $\lambda = k' = s(t+1)$ и $b_1 = 5st/(s-4)$. Ввиду леммы 1 имеем $(s+1)(1+st/(s-4))(st-4t+s-8)/(st+s-4) < 5st/(s-4)$, поэтому $(s+1)(st-4t+s-8) < 5st$. Отсюда $s \leqslant 7$. Лемма, а вместе с ней и теорема 1 доказаны. $\rhd$

3. Вполне регулярные локально псевдо $GQ(5,t)$-графы

В леммах 4–9 предполагается, что Γ — вполне регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ), в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(5,t)$ с параметрами $(30t+6, 5t+5, 4, t+1)$ и неглавными собственными значениями $4, -(t+1)$. Случай $t = 3$ рассмотрен в [5].

Лемма 4. *Пусть u, w — вершины из Γ с $d(u,w)=2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $6(t-3)\leqslant\mu\leqslant 5(t+1)(5t+1)/(t+3)$;

(2) *если X_i — множество вершин из $[w]-[u]$, смежных точно с i вершинами из $[u]\cap[w]$, $x_i=|X_i|$, то $x_0\cdot\mu\leqslant(v'-x_0)(v'-\mu)(t+5)^2/(11t+7)^2$;*

(3) *если $x_0=\mu$, то $\mu\leqslant(t+5)(5t+1)/(2t+2)$.*

$\lhd$ Ввиду леммы 1 верны неравенства $-(t+1)\leqslant(t+1)-4(t+1)\mu/(30t+6-\mu)\leqslant 4$.

Отсюда $6(t-3)\leqslant\mu\leqslant 5(t+1)(5t+1)/(t+3)$. Если одно из этих нестрогих неравенств превращается в равенство, то любая вершина из $[w]-[u]\cap[w]$ смежна точно с $4(t+1)\mu/(30t+6-\mu)$ вершинами из $[u]\cap[w]$.

Имеем $\mu\cdot x_0\leqslant(v'-\mu)(v'-x_0)(t+5)^2/(10(t+1)-4+(t+1))^2$. Поэтому $x_0\cdot\mu\leqslant(v'-x_0)(v'-\mu)(t+5)^2/(11t+7)^2$.

Если $x_0=\mu$, то $(11t+7)\mu\leqslant(30t+6-\mu)(t+5)$, поэтому $\mu\leqslant(t+5)(5t+1)/(2t+2)$. $\rhd$

Лемма 5. *Если Γ — сильно регулярный локально псевдо $GQ(5,t)$-граф, то верно одно из утверждений:*

(1) $t=3$ *и Γ имеет параметры* $(322,96,20,32)$ *или* $(697,96,20,12)$*;*

(2) $t=5$ *и Γ имеет параметры* $(1782,156,30,12)$ *или* $(532,156,30,52)$*;*

(3) $t=7$ *и Γ имеет параметры* $(1792,216,40,24)$*;*

(4) $t=20$ *и Γ имеет параметры* $(2107,606,105,202)$.

$\lhd$ Пусть (v',k',λ',μ') — параметры псевдо $GQ(5,t)$-графа и Γ имеет неглавные собственные значения $n-m,-m$. Тогда $m-1$ делит $v'-k'-1=25t$. Далее, $m\geqslant t+1$, $n-m=25t/(m-1)-1$ и $n-m\geqslant 4$, поэтому $m-1\leqslant 5t$.

В случае параметров $(96,20,4,4)$ число $m-1$ делит 75, поэтому $m-1=5,15$, соответственно $n-m=14,4$, Γ имеет параметры $(697,96,20,12)$ или $(322,96,20,32)$ и заключение леммы выполняется.

В случае параметров $(156,30,4,6)$ число $m-1$ делит 125, поэтому $m-1=5,25$, соответственно $n-m=24,4$ и Γ имеет параметры $(1782,156,30,12)$ или $(532,156,30,52)$ и заключение леммы выполняется.

В случае параметров $(216,40,4,8)$ число $m-1$ делит 175, поэтому $m-1=5,7,25,35$, соответственно $n-m=34,24,6,4$, Γ имеет параметры $(v,216,40,12)$, $(v,216,40,24)$, $(v,216,40,60)$ или $(v,216,40,72)$. Во всех случаях, кроме второго, кратность $n-m$ не целая, поэтому заключение леммы выполняется.

В случае параметров $(306,55,4,11)$ число $m-1$ делит 250, поэтому $m-1=5,10,25,50$, соответственно $n-m=49,24,9,4$ и Γ имеет параметры $(v,306,55,12)$, $(v,306,55,42)$, $(v,306,55,72)$ или $(v,306,55,102)$. Так как μ делит $306\cdot 250$, то $\mu=12,102$. В обоих случаях кратность $n-m$ не целая, противоречие.

В случае параметров $(450,80,4,16)$ число $m-1$ делит 375, поэтому $m-1=15,25,75$, соответственно $n-m=24,14,4$, Γ имеет параметры $(v,450,80,66)$, $(v,450,80,86)$ или $(v,450,80,146)$. Противоречие с тем, что μ не делит $450\cdot 375$.

В случае параметров $(576,100,4,20)$ число $m-1$ делит $19\cdot 25=475$, поэтому $m-1=19,25,95$, соответственно $n-m=24,18,4$, Γ имеет параметры $(v,576,100,90)$, $(v,576,100,102)$ или $(v,576,100,186)$. Так как μ делит $576\cdot 475$, то $\mu=90$, противоречие с тем, что кратность 24 равна $19\cdot 576\cdot 596/(44\cdot 90)$.

В случае параметров $(606,105,4,21)$ число $m-1$ делит 500, поэтому $m-1=20,25,50,100$, соответственно $n-m=24,19,9,4$, Γ имеет параметры $(v,606,105,102)$, $(v,606,105,112)$, $(v,606,105,147)$ или $(v,606,105,202)$. Так как μ делит $606\cdot 500$, то $\mu=202$.

В случае параметров $(756,130,4,26)$ число $m-1$ делит $25\cdot 25 = 625$, поэтому $m-1 = 25,125$, соответственно $n-m = 24,4$, Γ имеет параметры $(v,756,130,132)$ или $(v,756,130,252)$. Так как μ делит $756\cdot 625$, то $\mu = 252$, противоречие с тем, что кратность 4 равна $125\cdot 756\cdot 882/(130\cdot 252)$. $\rhd$

До конца параграфа будем предполагать, что диаметр Γ больше 2. Заметим, что каждый μ-подграф регулярен степени $t+1$, поэтому в случае четного t параметр μ четен.

Лемма 6. *Если $t=3$, то верны следующие утверждения:*

(1) $\mu \in \{6,8,9,10,12,15,16,18,20,25,30,32,36,40,45,48,50\}$;

(2) *если диаметр Γ больше 3, то $\mu \leqslant 16$.*

$\lhd$ В случае параметров $(96,20,4,4)$ по лемме 6 имеем $0<\mu<20\cdot 16/6$, поэтому $5<\mu<53$. Так как μ делит $96\cdot 75$, то $\mu \in \{6,8,9,10,12,15,16,18,20,25,30,32,36,40,45,48,50\}$.

Если диаметр Γ больше 3, то ввиду утверждения (3) леммы 6 имеем $\mu \leqslant 8\cdot 16/8$, поэтому $\mu \leqslant 16$. $\rhd$

Аналогично доказываются следующие две леммы.

Лемма 7. *Если $t=5$, то верны следующие утверждения:*

(1) $\mu \in \{13,15,20,25,26,30,39,50,52,60,65,75,78\}$;

(2) *если диаметр Γ больше 3, то $\mu \in \{13,15,20\}$.*

Лемма 8. *Если $t=7$, то верны следующие утверждения:*

(1) $\mu \in \{25,27,28,30,35,36,40,42,45,50,54,56,60,63,70,72,75,84,90,100,105,108,120,126,135,140\}$;

(2) *если диаметр Γ больше 3, то $\mu \in \{25,27\}$.*

Лемма 9. *Пусть $t>7$. Тогда диаметр Γ равен 3 и верны следующие утверждения:*

(1) *если $t=10$, то $\mu \in \{50,60,68,90,100,102,150,170,180,204\}$;*

(2) *если $t=15$, то $\mu \in \{75,76,90,95,100,114,120,125,150,152,171,180,190,200,228,250,285,300\}$;*

(3) *если $t=19$, то $\mu \in \{100,114,120,144,150,152,160,171,180,190,192,200,225,228,240,250,285,288,300,304,320,342,360,380,400\}$;*

(4) *если $t=20$, то $\mu \in \{120,150,200,202,250,300,404\}$;*

(5) *если $t=25$, то $\mu \in \{125,126,135,140,150,180,189,210,250,252,270,300,315,350,375,378,420,450,500,525,540\}$.*

$\lhd$ Если $t \geqslant 10$, то нарушается неравенство $6(t-3) \leqslant \mu \leqslant (t+5)(5t+1)/(2t+2)$, поэтому диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(306,55,4,11)$ имеем $42<\mu<55\cdot 51/13$, поэтому $42<\mu<216$. Так как μ делит $306\cdot 250$, то $\mu \in \{50,60,68,90,100,102,150,170,180,204\}$.

В случае параметров $(456,80,4,16)$ имеем $72<\mu<80\cdot 76/18$, поэтому $72<\mu<338$. Так как μ делит $456\cdot 15\cdot 25$, то $\mu \in \{75,76,90,95,100,114,120,125,150,152,171,180,190,200,228,250,285,300\}$.

В случае параметров $(576,100,4,20)$ имеем $96<\mu<100\cdot 96/22$, поэтому $96<\mu<437$. Так как μ делит $576\cdot 475$, то $\mu \in \{100,114,120,144,150,152,160,171,180,190,192,200,225,228,240,250,285,288,300,304,320,342,360,380,400\}$.

В случае параметров $(606,105,4,21)$ имеем $102<\mu<105\cdot 101/23$, поэтому $102<\mu<461$. Так как μ делит $606\cdot 500$, то $\mu \in \{120,150,200,202,250,300,404\}$.

В случае параметров $(756,130,4,26)$ имеем $132<\mu<130\cdot 126/28$, поэтому $132<\mu<585$. Так как μ делит $756\cdot 625$, то $\mu \in \{125,126,135,140,150,180,189,210,250,252,270,300,315,350,375,378,420,450,500,525,540\}$.

Лемма и теорема 2 доказаны. $\rhd$

2. Дистанционно регулярные локально псевдо $pG_{s-4}(s,t)$-графы

В этом параграфе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geqslant 3$, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $pG_{s-4}(s,t)$. Пусть $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения шрафа Γ. Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$.

Лемма 10. *Если $d \geqslant 4$, то верно одно из утверждений:*

(1) *$s = 5$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$ на 644 вершинах;*

(2) *$s = 6$ и Γ — половинный 8-куб.*

$\lhd$ Пусть диаметр Γ больше 3 и u, w, x, y, z — геодезический путь в Γ. В случае $s = 6$ по лемме 2 имеем $t = 1$ и $28\mu \leqslant 28 \cdot 6$, поэтому $\mu = 6$ и μ-подграфы в Γ — октаэдры. Далее, для вершины $u \in \Gamma$ граф $\Delta = [u]$ — треугольный граф $T(8)$. В этом случае Γ — половинный 8-куб.

Если $s = 5$, то по лемме 1 имеем $t \in \{3, 5, 7\}$ и $6(t-3) \leqslant \mu \leqslant 2(5t+1)$.

В случае $t = 3$ имеем $\mu \leqslant 32$ и Γ является локально псевдо $GQ(5,3)$-графом. Ввиду теоремы из [7] выполняется заключение леммы.

В случае $t = 5$ имеем $12 \leqslant \mu \leqslant 52$. Так как μ делит $156 \cdot 125$, то $\mu \in \{13, 15, 20, 21, 25, 26, 30, 39, 50\}$. Далее, $b_1 = 125$, по теореме Тервиллигера [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $-6 \geqslant b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $4 \leqslant b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$. Поэтому $\theta_1 \leqslant 24$ и $\theta_d \geqslant -26$. Компьютерные вычисления показывают, что $\theta_1 > 34$, противоречие.

В случае $t = 7$ имеем $24 \leqslant \mu \leqslant 72$. Так как μ делит $6 \cdot 36 \cdot 175$, то $\mu \in \{25, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 50, 54, 56, 60, 63, 70\}$. Далее, $b_1 = 175$, по теореме Тервиллигера [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $-8 \geqslant b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $4 \leqslant b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$. Поэтому $\theta_1 \leqslant 24$ и $\theta_d \geqslant -36$. В любом случае имеем $\theta_1 > 44$, противоречие. $\rhd$

Лемма 11. *Если $d = 3$ и $s = 6$, то граф Γ не является дистанционно регулярным.*

$\lhd$ Пусть диаметр Γ равен 3. Если $s = 6$, то по лемме 1 имеем $7(t-1) < \mu < 3(3t+1)$ и $t \in \{1, 5, 7, 9, 10, 15, 16, 23, 25, 30, 37\}$. Далее, $k = 7(1+3t)$, $b_1 = 15t$, μ делит $105t(1+3t)$ и μ-подграфы регулярны степени $2(t+1)$. По теореме Тервиллигера [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $-(t+1) \geqslant b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $4 \leqslant b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$. Поэтому $\theta_1 \leqslant 14$ и $\theta_d \geqslant -(3t+1)$.

Если $t = 1$, то $5 \leqslant \mu \leqslant 12$. В этом случае $\mu \in \{6, 7, 10\}$. Пусть $\mu = 6$. Тогда b_2 четно, $k_2 = 70$ и c_3 делит $70b_2$. Пусть $\mu = 7$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2 = 60$ и c_3 делит $60b_2$. Пусть $\mu = 10$. Тогда b_2 четно, $k_2 = 42$ и c_3 делит $42b_2$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $t = 5$, то $28 \leqslant \mu \leqslant 48$. В этом случае $\mu \in \{30, 35, 40, 42\}$ и $\theta_d \geqslant -16$. Пусть $\mu = 30$. Тогда b_2 четно, $k_2 = 280$ и c_3 делит $280b_2$. Пусть $\mu = 35$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2 = 240$ и c_3 делит $240b_2$. Пусть $\mu = 40$. Тогда b_2 делится на 8, $k_2 = 210$ и c_3 делит $210b_2$. Пусть $\mu = 42$. Тогда b_2 делится на 14, $k_2 = 200$ и c_3 делит $200b_2$. В любом случае $\theta_1 > 15$, противоречие.

Если $t = 7$, то $42 \leqslant \mu \leqslant 66$. В этом случае $\mu \in \{49, 55\}$. Пусть $\mu = 49$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2 = 330$ и c_3 делит $330b_2$. Пусть $\mu = 55$. Тогда b_2 делится на 11, $k_2 = 294$ и c_3 делит $294b_2$. В любом случае $\theta_1 > 18$, противоречие.

Если $t = 9$, то $56 \leqslant \mu \leqslant 84$. В этом случае $\mu \in \{60, 63, 70\}$. Пусть $\mu = 60$. Тогда b_2 делится на 4, $k_2 = 441$ и c_3 делит $441b_2$. Пусть $\mu = 63$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2 = 420$ и c_3 делит $420b_2$. Пусть $\mu = 70$. Тогда b_2 делится на 14, $k_2 = 378$ и c_3 делит $378b_2$. В любом случае $\theta_1 > 18$, противоречие.

Если $t=10$, то $63 \leqslant \mu \leqslant 93$. В этом случае $\mu \in \{70,75\}$ и $\theta_d \geqslant -31$. Пусть $\mu=70$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2=465$, c_3 делит $465b_2$ и $\theta_1>14$. Пусть $\mu=75$. Тогда $k_2=434$ и c_3 делит $434b_2$. В этом случае либо $\theta_1>14$, либо $b_1 \leqslant 2$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $t=15$, то $98 \leqslant \mu \leqslant 138$. В этом случае $\mu \in \{105,115\}$ и $\theta_d \geqslant -46$. Пусть $\mu=105$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2=690$, c_3 делит $690b_2$ и $\theta_1>24$. Пусть $\mu=115$. Тогда b_2 делится на 23, $k_2=630$ и $\theta_1>34$.

Если $t=16$, то $105 \leqslant \mu \leqslant 147$. В этом случае $\mu \in \{112,120,140\}$ и $\theta_d \geqslant -49$. Пусть $\mu=112$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2=735$, c_3 делит $735b_2$ и $\theta_1>24$. Пусть $\mu=120$. Тогда $k_2=686$ и c_3 делит $686b_2$. В этом случае либо $\theta_1>14$, либо $b_1 \leqslant 2$. Пусть $\mu=140$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2=588$, c_3 делит $588b_2$ и $\theta_1>17$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $t=23$, то $154 \leqslant \mu \leqslant 210$. В этом случае $\mu \in \{161,175\}$ и $\theta_d \geqslant -70$. Пусть $\mu=161$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2=1050$ и c_3 делит $1050b_2$. В этом случае $\theta_1>28$. Пусть $\mu=175$. Тогда b_2 делится на 35 и $\theta_1>49$.

Если $t=25$, то $168 \leqslant \mu \leqslant 228$. В этом случае $\mu \in \{175,190,210\}$ и $\theta_d \geqslant -76$. Пусть $\mu=175$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2=1140$ и c_3 делит $1140b_2$. В этом случае $\theta_1>28$. Пусть $\mu=190$. Тогда b_2 делится на 38 и $\theta_1>38$. Пусть $\mu=210$. Тогда b_2 делится на 14 и $\theta_1>28$.

Если $t=30$, то $203 \leqslant \mu \leqslant 273$. В этом случае $\mu \in \{175,190,260\}$ и $\theta_d \geqslant -76$. Пусть $\mu=175$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2=1140$ и c_3 делит $1140b_2$. В этом случае $\theta_1>45$. Пусть $\mu=190$. Тогда b_2 делится на 38 и $\theta_1>70$. Пусть $\mu=210$. Тогда b_2 делится на 14 и $\theta_1>41$.

Если $t=37$, то $252 \leqslant \mu \leqslant 336$. В этом случае $\mu \in \{259,280,294,296\}$ и $\theta_d \geqslant -112$. Пусть $\mu=259$. Тогда b_2 делится на 7, $k_2=1680$ и c_3 делит $1680b_2$. В этом случае $\theta_1>32$. Пусть $\mu=280$. Тогда b_2 делится на 56 и $\theta_1>75$. Пусть $\mu=294$. Тогда b_2 делится на 98 и $\theta_1>92$. Пусть $\mu=296$. Тогда b_2 делится на 8 и $\theta_1>25$. $\rhd$

Лемма 12. *Если $d=3$ и $s=7$, то граф Γ не является дистанционно регулярным.*

$\lhd$ Пусть диаметр Γ равен 3. Если $s=7$, то по лемме 1 имеем $8(3t-1)/3 \leqslant \mu < 4(7t/3+1)$ и $t \in \{9,15,27,30,51,75\}$. Далее, $k=8(7t/3+1)$, $b_1=35t/3+1$, μ делит $8(7t/3+1)(35t/3+1)$ и μ-подграфы регулярны степени $3(t+1)$. По теореме Тервиллигера [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $-(t+1) \geqslant b^- = -1-b_1/(\theta_1+1)$, $4 \leqslant b^+ = -1-b_1/(\theta_d+1)$. Поэтому $\theta_1 \leqslant (35t/3+1)/t-1$ и $\theta_d \geqslant -((35t/3+1)/5+1)$.

Если $t=9$, то $70 \leqslant \mu < 88$. В этом случае μ делит $32 \cdot 11 \cdot 53$, противоречие. Если $t=15$, то $118 \leqslant \mu < 144$. В этом случае $\mu \in \{128,132\}$, $\theta_1 \leqslant 161/15$ и $\theta_d \geqslant -181/5$. Пусть $\mu=128$. Тогда b_2 делится на 8, $k_2=396$ и c_3 делит $396b_2$. В этом случае $\theta_1>23$. Пусть $\mu=132$. Тогда b_2 делится на 3 и $\theta_1>14$.

Если $t=27$, то $214 \leqslant \mu < 256$. В этом случае μ делит $79 \cdot 2048$, противоречие. Если $t=30$, то $238 \leqslant \mu < 287$. В этом случае μ делит $8 \cdot 27 \cdot 13 \cdot 71$, противоречие. Если $t=51$, то $406 \leqslant \mu < 480$. В этом случае $\mu=447$, $\theta_1 \leqslant 545/51$ и $\theta_d \geqslant -601/5$. Далее, b_2 делится на 3, $k_2=1280$ и c_3 делит $1280b_2$. В этом случае $\theta_1>17$.

Если $t=75$, то $598 \leqslant \mu < 704$. В этом случае μ делит $512 \cdot 11 \cdot 219$, противоречие. $\rhd$

Пусть до конца работы $s=5$.

Лемма 13. *Если $5 \leqslant t \leqslant 10$, то граф Γ не является дистанционно регулярным.*

$\lhd$ Пусть $t=5$. Тогда по теореме Тервиллигера [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $-4 \geqslant b^- = -1-b_1/(\theta_1+1)$, $3 \leqslant b^+ = -1-b_1/(\theta_d+1)$. Поэтому $\theta_1 \leqslant 24$ и $\theta_3 \geqslant -26$.

Если $\mu = 13$, то b_2 делится на 13 и $\theta_1 > 24$, противоречие. Если $\mu = 15$, то b_2 делится на 3 и либо $\theta_1 > 24$, либо $c_3 \geqslant 144$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $\mu = 20$, то b_2 делится на 4 и либо $\theta_1 > 24$, либо $c_3 \geqslant 138$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. Если $\mu = 25$, при $b_2 = 18, c_3 = 148$ имеем $\theta_1 > 24$ и $\theta_3 < -26$, противоречие. Поэтому $b_2 \leqslant 17$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $\mu = 26$, то b_2 делится на 26 и либо $\theta_1 > 24$, либо $b_2 = 26$ и $c_3 = 155, 156$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. Если $\mu = 30$, то b_2 делится на 6 и либо $\theta_1 > 24$, либо $c_3 \geqslant 136$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $\mu = 39$, то b_2 делится на 39, противоречие. Если $\mu = 50$, то при $b_2 = 2, c_3 = 131$ имеем $\theta_1 > 24$ и $\theta_3 < -26$, противоречие. Если $\mu = 52$, то b_2 делится на 52, противоречие.

Если $\mu = 60$, то b_2 делится на 12 и при $b_2 = 12, c_3 = 130$ имеем $\theta_1 > 24$ и $\theta_3 < -26$, противоречие. Если $\mu = 65$, то b_2 делится на 13 и при $b_2 = 13, c_3 = 130$ имеем $\theta_1 > 24$ и $\theta_3 < -26$, противоречие. Если $\mu = 75$, то b_2 делится на 3 и при $b_2 = 3, c_3 = 130$ имеем $\theta_1 > 24$ и $\theta_3 < -26$, противоречие. Если $\mu = 78$, то b_2 делится на 78, противоречие.

Пусть $t = 7$. Тогда по теореме Тервиллигера выполняются неравенства $\theta_1 \leqslant 24$ и $\theta_d \geqslant -36$.

Если $\mu = 25$, то либо $\theta_1 > 24$, либо $b_1 = 1, c_3 = 216$ и некоторое собственное значение имеет нецелую кратность, противоречие. Если $\mu = 27$, то b_2 делится на 27 и $\theta_1 > 24$, противоречие. Если $\mu = 28$, то либо $\theta_1 > 24$, либо $b_1 = 4, c_3 = 216$ и некоторое собственное значение имеет нецелую кратность, противоречие. Если $\mu = 30$, то либо $\theta_1 > 24$, либо $b_1 = 6, c_3 = 216$ и некоторое собственное значение имеет нецелую кратность, противоречие.

Если $\mu = 35$, то либо $\theta_1 > 24$, либо $c_3 \geqslant 195$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие.

Если $\mu \in \{36, 54, 72, 108\}$, то b_2 делится на μ, противоречие. Если $\mu \in \{40, 45, 60, 90, 120, 135\}$, то b_2 делится на $\mu/5$ и допустимых массивов пересечений нет, противоречие. Если $\mu \in \{42, 56, 63, 84, 126\}$, то b_2 делится на $\mu/7$ и допустимых массивов пересечений нет, противоречие.

Если $\mu = 50$, то b_2 делится на 2 и либо $\theta_1 > 24$, либо $c_3 \geqslant 194$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие. Если $\mu = 70$, то b_2 делится на 2 и либо $\theta_1 > 24$, либо $c_3 \geqslant 194$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие.

Аналогично рассматриваются оставшиеся значения $\mu \in \{75, 100, 105, 140\}$.

Пусть $t = 10$. Тогда по теореме Тервиллигера выполняются неравенства $\theta_1 \leqslant 24$ и $\theta_d \geqslant -51$.

Если $\mu = 50$, то либо $\theta_1 > 24$, либо $c_3 \geqslant 288$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие. Если $\mu = 60$, то b_2 делится на 3 и либо $\theta_1 > 24$, либо $c_3 \geqslant 289$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие.

Если $\mu = 68$, то b_2 делится на 34 и $\theta_1 > 24$, противоречие. Если $\mu = 90$, то b_2 делится на 9 и при $b_2 = 9$, $c_3 = 289$ имеем $\theta_1 > 24$ и $\theta_3 < -51$, противоречие. Если $\mu = 100$, то b_2 делится на 2 и при $b_2 = 2$, $c_3 = 280$ имеем $\theta_1 > 24$ и $\theta_3 < -51$, противоречие. Если $\mu = 102$, то b_2 делится на 51, противоречие.

Если $\mu = 150$, то b_2 делится на 3 и при $b_2 = 3$, $c_3 = 280$ имеем $\theta_1 > 24$ и $\theta_3 < -51$, противоречие. Если $\mu = 170$, то b_2 делится на 17 и при $b_2 = 3$, $c_3 = 280$ имеем $\theta_1 > 24$ и $\theta_3 < -51$, противоречие. Если $\mu = 180$, то b_2 делится на 18 и при $b_2 = 3$, $c_3 = 280$ имеем $\theta_1 > 24$ и $\theta_3 < -51$, противоречие. Если $\mu = 204$, то b_2 делится на 102, противоречие. $\rhd$

Лемма 14. *Если $15 \leqslant t \leqslant 25$, то граф Γ не является дистанционно регулярным.*

$\lhd$ Пусть $t=15$. Тогда по теореме Тервиллигера выполняются неравенства $\theta_1 \leqslant 24$ и $\theta_d \geqslant -76$.

Если $\mu=75$, то либо $\theta_1>24$, либо $b_2=1$, $c_3=456$ и некоторое собственное значение имеет нецелую кратность, противоречие. Если $\mu=76$, то b_2 делится на 76, противоречие.

Если $\mu=90$, то b_2 делится на 6, либо $\theta_1>24$, либо $b_2=1, c_3=456$ и некоторое собственное значение имеет нецелую кратность, противоречие. Если $\mu=95$, то b_2 делится на 19 и $\theta_1>24$. Если $\mu=100$, то b_2 делится на 4 и либо $\theta_1>24$, либо $c_3 \geqslant 443$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие.

Если $\mu=114$, то b_2 делится на 38, противоречие. Если $\mu=120$, то b_2 делится на 8 и либо $\theta_1>24$, либо $c_3 \geqslant 444$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие.

Если $\mu=125$, то либо $\theta_1>24$, либо $c_3 \geqslant 434$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие. Если $\mu=150$, то b_2 делится на 2 и при $b_2=2$, $c_3=433$ имеем $\theta_1>24$ и $\theta_3<-76$, противоречие. Аналогичное противоречие получится и для оставшихся $\mu \in \{152,171,180,190,200,228,250,285,300\}$.

Пусть $t=19$. Тогда по теореме Тервиллигера выполняются неравенства $\theta_1 \leqslant 24$ и $\theta_d \geqslant -96$.

Если $\mu=100$, то b_2 делится на 4, а если $\mu=114$, то b_2 делится на 6. В любом случае $\theta_1>24$, противоречие. Аналогичное противоречие получится при $\mu \in \{120,144,160,180,192\}$.

Если $\mu=152$, то b_2 делится на 8, либо $\theta_1>24$, либо $c_3 \geqslant 566$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие. Если $\mu=171$, то b_2 делится на 9, либо $\theta_1>24$, либо $c_3 \geqslant 564$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие.

Если $\mu=190$, то b_2 делится на 2 и при $b_2=2, c_3=554$ имеем $\theta_1>24$ и $\theta_3<-96$, противоречие. Аналогичное противоречие получится при оставшихся $\mu \in \{200,225,228,240,250,285,288,300,304,320,342,360,380,400\}$.

Пусть $t=20$. Тогда по теореме Тервиллигера выполняются неравенства $\theta_1 \leqslant 24$ и $\theta_d \geqslant -101$.

Если $\mu=120$, то b_2 делится на 6 и $\theta_1>24$, противоречие. Если $\mu=150$, то b_2 делится на 3 и либо $\theta_1>24$, либо $c_3 \geqslant 589$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие.

Если $\mu=200$, то b_2 делится на 2 и при $b_2=2, c_3=584$ имеем $\theta_1>24$ и $\theta_3<-101$, противоречие. Если $\mu \in \{202,404\}$, то b_2 делится на 101, противоречие. Если $\mu=250$, то при $b_2=1, c_3=580$ имеем $\theta_1>24$ и $\theta_3<-101$, противоречие. Если $\mu=300$, то b_2 делится на 3 и при $b_2=3, c_3=580$ имеем $\theta_1>24$ и $\theta_3<-101$, противоречие.

Пусть $t=25$. Тогда по теореме Тервиллигера выполняются неравенства $\theta_1 \leqslant 24$ и $\theta_d \geqslant -126$.

Если $\mu=125$, то $\theta_1>24$, противоречие. Если μ не делится на 5, то b_2 делится на $\mu/4$, $\mu/2$ или μ, противоречие. Если μ не делится на 25, то (b_2,μ) делит 20 и $\theta_1>24$, противоречие.

Если $\mu=150$, то b_2 делится на 3 и либо $\theta_1>24$, либо $c_3 \geqslant 754$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие. Если $\mu=250$, то либо $\theta_1>24$, либо $b_2=1, c_3 \geqslant 734$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет, противоречие. Если $\mu=300$, то b_2 делится на 3 и при $b_2=3$, $c_3=734$ имеем $\theta_1>24$ и $\theta_3<-126$, противоречие. Аналогичное противоречие получится при оставшихся $\mu \in \{350,375,450,500,525\}$. Лемма и следствие доказаны. $\rhd$

Литература

1. *Махнев А. А., Падучих Д. В.* Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны с собственным значением 3 // Докл. АН.—2014.—Т. 457, № 4.—С. 447–449.
2. *Махнев А. А.* Сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4 и их расширения // Изв. Гомельского гос. ун-та.—2014.—Т. 84.—С. 84–85.
3. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb.—1993.—Vol. 14.—P. 397–407.
4. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* Spectra of graphs (course notes).—http://www.win.tue.nl/ aeb/.
5. *Махнев А. А., Падучих Д. В., Хамгокова М. М.* Дистанционно регулярные локально псевдо $GQ(5,3)$-графы // Докл. АН.—2014.—Т. 458, № 5.—С. 475–478.
6. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1989.

Статья поступила 17 октября 2014 г.

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: gutnovaalina@gmail.com

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

EXTENSIONS OF PSEUDO-GEOMETRIC GRAPHS OF THE PARTIAL GEOMETRIES $pG_{s-4}(s,t)$

Gutnova A. K., Makhnev A. A.

Intersection arrays of distance-regular graphs the neighbourhoods of whose vertices are exceptional pseudo-geometric graphs of the partial geometries $pG_{s-4}(s,t)$ are obtained in this paper.

Key words: distance regular graphs, pseudo-geometric graph, eigenvalue of a graph.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 31–38

A STUDY ON A CLASS OF p-VALENT FUNCTIONS ASSOCIATED WITH GENERALIZED HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS[1]

E. El-Yagubi, M. Darus

In this paper, we study and introduce the majorization properties of a new class of analytic p-valent functions of complex order defined by the generalized hypergeometric function. Some known consequences of our main result will be given. Moreover, we investigate the coefficient estimates for this class.

Mathematics Subject Classification (2000): 30C45.

Key words: majorization, p-valent functions, hypergeometric functions.

1. Introduction

Let $\mathscr{A}_p$ be the class of functions $f(z)$ normalized by

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n}, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

which are analytic and p-valent in the unit disc $\mathbb{U}$. Let f and g be analytic in the open unit disc $\mathbb{U}$. We say that f is majorized by g in $\mathbb{U}$ and write

$$f(z) \ll g(z) \quad (z \in \mathbb{U}), \tag{1.2}$$

if there exists a function φ, analytic in $\mathbb{U}$ such that

$$|\varphi(z)| \leqslant 1, \quad f(z) = \varphi(z) g(z) \quad (z \in \mathbb{U}). \tag{1.3}$$

It may be noted here that (1.2) is closely related to the concept of quasi-subordination between analytic functions.

For $f(z)$ and $g(z)$ are analytic in $\mathbb{U}$, we say that f is subordinate to g if there exists the Schwarz function ω, analytic in $\mathbb{U}$, with $\omega(0) = 0$ and $|\omega(z)| < 1$ such that $f(z) = g(\omega(z))$, $z \in \mathbb{U}$. We denote this subordination by $f(z) \prec g(z)$. If $g(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, then the subordination is equivalent to $f(0) = g(0)$ and $f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U})$.

If $f(z)$ and $g(z)$ belong to $\mathscr{A}_p$, then the Hadamard product $f * g$ is defined by

$$f(z) * g(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} b_{p+n} z^{p+n}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

El-Ashwah [2] studied the following p-valent function, which defined by generalized hypergeometric functions

$${}_r\mathscr{G}_s(a_1, b_1; z^p) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_r)_n}{(b_1)_n \cdots (b_s)_n} \frac{z^{p+n}}{n!}, \quad p \in \mathbb{N},$$

[1] The work presented here was partially supported by UKM grant AP-2013-009.

where $a_i \in \mathbb{C}, b_q \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}, (i=1,\ldots,r, q=1,\ldots,s)$, and $r \leqslant s+1; r,s \in \mathbb{N}_0$, and $(x)_n$ is the Pochhammer symbol defined by

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = \begin{cases} 1, & n=0, \\ x(x+1)\cdots(x+n-1), & n=\{1,2,3,\ldots\}. \end{cases}$$

Let $\mathscr{L}^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p} \in \mathscr{A}_p$ is defined by

$$\mathscr{L}^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p} = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m z^{p+n}, \quad p \in \mathbb{N},$$

where $m,b \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 \geqslant 0$.

Corresponding to ${}_r\mathscr{G}_s(a_1,b_1;z^p)$, $\mathscr{L}^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}$ and using the Hadamard product, we define a new generalized differential operator $D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)$ as follows:

Definition 1.1. Let $f \in \mathscr{A}_p$, then a generalized differential operator $D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z) : \mathscr{A}_p \to \mathscr{A}_p$ is given as

$$\begin{aligned} D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z) &= ({}_r\mathscr{G}_s(a_1,b_1;z^p) * \mathscr{L}^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p} * f(z)) \\ &= z^p + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n \ldots (a_r)_n}{(b_1)_n \ldots (b_s)_n} \frac{a_{p+n} z^{p+n}}{n!}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

It follows from the above definition that

$$\begin{gathered} (p+\lambda_2 n+b)\, D^{m+1,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z) \\ = (p+\lambda_2 n - p\lambda_1 + b)\, D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z) + \lambda_1 z\big(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z)\big)'. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Remark 1.1. It should be remarked that the linear operator $\mathscr{D}^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2}(a_1,b_1)f(z)$ is a generalization of many operators considered earlier. Let us see some of the examples:

For $\lambda_2 = b = 0$, the operator $\mathscr{D}^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f$ reduces to the operator was given by Selvaraj and Karthikeyan [1].

For $m = 0$, the operator $\mathscr{D}^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f$ reduces to the operator was given by El-Ashwah [2].

For $m = 0$ and $p = 1$, the operator $\mathscr{D}^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f$ reduces to the well-known operator introduced by Dziok and Srivastava [3].

For $\lambda_2 = b = 0$ and $p = 1$, we get the operator studied by Selvaraj and Karthikeyan [4].

For $m = 0$, $r = 2$, $s = 1$ and $p = 1$, we obtain the operator which was given by Hohlov [5].

For $r = 1$, $s = 0$, $a_1 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = b = 0$ and $p = 1$, we get the Sălăgean derivative operator [6].

For $r = 1$, $s = 0$, $a_1 = 1$, $\lambda_2 = b = 0$ and $p = 1$, we get the generalized Sălăgean derivative operator introduced by Al-Oboudi [7].

For $m = 0$, $r = 1$, $s = 0$, $a_1 = \delta + 1$ and $p = 1$, we obtain the operator introduced by Ruscheweyh [8].

For $r = 1$, $s = 0$, $a_1 = \delta + 1$ and $p = 1$, we obtain the operator studied by El-Yagubi and Darus [9].

For $m = 0$, $r = 2$ and $s = 1$, $a_2 = 1$ and $p = 1$, we obtain the operator studied by Carlson and Shaffer [10].

For $r = 1$, $s = 0$, $a_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ and $p = 1$, we get the operator introduced by Cátás [11].

Next, by using the generalized differential operator $D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1, b_1)$, we study the class $S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1, b_1, A, B, \gamma]$ as follows:

Definition 1.2. Let $f \in \mathscr{A}_p$, then $f \in S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1, b_1, A, B, \gamma]$ of p-valent functions of complex order $\gamma \neq 0$ in $\mathbb{U}$, if and only if

$$\left\{1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{z(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1, b_1)f(z))^{(j+1)}}{(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1, b_1)f(z))^{(j)}} - p + j\right)\right\} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz}, \quad z \in \mathbb{U}, \tag{1.6}$$

where $p \in \mathbb{N}$, $m, b, j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\gamma \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 \geqslant 0$, $-1 \leqslant B < A \leqslant 1$, $a_i \in \mathbb{C}$, $b_q \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \dots\}$ $(i = 1, \dots, r,\ q = 1, \dots, s)$ and $r \leqslant s + 1$; $r, s \in \mathbb{N}_0$.

Clearly, we have the following relationships:

(i) when $m = 0$, $p = 1$, $j = 0$, $r = 2$, $s = 1$, $a_1 = b_1$, $a_2 = 1$, $A = 1$ and $B = -1$, then the class $S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1, b_1, A, B, \gamma]$ reduces to the class $S(\gamma)$.

(ii) when $m = 0$, $p = 1$, $j = 1$, $r = 2$, $s = 1$, $a_1 = b_1$, $a_2 = 1$, $A = 1$ and $B = -1$, then the class $S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1, b_1, A, B, \gamma]$ reduces to the class $C(\gamma)$.

(iii) when $m = 0$, $p = 1$, $j = 0$, $r = 2$, $s = 1$, $a_1 = b_1$, $a_2 = 1$, $A = 1$, $B = -1$ and $\gamma = 1 - \alpha$, then the class $S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1, b_1, A, B, \gamma]$ reduces to the class $S^*(\alpha)$ for $0 < \alpha < 1$.

The classes $S(\gamma)$ and $C(\gamma)$ are said to be classes of starlike and convex of complex order $\gamma \neq 0$ in $\mathbb{U}$, were considered by Nasr and Aouf [12] and $S^*(\alpha)$ denote the class of starlike functions of order α in $\mathbb{U}$.

2. Majorization Problem

A majorization problem for functions f belong to the class $S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1, b_1, A, B, \gamma]$ is considered.

Theorem. *Let $f \in \mathscr{A}_p$ and suppose that $g \in S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1, b_1, A, B, \gamma]$. If $(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1, b_1)f(z))^{(j)}$ is majorized by $(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1, b_1)g(z))^{(j)}$ in $\mathbb{U}$, then*

$$\left|(D^{m+1,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1, b_1)f(z))^{(j)}\right| \leqslant \left|(D^{m+1,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1, b_1)g(z))^{(j)}\right| \quad \text{for} \quad |z| \leqslant r_0, \tag{2.1}$$

where $r_0 = r_0(p, \gamma, \lambda_1, \lambda_2, b, A, B)$ is the smallest positive root of the equation

$$\begin{gathered} r^3\left|\gamma(A - B) + \left(\frac{p + \lambda_2 n + b}{\lambda_1}\right)B\right| - \left[\frac{p + \lambda_2 n + b}{\lambda_1} + 2|B|\right]r^2 \\ - \left[\left|\gamma(A - B) - \left(\frac{p + \lambda_2 n + b}{\lambda_1}\right)B\right| + 2\right]r + \left(\frac{p + \lambda_2 n + b}{\lambda_1}\right) = 0, \\ -1 \leqslant B < A \leqslant 1; \quad \lambda_2 \geqslant \lambda_1 \geqslant 0; \quad b \in \mathbb{N}_0; \quad P \in \mathbb{N}; \quad \gamma \in \mathbb{C}\backslash\{0\}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

$\lhd$ Since $g \in S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1, b_1, A, B, \gamma]$ we can get from (1.6), that

$$1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{z(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1, b_1)g(z))^{(j+1)}}{(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1, b_1)g(z))^{(j)}} - p + j\right) = \frac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)}, \tag{2.3}$$

where $\gamma \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $j, p \in \mathbb{N}$, $p > j$ and w is analytic in $\mathbb{U}$ with

$$w(0) = 0, \quad |w(z)| < 1 \quad (z \in \mathbb{U}).$$

From (2.3), we get

$$\frac{z\big(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)g(z)\big)^{(j+1)}}{\big(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)g(z)\big)^{(j)}} = \frac{(p-j) + [\gamma(A-B) + (p-j)B]w(z)}{1 + Bw(z)}. \tag{2.4}$$

By noting that

$$\begin{aligned} z\big(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z)\big)^{(j+1)} &= \left(\frac{p+\lambda_2 n + b}{\lambda_1}\right)\big(D^{m+1,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z)\big)^{(j)} \\ &+ \left(p - j - \left(\frac{p+\lambda_2 n + b}{\lambda_1}\right)\right)\big(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z)\big)^{(j)}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

and by virtue of (2.4) and (2.5) we get

$$\begin{aligned} &\left|(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)g(z))^{(j)}\right| \\ &\leqslant \frac{\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}[1+|B|z|]}{\left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right) - \left|\gamma(A-B) + \left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right)|B|\right||z|}\big|(D^{m+1,n}_{\lambda_1,\lambda_2,p}g(z))^{(j)}\big|. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Next, since $(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z))^{(j)}$ is majorized by $(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)g(z))^{(j)}$ in the unit disc $\mathbb{U}$, thus from (1.3) we have

$$\big(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z)\big)^{(j)} = \varphi(z)\big(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)g(z)\big)^{(j)}.$$

Differentiating it with respect to z and multiplying by z we get

$$\begin{aligned} &z\big(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z)\big)^{(j+1)} \\ &= z\varphi'(z)\big(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)g(z)\big)^{(j)} + z\varphi(z)\big(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)g(z)\big)^{(j+1)}. \end{aligned}$$

Now by using (2.5) in the above equation, it yields

$$\begin{aligned} &\big(D^{m+1,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z)\big)^{(j)} \\ &= \frac{z\varphi'(z)(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)g(z))^{(j)}}{\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}} + \varphi(z)(D^{m+1,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)g(z))^{(j)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Thus, by noting that $\varphi \in \Omega$ satisfies the inequality

$$|\varphi'(z)| \leqslant \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2} \quad (z \in \mathbb{U}), \tag{2.8}$$

by using (2.6) and (2.8) in (2.7), we get

$$\begin{aligned} &\left|(D^{m+1,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z))^{(j)}\right| \\ &\leqslant \left[|\varphi(z)| + \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}\frac{|z|(1+|B||z|)}{\left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right) - \left|\gamma(A-B) + \left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right)|B|\right||z|}\right]\big|(D^{m+1,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)g(z))^{(j)}\big|, \end{aligned} \tag{2.9}$$

which upon setting

$$|z| = r \quad \text{and} \quad |\varphi(z)| = \rho \quad (0 \leqslant \rho \leqslant 1)$$

leads us to the inequality

$$\begin{aligned} &\left|(D^{m+1,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z))^{(j)}\right| \\ \leqslant &\frac{\phi(\rho)}{(1-r^2)\left[\left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right) - \left|\gamma(A-B)+\left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right)B\right|r\right]}\left|(D^{m+1,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}g(z))^{(j)}\right| \end{aligned} \tag{2.10}$$

where

$$\begin{aligned} \phi(\rho) &= -r(1+|B|r)\rho^2 + (1-r^2) \\ \times &\left[\left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right) - \left|\gamma(A-B)+\left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right)B\right|r\right]\rho + r(1+|B|r) \end{aligned} \tag{2.11}$$

takes its maximum value at $\rho = 1$ with $r_0 = r_0(p,\gamma,\lambda_1,\lambda_2,b,A,B)$. Here $r_1(p,\gamma,\lambda_1,\lambda_2,b,A,B)$ is the smallest positive root of the equation (2.2).

Furthermore, if $0 \leqslant \rho \leqslant r_1(p,\gamma,\lambda_1,\lambda_2,b,A,B)$, then the function $\psi(\rho)$ defined by

$$\begin{aligned} \psi(\rho) &= -\sigma(1+|B|\sigma)\rho^2 + (1-\sigma^2) \\ \times &\left[\left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right) - |\gamma(A-B)+\left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right)B|\sigma\right]\rho + \sigma(1+|B|\sigma) \end{aligned} \tag{2.12}$$

is seen to be an increasing function on the interval $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, so that

$$\begin{gathered} \psi(\rho) \leqslant \psi(1) = (1-\sigma^2)\left[\left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right) - \left|\gamma(A-B)+\left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right)B\right|\sigma\right] \\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant r_1(p,\gamma,\lambda_1,\lambda_2,b,A,B)). \end{gathered} \tag{2.13}$$

Hence upon setting $\rho = 1$ in (2.10) we conclude that (2.1) of Theorem 2.1 holds true for $|z| \leqslant r_1(p,\gamma,\lambda_1,\lambda_2,A,B)$ where $r_1(p,\gamma,\lambda_1,\lambda_2,A,B)$ is the smallest positive root of equation (2.2).

Putting $A = 1$ and $B = -1$ in Theorem 2.1, we have the following result:

Corollary 2.1. *Let $f \in \mathscr{A}_p$ and suppose that $g \in S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1,\gamma)$. If $(D^m_{\lambda_1,p}(a_1,b_1)f(z))^{(j)}$ is majorized by $(D^m_{\lambda_1,p}(a_1,b_1)g(z))^{(j)}$ in $\mathbb{U}$, then*

$$\left|\left(D^{m+1}_{\lambda_1,p}(a_1,b_1)f(z)\right)^{(j)}\right| \leqslant \left|\left(D^{m+1}_{\lambda_1,p}(a_1,b_1)g(z)\right)^{(j)}\right| \quad \textit{for} \quad |z| \leqslant r_0, \tag{2.14}$$

where

$$\begin{gathered} r_0 = r_0(p,\gamma,\lambda_1,\lambda_2,b) = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4\left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right)\left|2\gamma - \left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right)\right|}}{2\left|2\gamma - \left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right)\right|}, \\ k = 2 + \left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right) + \left|2\gamma - \left(\frac{p+\lambda_2 n+b}{\lambda_1}\right)\right|, \\ p \in \mathbb{N}; \quad \gamma, \lambda_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad b \in \mathbb{N}_0, \quad \lambda_2 \geqslant 0 \end{gathered}$$

and $S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1,\gamma)$ be a special case of $S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1,b_1,A,B,\gamma]$ when $A = 1$ and $B = -1$.

Setting $p=1$, $m=\lambda_2=b=0$, $\lambda_1=1$, $j=0$, $r=2$, $s=1$, $a_1=b_1$ and $a_2=1$ in Corollary 2.1, we get the following corollary:

Corollary 2.2. *Let $f\in\mathscr{A}_p$ and suppose that $g\in S(\gamma)$. If $f(z)$ is majorised by $g(z)$ in $\mathbb{U}$, then*

$$|f'(z)|\leqslant|g'(z)|\quad(|z|<r_3),$$

where

$$r_0=r_0(\gamma)=\frac{3+|2\gamma-1|-\sqrt{9+2|2\gamma-1|+|2\gamma-1|^2}}{2|2\gamma-1|},$$

which is a known result obtained by Altintas et al. [13].

For $\gamma=1$, the Corollary 2.2 reduces to the following result:

Corollary 2.3. *Let $f(z)\in\mathscr{A}_p$ and suppose that $g\in S^*=S^*(0)$. If $f(z)$ is majorized by $g(z)$ in $\mathbb{U}$, then*

$$|f'(z)|\leqslant|g'(z)|\quad(|z|\leqslant 2-\sqrt{3}),$$

which is a known result obtained by MacGregor [14].

3. Coefficient Estimates

The coefficient estimate for the class $S^{m,b,j}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1,b_1,A,B,\gamma]$ is obtained, when $j=0$.

Definition 3.1. Let $S^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1,b_1,A,B,\gamma]$ denote the subclass of p-valent functions which satisfy the condition

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z))'}{D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z)}-p\right)\prec\frac{1+Az}{1+Bz},\tag{3.1}$$

where $p\in\mathbb{N}$, $\gamma\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\lambda_2\geqslant\lambda_1\geqslant0$, $m,b\in\mathbb{N}_0$, $-1\leqslant B<A\leqslant1$, $a_i\in\mathbb{C}$, $b_q\in\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$, $(i=1,\ldots,r,q=1,\ldots,s)$, and $r\leqslant s+1$; $r,s\in\mathbb{N}_0$.

Theorem 3.1. *Let $f\in\mathscr{A}_p$. If it satisfies the condition:*

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+|\gamma(A-B)-nB|\right]\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2n+b}\right]^m\frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\,n!}|a_{p+n}|}{|\gamma|(A-B)}\leqslant1,\tag{3.2}$$

then $f\in S^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1,b_1,A,B,\gamma]$.

$\lhd$ Let $f\in S^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}[a_1,b_1,A,B,\gamma]$, then we can write (3.1) as follows:

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z))'}{D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z)}-p\right)=\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}$$

which gives

$$\frac{z(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z))'}{D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z)}-p=\left[\gamma(A-B)-B\left(\frac{z(D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z))'}{D^{m,b}_{\lambda_1,\lambda_2,p}(a_1,b_1)f(z)}-p\right)\right]w(z).\tag{3.3}$$

From (3.3), we obtain

$$\frac{pz^p + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}(p+n)a_{p+n}z^{p+n}}{z^p + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}a_{p+n}z^{p+n}} - p$$

$$= \left\{\gamma(A-B) - B\left[\frac{pz^p + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}(p+n)a_{p+n}z^{p+n}}{z^p + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}a_{p+n}z^{p+n}} - p\right]\right\} w(z)$$

which yields

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}a_{p+n}z^{n}}{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}a_{p+n}z^{n}}$$

$$= \left\{\gamma(A-B) - B\left[\frac{n\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}a_{p+n}z^{n}}{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}a_{p+n}z^{n}}\right]\right\} w(z).$$

Since $|w(z)| \leqslant 1$,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}a_{p+n}z^{n}\right|$$

$$\leqslant \left|\gamma(A-B) - \sum_{n=1}^{\infty}[Bn-\gamma(A-B)]\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}a_{p+n}z^{n}\right|.$$

Letting $|z| \to 1^-$ through real values, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n + |\gamma(A-B) - Bn|]\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}|a_{p+n}| \leqslant |\gamma|(A-B),$$

therefore,

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}[n + |\gamma(A-B) - Bn|]\left[\frac{p+(\lambda_1+\lambda_2)n+b}{p+\lambda_2 n+b}\right]^m \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n\, n!}|a_{p+n}|}{|\gamma|(A-B)} \leqslant 1.$$

REMARK 3.1. Other works related to different classes of p-valent functions can be found in [15, 16].

References

1. *Selvaraj C., Karthikeyan K. R.* Differential subordination and superordination for certain subclasses of analytic functions // Far East J. of Math. Sci.—2008.—Vol. 29, № 2.—P. 419–430.
2. *El-Ashwah R. M.* Majorization Properties for Subclass of Analytic p-Valent Functions Defined by the Generalized Hypergeometric Function // Tamsui Oxf. J. Math. Sci.—2012.—Vol. 28, № 4.—P. 395–405.

3. *Dziok J., Srivastava H. M.* Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function // Appl. Math. Comp.—1999.—Vol. 103, № 1.—P. 1–13.
4. *Selvaraj C., Karthikeyan K. R.* Univalence of a general integral operator associated with the generalized hypergeometric function // Tamsui Oxf. J. Math. Sci.—2010—Vol. 26, № 1.—P. 41–51.
5. *Hohlov J. E.* Operators and operations on the class of univalent functions // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.—1978.—Vol. 10, № 197.—P. 83–89.
6. *Salagean G. S.* Subclasses of univalent functions // Complex analysis-fifth Romanian-Finnish seminar. Part 1.—Berlin: Springer, 1981.—P. 362–372.—(Lecture Notes in Math., Vol. 1013).
7. *Al-Oboudi F. M.* On univalent functions defined by a generalized Salagean operator // Int. J. Math. Math. Sci.—2004.—№ 25–28.—P. 1429–1436.
8. *Ruscheweyh S.* New criteria for univalent functions // Proc. Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 49.—P. 109–115.
9. *El-Yagubi E., Darus M.* A new subclass of analytic functions with respect to k-symmetric points // Far East J. of Math. Sci.—2013.—Vol. 82, № 1.—P. 45–63.
10. *Carlson B. C., Shaffer D. B.* Starlike and prestarlike hypergeometric functions // SIAM J. Math. Anal.—1984.—Vol. 15, № 4.—P. 737–745.
11. *Cátás A.* On certain class of p-valent functions defined by a new multiplier transformations // Proceedings Book of the International Symposium G. F. T. A.—Istanbul: Istanbul Kultur University, 2007.—P. 241–250.
12. *Nasr M. A., Aouf M. K.* Starlike function of complex order // J. Natur. Sci. Math.—1985.—Vol. 25, № 1.—P. 1–12.
13. *Altintas O., Özkan Ö. and Srivastava H. M.* Majorization by starlike functions of complex order // Complex Variables Theory Appl.—2001.—Vol. 46, № 3.—P. 207–218.
14. *MacGregor T. H.* Majorization by univalent functions // Duke Math. J.—1967.—Vol. 34.—P. 95–102.
15. *Darus M., Ibrahim R. W.* Multivalent functions based on a linear operator // Miskolc Math. Notes.—2010.—Vol. 11, № 1.—P. 43–52.
16. *Ibrahim R. W.* Existence and uniqueness of holomorphic solutions for fractional Cauchy problem // J. Math. Anal. Appl.—2011.—Vol. 380.—P. 232–240.

Received September 16, 2014.

Entisar El-Yagubi
School of Mathematical Sciences
Faculty of Science and Technology
Universiti Kebangsaan Malaysia
Bangi 43600 Selangor D. Ehsan, Malaysia
Email:`entisar_e1980@yahoo.com`

Maslina Darus
School of Mathematical Sciences
Faculty of Science and Technology
Universiti Kebangsaan Malaysia
Bangi 43600 Selangor D. Ehsan, Malaysia
Email:`maslina@ukm.edu.my`

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА p-ВАЛЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННОГО ОБОБЩЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

Эль-Ягуби Э., Дарус М.

Изучаются свойства мажорации для нового класса аналитических p-валентных функций комплексного порядка, порожденного гипергеометрической функцией. Приводятся некоторые известные следствия полученных результатов. Даны также оценки коэффициентов для этого класса.

Ключевые слова: мажорация, p-валентная функция, гипергеометрическая функция.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 39–46

УДК **541.124:541.126:517.9**

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ С МЕДЛЕННЫМИ И БЫСТРЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ[1]

Л. И. Кононенко

Приведены постановки прямой и обратной задач для сингулярных систем с малым параметром, описывающих каталитические реакции в задачах химической кинетики. Решение прямой задачи опирается на метод интегральных многообразий. Обратная задача сводится к нахождению коэффициентов полинома в правой части медленного уравнения по заданию решения системы на медленной поверхности этой системы. Получены условия существования и единственности коэффициентов в правой части медленной подсистемы вырожденной системы.

Ключевые слова: математическое моделирование, сингулярно возмущенные системы, интегральные многообразия, медленные поверхности, обратные задачи.

Введение

Моделирование многих процессов в различных областях научной и практической деятельности (геофизика, химическая кинетика, медицина и т. д.) приводит к решению *прямых и обратных* задач и существует давно. Но как раздел современной прикладной математики — обратные задачи естествознания — появились сравнительно недавно.

При моделировании широкого круга задач химической кинетики используются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными (с малым параметром).

Задача отыскания решений системы по некоторым исходным данным при известных функциях в правых частях представляет собой так называемую *прямую* задачу для дифференциальных уравнений. Основная цель исследований в данной работе — постановка и анализ задачи, обратной к этой (в химической кинетике обратные задачи называются задачами *идентификации*). *Обратная* задача сводится к нахождению неизвестных правых частей по некоторым данным о решении прямой задачи. Сформулирована и обоснована гипотеза о том, что по заданию решения на медленной поверхности можно восстановить неизвестные правые части, в частности, получены условия существования и единственности коэффициентов в правой части медленной подсистемы вырожденной системы, заданной полиномом. Начнем с краткого обзора по теории систем дифференциальных уравнений с медленными и быстрыми переменными. Мы будем иметь дело с прямыми и обратными задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений [1–9] в отличие от изучения теории обратных задач для уравнений с частными производными, которые представлены, например, в [10–16], причем в системах, рассматриваемых нами, присутствует малый параметр.

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 15-01-00745, и Сибирским отделением РАН, междисциплинарный интеграционный проект № 80.

В [14], где собраны почти все основные направления теории обратных и некорректных задач, рассматривается также система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, решение задачи Коши которой описывает процесс химической кинетики

$$\frac{du_i}{dt} = q_{i_1}u_1(t) + q_{i_2}u_2(t) + \dots + q_{i_n}u_n(t),$$
$$u_i(0) = \overline{q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $u_i(t)$ — концентрация i-го вещества в момент времени t.

Постоянные параметры q_{i_j} характеризуют зависимость скорости изменения $u_i(t)$ от концентраций веществ, участвующих в процессе.

Прямая задача формулируется следующим образом: определить $u_i(t)$, зная параметры q_{i_j} и $\overline{q_i}$ в начальный момент времени.

Обратная задача сводится к нахождению параметров q_{i_j} по решению системы $u_i(t)$, которое соответствует начальному условию $\overline{q_i}$. Заметим, что иногда $\overline{q_i}$ тоже неизвестны и их нужно определить вместе с q_{i_j}.

Поскольку величины, участвующие в процессах химической кинетики, разномасштабны, мы будем рассматривать системы с малым параметром, описывающие эти процессы и представленные в таких работах, как [17–23].

Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x, y, t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^m$ — медленные, $y \in \mathbb{R}^n$ — быстрые переменные; f, g — достаточно гладкие функции, $t \in \mathbb{R}$ — переменная, имеющая смысл времени, $\dot{x}$, $\dot{y}$ — производные по времени, ε — положительный малый параметр.

Система рассматривается в ограниченной выпуклой инвариантной притягивающей области $W \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

1. О прямой задаче для системы (1)

Прямая задача для системы дифференциальных уравнений с малым параметром (1) сводится к отысканию пары функций $x(t)$, $y(t)$, удовлетворяющих системе (1), по некоторым исходным данным при известных функциях f, g.

В основе решения *прямой задачи* лежит метод интегральных многообразий, который является удобным аппаратом исследования многомерных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, позволяющим понижать размерность систем [1, 2, 3]. Приведем необходимые сведения о методе интегральных многообразий для системы (1).

Гладкая поверхность S в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ называется *интегральным многообразием* системы (1), если любая траектория этой системы, имеющая хотя бы одну общую точку с S, целиком принадлежит поверхности S. Формально, если при $t = t_0$ точка $(x(t_0), y(t_0), t_0) \in S$, то траектория $(x(t), y(t), t)$ целиком принадлежит S.

Уравнение $\dot{x} = f(x, y, t, \varepsilon)$ в системе (1) называется *медленной подсистемой* , а уравнение $\varepsilon\dot{y} = g(x, y, t, \varepsilon)$ — *быстрой подсистемой* системы (1). Если в (1) положить $\varepsilon = 0$, получим *порождающую* или *вырожденную* систему

$$\dot{x} = f(x, y, t, 0), \tag{2}$$

$$0 = g(x, y, t, 0). \tag{3}$$

Уравнение $g(x, y, t, 0) = 0$ задает *медленную поверхность*. Это уравнение медленной поверхности может иметь одно или несколько решений, каждое из которых задает *лист медленной поверхности*.

Опишем подробнее. Поверхность, задаваемая уравнением (3), называется *медленной поверхностью*. Возьмем какое-нибудь решение $x(t_0)$, $y(t_0)$, t_0 уравнения $g(x, y, t, 0) = 0$, т. е. выберем точку $(x(t_0), y(t_0), t_0)$ на медленной поверхности Γ. Если $\det\bigl(\frac{\partial g}{\partial y}(x(t_0), y(t_0), t_0, 0)\bigr) \neq 0$, то в некоторой окрестности V_0 точки $(x(t_0), t_0) \in D_1 \times \mathbb{R}$, $D_1 \subset \mathbb{R}^m$, существует по теореме о неявной функции [24] вектор-функция $y = h_0(x, t)$, $y_0 = h_0(x_0, t_0)$, $y \in D_2 \subset \mathbb{R}^n$, которая является решением уравнения (3), т. е. $g(x, h_0(x, t), t, 0) = 0$ при всех $(x, t) \in V_0$. Пересечение поверхности Γ с поверхностью $\det\bigl(\frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), t, 0)\bigr) = 0$ является поверхностью (кривой) Γ_1 на единицу меньшей размерности, чем Γ. Она делит медленную поверхность на части, в каждой из которых $\det\bigl(\frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), t, 0)\bigr)$ не меняет знака. Каждую из этих частей называют *листом медленной поверхности*.

Листы интегрального многообразия медленных движений (или медленного интегрального многообразия) являются уточнением при учете малого параметра ε листов медленной поверхности и получаются из них с помощью асимптотического разложения по степеням ε:

$$h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \cdots + \varepsilon^k h_k(x, t) + \ldots, \tag{4}$$

где коэффициенты разложения $h_k(x, t)$ подсчитываются по рекуррентной формуле, приведенной, например, в [9],

$$\begin{gathered} h_k = -B^{-1}\Bigl[g^{(k)} - \frac{\partial h_{k-1}}{\partial t} - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\partial h_p}{\partial x} f^{(k-1-p)}\Bigr], \\ B = \det\bigl(\tfrac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x, t), t, 0)\bigr) \neq 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Среди интегральных многообразий системы (1) нас интересуют m-мерные интегральные многообразия (размерность медленных переменных), которые представимы в виде графика вектор-функции $y = h(x, t, \varepsilon)$.

Выполняется соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t),$$

где $h_0(x, t)$ — функция, график которой является листом медленной поверхности.

При стремлении малого параметра ε к нулю траектории исходной системы стремятся к траекториям вырожденной системы.

Основная идея метода интегральных многообразий состоит в следующем. Мы сводим качественный анализ полной системы к анализу медленных подсистем на листах интегрального многообразия.

Согласно методу интегральных многообразий мы должны сделать следующее:

1) исследовать строение медленной поверхности, т. е. найти количество и форму листов;

2) найти границы листов;

3) проверить характер устойчивости листов;

4) провести качественный анализ медленных подсистем на устойчивых листах (в частности, найти стационары, их классификацию; особый интерес вызывают колебания различных типов и решения-утки);

5) провести анализ системы в целом.

Нахождение решения системы (1) сводится к отысканию решения вырожденной системы (2)–(3), получаемой из исходной, если параметр ε формально положить равным нулю. Этот факт следует из работ А. Н. Тихонова [4, 5], в которых доказаны теоремы о предельном переходе к решению вырожденной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Правые части системы (1) являются достаточно гладкими функциями, поэтому удовлетворяют требуемым условиям, в частности, обеспечивают единственность решения.

При использовании метода интегральных многообразий для решения конкретных задач центральным становится вопрос о вычислении функции $h(x,t,\varepsilon)$, описывающей многообразие. Как правило, точное вычисление не является возможным и используются различные виды приближенных вычислений. Мы будем использовать для приближенного вычисления асимптотическое разложение функции $h(x,t,\varepsilon)$ по степеням малого параметра, приведенное в формулах (4), (5).

Существование интегрального многообразия было доказано в [3, 9]. Приведем соответствующую теорему и сформулируем постановку прямой задачи. (Заметим, что термин «прямая» задача обычно употребляется в контексте с «обратной» задачей, а в остальных случаях говорят просто «задача».)

Постановка прямой задачи. Пусть для системы (1) выполнены условия:

I. Уравнение $g(x,y,t,0)=0$ имеет изолированное решение $y=h_0(x,t)$ при $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^m$.

II. В области $\Omega_0=\Big\{(x,y,t,\varepsilon):\, x\in\mathbb{R}^m,\ \|y-h_0(x,t)\|<\rho,\ t\in\mathbb{R},\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\Big\}$ функции f, g и h_0 равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по переменным до $(k+2)$-го порядка включительно $(k\geqslant 0)$.

III. Собственные значения $\lambda_i(x,t)$ $(i=1,\dots,n)$ матрицы $\frac{\partial g}{\partial y}(x,h_0(x,t),t,0)$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re}\lambda_i(x,t)\leqslant -2\gamma<0$.

Требуется по заданным функциям $f(x,y,t,\varepsilon)$, $g(x,y,t,\varepsilon)$ в правой части системы (1) найти $x(t)$, $y(t)$ в области Ω_0.

Теорема. *Пусть выполняются условия* I–III. *Тогда существует такое* ε_1 $(0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0)$, *что для каждого* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ *система* (1) *имеет интегральное многообразие медленных движений* $y=h(x,t,\varepsilon)$, *движение по которому описывается уравнением*

$$\dot{x}=f(x,h(x,t,\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{6}$$

Если $x(t)$ — *решение этого уравнения, то пара* $x(t)$, $y(t)$, *где* $y(t)=h(x,t,\varepsilon)$, *является решением исходной системы* (1), *т. е. пара* $x(t)$, $y(t)$ *есть решение прямой задачи.*

В качестве примеров прямой задачи были рассмотрены две модели из химической кинетики.

I. *Математическая модель реактора идеального смешения.*

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая бимолекулярную реакцию на поверхности катализатора

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=a-x_1-\alpha[\omega_1+(\omega_3-\omega_1-\omega_2)x_1],\\ \dot{x}_2&=b-x_2-\alpha[\omega_2+\omega_4+(\omega_3-\omega_1-\omega_2)x_2],\\ \dot{y}_1&=\beta(2\omega_1-\omega_3-\omega_4),\quad \dot{y}_2=\beta(\omega_2-\omega_3), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\omega_1=\varkappa_1x_1(1-y_1-y_2)^2-\varkappa_{-1}y_1^2$, $\omega_2=\varkappa_2x_2(1-y_1-y_2)-\varkappa_{-2}y_2$, $\omega_3=y_1y_2$, $\omega_4=\varkappa_4x_2y_1$ — обезразмеренные скорости четырех стадий реакции.

Областью изменения переменных является множество

$$W = \Big\{(x_1, x_2, y_1, y_2) : 0 \leqslant x_1 \leqslant a,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant b,\ 0 \leqslant y_1,\ 0 \leqslant y_2,\ y_1 + y_2 \leqslant 1\Big\}.$$

Система (7) изучалась в [6, 7].

Скорость реакции на поверхности катализатора существенно выше, чем скорости адсорбции. Предполагается, что основным механизмом реакции является адсорбционный, а ударный механизм учитывается как дополнительный. Поэтому мы используем при анализе модели следующую иерархию параметров: $\varkappa_{-2}, \varkappa_{-1}, \varkappa_4 \ll \varkappa_1, \varkappa_2 \ll 1$. Константы десорбции предполагаются малыми сравнительно с константами адсорбции. Кроме того, $\alpha \ll \beta$ и $\varepsilon = 1/\beta \ll \varkappa_{-2}, \varkappa_{-1}, \varkappa_4$.

II. *Математическая модель каталитической реакции окисления.*

Рассматривается детальный механизм реакции $CO + O_2$ на иридии. Кинетической схеме этой реакции соответствует система дифференциальных уравнений с безразмерными переменными

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = 2b_1x_7^2 - b_2x_6x_1 - b_8x_1x_2,\\
\dot{x}_2 = b_4x_7 - b_5x_2 - b_8x_1x_2 - b_9x_2x_3 - b_{12}x_2x_4,\\
\dot{x}_3 = b_2x_6x_1 - 2b_3x_3^2 - b_6x_3 + b_7x_5 - b_9x_2x_3 + 2b_{10}x_4x_5 + b_{12}x_2x_4,\\
\dot{x}_4 = 2b_3x_3^2 - b_{10}x_4x_5 - b_{12}x_2x_4,\\
\dot{x}_5 = b_6x_3 - b_7x_5 - b_{10}x_4x_5 - b_{11}x_5,
\end{gathered} \tag{8}$$

где $x_6 = 1 - x_3 - x_4 - x_5$, $x_7 = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$.

Система (8) исследовалась в [8, 17, 18]. Там же приведены выражения для коэффициентов b_i $(i = 1, 2, \ldots, 12)$. Областью изменения переменных является множество

$$W = \Big\{(x_1, \ldots, x_5) : 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ \sum_{j=1}^{5} x_j \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, 5\Big\}.$$

При анализе модели используем следующую иерархию параметров:

$$b_{10} > b_8 \gg b_7 > b_1, b_2, b_3, b_4, b_6, b_{11}, b_{12} \gg b_5, b_9.$$

В [19] также проведен подробный анализ систем (7) и (8) с применением метода интегральных многообразий, который позволяет провести исследование согласно шагам, описанным ранее. В работах [20–23] так же рассматривались системы с малым параметром, в частности, в [20–22] — системы, описывающие задачи химической кинетики.

2. Обратная задача для системы

Целью дальнейших исследований являются постановка и анализ задачи, обратной к задаче, поставленной в предыдущем пункте для системы (1). Для упрощения исследования обратной задачи для системы (1) введены следующие ограничения:

1) рассматривается обратная задача для системы (1) при $\varepsilon = 0$, т. е. для вырожденной системы (2);

2) функция f в правой части медленной подсистемы системы (1) задается в виде многочлена p-й степени $f = \sum_{i+j \leqslant p} b_{ij}x^iy^j$, так как в задачах химической кинетики правые части системы часто являются полиномами, более того будем рассматривать многочлен первой степени;

3) рассматриваются системы с одной медленной и одной быстрой переменными, т. е. $m = n = 1$;

4) функцию $g(x, y, t, \varepsilon)$ считаем заданной и удовлетворяющей всем условиям теоремы о неявной функции в каждой точке области, в частности, $\frac{\partial g(x,y,t,0)}{\partial y} \neq 0$, следовательно, при $\varepsilon = 0$ медленная поверхность, уравнение которой $g(x, y, t, 0) = 0$, задана;

5) медленная поверхность состоит из одного листа.

В рамках сделанных ограничений вырожденная система

$$\begin{gathered} \dot{x} = \sum_{i+j \leqslant p} b_{ij} x^i y^j, \\ 0 = g(x, y, t, 0) \end{gathered} \tag{9}$$

имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{x} = p_0 + p_1 x + p_2 y, \\ 0 = g(x, y, t, 0). \end{gathered} \tag{10}$$

Заметим, что рассматриваемая система обыкновенных дифференциальных уравнений описывает формальную кинетическую модель. Впоследствии формальные кинетические модели могут оказать существенную помощь в выяснении механизма реакции [25].

Учитывая перечисленные ограничения 1)–5), получим следующую постановку обратной задачи для сингулярно возмущенной системы.

Постановка обратной задачи. Рассматривается система дифференциальных уравнений со следующими данными

$$\begin{aligned} &\dot{x} = p_0 + p_1 x + p_2 y, \\ &0 = g(x, y, t, 0), \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R},\ (x, y) \in W, \\ &x(t_i) = \alpha_i,\ \dot{x}(t_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{11}$$

где функция g удовлетворяет условиям 4), 5). Для данных t_i, α_i, β_i требуется найти коэффициенты p_0, p_1, p_2, удовлетворяющие системе (11).

Из второго уравнения системы (10) при условии $\frac{\partial g(x,y,t,0)}{\partial y} \neq 0$ выразим быструю переменную y через медленную переменную x. Это возможно, так как функция g удовлетворяет всем условиям теоремы о неявной функции. Имеем $y = \varphi(x, t)$. Подставив это выражение в первое уравнение системы (11), имеем

$$\dot{x}(t) = p_0 + p_1 x(t) + p_2 \varphi(x(t), t). \tag{12}$$

Используя данные $x(t_i) = \alpha_i$, $\dot{x}(t_i) = \beta_i$ и вводя обозначения $\gamma_i = y_i = \varphi(\alpha_i, t_i)$, $i = 1, 2, 3$, имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными p_0, p_1, p_2:

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 \alpha_1 + p_2 \gamma_1 &= \beta_1, \\ p_0 + p_1 \alpha_2 + p_2 \gamma_2 &= \beta_2, \\ p_0 + p_1 \alpha_3 + p_2 \gamma_3 &= \beta_3. \end{aligned} \tag{13}$$

Значит, на медленной поверхности ($\varepsilon = 0$) искомые коэффициенты p_i, $i = 0, 1, 2$, вычисляются по следующим формулам: $p_i = \frac{\Delta^0_{p_i}}{\Delta^0}$. Здесь Δ^0 — определитель системы (13):

$$\Delta^0 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ 1 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ 1 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \tag{14}$$

а $\Delta^0_{p_0}$, $\Delta^0_{p_1}$, $\Delta^0_{p_2}$ — определители, получаемые из Δ^0 заменой j-го столбца, $j = 1, 2, 3$, соответствующим столбцом коэффициентов при p_0, p_1, p_2:

$$\Delta^0_{p_0} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta^0_{p_1} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta^0_{p_2} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Нуль в верхнем индексе определителей означает, что коэффициенты p_i, $i = 0, 1, 2$, подсчитываются на медленной поверхности (при $\varepsilon = 0$).

Из теории линейных алгебраических систем [26, 27] вытекает следующее условие существования и единственности коэффициентов p_i: $\Delta_0 \neq 0$.

Имеет место следующее *достаточное условие существования и единственности коэффициентов системы* (13), которая была получена из вырожденной системы (10).

Предложение. *Пусть данные t_i, α_i, β_i, $i = 1, 2, 3$, таковы, что выполнены условия* 1)–5) *и определитель системы* (13) *при этих значениях t_i, $i = 1, 2, 3$, не равен нулю. Тогда обратная задача имеет единственное решение, которое определяется равенствами $a_i = \frac{\Delta^0_{p_i}}{\Delta^0}$, где Δ^0 и $\Delta^0_{p_i}$, $i = 1, 2, 3$, вычисляются по формулам* (14) *и* (15).

В дальнейших исследованиях мы предполагаем включить в рассмотрение случай $\varepsilon \neq 0$, а также снять ограничения на число переменных, степень многочлена и количество листов медленной поверхности.

Автор выражает благодарность В. Г. Романову за давнюю совместную статью [28], которая инициировала данную, коллегам за помощь в работе и рецензенту за справедливую критику и ценные замечания.

Литература

1. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.—М.: Наука, 1963.
2. *Васильева А. В., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.—М.: Изд-во МГУ, 1978.
3. *Гольдштейн В. М., Соболев В. А.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1988.
4. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб.—1952.—Т. 31 (73), № 3.—С. 575–586.
5. Тихонов А. Н. О зависимости решений диффернциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб.—1948.—Т. 22 (64), № 2.—С. 193–204.
6. *Гольдштейн В. М., Кононенко Л. И., Лазман М. З., Соболев В. А., Яблонский Г. С.* Качественный анализ динамических свойств каталитического изотермического реактора идеального смешения // Мат. проблемы химической кинетики.—Новосибирск: Наука, 1989.—С. 176–204.
7. *Кононенко Л. И.* О гладкости медленной поверхности сингулярно возмущенных систем // Сиб. журн. индустр. математики.—2002.—Т. 5, № 2 (10).—С. 109–125.
8. *Кононенко Л. И., Волокитин Е. П.* Параметризация и качественый анализ сингулярной системы в математической модели реакции каталитического окисления // Сиб. журн. индустр. математики.—2012.—Т. 15, № 1 (49).—С. 43–52.
9. *Воропаева Н. В., Соболев В. А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем.—М.: Физматлит, 2009.
10. *Романов В. Г.* Обратные задачи для гиперболических систем // Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении.—Новосибирск: Наука, 1978.—С. 128–142.
11. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа.—М: Наука, 1980.—286 с.
12. *Аниконов Ю. Е.* Несколько вопросов теории обратных задач для кинетических уравнений // Обратные задачи математической физики.—Новосибирск, 1985.—С. 28–41.
13. *Алексеев А. С.* Некоторые обратные задачи теории распространения волн 1, 2 // Изв. АН СССР. Сер. геофизика.—1962.—№ 11.—С. 1514–1531.
14. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи.—Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.—456 с.

15. *Голубятников В. П.* Обратная задача для уравнения Гамильтона — Якоби на замкнутом многообразии // Сиб. мат. журн.—1997.—Т. 38, № 2.—С. 276–279.
16. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2004.—Т. 44, № 4.—С. 694–716.
17. *Гайнова И. А., Фадеев С. И., Елохин В. И., Боронин А. И.* Реакция окисления CO на поликристаллической фольге иридия. Моделирование кинетики поверхностных процессов // Междунар. конф. по вычислительной математике. Труды конференции. Часть I.—Новосибирск, 2004.—С. 449–454.
18. *Кононенко Л. И.* Интегральные многообразия в математической модели реакции каталитического окисления // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ.—1997.—Т. 1, № 4.—С. 53–59.
19. *Кононенко Л. И.* Медленные поверхности в задачах химической кинетики // Мат. заметки ЯГУ.—2012.—Т. 19, вып. 2.—С. 49–67.
20. *Chumakov G. A., Chumakova N. A.* Relaxation oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards // Chem. Eng. J.—2003.—Vol. 91, № 2–3.—P. 151–158.
21. *Кононенко Л. И.* Релаксации в сингулярно возмущенных системах на плоскости // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.—2009.—Т. 9, вып. 4.—С. 45–50.
22. *Соболев В. А., Щепакина Е. А.* Интегральные поверхности со сменой устойчивости и траектории-утки // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ.—1997.—Т. 1, № 3.—С. 176–187.
23. *Бобкова А. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Проблема «выживания уток» в трехмерных сингулярно возмущенных системах с двумя медленными переменными // Мат. заметки.—2002.—Т. 71, вып. 6.—С. 818–831.
24. *Решетняк Ю. Г.* Курс математического анализа. Ч. 1. Кн. 2: Интегральное исчисление функций одной переменной. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.—Новосибирск: Изд-во Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 1999.—512 с.
25. *Ермакова А.* Методы макрокинетики, применяемые при математическом моделировании химических процессов и реакторов. Институт катализа СО РАН им. Г. К. Борескова.—Новосибирск, 2001.—188 с.
26. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры.—Новосибирск: Научная книга, 1997.—388 с.
27. *Годунов С. К.* Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002.—216 с.
28. *Романов В. Г., Слинючева Л. И.* Обратная задача для линейных гиперболических систем первого порядка // Мат. проблемы геофизики.—Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1972.—Вып. 3.—С. 187–215.

Статья поступила 28 сентября 2014 г.

Кононенко Лариса Ивановна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
старший научный сотрудник лаб. прикладного анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4;

Новосибирский государственный университет, *доцент*
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, Академгородок, ул. Пирогова, 2
E-mail: larakon2@gmail.ru, larak@math.nsc.ru

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR A SINGULAR SYSTEM WITH SLOW AND FAST VARIABLES IN CHEMICAL KINETICS

Kononenko L. I.

Direct and inverse problems for singular systems with small parameter are stated, which describe catalytic reactions in chemical kinetics. The solution of the direct problem is based on the method of integral manifolds. The inverse problem reduces to finding the coefficients of the polynomial in the right-hand part of the slow equation according to the solution given on the slow surface of the system. The above arguments make it possible to obtain existence and uniqueness conditions for the coefficients in the right-hand part of the slow subsystem of the degenerate system.

Key words: mathematical modeling, singularly perturbed system, integral manifold, slow surface, inverse problem.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 47–59

УДК **517.927.2**

УСЛОВИЯ ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА РАЗРЫВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Р. Ч. Кулаев

Работа посвящена изучению знаковых и осцилляционных свойств функции Грина разрывной краевой задачи для уравнения четвертого порядка, описывающей малые деформации системы, состоящей из двух жестко соединенных стержней, упруго подпертых в их общем конце. Получен критерий осцилляционности функции Грина. Показано, что если концы стержневой системы неподвижны, то осцилляционность функции Грина не зависит от способа закрепления концов.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение четвертого порядка, разрывная краевая задача, краевая задача на графе, функция Грина, положительность и осцилляционность функции Грина.

В настоящей работе рассматривается разрывная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, являющаяся моделью стержневой конструкции. Изучается вопрос об осцилляционности функции Грина. Осцилляционные ядра примечательны тем, что интегральные операторы с такими ядрами обладают комплексом замечательных спектральных свойств, характерных для классической задачи Штурма — Лиувилля и называемых осцилляционными.

Всюду в данной работе мы придерживаемся идеологии дифференциальных уравнений на геометрических графах [1, 2]. На наш взгляд такой подход более удобен, поскольку, во-первых, позволяет опираться на общие результаты, полученные для уравнений на графах, а, во-вторых, не смотря на то, что в данной статье мы рассматриваем задачу о балке с одной упругой опорой, основные результаты без каких-либо затруднений обобщаются на случай большего числа опор.

Вопросы, связанные с функцией Грина разрывных краевых задач уже изучались ранее. Помимо уже упомянутых монографий [1, 2], имеется цикл работ Ю. В. Покорного, А. В. Боровских и К. П. Лазарева, посвященных вопросам о принадлежности функций Грина разрывных краевых задач к классам осцилляционных и знакорегулярных ядер [3–8]. В частности, в работах [3, 7] была доказана осцилляционность функции Грина краевой задачи, моделирующей малые деформации цепочки шарнирно сочлененных стержней, а в работе [8] формулируются достаточные условия знакорегулярности функции Грина разрывных краевых задач, обобщающие известный результат Калафати — Гантмахера — Крейна [9].

В центре внимания настоящей работы — задача, которая получила название «балка с упругими опорами». Вопрос о положительности и, тем более, осцилляционности функции Грина этой задачи нетривиален даже в случае одной опоры: если жесткость опоры равна нулю, то выполнены достаточные условия знакорегулярности (а значит и осцилляционности) функции Грина, сформулированные в работе [8]. Если же жесткости опор стремятся к бесконечности, то мы в пределе получаем функцию Грина так называемой «задачи с шарнирной опорой», которая меняет знак «в шахматном порядке» (эта задача и ее обобщения исследовались Н. В. Азбелевым, Ю. В. Покорным, В. Я. Дерром и А. П. Тептиным (см. работы [10–12] и библиографию в них). Поэтому естественным является вопрос — будет ли функция Грина положительна при заданном положительном значении коэффициента жесткости. В работах [13, 14] установлены необходимые и достаточные условия положительности и осцилляционности функции Грина, в которых определяется промежуток значений коэффициента жесткости опоры, при которых функция Грина положительна и вне которого у нее теряется это свойство. Указанный промежуток определяется линейным неравенством относительно коэффициента жесткости [13]. Причем показано, что условия положительности и осцилляционности функции Грина совпадают [14].

В данной статье доказан алгоритмически эффективный критерий положительности, а значит, и осцилляционности, функции Грина. Условия формулируются в терминах свойств однозначно определяемого решения однородного уравнения и идеологически перекликаются с условиями неосцилляции дифференциального уравнения (см. [15, 16] или [2, гл. 3]) и условиями осцилляционности функции Грина «классических» двухточечных краевых задач [17]. Не смотря на то, что, в отличие от результата работы [13], этот критерий не позволяет явно определить «критическое» значение коэффициента жесткости опоры, при переходе через которое теряется свойство положительности (а значит, и осцилляционности) функции Грина, он имеет свои преимущества. Помимо того, что этот критерий допускает эффективную проверку при помощи вычислительной техники, он также позволяет получить некоторые результаты качественного характера. В частности, удается «оценить» границы области положительности функции Грина. Кроме того, этот результат позволяет доказать независимость знаковых, а следовательно, осцилляционных, свойств функции Грина от способа закрепления концов стержневой системы.

1. Постановка задачи

Обозначим через Γ интервал $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}$ с фиксированной внутренней точкой $\xi \in (a_1, a_2)$. Через $C[\Gamma]$ обозначим пространство кусочно-непрерывных функций, допускающих разрыв только первого рода и только в точке ξ. Тогда для функции $u(x) \in C[\Gamma]$, под $u(\xi \pm 0)$ будем понимать соответствующие пределы. Через $C^k[\Gamma]$ обозначим пространство функций из $C[\Gamma]$, имеющих k производных, также принадлежащих $C[\Gamma]$. Для интервалов (a_1, ξ) и (ξ, a_2) введем отдельные обозначения — γ_1 и γ_2, соответственно.

Пусть $u \in C[a, b]$ и имеет конечное число нулей на $[a, b]$. Через $\sigma u(x \pm 0)$ обозначим знак $u(x)$ справа (слева) от точки x. Использование $\sigma u(x \pm 0)$ позволяет нам в случаях, когда $u(x \pm 0) = 0$, приписывать этому нулю вполне определенный знак. Если же $u(x) \neq 0$, то, очевидно, $\sigma u(x + 0) = \sigma u(x - 0) = \operatorname{sign} u(x)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(p(x)u'')'' - (q(x)u')' = f(x), \quad x \in \gamma_1 \cup \gamma_2, \tag{1}$$

с коэффициентами $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, $q \in C^1[\Gamma]$, $q(x) \geqslant 0$ на Γ и $f \in C[\Gamma]$, снабженное в точках a_1 и a_2 краевыми условиями

$$u(a_1) + \alpha(a_1)D^3u(a_1) = 0, \quad \vartheta(a_1)u'(a_1) - \beta(a_1)u''(a_1) = 0, \tag{2_1}$$

$$u(a_2) - \alpha(a_2)D^3u(a_2) = 0, \quad \vartheta(a_2)u'(a_2) + \beta(a_2)u''(a_2) = 0, \tag{2_2}$$

а в точке ξ — условиями согласования

$$u(\xi - 0) = u(\xi + 0), \quad u'(\xi - 0) = u'(\xi + 0), \quad (pu'')(\xi - 0) = (pu'')(\xi + 0), \tag{3}$$

$$D^3u(\xi - 0) - D^3u(\xi + 0) - \delta u(\xi) = \widetilde{f}(\xi), \tag{4}$$

где через D^3u обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')' - q(x)u'$, а $\delta, \widetilde{f}(\xi) \in \mathbb{R}$.

В данной работе нам представляется более удобным смотреть на систему соотношений (1) и (3), (4) как на реализацию дифференциального уравнения на геометрическом графе [1], т. е. как на единый объект

$$Lu = F(x), \quad x \in \Gamma, \tag{5}$$

левая часть Lu которого — это левая часть уравнения (1) вместе с равенствами (3) и левой частью условия (4), а правая часть —

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \Gamma \backslash \xi; \\ \widetilde{f}(x), & \text{если } x = \xi. \end{cases}$$

Решением дифференциального уравнения (5) будем называть всякую функцию $u(x) \in C^4[\Gamma]$, удовлетворяющую на $\Gamma \backslash \xi$ обыкновенному дифференциальному уравнению (1), а в точке ξ — условиям (3), (4). Тогда краевая задача (5), (2) — это система (1), (3), (4) вместе с граничными условиями (2).

При исследовании краевой задачи (5), (2) мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(а) $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, $q \in C^1[\Gamma]$, $q \geqslant 0$ на Γ, $f \in C[\Gamma]$;

(б) $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot) \geqslant 0$, $\vartheta(\cdot) + \beta(\cdot) \neq 0$;

(в) $\delta > 0$.

Задача (5), (2) описывает малые деформации системы, состоящей из двух жестко соединенных стержней с упругой опорой в точке стыковки [18]. Коэффициенты уравнения (1) задают реакцию системы на изгиб и растяжение, коэффициент δ в условии (5) задает коэффициент жесткости опоры, а условия (2) охватывают все известные случаи закрепления концов стержней.

Как уже отмечалось выше, нас интересуют условия осцилляционности функции Грина краевой задачи (5), (2). А поскольку необходимым и достаточным условием осцилляционности функции Грина рассматриваемой задачи является ее положительность [14], то нам достаточно изучить вопрос о ее положительности.

2. Предварительные сведения и вспомогательные результаты

Функцией Грина невырожденной краевой задачи (5), (2) назовем функцию $G(x, s) : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ такую, что решение задачи может быть представлено в виде

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} G(x, s)F(s)\, ds + F(\xi)G(x, \xi).$$

В работе [13] было установлено, что краевая задача (5), (2) однозначно разрешима и является самосопряженной. Поэтому функция Грина задачи существует и обладает свойством симметричности $G(x, s) = G(s, x)$. Кроме того, согласно результатам [1], функция Грина краевой задачи (5), (2) обладает следующими свойствами:

1) функция $G(x,s)$ вместе со своими производными по x до четвертого порядка непрерывна по совокупности переменных вплоть до границы на каждом из прямоугольников $\gamma_i \times \gamma_k$ $(i \neq k)$ и на каждом из треугольников, на которые диагональю $x = s$ разбивается квадрат $\gamma_i \times \gamma_i$ $(i,k = 1,2)$;

2) при каждом фиксированном $s \in \Gamma$ функция $G(x,s)$ по x удовлетворяет однородному уравнению (5) на $x \in \Gamma \backslash s$;

3) при каждом фиксированном $s \in \Gamma$ функция $G(x,s)$ по x удовлетворяет всем краевым условиям (2);

4) функция $G(x,s)$ на диагонали $x = s$ удовлетворяет условиям непрерывности вместе со своими производными $\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}$ и условию скачка третьей квазипроизводной по x

$$D^3 G(s+0,s) - D^3 G(s-0,s) = 1;$$

5) функция $G(x,s)$ условиями 1)–4) определяется однозначно.

Из свойств 1) и 2) следует, что функция $G(x,s)$ непрерывна на замкнутом квадрате $\overline{\Gamma} \times \overline{\Gamma}$.

Заданная на Γ краевая задача (5), (2) может быть редуцирована к задаче на γ_1 со специальными краевыми условиями, если правая часть дифференциального уравнения (5) равна нулю на γ_2. Такая редукция очень удобна при анализе функции Грина, которую можно считать решением уравнения, правая часть которого сосредоточена в одной точке.

Для произвольной функции $u(x) \in C^k[\Gamma]$ обозначим через $u_i(x)$ ее сужение на интервал γ_i и положим $u_1^{(j)}(\xi) = u^{(j)}(\xi - 0)$, $u_2^{(j)}(\xi) = u^{(j)}(\xi + 0)$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Тогда, если $f(x) \equiv 0$ при всех $x \in \gamma_2$, то исходная задача (5), (2) эквивалентна набору из:

1) неоднородного уравнения на $\gamma_1 = (a_1, \xi)$;

2) однородного уравнения на $\gamma_2 = (\xi, a_2)$;

3) условий $u_2(\xi) = u_1(\xi)$, $u_2'(\xi) = u_1'(\xi)$, $p_2(\xi)u_2''(\xi) = p_1(\xi)u_1''(\xi)$;

4) условия согласования третьих квазипроизводных $D^3u_2(\xi) = D^3u_1(\xi) - \delta u_1(\xi) - \widetilde{f}(\xi)$.

Как уже было отмечено, краевая задача (5), (2) является невырожденной. Этот факт позволяет получить для сужения $u_2(x)$ следующее представление:

$$u_2(x) = u_1(\xi) z_{20}(x) + u_1'(\xi) z_{21}(x), \tag{6}$$

где $z_{20}(x)$ — решение однородного уравнения (1) на $\gamma_2 = (\xi, a_2)$, удовлетворяющее граничным условиям $z_{20}(\xi) = 1$, $z_{20}'(\xi) = 0$ и условиям (2_2) в точке a_2, а $z_{21}(x)$ — решение однородного уравнения (1) на γ_2, удовлетворяющее граничным условиям $z_{21}(\xi) = 0$, $z_{21}'(\xi) = 1$ и условиям (2_2) в точке a_2.

Подставляя полученное выражение (6) в условие из (3) для вторых производных в точке ξ, получим

$$p_1(\xi)u_1''(\xi) + \beta_1 u_1'(\xi) + \beta_0 u_1(\xi) = 0, \tag{7}$$

где $\beta_1 = -p_2(\xi)z_{21}''(\xi)$, $\beta_0 = -p_2(\xi)z_{20}''(\xi)$ (напомним, что функция $p(x)$ может иметь разрыв в точке ξ).

Рассмотрим теперь условие согласования третьих квазипроизводных в точке ξ. Используя (4) и (6), получим

$$D^3u_1(\xi) + \varrho_1 u_1'(\xi) + \varrho_0 u_1(\xi) = \widetilde{f}(\xi), \tag{8}$$

где $\varrho_1 = -D^3 z_{21}(\xi)$ и $\varrho_0 = -D^3 z_{20}(\xi) - \delta$.

Условия (7), (8) вместе с (2_1) и дифференциальным уравнением (1) на $\gamma_1 = (a_1, \xi)$ образуют полноценную, самостоятельную краевую задачу на $[a_1, \xi]$.

Теорема 1. *Краевая задача (5), (2) на* Γ *с* $F(x)$ *равной нулю вне* $\overline{\gamma}_1 = [a_1, \xi]$ *эквивалентна двум задачам:*

1) *невырожденной самосопряженной краевой задаче на* $[a_1, \xi]$

$$
\begin{gathered}
(p(x)u'')'' - (q(x)u')' = f(x), \quad x \in (a_1, \xi), \\
u(a_1) + \alpha(a_1)D^3u(a_1) = 0, \quad \vartheta(a_1)u'(a_1) - \beta(a_1)u''(a_1) = 0, \\
p(\xi)u''(\xi) + \beta_1 u'(\xi) + \beta_0 u(\xi) = 0, \quad D^3u(\xi) + \varrho_1 u'(\xi) + \varrho_0 u(\xi) = \widetilde{f}(\xi),
\end{gathered}
\tag{9}
$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям $\beta_1 > 0$, $\beta_0 = -\varrho_1 \geqslant 0$, $\varrho_0 < 0$ *и* $\beta_1\varrho_0 - \beta_0\varrho_1 < 0$;

2) *невырожденной задаче на* $[\xi, a_2]$ *для однородного уравнения*

$$
(p(x)U'')'' - (q(x)U')' = 0, \quad x \in (\xi, a_2),
$$

с неоднородными краевыми условиями

$$
\begin{gathered}
U(\xi) = u(\xi), \quad U'(\xi) = u'(\xi), \\
U(a_2) - \alpha(a_2)D^3U(a_2) = 0, \quad \vartheta(a_2)U'(a_2) + \beta(a_2)U''(a_2) = 0
\end{gathered}
$$

на границе промежутка (a_2, ξ).

Идеи доказательства теоремы те же, что и в работе [19]. На подробностях не останавливаемся.

Из теоремы 1 следует, что на диагональном квадрате $\gamma_1 \times \gamma_1$ функция Грина $G(x, s)$ задачи (5), (2) совпадает с функцией Грина «классической» двухточечной краевой задачи (9), для которой выполнены условия теоремы Калафати — Гантмахера — Крейна [8, 9]. Следовательно, функция Грина краевой задачи (9) является знакорегулярным, а значит, осцилляционным ядром. Как следствие этого свойства и теоремы 1 получаем, что функция Грина $G(x, s)$ задачи (5), (2) строго положительна на открытых квадратах $\gamma_1 \times \gamma_1$ и $\gamma_2 \times \gamma_2$. Отсюда, в свою очередь, следует неотрицательность срезки $g_\xi(\cdot) = G(\cdot, \xi)$ на всем интервале Γ. Покажем, что срезка $g_\xi(\cdot) = G(\cdot, \xi)$ строго положительна на Γ. Для этого воспользуемся следующим свойством функции Грина:

Лемма 1 [13]**.** *Пусть* $G(x, s)$ *— функция Грина задачи* (5), (2)*. Тогда для любого* $s \in (a_1, \xi]$ *срезка* $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ *имеет на* $[\xi, a_2)$ *не более одного нуля (с учетом кратности).*

Понятно, что в формулировке леммы 1 мы можем поменять местами граничные точки a_1 и a_2. Поэтому из леммы 1, неотрицательности срезки $g_\xi(x)$ и ее гладкости на всем интервале Γ (свойства 2 и 4 функции Грина) получаем, что $g_\xi(x) > 0$ на Γ.

С учетом предыдущих рассуждений и симметричности функции Грина получаем такое утверждение:

Лемма 2. *Функция Грина* $G(x, s)$ *задачи* (5), (2) *строго положительна на полузамкнутых квадратах* $(a_1, \xi] \times (a_1, \xi]$ *и* $[\xi, a_2) \times [\xi, a_2)$.

Отметим, что в работе [13] этот же результат был получен из совершенно иных соображений.

Замечание 1. Из леммы 1 следует импликация: если функция Грина задачи (5), (2) равна нулю в некоторой точке прямоугольника $\gamma_1 \times \gamma_2$, то в этом же прямоугольнике найдется точка в которой функция Грина строго меньше нуля.

Замечание 2. Лемма 1 справедлива для любого нетривиального решения однородного уравнения (5) на Γ, удовлетворяющего краевым условиям (2_2).

Замечание 3. В [13] показано, что если $u(x)$ — нетривиальное решение однородного уравнения (5) на Γ, удовлетворяющее условиям (2_2), то из равенства $u(x_0) = 0$ в некоторой точке $x_0 \in [a_1, a_2)$ следует неравенство $u'(x_0 + 0)u''(x_0 + 0) < 0$.

3. Положительность функции Грина краевой задачи (5), (2)

Теорема 1 позволяет установить формулы, по которым можно судить о поведении функции Грина $G(x,s)$ задачи (5), (2) в тех случаях когда переменная $s \in \Gamma$ принимает значения близкие к граничным точкам. Для этого определим пару функций $w_{a_1}(x)$ и $y_{a_1}(x)$, которые являются решениями однородного уравнения (5) на Γ, удовлетворяющими в точке a_2 краевым условиям (2_2), а в точке a_1 — условиям

$$w_{a_1}(a_1) + \alpha(a_1)D^3w(a_1) = 1, \quad \vartheta(a_1)w'_{a_1}(a_1) - \beta(a_1)w''_{a_1}(a_1) = 0, \tag{10_1}$$

$$y_{a_1}(a_1) + \alpha(a_1)D^3y(a_1) = 0, \quad \vartheta(a_1)y'_{a_1}(a_1) - \beta(a_1)y''_{a_1}(a_1) = 1. \tag{10_2}$$

Меняя в определении функций $w_{a_1}(x)$ и $y_{a_1}(x)$ ролями концевые точки a_1 и a_2, получим еще одну пару функций $w_{a_2}(x)$ и $y_{a_2}(x)$. Поскольку краевая задача (5), (2) невырождена, то функции $w_{a_i}(x)$ и $y_{a_i}(x)$ определены однозначно.

Обозначим через $l_j(\cdot)$, $j = 1,2,3,4$, функционалы, определяющие краевые условия (9) (в том же порядке, в котором они идут в (9)), а через $\phi_j(x)$ — фундаментальную систему решений уравнения (9) такую, что $l_j(\phi_k) = \delta_{kj}$, где δ_{kj} — символ Кронекера. Из свойств 1)–4) функции Грина следует, что при любом фиксированном $s \in \gamma_1$ функция $g_s = G(\cdot, s)$ является решением однородного уравнения (1) на $\Gamma \backslash (a_1, s)$, удовлетворяющим условиям (2_2). Поэтому существуют постоянные ψ и χ, зависящие от $s \in \gamma_1$, такие, что при $x \in \Gamma \backslash (a_1, s)$ для функции Грина краевой задачи (5), (2) имеет место представление

$$G(x,s) = w_{a_1}(x)\psi(s) + y_{a_1}(x)\chi(s), \tag{11}$$

где

$$\psi(s) = -\frac{[\phi; 2,3,4](s)}{p(s)[\phi; 1,2,3,4](s)}, \quad \chi(s) = \frac{[\phi; 1,3,4](s)}{p(s)[\phi; 1,2,3,4](s)},$$

а через $[\phi; i_1, \ldots, i_k]$ обозначен вронскиан системы функций $\{\phi_{i_j}\}_{j=1}^k$.

Действительно, в треугольнике $a_1 < s < x < \xi$ функция $w_{a_1}(x)\psi(s) + y_{a_1}(x)\chi(s)$ совпадает с функцией Грина двухточечной краевой задачи (9) (см., например, [1, гл. 6]) и, согласно теореме 1, совпадает с функцией Грина $G(x,s)$ задачи (5), (2). Из очевидных включений $w_{a_1}(x), y_{a_1}(x) \in C[\Gamma]$ и $\psi(s), \chi(s) \in C[a_1, \xi]$ следует, что рассматриваемая функция непрерывна на множестве $\{(x,s) \in \Gamma \times \Gamma : \, s \in \gamma_1, \, x \in \Gamma \backslash (a_1, s)\}$. Кроме того, при каждом фиксированном $s \in \gamma_1$ функция $w_{a_1}(\cdot)\psi(s) + y_{a_1}(\cdot)\chi(s)$ является решением однородного уравнения (5) на промежутке $\Gamma \backslash (a_1, s)$ и удовлетворяет условиям (2_2). Поэтому из свойств 1)–5) функции Грина следует, что формула (11) определяет функцию Грина краевой задачи (5), (2) на множестве $\{(x,s) \in \Gamma \times \Gamma : \, s \in \gamma_1, \, x \in \Gamma \backslash (a_1, s)\}$.

Лемма 3 [17]**.** *При $s \to a_1$ функция $\chi(s) > 0$ является бесконечно малой порядка не большего двух, а функция $\psi(s)$ удовлетворяет соотношению $\psi(s) = o(\chi(s))$.*

Лемма 4 [1, гл. 6]**.** *Если коэффициент $\alpha(a_1)$ краевой задачи (9) больше нуля, то при $s = a_1$ срезка $G(x, a_1)$ пропорциональна на Γ решению $w_{a_1}(x)$ с положительным коэффициентом пропорциональности, т. е. $\psi(a_1) > 0$ и $\chi(a_1) = 0$.*

Очевидно, что мы можем поменять ролями граничные вершины графа и получить формулу, аналогичную (11), которая будет описывать функцию $G(x,s)$ при $s \in \gamma_2$ и $x \in \Gamma \backslash (s, a_2)$.

Поставим в соответствие каждой граничной точке a_i функцию, определяемую следующим образом:

$$u_{a_i}(x) = \begin{cases} w_{a_i}(x), & \alpha(a_i) \neq 0; \\ y_{a_i}(x), & \alpha(a_i) = 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть функция $u_{a_i}(x)$ не равна нулю в точке $x_0 \in \Gamma$. Тогда существует такое $\tau = \tau(x_0) > 0$, что при $0 < |s - a_i| < \tau$ $(s \in \Gamma)$ для функции Грина краевой задачи* (5), (2) *выполнено соотношение*

$$\operatorname{sign} G(x_0, s) = \operatorname{sign} u_{a_i}(x_0).$$

$\lhd$ Согласно (11), при всех $s \in \Gamma$, достаточно близких к граничной точке a_i, имеет место равенство

$$G(x_0, s) = w_{a_i}(x_0)\psi(s) + y_{a_i}(x_0)\chi(s).$$

Если $\alpha(a_i) \neq 0$, то $u_{a_i}(x_0) = w_{a_i}(x_0) \neq 0$ и, ввиду леммы 4, $\psi(a_i) > 0$ и $\chi(a_i) = 0$. А так как функции $\psi(s)$ и $\chi(s)$ непрерывны, то при s достаточно близких к a_i знак величины $G(x_0, s)$ совпадает со знаком произведения $w_{a_i}(x_0)\psi(s)$, т. е. со знаком $u_{a_i}(x_0)$.

Если же $\alpha(a_i) = 0$, то вблизи точки a_i, ввиду леммы 3, $\chi(s) > 0$ и $\psi(s) = o\,(\chi(s))$. Поэтому при s достаточно близких к граничной точке a_i знак $G(x_0, s)$ совпадает со знаком произведения $y_{a_i}(x_0)\chi(s)$, который, в свою очередь, совпадает со знаком $u_{a_i}(x_0)$. $\rhd$

Следствие. *Каково бы ни было значение коэффициента $\delta > 0$ в условии* (4), *функция $u_{a_1}(x)$ положительна на полуинтервале $(a_1, \xi]$, а функция $u_{a_1}(x)$ положительна на полуинтервале $[\xi, a_2)$.*

$\lhd$ Ввиду полной аналогии рассуждений, докажем справедливость утверждения только для $u_{a_1}(x)$. В силу леммы 2, при всех $x \in (a_1, \xi]$ будем иметь $\sigma G(x, a_1 + 0) > 0$. Из этого неравенства и теоремы 2 следует, что $u_{a_1}(x) \geqslant 0$ для каждого $x \in (a_1, \xi]$. Следовательно, доказываемое утверждение может быть нарушено, если функция $u_{a_1}(x)$ имеет кратный нуль $x_0 \in \gamma_1$ или, если $u_{a_1}(\xi) = 0$. В первом случае, ввиду невырожденности краевой задачи для уравнения (5) на $(x_0, a_2) \subset \Gamma$ с любыми краевыми условиями вида (2), получается, что $u_{a_1}(x) \equiv 0$ на (x_0, a_2). Отсюда и из теоремы единственности сразу следует тождественное равенство $u_{a_1}(x) \equiv 0$ на всем Γ, что, очевидно, неверно. Следовательно, $u_{a_1}(x) > 0$ на γ_1 и $u_{a_1}(\xi) \geqslant 0$. Покажем, что в последнем неравенстве знак равенства не возможен. Для этого нам понадобится результат работы [13], согласно которому, для всякого решения однородного уравнения (5) на интервале $(x_0, a_2) \subset \Gamma$, удовлетворяющего условиям (2_2) и

$$\sigma u(x_0 + 0) > 0, \quad \sigma u'(x_0 + 0) > 0, \quad \sigma u''(x_0 + 0) < 0$$

выполнено неравенство $D^3 u(x_0 + 0) > 0$.

Предположим, что $u_{a_1}(\xi) = 0$. Тогда, с одной стороны, из определения функции $u_{a_1}(x)$ и замечания 3 следуют неравенства $u'_{a_1}(a_1 + 0) > 0$ и $u''_{a_1}(a_1 + 0) < 0$, откуда получаем $D^3 u_{a_1}(a_1 + 0) > 0$. А с другой стороны, из уже доказанного неравенства $u_{a_1}(\xi - 0) > 0$ и того же замечания 3 получаем $u'_{a_1}(\xi + 0) < 0$ и $u''_{a_1}(\xi + 0) > 0$, откуда

$D^3u_{a_1}(\xi+0)<0$. Поскольку функция $u_{a_1}(x)$ является решением однородного уравнения (5), то $D^3u_{a_1}(x)=\text{const}$ на γ_1. Поэтому $D^3u_{a_1}(a_1+0)=D^3u_{a_1}(\xi-0)>0$ и

$$D^3u_{a_1}(\xi-0)-D^3u_{a_1}(\xi+0)-\delta u_{a_1}(\xi)>0,$$

т. е. функция $u_{a_1}(x)$ не может быть решением однородного уравнения (5). Полученное противоречие доказывает, что $u_{a_1}(\xi)>0$, а значит, $u_{a_1}(x)>0$ на $(a_1,\xi]$. $\rhd$

Теорема 3. *Функция Грина краевой задачи* (5), (2) *строго положительна на* $\Gamma\times\Gamma$ *тогда и только тогда, когда хотя бы одна из функций* $u_{a_1}(x)$ *или* $u_{a_2}(x)$ *положительна на всем интервале* Γ.

$\lhd$ *Необходимость.* Поскольку функция Грина положительна, то из теоремы 2 вытекает, что обе функции $u_{a_i}(x)$ неотрицательны на Γ. А из следствия теоремы 2 и леммы 1 следует, что обе эти функции не могут иметь кратных нулей на Γ. Следовательно, $u_{a_i}(x)>0$ на Γ.

Достаточность. Для определенности, будем считать, что $u_{a_2}(x)>0$ на Γ. Предположим, что теорема не верна. Тогда из замечания 1 следует существование точки $(x_0,s_0)\in\gamma_2\times\gamma_1$ такой, что $G(x_0,s_0)<0$. Из непрерывности функции Грина на прямоугольнике $\gamma_2\times\gamma_1$ и неравенств $\sigma G(a_2-0,s)>0$ при $s\in\gamma_1$ (теорема 2), $G(\xi,s)>0$ при $s\in\gamma_1$ и $g_\xi(x)=G(x,\xi)>0$ при $x\in\gamma_2$ (лемма 2) следует существование точки (x^*,s^*) прямоугольника $\gamma_2\times\gamma_1$ такой, что $G(x^*,s^*)=\frac{\partial G}{\partial x}(x^*,s^*)=0$ (например, можно взять $s^*=\inf\{s\in(s_0,\xi)\subset\gamma_1 : g_s(x)>0\,\text{на}\,\gamma_2\}$ и x^* — такую, что $g_{s^*}(x^*)=0$). Но, согласно утверждению леммы 1, срезки $g_s(x)$ функции Грина не имеют кратных нулей на γ_2 при $s\in\gamma_1$. Полученное противоречие окончательно доказывает теорему. $\rhd$

Поскольку необходимым и достаточным условием осцилляционности функции Грина краевой задачи (5), (2) является ее положительность [14], то имеет место утверждение:

Следствие 1. *Функция Грина краевой задачи* (5), (2) *является осцилляционным ядром тогда и только тогда, когда хотя бы одна из функций* $u_{a_1}(x)$ *или* $u_{a_2}(x)$ *положительна на всем интервале* Γ.

Следствие 2. *Функции* $u_{a_1}(x)$ *и* $u_{a_2}(x)$ *либо обе положительны на всем множестве* Γ, *либо имеют ровно по одному простому нулю на* Γ. *Во-втором случае, нуль функции* $u_{a_1}(x)$ *лежит внутри интервала* γ_2, *а нуль функции* $u_{a_2}(x)$ *лежит внутри интервала* γ_1.

$\lhd$ Действительно, если, например, предположить, что функция $u_{a_2}(x)$ положительна на Γ, а функция $u_{a_1}(x)$ нет, то, в силу замечания 2 и следствия теоремы 2, функция $u_{a_1}(x)$ принимает отрицательные значения на интервале γ_2. Тогда, с одной стороны, из теоремы 2 следует, что функция Грина краевой задачи (5), (2) принимает отрицательные значения, а, с другой стороны, из теоремы 3 следует, что она положительна на всем квадрате $\Gamma\times\Gamma$. Полученное противоречие доказывает, что $u_{a_1}(x)>0$ на Γ. $\rhd$

Следствие 3. *Функция Грина краевой задачи* (5), (2) *является осцилляционным ядром тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из неравенств* $\sigma u_{a_1}(a_2-0)>0$ *или* $\sigma u_{a_2}(a_1+0)>0$.

$\lhd$ С учетом следствий 1 и 2, достаточно показать, что из неравенства $\sigma u_{a_1}(a_2-0)>0$ следует $u_{a_1}(x)>0$ на γ_2. Поскольку $u_{a_1}(\xi)>0$ (следствие теоремы 2) и функция $u_{a_1}(x)$ имеет на интервале γ_2 не более одного простого нуля (следствие 2 теоремы 3), то $u_{a_1}(x)>0$ при всех $x\in\gamma_2$, а значит и при всех $x\in\Gamma$. Для функции $u_{a_1}(x)$ рассуждения аналогичные. $\rhd$

Лемма 5. *Пусть функция* $u_{a_1}(x)$ *равна нулю в точке* $x^*\in\gamma_2$. *Тогда при* $s\in(x^*,a_2)\subset\gamma_2$ *срезка* $g_s(x)$ *меняет знак на ребре* γ_1, *а при* $s\in(\xi,x^*]\subset\gamma_2$ *срезка* $g_s(x)$ *положительна на* Γ.

◁ Ввиду следствия 2 теоремы 3, $u_{a_1}(x) < 0$ на (x^*, a_2) и $u_{a_1}(x) > 0$ на (ξ, x^*). Если $x^* < s < a_2$, то, ввиду теоремы 2, $\sigma g_s(a_1+0) < 0$, а ввиду леммы 2, $g_s(\xi) > 0$. Следовательно, функция $g_s(x)$ меняет знак на ребре γ_1.

Если же $\xi < s < x^*$, то, ввиду теоремы 2, $\sigma g_s(a_1+0) > 0$, а ввиду леммы 2, $g_s(\xi) > 0$. Поскольку функция $g_s(x)$ имеет на $\gamma_1 = (a_1, \xi)$ не более одного простого нуля (лемма 1), то $g_s(x) > 0$ на γ_1 и, вследствие леммы 2, получаем $g_s(x) > 0$ на Γ.

Нам остается показать, что срезка $g_{x^*}(x)$ положительна на Γ. Здесь мы воспользуемся непрерывностью функции Грина и тем, что $g_s(x) > 0$ на Γ при всех $s \in (\xi, x^*) \subset \gamma_2$. При $s \to x^* - 0$ будет выполняться соотношение $g_s(x) \to g_{x^*}(x) \geqslant 0$. А поскольку срезка $g_{x^*}(x)$ не имеет кратных нулей на Γ, то $g_{x^*}(x) > 0$ на Γ. ▷

Доказанная лемма позволяет выделить на $\Gamma \times \Gamma$ подмножество на котором знакопеременная функция Грина заведомо будет положительна.

Теорема 4. *Пусть функция $u_{a_1}(x)$ равна нулю в точке $x_2 \in \gamma_2$, а функция $u_{a_2}(x)$ равна нулю в точке $x_1 \in \gamma_1$. Тогда функция Грина краевой задачи (5), (2) строго положительна на множестве, получаемом удалением из квадрата $\Gamma \times \Gamma$ двух открытых прямоугольников $(a_1, x_1) \times (x_2, a_2) \subset \gamma_1 \times \gamma_2$ и $(x_2, a_2) \times (a_1, x_1) \subset \gamma_2 \times \gamma_1$.*

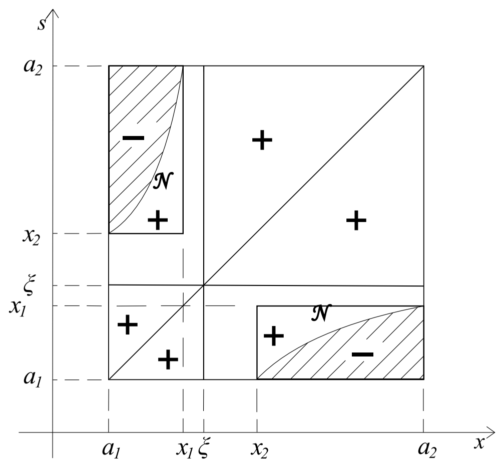

Рис. 1.

Обозначим через $\mathscr{N}$ множество всех точек множества $\Gamma \times \Gamma$ в которых функция Грина $G(x, s)$ краевой задачи (5), (2) равна нулю. Нас интересует случай, когда $\mathscr{N} \neq \varnothing$. Из теоремы 4 следует, что все точки $\mathscr{N}$ лежат в прямоугольниках $(a_1, x_1) \times (x_2, a_2) \subset \gamma_1 \times \gamma_2$ и $(x_2, a_2) \times (a_1, x_1) \subset \gamma_2 \times \gamma_1$, причем всякая прямая, параллельная какой-нибудь из координатных осей, имеет с множеством $\mathscr{N}$ не более одной общей точки (леммы 1 и 2). Более того, из этих же лемм и непрерывности функции Грина следует, что множество $\mathscr{N}$ не имеет изолированных точек и в любой окрестности точки $(x, s) \in \mathscr{N} \cap (\Gamma \times \Gamma)$ функция Грина меняет знак. А поскольку функция $G(x, s)$ симметрична (см. [13]) и строго положительна на диагонали квадрата $\Gamma \times \Gamma$ (лемма 2), то можно заключить, что множество $\mathscr{N}$ представляет собой пару непрерывных кривых, симметричных относительно диагонали $x = s$, с концами на сторонах квадрата $\Gamma \times \Gamma$. При $\delta \to \infty$ кривые, задающие множество $\mathscr{N}$, начинают стремиться к сторонам $x = \xi$ и $s = \xi$ прямоугольников $\gamma_2 \times \gamma_1$ и $\gamma_1 \times \gamma_2$, а в предельном случае $\delta = \infty$ совпадает с этими сторонами.

4. О положительности функции Грина в случае неподвижных концов

Всюду в этом пункте считаем, что в краевых условиях (2) $\alpha(a_1)=\alpha(a_2)=0$. В данном случае $u_{a_i}(x)\equiv y_{a_i}(x)$. Мы обсудим вопрос о том, как ведут себя функции $y_{a_i}(x)$, если мы меняем в краевых условиях (2) значения коэффициентов $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$. Будет показано, что знаковые свойства функций $y_{a_i}(x)$ не зависят от значений $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$. Ввиду полной аналогии, мы покажем, что от значений $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ не зависит знак только одной из этих функций, например, $y_{a_1}(x)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} Lu=0,\quad x\in\Gamma,\\ u(a_1)=0,\quad \vartheta(a_1)u'(a_1)-\beta(a_1)u''(a_1)=1,\\ u(a_2)=0,\quad u'(a_2)u''(a_2)\leqslant 0, \end{gathered} \tag{12}$$

и обозначим через $\mathfrak{Y}$ множество всех ее решений.

Поставим в соответствие каждому единичному вектору $(\vartheta,\beta)\in\mathbb{R}^2_+$ с неотрицательными координатами такую функцию $u(x)\in\mathfrak{Y}$, что векторы $(u'(a_2),u''(a_2))\in\mathbb{R}^2$ и (ϑ,β) ортогональны. Из невырожденности краевой задачи (5), (2) следует, что такая функция существует и единственна. Полученное отображение $(\vartheta,\beta)\mapsto u(x)$ множества $O^+=\big\{(\vartheta,\beta):\vartheta^2+\beta^2=1,\ \beta,\vartheta\geqslant 0\big\}$ в $\mathfrak{Y}$ сюрьективно, но, вообще говоря, не является взаимно однозначным. Однако, ввиду непрерывной зависимости решений краевой задачи (5), (2) от коэффициентов краевых условий, это отображение является непрерывным (мы полагаем, что норма в O^+ индуцирована из $\mathbb{R}^2$, а норма в $\mathfrak{Y}$ — из $C^3[\Gamma]$).

Лемма 6. *Пусть функция $u(x)\in\mathfrak{Y}$ удовлетворяет условиям $u'(a_2)=u''(a_2)=0$. Тогда $\mathfrak{Y}=\{u(x)\}$.*

$\lhd$ Так как $u'(a_2)=u''(a_2)=0$, то для любой функции $v(x)\in\mathfrak{Y}$ векторы $(u'(a_2),u''(a_2))$ и $(v'(a_2),v''(a_2))$ ортогональны некоторому ненулевому вектору $(\vartheta,\beta)\in O^+$, а значит удовлетворяют одним и тем же краевым условиям. Из невырожденности краевой задачи (5), (2) следует $v(x)\equiv u(x)$ на Γ. $\rhd$

Следствие. *Отображение $O^+\mapsto\mathfrak{Y}$ либо постоянно, либо является гомеоморфизмом.*

Лемма 7. *Пусть $u(x)\in\mathfrak{Y}$. Если $\sigma u(a_2-0)>0$, то для любой функции $v(x)\in\mathfrak{Y}$ также будет выполнено неравенство $\sigma v(a_2-0)>0$.*

$\lhd$ Из замечания 2 следует, что любая функция $v(x)\in\mathfrak{Y}$ имеет на ребре γ_2 конечное число нулей. Поэтому величина $\sigma v(a_2-0)$ определена для всех $v(x)\in\mathfrak{Y}$.

Предположим, что доказываемое утверждение не верно, т. е. существует функция $z(x)\in\mathfrak{Y}$ для которой $\sigma z(a_2-0)<0$. Тогда, в силу леммы 6, вектор $(z'(a_2),z''(a_2))$ не нулевой и, ввиду $z(a_2)=0$ и (12), принадлежит замыканию второй четверти плоскости, а вектор $(u'(a_2),u''(a_2))$, в силу условий $u(a_2)=0$, $\sigma u(a_2-0)>0$ и (12), принадлежит замыканию четвертой четверти $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим отображение $O^+\mapsto\mathfrak{Y}$. Поскольку функции $u(x)$ и $z(x)$ различны, то из следствия леммы 6 вытекает, что это отображение взаимно однозначное и для любой функции $v(x)\in\mathfrak{Y}$ вектор $(v'(a_2),v''(a_2))$ не нулевой. Пусть $\big(\vartheta_u,\beta_u\big)$ и $\big(\vartheta_z,\beta_z\big)$ прообразы функций $u(x)$ и $z(x)$ при отображении $O^+\mapsto\mathfrak{Y}$. При непрерывном стремлении точки $(\vartheta,\beta)\in O^+$ от $\big(\vartheta_z,\beta_z\big)\in O^+$ к $\big(\vartheta_u,\beta_u\big)\in O^+$ ненулевой вектор $(v'(a_2),v''(a_2))$, соответствующий образу точки (ϑ,β), непрерывно должен стремится от $(z'(a_2),z''(a_2))$ к $(u'(a_2),u''(a_2))$, что не возможно, так как $v'(a_2)v''(a_2)\leqslant 0$ и $|v'(a_2)|+|v''(a_2)|>0$ для любой функции $v(x)\in\mathfrak{Y}$, а векторы $(z'(a_2),z''(a_2))$ к

$(u'(a_2), u''(a_2))$ принадлежат разным четвертям плоскости. Следовательно, какова бы ни была функция $v \in \mathfrak{Y}$, векторы $(v'(a_2), v''(a_2))$ и $(u'(a_2), u''(a_2))$ должны лежать в одной четверти плоскости, т. е. $\sigma v(a_2 - 0) > 0$ для всех $v \in \mathfrak{Y}$. $\rhd$

Рассмотрим теперь вопрос о зависимости знаковых свойств решений задачи (12) от коэффициентов $\vartheta(a_1)$ и $\beta(a_1)$. Заменим в краевой задаче (12) краевое условие $\vartheta(a_1)u'(a_1) - \beta(a_1)u''(a_1) = 1$ на более общее

$$u''(a_1)u'(a_1) < 0,$$

а все остальные условия оставим без изменения. Обозначим через $\mathfrak{Y}^*$ множество всех решений, получившейся краевой задачи. Из замечания 3 следует включение $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Y}^*$, которое вместе с невырожденностью краевой задачи (5), (2) позволяет сформулировать такое утверждение:

Лемма 8. $\mathfrak{Y}^* = \{\lambda\mathfrak{Y},\ \lambda > 0\}$.

Действительно, если $u(x)$ произвольный элемент множества $\mathfrak{Y}$, то, каково бы ни было число $\lambda > 0$, функция $\lambda u(x)$, в силу замечания 3, принадлежит $\mathfrak{Y}^*$. И наоборот, если $u(x)$ произвольный элемент множества $\mathfrak{Y}^*$, то $\vartheta(a_1)u'(a_1) - \beta(a_1)u''(a_1) = \lambda > 0$. Поэтому $\frac{1}{\lambda}u(x) \in \mathfrak{Y}$.

Теорема 5. *Элементы множества $\mathfrak{Y}^*$ либо все строго положительны на Γ, либо все знакопеременные.*

$\lhd$ С учетом леммы 8, достаточно доказать утверждение теоремы для $\mathfrak{Y}$. Более того, достаточно показать, что из положительности одного элемента из $\mathfrak{Y}$ следует положительность всех элементов множества $\mathfrak{Y}$.

Из определения множества $\mathfrak{Y}$ следует, что любая функция $v(x) \in \mathfrak{Y}$ является решением некоторой краевой задачи для однородного уравнения (5) с краевыми условиями (10_2), (2_2). Причем коэффициенты $\vartheta(a_2)$, $\beta(a_2)$ условия в граничной точке a_2 определяются координатами вектора $\big(\vartheta, \beta\big) \in O^+$, которому отвечает функция $v(x)$ (если таких векторов более одного, то координатами любого из них). Тогда, в силу следствия теоремы 3, любая функция $v(x) \in \mathfrak{Y}$ строго положительна на $(a_1, \xi]$ и имеет на интервале $\gamma_2 = (\xi, a_2)$ не более одного простого нуля.

Пусть $u(x)$ — произвольный фиксированный элемент множества $\mathfrak{Y}$ и $u(x) > 0$ на Γ. Тогда из леммы 7 следует, что для любой функции $v \in \mathfrak{Y}$ будет выполнено неравенство $\sigma v(a_2 - 0) > 0$. А поскольку $v(x) > 0$ на $x \in (a_1, \xi]$ и функция $v(x)$ имеет на интервале γ_2 не более одного простого нуля, то $v(x) > 0$ на Γ. $\rhd$

Из теорем 3 и 5 следует, что в случае неподвижных концов, знак функции Грина задачи (5), (2), а значит, и ее осцилляционность [14], не зависят от коэффициентов $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$. Другими словами, знак функции влияния балки с упругой опорой зависит от коэффициента жесткости опоры, но не не зависит от способа фиксации ее концов.

Стоит отметить, что если хотя бы один из концов балки является подвижным (соответствующий коэффициент $\alpha(\cdot)$ больше нуля), то коэффициенты $\vartheta(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ уже будут влиять на знаковые свойства функции Грина. Этот факт подтверждает следующий пример.

Пример. Пусть Γ — это интервал $(0, 2) \subset \mathbb{R}$ с фиксированной точкой $\xi = 1$. На Γ рассмотрим дифференциальное уравнение (5), определяемое дифференциальным выражением $\mathscr{L}u \equiv u^{IV}$, $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$, и соотношениями (3), (4), в которых $\delta = 20$.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{gathered} Lu = F(x), \quad x \in \Gamma, \\ u(0) + 2D^3u(0) = 0, \quad u^{(i)}(0) = 0, \quad u(2) = u'(2) = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

в которой $i = 1$ или $i = 2$. Согласно теореме 3 и ее следствиям, функция Грина задачи (13) является осцилляционной тогда и только тогда, когда решение $u_0(x)$ краевой задачи

$$\begin{gathered} Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(0) + 2D^3u(0) = 1, \quad u^{(i)}(0) = 0, \quad u(2) = u'(2) = 0 \end{gathered}$$

удовлетворяет неравенству $\sigma u_0(2-0) > 0$. Вычисления показывают, что

$$u_0(x) = C_1\frac{(2-x)^3}{6} + C_2\frac{(2-x)^2}{2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2;$$

где $C_1 \approx 0.13$, $C_2 \approx 0.1$ при $i = 1$ и $C_1 \approx 0.41$, $C_2 \approx -0.06$ при $i = 2$.

Поскольку $u_0''(2) = C_2$, то при $i = 1$ выполняется неравенство $\sigma u_0(2-0) > 0$, а при $i = 2$ — неравенство $\sigma u_0(2-0) < 0$. Следовательно, при $i = 1$ функция Грина краевой задачи (13) является положительной (и осцилляционной), а при $i = 2$ — нет.

Литература

1. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2007.—272 с.
2. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах.—М.: Физматлит, 2009.—192 с.
3. *Покорный Ю. В.* О знакорегулярных функциях Грина некоторых неклассических задач // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 4.—С. 205–206.
4. *Боровских А. В., Покорный Ю. В.* Системы Чебышева — Хаара в теории разрывных ядер Келлога // Успехи мат. наук.—1994.—Т. 49, № 3.—С. 3–42.
5. *Боровских А. В., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* Об осцилляционных спектральных свойствах разрывных краевых задач // Докл. АН.—1994.—Т. 335, № 4.—С. 409–412.
6. *Боровских А. В., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* О ядрах Келлога в разрывных задачах // Оптимальное управление и диф. уравнения. Тр. МИАН им. В. А. Стеклова.—М.: Наука.—1995.—Т. 211.—С. 102–120.
7. *Покорный Ю. В., Лазарев К. П.* Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач // Диф. уравнения.—1987.—Т. 23, № 4.—С. 658–670.
8. *Боровских А. В.* Условия знакорегулярности разрывных краевых задач // Мат. заметки.—2003.—Т. 74, № 5.—С. 643–655.
9. *Левин А. Ю., Степанов Г. Д.* Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака, II // Сиб. мат. журн.—1976.—Т. 17, № 4.—С. 813–830.
10. *Тептин А. Л.* К вопросу об осцилляционности спектра многоточечной краевой задачи // Изв. вузов. Математика.—1999.—№ 4 (443).—С. 44–53.
11. *Покорный Ю. В.* О нулях функции Грина задачи Валле Пуссена // Мат. сб.—2008.—Т. 199, № 6.—С. 105–136.
12. *Дерр В. Я.* К обобщенной задаче Валле Пуссена // Диф. уравнения.—1987.—Т. 23, № 11.—С. 1861–1872.
13. *Кулаев Р. Ч.* Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 2.—С. 161–173.
14. *Кулаев Р. Ч.* Об осцилляционности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Диф. уравнения.—2015.—(Принята в печать).
15. *Левин А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // Успехи мат. наук.—1969.—Т. 24, № 2.—С. 43–96.
16. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений дифференциальных уравнений // Вестн. Удмурдского университета.—2009.—Вып. 1.—С. 46–89.

17. *Степанов Г. Д.* Эффективные критерии знакорегулярности и осцилляционности функции Грина двухточечных задач // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 11.—С. 121–159.
18. *Завгородний М. Г., Майорова С. П.* Об одном уравнении математической физики четвертого порядка на графе // Исследования по диф. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 88–102.
19. *Кулаев Р. Ч.* Метод редукции для уравнения четвертого порядка на графе // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 3.—С. 296–308.

Статья поступила 14 апреля 2014 г.

Кулаев Руслан Черменович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник отдела мат. моделирования
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `kulaevrch@mail.ru`

OSCILLATORY PROPERTIES OF THE GREEN FUNCTION OF DISCONTINUOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER

Kulaev R. Ch.

We study the sign and oscillatory properties of the Green function of discontinuous boundary value problem for a fourth-order equation describing small deformations of two rigidly connected rods with elastic support at the connection point. We obtain criterion for the oscillatory property of the Green function.

Key words: differential equation on the graph, discontinuous boundary value problem, Green's function, oscillatory properties.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 60–64

УДК **517.98**

A CHARACTERIZATION OF ORDER BOUNDED DISJOINTNESS PRESERVING BILINEAR OPERATORS

A. G. Kusraev, S. S. Kutateladze

The paper is aimed to characterize order bounded disjointness preserving bilinear operators in terms of their null-spaces. To this end the Boolean valued analysis approach is employed.

Mathematics Subject Classification (2000): 46A40, 47A65.

Key words: Boolean valued representation, vector lattice, disjointness preserving operator.

It was observed and employed in [1, 2, 3] that a linear operator T from a vector lattice X to a Dedekind complete vector lattice Y is, in a sense, determined up to an orthomorphism from the family of the kernels of the *strata* πT of T with π ranging over all band projections on Y. Similar reasoning was involved in [4] to characterize order bounded disjointness preserving bilinear operators. Unfortunately, Theorem 3.4 in [4] is erroneous and this note aims to give correct statement and proof of this result. Unexplained terms can be found on the theory of vector lattices and order bounded operators, in [5, 6], on Boolean valued analysis machinery, in [7, 8].

In what follows X, Y, and Z are Archimedean vector lattices, Z^{u} is a universal completion of Z, and $B : X \times Y \to Z$ is a bilinear operator. We denote the Boolean algebra of band projections in X by $\mathbb{P}(X)$. Recall that a linear operator $T : X \to Y$ is said to be *disjointness preserving* if $x \perp y$ implies $Tx \perp Ty$ for all $x, y \in X$. A bilinear operator $B : X \times Y \to Z$ is called *disjointness preserving* (a *lattice bimorphism*) if the linear operators $B(x, \cdot) : y \mapsto B(x, y)$ $(y \in Y)$ and $B(\cdot, y) : x \mapsto B(x, y)$ $(x \in X)$ are disjointness preserving for all $x \in X$ and $y \in Y$ (lattice homomorphisms for all $x \in X_+$ and $y \in Y_+$). Denote $X_\pi := \bigcap\{\ker(\pi B(\cdot, y)) :\ y \in Y\}$ and $Y_\pi := \bigcap\{\ker(\pi B(x, \cdot)) :\ x \in X\}$. Clearly, X_π and Y_π are vector subspaces of X and Y, respectively. Now we state the main result of the note.

Theorem. *Assume that X, Y, and Z are vector lattices with Z having the projection property. For an order bounded bilinear operator $B : X \times Y \to Z$ the following assertions are equivalent:*

(1) *B is disjointness preserving.*

(2) *There are a band projection $\varrho \in \mathbb{P}(Z)$ and lattice homomorphisms $S : X \to Z^{\mathrm{u}}$ and $T : Y \to Z^{\mathrm{u}}$ such that $B(x, y) = \varrho S(x)T(y) - \varrho^{\perp} S(x)T(y)$ for all $(x, y) \in X \times Y$.*

(3) *For every $\pi \in \mathbb{P}(Z)$ the subspaces X_π and Y_π are order ideals respectively in X and Y, and the kernel of every stratum πB of B with $\pi \in \mathbb{P}(Z)$ is representable as*

$$\ker(\pi B) = \bigcup\big\{X_\sigma \times Y_\tau :\ \sigma, \tau \in \mathbb{P}(Z);\, \sigma \vee \tau = \pi\big\}.$$

The proof presented below follows along general lines of [1–4]: Using the canonical embedding and ascent to the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, we reduce the matter to characterizing disjointness preserving bilinear functional on the product of two vector lattices over dense subfield of the reals $\mathbb{R}$. The resulting scalar problem is solved by the following simple fact.

Lemma 1. *Let X and Y be vector lattices. For an order bounded bilinear functional $\beta : X \times Y \to \mathbb{R}$ the following assertions are equivalent:*

(i) *β is disjointness preserving.*

(ii) $\ker(\beta) = (X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0)$ *for some order ideals $X_0 \subset X$ and $Y_0 \subset Y$.*

(iii) *There exist lattice homomorphisms $g : X \to \mathbb{R}$ and $h : Y \to \mathbb{R}$ such that either $\beta(x, y) = g(x)h(y)$ or $\beta(x, y) = -g(x)h(y)$ for all $x \in X$ and $y \in Y$.*

$\lhd$ Assume that $\ker(\beta) = (X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0)$ and take $y \in Y$. If $y \in Y_0$ then $\beta(\cdot, y) \equiv 0$, otherwise $\ker(\beta(\cdot, y)) = X_0$ and $\beta(\cdot, y)$ is disjointness preserving, since an order bounded linear functional is disjointness preserving if and only if its null-space is an order ideal. Similarly, $\beta(x, \cdot)$ is disjointness preserving for all $x \in X$ and thus $(ii) \Longrightarrow (i)$. The implication $(i) \Longrightarrow (iii)$ was established in [9, Theorem 3.2] and $(iii) \Longrightarrow (i)$ is trivial with $X_0 = \ker(g)$ and $Y_0 = \ker(h)$. $\rhd$

Let $\mathbb{B}$ be a complete Boolean algebra and $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ the corresponding Boolean valued model with Boolean truth values $[\![\varphi]\!]$ for set-theoretic formulas φ. There exists an element $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ which plays the role of a field of reals within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. The descending functor sends every internal algebraic structure $\mathfrak{A}$ into its descent $\mathfrak{A}{\downarrow}$ which is an algebraic structure in conventional sense. Gordon's theorem (see [5, 8.1.2] and [10, Theoren 2.4.2]) tells us that the algebraic structure $\mathscr{R}{\downarrow}$ (with the descended operations and order relation) is an universally complete vector lattice. Moreover, there is a Boolean isomorphism χ of $\mathbb{B}$ onto $\mathbb{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ such that $b \leqslant [\![\, x = y \,]\!]$ if and only if $\chi(b)x = \chi(b)y$. We identify $\mathbb{B}$ with $\mathbb{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ and take χ to be $I_{\mathbb{B}}$.

Let $[X \times Y, \mathscr{R}{\downarrow}] \in \mathbb{V}$ and $[\![X^{\wedge} \times Y^{\wedge}, \mathscr{R}]\!] \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ stand for the sets respectively of all maps from $X \times Y$ to $\mathscr{R}{\downarrow}$ and from $X^{\wedge} \times X^{\wedge}$ to $\mathscr{R}$ (within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$). The correspondences $f \mapsto f{\Uparrow}$, the modified ascent, is a bijection between $[X \times Y, \mathscr{R}{\downarrow}]$ and $[\![X^{\wedge} \times Y^{\wedge}, \mathscr{R}]\!]$. Given $f \in [X, \mathscr{R}{\downarrow}]$, the internal map $f{\Uparrow} \in [\![X^{\wedge}, \mathscr{R}]\!]$ is uniquely determined by the relation $[\![f{\Uparrow}(x^{\wedge}) = f(x)]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in X)$. Observe also that $\pi \leqslant [\![f{\Uparrow}(x^{\wedge}) = \pi f(x)]\!]$ $(x \in X,\ \pi \in \mathbb{P}(\mathscr{R}{\downarrow}))$. This fact specifies for bilinear operators as follows.

Lemma 2. *Let $B : X \times Y \to Y$ be a bilinear operator and $\beta := B{\Uparrow}$ its modified ascent. Then $\beta : X^{\wedge} \times Y^{\wedge} \to \mathscr{R}$ is a $\mathbb{R}^{\wedge}$-bilinear functional within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Moreover, B is order bounded and disjointness preserving if and only $[\![\,\beta$ is order bounded and disjointness preserving$\,]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ The proof goes along similar lines to the proof of Theorem 3.3.3 in [10]. $\rhd$

Lemma 3. *Let B and β be as in Lemma 2. Then* $[\![\ker(B)^{\wedge} = \ker(\beta)]\!] = \mathbb{1}$.

$\lhd$ Using the above mentioned determining property of modified ascent and interpreting the formal definition $z \in \ker(\beta) \leftrightarrow (\exists\, x \in X^{\wedge})(\exists\, y \in Y^{\wedge})(z = (x, y) \wedge \beta(x, y) = 0)$, the proof is reduced to a straightforward calculation:

$$
\begin{aligned}
[\![z \in \ker(\beta)]\!] &= \bigvee_{x \in X,\, y \in Y} [\![z = (x^{\wedge}, y^{\wedge}) \wedge \beta(x^{\wedge}, y^{\wedge}) = 0]\!] \\
&= \bigvee_{(x,y) \in X \times Y} [\![z = (x, y)^{\wedge} \wedge (x, y)^{\wedge} \in \ker(B)^{\wedge}]\!]
\end{aligned}
$$

$$\leqslant [\![z \in \ker(B)^\wedge]\!] = \bigvee_{(x,y)\in X\times Y} [\![z = (x,y)^\wedge \wedge (x.y) \in \ker(B)]\!]$$
$$= \bigvee_{x\in X,\, y\in Y} [\![(z = (x^\wedge, y^\wedge) \wedge \beta(x^\wedge, y^\wedge) = 0]\!]$$
$$\leqslant [\![z \in \ker(\beta)]\!]. \ \triangleright$$

Lemma 4. *Define $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ by $\mathscr{X} := \bigcap\{\ker(\beta(\cdot, Y)) : y \in Y^\wedge\}$ and $\mathscr{Y} := \bigcap\{\ker(\beta(x,\cdot)) : x \in X^\wedge\}$. Given arbitrary $\pi \in \mathbb{P}(Z)$, $x \in X$, and $y \in Y$, the equivalences hold:*

$$\pi \leqslant [\![x^\wedge \in \mathscr{X}]\!] \Longleftrightarrow x \in X_\pi, \quad \pi \leqslant [\![y^\wedge \in \mathscr{Y}]\!] \Longleftrightarrow y \in Y_\pi.$$

$\triangleleft$ For $\pi \in \mathbb{P}(Z)$ and $x \in X$ we need only to calculate Boolean truth values taking into account that $[\![B(x,y) = \beta(x^\wedge, v^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$ for all $x \in X$ and $y \in Y$:

$$[\![x^\wedge \in \mathscr{X}]\!] = [\![(\forall\, v \in Y^\wedge)\beta(x^\wedge, v) = 0]\!] = \bigwedge_{v\in Y} [\![\beta(x^\wedge, v^\wedge) = 0]\!] = \bigwedge_{v\in Y} [\![B(x,v) = 0]\!].$$

It follows that $\pi \leqslant [\![x^\wedge \in \mathscr{X}]\!]$ if and only if $\pi \leqslant [\![B(x,v) = 0]\!]$ for all $v \in Y$. By Gorgon's theorem the latter means that $\pi B(x,v) = 0$ for all $v \in Y$, that is $x \in X_\pi$. $\triangleright$

Lemma 5. *Let B and β be as in Lemma 2. For arbitrary $\pi \in \mathbb{P}(Z)$, $x \in X$, and $y \in Y$, we have $\pi \leqslant [\![(x^\wedge, y^\wedge) \in (\mathscr{X} \times Y) \cup (X \times \mathscr{Y})]\!]$ if and only if there exist $\sigma, \tau \in \mathbb{P}(Z)$ such that $\sigma \vee \tau = \pi$, $x \in X_\sigma$, and $y \in Y_\tau$.*

$\triangleleft$ Denote $\rho := [\![(x^\wedge, y^\wedge) \in (\mathscr{X} \times Y) \cup (X \times \mathscr{Y})]\!]$ and observe that

$$\rho = [\![(x^\wedge \in \mathscr{X}) \vee y^\wedge \in \mathscr{Y}]\!] = [\![x^\wedge \in \mathscr{X}]\!] \vee [\![y^\wedge \in \mathscr{Y}]\!].$$

Clearly, $\pi \leqslant \rho$ if and only if $\sigma \vee \tau = \pi$ for some $\sigma \leqslant [\![x^\wedge \in \mathscr{X}]\!]$ and $\tau \leqslant [\![y^\wedge \in \mathscr{Y}]\!]$, so that the required property follows from Lemma 4. $\triangleright$

Proof of the main result. The implication (1) $\Longrightarrow$ (2) was proved in [9, Corollary 3.3], while (2) $\Longrightarrow$ (3) is straightforward. Indeed, observe first that if (2) is fulfilled then $|B(x,y)| = |B|(|x|,|y|) = |S|(|x|)|T|(|y|)$, so that we can assume S and T to be lattice homomorphisms, as in this event $\ker(B) = \ker(|B|)$. Take $\pi \in \mathbb{P}(Z)$ and denote $\sigma := \pi - \pi[Sx]$ and $\tau := \pi - \pi[Ty]$, where $[y]$ is a band projection onto $\{y\}^{\perp\perp}$. Observe next that $\pi B(x,y) = 0$ if and only if $\pi[Sx]$ and $\pi[Ty]$ are disjoint or, what is the same, if $\sigma \vee \tau = \pi$. Moreover, the map $\rho_y : x \mapsto \sigma S(x)T(y)$ is disjointness preserving for all $y \in Y$ and hence $X_\sigma = \bigcap_{y\in Y} \ker(\rho_y)$ is an order ideal in X. Similarly, Y_τ is an order ideal in Y. Thus, $(x,y) \in \ker(\pi B)$ if and only if $x \in X_\sigma$ and $y \in Y_\tau$ for some $\sigma, \tau \in \mathbb{P}(Z)$ with $\sigma \vee \tau = \pi$.

Prove the remaining implication (3) $\Longrightarrow$ (1). Suppose that for every $\pi \in \mathbb{P}(Y)$ the representation in (3) holds. Take $x, u \in X$ and put $\pi := [\![x^\wedge \in \mathscr{X}]\!]$, $\rho := [\![|u|^\wedge \leqslant |x|^\wedge]\!]$. By Lemma 4 we have $x \in X_\pi$. Note also that either $\rho =$ or $\rho = \mathbb{1}$. If $\rho = \mathbb{1}$ then $|u| \leqslant |x|$ and by hypotheses $u \in X_\pi$. Again by Lemma 4 we get $\rho \leqslant [\![u^\wedge \in \mathscr{X}]\!]$. This estimate is obvious whenever $\rho =$, so that $[\![x^\wedge \in \mathscr{X}]\!] \wedge [\![|u|^\wedge \leqslant |x|^\wedge]\!] \Rightarrow [\![u^\wedge \in \mathscr{X}]\!] = \mathbb{1}$ for all $x, u \in X$. Now, a simple calculation shows that $\mathscr{X}$ is an order ideal in $X^\wedge$:

$$[\![(\forall\, x, u \in X^\wedge)(|u| \leqslant |x| \,\wedge\, x \in \mathscr{X} \to u \in \mathscr{X})]\!]$$
$$= \bigwedge_{u,x\in X} \big([\![x \in \mathscr{X}]\!] \wedge [\![|u| \leqslant |x|]\!] \Rightarrow [\![u \in \mathscr{X}]\!]\big) = \mathbb{1}.$$

Similarly, $\mathscr{Y}$ is an order ideal in $Y^\wedge$.

It follows from the hypothesis (3) and Lemma 5 that $(x,y) \in \ker(\pi B)$ if and only if $\pi \leqslant [\![(x^\wedge, y^\wedge) \in (\mathscr{X} \times Y) \cup (X \times \mathscr{Y})]\!]$. Taking into account Lemma 2 and the observation made before it we conclude that $\pi \leqslant [\![(x^\wedge, y^\wedge) \in \ker(\beta)]\!])$ if and only if $\pi \leqslant [\![(x^\wedge, y^\wedge) \in (\mathscr{X} \times Y) \cup (X \times \mathscr{Y})]\!]$ and hence $[\![\ker(\beta) = (\mathscr{X} \times Y) \cup (X \times \mathscr{Y})]\!] = \mathbb{1}$. It remains to apply within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ the equivalence (i)$\Longleftrightarrow$(iii) in Lemma 1. It follows that B is disjointness preserving according to Lemma 2. $\rhd$

Corollary. *Assume that Y has the projection property. An order bounded linear operator $T : X \to Y$ is disjointness preserving if and only if $\ker(bT)$ is an order ideal in X for every projection $b \in \mathbb{P}(Y)$.*

$\lhd$ Apply the above theorem to the bilinear operator $B : X \times \mathbb{R} \to Y$ defined as $B(x, \lambda) = \lambda T(x)$ for all $x \in X$ and $\lambda \in \mathbb{R}$. $\rhd$

References

1. *Kutateladze S. S.* On differences of lattice homomorphisms // Sib. Math. J.—2005.—Vol. 46, № 2.—P. 393–396.
2. *Kutateladze S. S.* On Grothendieck subspaces // Sib. Math. J.—2005.—Vol. 46, No 3.—P. 620–624.
3. *Kutateladze S. S.* The Farkas lemma revisited // Sib. Math. J.—2010.—Vol. 51, No 1.—P. 78–87.
4. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* On order bounded disjointness preserving operators // Sib. Math. J.—2014.—Vol. 55, № 5.—P. 915–928.
5. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer, 2000.
6. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—N. Y.: Academic Press, 1985.—xvi+367 p.
7. *Bell J. L.* Boolean Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—N. Y.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 p.
8. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis.—Novosibirsk: Nauka, 1999; Dordrecht: Kluwer, 1999.
9. *Kusraev A. G., Tabuev S. N.* On multiplicative representation of disjointness preserving bilinear operators // Sib. Math. J.—2008.—Vol. 49, № 2.—P. 357–366.
10. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.—(Trends in Science: The South of Russia. A Mathematical Monograph. Issue 6).

Received February 16, 2015.

Kusraev Anatoly Georgievich
Southern Mathematical Institute
Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Director*
22 Markus street, Vladikavkaz, 362027, Russia
E-mail: `kusraev@smath.ru`

Kutateladze Semen Samsonovich
Sobolev Institute of Mathematics, *senior staff scientist*
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail: `sskut@member.ams.org`

О ХАРАТЕРИЗАЦИИ ПОРЯДКОВО ОГРАНИЧЕННЫХ БИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СОХРАНЯЮЩИХ ДИЗЪЮНКТНОСТЬ

Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.

Цель заметки — дать характеризацию сохраняющих дизъюнктность порядково ограниченных билинейных операторов в векторных решетках в терминах ядер. В доказательстве основного результата используется булевозначный подход.

Ключевые слова: булевозначное представление, векторная решетка, сохраняющий дизъюнктность оператор.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 64–77

УДК **517.5**

О КОНЕЧНОЙ ЛИПШИЦЕВОСТИ КЛАССОВ ОРЛИЧА — СОБОЛЕВА

Р. Р. Салимов

Найдено достаточное условие конечной липшицевости гомеоморфизмов класса Орлича — Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ при наличии условия типа Кальдерона на φ.

Ключевые слова: p-модули семейств кривых и поверхностей, p-ёмкость конденсатора, отображения с конечным искажением, классы Соболева и Орлича — Соболева, локальная и конечная липшицевость.

1. Введение

Напомним некоторые определения. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \geqslant 1 \tag{1.1}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \geqslant 1$. Тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x). \tag{1.2}$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $n-1 < p < n$ и

$$M_p(f\Gamma) \leqslant K\, M_p(\Gamma) \tag{1.3}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D. При предположении, что f в (1.3) является гомеоморфизмом, Герингом было установлено, что отображение f является *локально липшицевым*, другими словами, для всех $x_0 \in D$ справедлива оценка

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant K^{\frac{1}{n-p}}, \tag{1.4}$$

см., например, теорему 2 в [1].

Напомним, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot J_f(x) \tag{1.5}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x) \geqslant 1$, где $f'(x)$ якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ — ее операторная норма: $\|f'(x)\| = \sup_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$ и $J_f(x) = \det f'(x)$ — якобиан отображения f.

Пусть $p \in (1, \infty)$. В дальнейшем, полагаем

$$K_p(x, f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^p}{J(x,f)}, & \text{если } J(x, f) \neq 0; \\ 1, & \text{если } f'(x) = 0; \\ \infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{1.6}$$

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [2], см. также [3].

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом L^φ пространство всех функций $f : D \to \mathbb{R}$, таких, что

$$\int\limits_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dm(x) < \infty \tag{1.7}$$

при некотором $\lambda > 0$, см., например, [4]. Здесь m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пространство L^φ называется *пространством Орлича.*

Классом Орлича — Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщенными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D. Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D, мы пишем $f \in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc} \subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Как обычно, мы пишем $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geqslant 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т. е., если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D, см. [5, раздел 1.1.3.].

Далее, если f — локально интегрируемая вектор–функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, m$, и

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right) dm(x) < \infty, \tag{1.8}$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы снова пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0) = 0$.

Отметим, что классы Орлича — Соболева сейчас, как и ранее, изучаются в самых различных аспектах многими авторами, см., например, [6–22].

2. Свойства классов Орлича — Соболева

Следующие свойства классов Орлича — Соболева можно найти в работе [14].

Теорема 2.1. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, где $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — неубывающая функция,* *такая что для некоторого* $t_* \in (0,\infty)$

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{2.1}$$

Тогда отображение f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω.

Замечание 2.1. В частности, заключение теоремы 2.1 имеет место, если $f \in W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ при некотором $\alpha > n-1$. Последнее утверждение — результат Вяйсяля, см. [23, лемму 3]. Теорема 2.1 является также распространением в пространство $\mathbb{R}$ хорошо известной теоремы Меньшова — Геринга — Лехто на плоскости, см., например, [24–26].

Теорема 2.2. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (2.1). Тогда отображение f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω.*

Теорема 2.3. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (2.1). Тогда любое непрерывное отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ обладает (N)-свойством, более того, локально абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$-мерной хаусдорфовой меры на почти всех гиперплоскостях $\mathscr{P}$, параллельных произвольной фиксированной гиперплоскости $\mathscr{P}_0$. Кроме того, на почти всех таких $\mathscr{P}$, $H^{n-1}(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на $E \subset \mathscr{P}$.*

Заметим, что, если условие вида (2.1) имеет место для некоторой неубывающей функции φ, то функция $\varphi_c(t) = \varphi(ct)$ при $c > 0$ также удовлетворяет соотношению (2.1). Кроме того, хаусдорфовы меры являются квазиинвариантными при квазиизометриях.

Следствие 2.1. *При условии (2.1) любое непрерывное отображение $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ обладает (N)-свойством относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, более того, локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах S с центром в заданной предписанной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, на почти всех таких сферах S выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $|\nabla f| = 0$ на множестве $E \subset S$.*

3. Модули семейств поверхностей

Следуя [27, раздел 9.2], далее *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ называется произвольное непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, где ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ и $k = 1, \ldots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S,y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\bigl\{x \in \omega : \ S(x) = y\bigr\}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Другими словами, символ $N(S,y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k, см. [27, раздел 9.2].

Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ ее *интеграл над поверхностью* S определяется равенством

$$\int\limits_S \rho \, d\mathscr{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, N(S,y)\, dH^k y.$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k \, d\mathscr{A} \geqslant 1 \tag{3.1}$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Пусть $p \in (1, \infty)$ — заданное фиксированное число. Тогда *p-модулем* семейства Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) \, dm(x). \tag{3.2}$$

Говорят, что свойство P имеет место для *p-почти всех* (p-п.в.) k-мерных поверхностей S семейства Γ, если подсемейство всех поверхностей семейства Γ, для которых свойство P нарушается, имеет p-модуль нуль.

4. О емкости конденсатора

Следуя работе [28], пару $\mathscr{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. Конденсатор $\mathscr{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $G = A \setminus C$ — кольцо, т. е., если G — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus G$ состоит в точности из двух компонент. Говорят также, что конденсатор $\mathscr{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathscr{E} = (A, C)$ — конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в fD. Далее $f\mathscr{E} = (fA, fC)$.

Функция $u : A \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на прямой*, имеющей непустое пересечение с A, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в A. Функция $u : A \to \mathbb{R}$ принадлежит классу ACL (*абсолютно непрерывна на почти всех прямых*), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(\mathscr{E}) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL. Также обозначим

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F; G)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в G, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

При $p \geqslant 1$ величину

$$\operatorname{cap_p} \mathscr{E} = \operatorname{cap_p}(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathscr{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dm(x) \tag{4.2}$$

называют *p-емкостью* конденсатора $\mathscr{E}$. Емкости в контексте теории отображений хорошо представлены в монографии [29].

В дальнейшем при $p > 1$ мы будем использовать равенство

$$\operatorname{cap_p} \mathscr{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \tag{4.3}$$

см. [30–32].

Известно, что при $1 \leqslant p < n$

$$\operatorname{cap_p} \mathscr{E} \geqslant n\nu_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}}\,, \tag{4.4}$$

где ν_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, см., например, неравенство (8.9) в [33].

Если множество C связно, то при $n-1 < p \leqslant n$ имеет место оценка

$$(\operatorname{cap_p} \mathscr{E})^{n-1} \geqslant \gamma \frac{d(C)^p}{m(A)^{1-n+p}}, \tag{4.5}$$

где $d(C)$ — диаметр множества C, γ — положительная константа, зависящая только от размерности n и p, см. предложение 6 в [34].

5. Нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля

Говорят, см. [27, раздел 9.2], что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ является *обобщенно p-допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^{n-1}(x)\, d\mathscr{A} \geqslant 1 \tag{5.1}$$

для p-почти всех $S \in \Gamma$.

В работе [35, раздел 13], Ф. Геринг определил K-квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевой области не более чем в K раз. Следующее понятие мотивировано кольцевым определением Геринга.

Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q : D \to (0,\infty)$ измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке x_0*, если

$$M_p\left(f\Sigma_\varepsilon\right) \geqslant \inf_{\rho \in \operatorname{ext_p} \operatorname{adm} \Sigma_\varepsilon} \int\limits_R \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{5.2}$$

для каждого кольца

$$R = R(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}\,, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in (0, d_0),$$

где $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, а Σ_ε обозначает семейство всех сфер

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}\,, \quad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0). \tag{5.3}$$

Развиваемая в работе теория нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля применима, в частности, к отображениям квазиконформным в среднем, см. [34, 36], и к так называемым (p,q)-квазиконформным отображениям, см. [37], которые использовались при изучении проблемы Ю. Г. Решетняка о суперпозиции функций пространств Соболева, см. например, [37–40]. В работах [41–43] приводятся приложения нижних Q-гомеоморфизмов к исследованию локального и граничного поведения гомеоморфных решений с обобщенными производными и к задаче Дирихле для уравнений Бельтрами с вырождением.

Исторически нижним Q-гомеоморфизмам относительно p-модуля предшествовали Q-гомеоморфизмы, которые исследовались в работах [44–47]. Кроме того, Q-отображения допускающие точки ветвления, изучались в работах [48–53].

Ниже приведен критерий нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля при $p > n-1$. Впервые критерий был доказан при $p = n$ в работе [54, теорема 2.1], см. также монографию [27, теорема 9.2].

Лемма 5.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, и пусть $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является нижним Q-гомеоморфизмом в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n-1$ тогда и только тогда, когда*

$$M_p(f\Sigma_\varepsilon) \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \quad (\forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in (0,d_0)), \tag{5.4}$$

где $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, Σ_ε — семейство всех сфер $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, и

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathscr{A} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}. \tag{5.5}$$

Инфимум в (5.2) *достигается только для функции*

$$\rho_0(x) = \left(\frac{Q(x)}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(|x-x_0|)} \right)^{\frac{1}{p-n+1}}. \tag{5.6}$$

Прежде чем доказывать основную лемму о нижних Q-гомеоморфизмах относительно p-модуля, приведем вспомогательную лемму 9.2 из монографии [27].

Лемма 5.2. *Пусть (X,μ) — измеримое пространство с конечной мерой μ, $q \in (1,\infty)$, и пусть $\varphi : X \to (0,\infty)$ — измеримая функция. Положим*

$$I(\varphi, q) = \inf_{\alpha} \int\limits_X \varphi\, \alpha^q\, d\mu, \tag{5.7}$$

где инфимум берется по всем измеримым функциям $\alpha : X \to [0,\infty]$ таким, что

$$\int\limits_X \alpha\, d\mu = 1. \tag{5.8}$$

Тогда

$$I(\varphi, q) = \left[\int\limits_X \varphi^{-\lambda}\, d\mu \right]^{-\frac{1}{\lambda}}, \tag{5.9}$$

где

$$\lambda = \frac{q'}{q}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \tag{5.10}$$

т. е. $\lambda = 1/(q-1) \in (0,\infty)$. Кроме того, инфимум в (5.7) *достигается только для функции*

$$\alpha_0 = C \cdot \varphi^{-\lambda}, \tag{5.11}$$

где

$$C=\left(\int\limits_X \varphi^{-\lambda}\,d\mu\right)^{-1}. \tag{5.12}$$

◁ Доказательство леммы 5.1. Заметим, что для каждой $\rho\in \mathrm{ext_p}\,\mathrm{adm}\,\Sigma_\varepsilon$ функция

$$A_\rho(r):=\int\limits_{S(x_0,r)}\rho^{n-1}(x)\,d\mathscr{A}\neq 0 \quad \text{п. в.}$$

является измеримой по параметру r, например, по теореме Фубини. Таким образом, мы можем требовать выполнения равенства $A_\rho(r)\equiv 1$ п. в. вместо условия допустимости (3.1) при $k=n-1$, и

$$\inf\limits_{\rho\in\mathrm{ext_p}\,\mathrm{adm}\Sigma_\varepsilon}\int\limits_{R_\varepsilon}\frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\,dm(x)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\inf\limits_{\alpha\in I(r)}\int\limits_{S(x_0,r)}\frac{\alpha^q(x)}{Q(x)}\,d\mathscr{A}\right)dr,$$

где $q=p/(n-1)>1$, а через $I(r)$ обозначено множество всех измеримых функций $\alpha(x)$ на поверхности $S(x_0,r)$ таких, что

$$\int\limits_{S(x_0,r)}\alpha(x)\,d\mathscr{A}=1.$$

Итак, лемма 5.1 следует из леммы 5.2 при $X=S(x_0,r)$, μ — $(n-1)$-мерная площадь на $S(x_0,r)$, $\varphi=\frac{1}{Q}\big|_{S(x_0,r)}$, и $q=p/(n-1)>1$. ▷

Таким образом, неравенство (5.4) является точным для нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля.

Лемма 5.3. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $x_0\in D$, и пусть $Q:D\to(0,\infty)$ — измеримая функция и $f:D\to\mathbb{R}^n$ — нижний Q-гомеоморфизмом в точке x_0 относительно p-модуля при $p>n-1$. Тогда имеет место оценка*

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(\Delta(fS_1,fS_2,fD)\right)\ \leqslant\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}, \tag{5.13}$$

где $S_j=S(x_0,r_j)$, $j=1,2$.

◁ Действительно, пусть $0<r_1<r_2<d(x_0,\partial D)$ и $S_i=S(x_0,r_i)$, $i=1,2$. Согласно неравенствам Хессе и Цимера (см., например, [31] и [55]),

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(f\left(\Delta(S_1,S_2,D)\right)\right)\leqslant\frac{1}{M_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}\left(f\left(\Sigma\right)\right)}, \tag{5.14}$$

поскольку $f(\Sigma)\subset\Sigma\left(f(S_1),f(S_2),f(D)\right)$, где Σ обозначает совокупность всех сфер с центром в точке x_0, расположенных между сферами S_1 и S_2, а $\Sigma\left(f(S_1),f(S_2),f(D)\right)$ состоит из всех $(n-1)$-мерных поверхностей в $f(D)$, отделяющих $f(S_1)$ и $f(S_2)$. Из соотношения (5.14) по лемме 5.1 вытекает заключение леммы 5.3. ▷

6. Взаимосвязь нижних Q-гомеоморфизмов с классами Орлича — Соболева

Напомним, что отображение $g : X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *липшицевым,* если $\operatorname{dist}(g(x_1), g(x_2)) \leqslant M \cdot \operatorname{dist}(x_1, x_2)$ для некоторой постоянной $M < \infty$ и всех x_1, $x_2 \in X$. Говорят, что отображение $g : X \to Y$ *билипшицево,* если, оно, во-первых, липшицево, во-вторых, $M^* \cdot \operatorname{dist}(x_1, x_2) \leqslant \operatorname{dist}(g(x_1), g(x_2))$ для некоторой постоянной $M^* > 0$ и всех x_1, $x_2 \in X$.

Следующее утверждение является ключевым для дальнейшего исследования.

Лемма 6.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (2.1). *Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ является нижним $K_p(x, f)$-гомеоморфизмом относительно p-модуля с $p > n - 1$.*

$\lhd$ Обозначим через B (борелево) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал и $J_f(x) = \det f'(x) \neq 0$. Заметим, что множество B представляет собой не более чем счетное объединение борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., например, в [56, лемма 3.2.2]. Без ограничения общности, можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также через B_* оставшееся множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако, $f'(x) = 0$.

По теореме 2.1 множество $B_0 := D \backslash (B \bigcup B_*)$ имеет меру Лебега нуль. Следовательно, по теореме 9.1 в [27] имеем, что $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для p-почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в произвольной точке $x_0 \in D$, где «p-почти все» определяется в смысле p-модуля семейства поверхностей. Тогда, в силу леммы 9.1 в [27], $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$ и по следствию 2.1 получаем, что $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) = 0$ и $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$, где $S_r^* = f(S_r)$.

Заметим, что также $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) = 0$ и $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) = 0$ для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ в смысле p-модуля семейства поверхностей. Действительно, пусть Γ_0 — подсемейство всех сфер $S_r := S(x_0, r)$, для которых либо $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) > 0$, либо $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) > 0$. Обозначим через R множество всех $r \in \mathbb{R}$, для которых либо $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) > 0$, либо $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) > 0$. В силу сказанного выше, $m_1(R) = 0$. Тогда по теореме Фубини $m(E) = 0$, где $E = \{x \in D : |x - x_0| = r \in R\}$. Функция $\rho_1 : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, определенная символом ∞ при $x \in E$ и равная нулю на оставшемся множестве обобщенно p-допустима для семейства Γ_0. Таким образом, по (9.18) в [27] $M_p(\Gamma_0) \leqslant \int_E \rho_1^p dm(x) = 0$, т. е., действительно, $M_p(\Gamma_0) = 0$.

По теореме Кирсбрауна, см. [56, теорема 2.10.43], каждое отображение f_l может быть продолжено до липшицевского отображения $\widetilde{f_l} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которое по теореме Радемахера — Степанова $\widetilde{f_l}$ дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{R}^n$, см. [56, теорема 3.1.6]. В силу единственности аппроксимативного дифференциала см. в [56, п. 3.1.2], можно считать, что при всех $x \in B_l$ выполнено равенство $\widetilde{f_l}'(x) = f'(x)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех сфер S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Для произвольной функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, такой что $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0, и

$$\rho(x) := \rho_*(f(x)) \|f'(x)\| \quad \text{при } x \in D \setminus B_0 = B \cup B_*.$$

Рассуждая покусочно на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, согласно [56, раздел 1.7.6], а также используя геометрический смысл величины $\|f'(x)\|$ и ее связь с якобианом отображения, см., например, соотношения (2.5) и (2.6) в [57, гл. I, § 2], имеем, что

$$\int\limits_{S_r} \rho^{n-1}\, d\mathscr{A} = \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x))\|f'(x)\|^{n-1}\, d\mathscr{A}$$

$$= \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{\|f'(x)\|^{n-1}}{\frac{d\mathscr{A}_*}{d\mathscr{A}}} \cdot \frac{d\mathscr{A}_*}{d\mathscr{A}}\, d\mathscr{A} \geqslant \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{d\mathscr{A}_*}{d\mathscr{A}}\, d\mathscr{A}$$

$$= \int\limits_{S_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathscr{A}_* \geqslant 1$$

для почти всех S_r, и, следовательно, $\rho \in \mathrm{ext_p\, adm}\,\Gamma$. Используя замену переменных на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, см., например, [56, теорема 3.2.5], ввиду счетной аддитивности интеграла, получаем также оценку

$$\int\limits_{D} \frac{\rho^p(x)}{K_p(x,f)}\, dm(x) \;\leqslant\; \int\limits_{f(D)} \rho_*^p(x)\, dm(x),$$

что и завершает доказательство. $\rhd$

Следствие 6.1. *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *класса* $W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ *при* $\alpha > n-1$ *является нижним* $K_p(x,f)$*-гомеоморфизмом с* $p > n-1$.

Заметим, что соответствующий плоский случай был изучен в работах [58], [41–44], где установлено, что любой гомеоморфизм f конечного искажения на плоскости является нижним Q-гомеоморфизмом.

6.1. Конечная липшицевость классов Орлича — Соболева. Для непрерывного отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ и $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, положим

$$L(x,f) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}. \tag{6.1}$$

Говорят, что отображение f является *конечно липшицевым*, если $L(x,f) < \infty$ для всех $x \in D$.

Пусть $Q : G \to [0, \infty]$ — измеримая функция. Для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\fint\limits_E Q(x)\, dm(x) = \frac{1}{m(E)} \int\limits_E Q(x)\, dm(x).$$

Теорема 6.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Предположим, что $f : D \to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (2.1) и, кроме того, при $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$*

$$k_p(x_0) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\fint_{B(x_0,\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x) \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} < \infty. \tag{6.2}$$

Тогда

$$L(x_0,f) = \limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant c_{n,p} \cdot k_p^{\frac{1}{p-n}}(x_0) < \infty, \tag{6.3}$$

где $c_{n,p}$ — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

$\lhd$ Рассмотрим сферическое кольцо $R = R(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ такое, что $R(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset D$. Тогда $\mathscr{E} = \left(B(x_0, \varepsilon_2), \overline{B(x_0, \varepsilon_1)}\right)$ — кольцевой конденсатор в D и $f\mathscr{E} = \left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)}\right)$ — кольцевой конденсатор в D'.

Пусть $\Gamma^* = \Delta(fS_1, fS_2, fR)$, где $S_j = S(x_0, r_j)$, $j = 1, 2$. Тогда согласно (4.3), имеем равенство

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} f\mathscr{E} = M_{\frac{p}{p-n+1}}(\Gamma^*)\,. \tag{6.4}$$

По лемме 5.3 получаем, что

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} f\mathscr{E} \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\| K_p(x,f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}, \tag{6.5}$$

где $\| K_p(x,f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, d\mathscr{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}$.

Заметим, что

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \| K_p(x,f)\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) \cdot \frac{dr}{\| K_p(x,f)\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}. \tag{6.6}$$

Применяя теорему Фубини и неравенство Гёльдера с $q = \frac{p}{p-n+1}$, $q' = \frac{p}{n-1}$, имеем

$$\left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\| K_p(x,f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{\frac{p}{p-n+1}}} \int\limits_R [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x)\,. \tag{6.7}$$

Комбинируя неравенства (6.7) и (6.5), получим

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} f\mathscr{E} \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{\frac{p}{p-n+1}}} \int\limits_R [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x)\,. \tag{6.8}$$

Далее, выбирая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$, получим

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} (fB(x_0, 4\varepsilon), f\overline{B(x_0, 2\varepsilon)}) \leqslant \frac{1}{(2\varepsilon)^{\frac{p}{p-n+1}}} \int\limits_{B(x_0,4\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x)\,. \tag{6.9}$$

С другой стороны, в силу неравенства (4.4) вытекает оценка

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} (fB(x_0, 4\varepsilon), f\overline{B(x_0, 2\varepsilon)}) \geqslant c_1 \left[m(fB(x_0, 2\varepsilon))\right]^{\frac{n(p-n+1)-p}{n(p-n+1)}}, \tag{6.10}$$

где c_1 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Комбинируя (6.9) и (6.10), получаем, что

$$\frac{m(fB(x_0, 2\varepsilon))}{m(B(x_0, 2\varepsilon))} \leqslant c_2 \left[\fint_{B(x_0,4\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x)\right]^{\frac{n(p-n+1)}{n(p-n+1)-p}}, \tag{6.11}$$

где c_2 — положительная постоянная зависящая только от n и p.

Далее, выбирая в (6.8) $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, получим

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}}\left(fB(x_0,2\varepsilon), f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\frac{p}{p-n+1}}} \int\limits_{B(x_0,2\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x)\,. \tag{6.12}$$

С другой стороны, в силу неравенства (4.5), получаем

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}}\left(fB(x_0,2\varepsilon), f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right) \geqslant \left(c_3 \frac{d^{\frac{p}{p-n+1}}(fB(x_0,\varepsilon))}{m^{1-n+\frac{p}{p-n+1}}(fB(x_0,2\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{6.13}$$

где c_3 — положительная константа, зависящая только от n и p.

Комбинируя (6.12) и (6.13), получаем, что

$$\frac{d(fB(x_0,\varepsilon))}{\varepsilon} \leqslant c_4 \left(\frac{m(fB(x_0,2\varepsilon))}{m(B(x_0,2\varepsilon))}\right)^{i_1} \left(\fint_{B(x_0,2\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x)\right)^{i_2}, \tag{6.14}$$

где

$$i_1 = \frac{(1-n)(p-n+1)+p}{p}, \quad i_2 = \frac{(n-1)(p-n+1)}{p}$$

и c_4 — положительная константа, зависящая только от n и p.

Эта оценка вместе с (6.11) дает неравенство

$$\frac{d(fB(x_0,\varepsilon))}{\varepsilon} \leqslant c_5 \left(\fint_{B(x_0,4\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x)\right)^{j_1} \times \left(\fint_{B(x_0,2\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x)\right)^{j_2}, \tag{6.15}$$

где

$$j_1 = \frac{n\left((1-n)(p-n+1)+p\right)(p-n+1)}{p\left(n(p-n+1)-p\right)}, \quad j_2 = \frac{(n-1)(p-n+1)}{p}$$

и c_5 — положительная константа, зависящая только от n и p.

Переходя к верхнему пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$L(x_0,f) = \limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{d(fB(x_0,\varepsilon))}{\varepsilon} \leqslant c\cdot [k_p(x_0)]^{\frac{1}{p-n}},$$

где c — положительная постоянная, зависящая только от n и p. $\triangleright$

Следствие 6.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Предположим, что $f : D \to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с условием (2.1) и, кроме того, при $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x) < \infty \quad (\forall\, x_0 \in D). \tag{6.16}$$

Тогда гомеоморфизм f является конечно липшицевым.

Замечание 6.5. В соответствии с леммой 10.6 в [27] конечно липшицевые отображения обладают N-свойством относительно хаусдорфовых мер и, таким образом, являются абсолютно непрерывными на кривых и поверхностях.

Построим пример гомеоморфизма с конечным искажением, не являющегося конечно липшицевым.

Пример. Предположим, что $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$. Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 3$, где

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\left(1 + (p-n)\int\limits_{|x|}^{1} \frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{1}{p-n}}$$

при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Касательная и радиальная дилатации f на сфере $|x| = r$, $r \in (0,1)$, легко вычисляются:

$$\delta_T = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\left(1 + (p-n)\int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{1}{p-n}}}{r}$$

и

$$\delta_r = \frac{\left(1 + (p-n)\int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{p-n+1}{p-n}}}{r^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}.$$

Заметим, что $\delta_T \geqslant \delta_r$ и

$$\delta_T^{p-n+1} = \delta_r \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{r}\right).$$

Следовательно, ввиду сферической симметрии мы видим, что

$$K_p(x,f) = \frac{\delta_T^p}{\delta_T^{n-1}\delta_r} = \frac{\delta_T^{p-n+1}}{\delta_r} = \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{|x|}\right).$$

Очевидно, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} ⨍_{B(0,\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x) = \infty\,.$$

Тем не менее, как легко проверить по правилу Лопиталя, $\frac{|f(x)|}{|x|} \to \infty$ при $x \to 0$, т. е. гомеоморфизм f не является липшицевым в нуле.

Литература

1. *Gehring F. W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N. Y., 1969), Ann. of Math. Studies.—1971.—Vol. 66.—P. 175–193.
2. *Iwaniec T., Sverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc.—1993.—Vol. 118.—P. 181–188.
3. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis.—Oxford: Clarendon Press, 2001.
4. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.—Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958.
5. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева.—Ленинград: ЛГУ, 1985.—416 с.
6. *Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Об отображениях в классах Орлича — Соболева на римановых многообразиях // Укр. матем. вiсник.—2011.—Т. 8, № 3.—С. 319–342.
7. *Alberico A., Cianchi A.* Differentiability properties of Orlicz–Sobolev functions // Ark. Mat.—2005.—Vol. 43.—P. 1–28.

8. *Calderon A. P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. Math. Univ. Parma.—1951.—Vol. 2.—C. 203–213.
9. *Cianchi A.* A sharp embedding theorem for Orlicz–Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J.—1996.—Vol. 45, № 1.—P. 39–65.
10. *Donaldson T.* Nonlinear elliptic boundary-value problems in Orlicz–Sobolev spaces // J. Diff. Eq.—1971.—Vol. 10.—P. 507–528.
11. *Gossez J. P., Mustonen V.* Variational inequalities in Orlicz–Sobolev spaces // Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.—1987.—Vol. 11.—P. 379–392.
12. *Hsini M.* Existence of solutions to a semilinear elliptic system through generalized Orlicz–Sobolev spaces // J. Partial Differ. Equ.—2010.—Vol. 23, № 2.—P. 168–193.
13. *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Compactness // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.—2002.—Vol. 27, № 2.—P. 391–417.
14. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича — Соболева // Алгебра и анализ.—2013.—Т. 25, № 6.—С. 1–53.
15. *Koronel J. D.* Continuity and k-th order differentiability in Orlicz–Sobolev spaces: W^kL_A // Israel J. Math.—1976.—Vol. 24, № 2.—P. 119–138.
16. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* On functions with derivatives in a Lorentz space // Manuscripta Math.—1999.—Vol. 10.—P. 87–101.
17. *Khruslov E. Ya., Pankratov L. S.* Homogenization of the Dirichlet variational problems in Sobolev–Orlicz spaces // Operator theory and its applications (Winuipeg, MB, 1998).—Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 2000.—Vol. 25.—P. 345–366.
18. *Landes R., Mustonen V.* Pseudo-monotone mappings in Sobolev–Orlicz spaces and nonlinear boundary value problems on unbounded domains // J. Math. Anal. Appl.—1982.—Vol. 88.—P. 25–36.
19. *Lappalainen V., Lehtonen A.* Embedding of Orlicz–Sobolev spaces in Hölder spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.—1989.—Vol. 14, № 1.—P. 41–46.
20. *Onninen J.* Differentiability of monotone Sobolev functions // Real. Anal. Exchange.—2000/2001.—Vol. 26, № 2.—P. 761–772.
21. *Tuominen H.* Characterization of Orlicz–Sobolev space // Ark. Mat.—2007.—Vol. 45, № 1.—P. 123–139.
22. *Vuillermot P. A.* Hölder-regularity for the solutions of strongly nonlinear eigenvalue problems on Orlicz–Sobolev space // Houston J. Math.—1987.—Vol. 13.—P. 281–287.
23. *Väisälä J.* Two new characterizations for quasiconformality // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math.—1965.—Vol. 362.—P. 1–12.
24. *Menchoff D.* Sur les differencelles totales des fonctions univalentes // Math. Ann.—1931.—Vol. 105.—P. 75–85.
25. *Gehring F. W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.—1959.—Vol. 272.—P. 3–8.
26. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane.—N. Y.: Springer-Verlag, 1973.
27. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory.—N. Y. etc.: Springer, 2009.—367 p.—(Springer Monographs in Mathematics.)
28. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.—1969.—Vol. 448.—P. 1–40.
29. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.—Новосибирск: Наука, 1983.
30. *Gehring F. W.* Quasiconformal mappings // Complex Analysis and its Applications, Vol. 2, International Atomic Energy Agency.—Vienna, 1976.—P. 213–268.
31. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Arc. Mat.—1975.—Vol. 13.—P. 131–144.
32. *Shlyk V. A.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 6.—С. 216–221.
33. *Maz'ya V.* Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math.—2003.—Vol. 338.—P. 307–340.
34. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб.—1986.—Т. 130, № 2.—С. 185–206.
35. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc.—1962.—Vol. 103.—P. 353–393.
36. *Golberg A.* Homeomorphisms with integrally restricted moduli // Complex Analysis and Dynamical Systems IV. Part 1: Function Theory and Optimization.—Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 2011.—P. 83–98.—(Contemp. Math., 553).
37. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Матем.—2002.—№ 10.—С. 11–33.
38. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Лебега и дифферен-

цируемость квазиаддитивных функций множества // Владикавк. мат. журн.—2002.—Т. 4, № 1.—С. 11–33.
39. *Vodop'yanov S. K.* Description of composition operators of Sobolev spaces // Doklady Math.—2005.—Vol. 71, № 1.—P. 5–9.
40. *Vodop'yanov S. K.* Composition operators on Sobolev spaces // Complex Analysis and Dynamical Systems II.—2005.—P. 401–415.—(Contemp. Math., 382).
41. *Lomako T., Salimov R., Sevost'yanov E.* On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest. Math. Ser.—2010.—T. 59, № 2.—C. 263–274.
42. *Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Алгебра и анализ.—2013.—Т. 25, № 4.—С. 101–124.
43. *Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E.* On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemp. Math.—2013.—Vol. 591.—P. 211–242.
44. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 6.—С. 1361–1376.
45. *Салимов Р. Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. мат.—2008.—Т. 72, № 5.—С. 141–148.
46. *Салимов Р. Р.* Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 4.—С. 920–930.
47. *Salimov R. R.* On finitely Lipschitz space mappings // Сиб. электрон. мат. изв.—2011.—Т. 8.—P. 284–295.
48. *Салимов Р. Р.* О липшицевости одного класса отображений // Мат. заметки.—2013.—Т. 94, № 4.—С. 591–599.
49. *Салимов Р. Р.* О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля // Дальневост. мат. журн.—2014.—Т. 14, № 2.—С. 257–269.
50. *Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций // Мат. сб.—2010.—Т. 201, № 6.—С. 131–158.
51. *Севостьянов Е. А.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Изв. РАН. Сер. матем.—2010.—Т. 74, № 1.—С. 159–174.
52. *Севостьянов Е. А.* О пространственных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику // Алгебра и анализ.—2012.—Т. 24, № 1.—С. 131–156.
53. *Севостьянов Е. А.* О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. мат. журн.—2010.—Т. 51, № 5.—С. 1129–1146.
54. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вiсник.—2008.—Т. 5, № 2.—С. 157–181.
55. *Ziemer W. P.* Extremal length and p-capacity // The Michigan Math. J.—1969.—Vol. 16, № 1.—P. 43–51.
56. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры.—М.: Наука, 1987.—760 с.
57. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением.—Новосибирск: Наука, 1982.
58. *Салимов Р. Р.* Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ.—2014.—Vol. 26, № 6.—С. 143–171.

Статья поступила 23 октября 2014 г.

Салимов Руслан Радикович
Институт математики НАН Украины,
старший научный сотрудник
УКРАИНА, 01601, Киев-4, ул. Терещенковская, 3
E-mail: salimov07@rambler.ru, ruslan623@yandex.ru

ON FINITE LIPSCHITZ ORLICZ–SOBOLEV CLASSES

Salimov R. R.

It is found a sufficient condition of finite Lipschitz of homeomorphisms of the Orlicz–Sobolev class $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ under a condition of the Calderon type.

Key words: finitely Lipschitz mapping, p-modulus, p-capacity, Orlicz–Sobolev class, Orlicz space, lower Q-homeomorphism, mappings of finite distortion.

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 78–81

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

А. В. АБАНИНУ — 60 ЛЕТ

6 февраля 2015 г. исполнилось 60 лет известному российскому математику, профессору, доктору физико-математических наук, заведующему кафедрой математического анализа Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича Южного Федерального университета, заведующему отделом математического анализа Южного математического института ВНЦ РАН Александру Васильевичу Абанину.

Александр Васильевич родился в румынском городе Констанца, где в то время служил его отец, офицер Советской Армии. Именно Василий Федорович и учительница Лидия Степановна Абанины заложили основы характера будущего ученого. Интерес к наукам и, прежде всего, к математике, поддерживался впоследствии учителями ростовской школы № 5, в которой он учился в 9–10 классах. Директор школы и замечательный математик, Анна Владимировна Мардиросова, учительница физики Анна Васильевна Артемова, их коллеги в немалой степени способствовали тому, что у обычных, в общем-то, подростков формировались увлеченность наукой, стремление к постижению нового и самостоятельное творческое мышление.

В 1972 г., после окончания школы, А. В. Абанин поступает на отделение математики механико-математического факультета Ростовского государственного университета. «*Для меня мехмат стал как бы продолжением школы на новом уровне,— вспоминал будущий ученый.— С одной стороны — высококлассные требовательные преподаватели, и с другой — ориентированные на учебу студенты*». С теплом и благодарностью всегда рассказывает Александр Васильевич о лекциях таких известных в России и мире ученых и педагогов, как К. К. Мокрищев, М. Г. Хапланов, Ю. Ф. Коробейник, В. С. Рогожин, В. И. Юдович, М. М. Драгилев, С. Г. Самко, В. П. Захарюта, В. Б. Дыбин, Е. Л. Литвер, И. М. Мельник. Важную роль сыграли и занятия в научно-образовательных кружках, где изучались некоторые разделы математики, не входившие в основную программу. Именно «полуисследовательская» работа в одном из них, посвященная по преобразованию Мебиуса, обусловила выбор для специализации кафедры теории функций и функционального анализа, заведующим которой был тогда профессор Михаил Григорьевич Хапланов, ставший первым научным руководителем Александра Васильевича.

С первых дней учебы друзья и преподаватели отмечали его настойчивость и целеустремленность, увлеченность научными исследованиями, инициативность и организаторские способности. Студенческая жизнь А. В. Абанина — это гармоническое соединение отличной учебы и интенсивной исследовательской работы с активной жизненной позицией, рано проявившийся интерес к педагогический работе, проведение занятий математического кружка в школе № 5, помощь однокурсникам, консультации для младшекурсников.

В 1977 г. А. В. Абанин поступает в очную аспирантуру, потом переводится на заочную. 1 ноября 1979 г. связывает свою жизнь с кафедрой математического анализа РГУ (ЮФУ): ассистент, старший преподаватель, доцент, профессор, с 2000 г. — заведующий. Блестяще подготовленные и неоднократно прочитанные (на механико-математическом и экономическом факультетах) курсы математического анализа, разнообразные авторские спецкурсы приносят ему заслуженное признание и уважение и коллег, и студентов. «*Великолепный преподаватель, настоящий профессионал, человек, который учил нас самостоятельно думать, а не заучивать наизусть доказанные результаты.*» «*Прошло два года, а я до сих пор помню его курс теории меры и интеграла в подробностях. Александр Васильевич создал на своих занятиях атмосферу, в которой мы воспринимали математику как искусство. Благодаря ему мы начали понимать, что значит красиво решить задачу и получали эстетическое наслаждение от красивого решения.*» Это лишь часть отзывов, появляющихся на различных сайтах, где студенты оценивают своих преподавателей (URL: http://professorrating.ru/professor.php?id=79696).

Среди курсов, которые А. В. Абанин читал в разные годы — «Геометрическая теория функций комплексного переменного», «Целые функции», «$\overline{\partial}$-задача», «Функции многих комплексных переменных», «Избранные главы вещественного анализа», «Элементы теории двойственности» и многие другие. В настоящее время все спецкурсы Александра Васильевича, адресованные старшекурсникам, магистрантам и аспирантам мехмата — «Дополнительные главы математического анализа», «Функциональные пространства», «Анализ на метрических пространствах», «Линейные задачи анализа» — связаны с обеспечением фундаментальной подготовки студентов для дальнейших научных исследований в рамках функционирующей на кафедре научной школы.

Значительным разнообразием отличаются научные интересы Александра Васильевича Абанина. С задачами теории представляющих систем и достаточных множеств он столкнулся еще в студенческие годы и продолжает работать в этом направлении и сегодня. Именно данной тематике были посвящены его диссертации: в 1981 г. — кандидатская, «Некоторые свойства представляющих систем и базисов», выполненная под руководством профессора Юрия Федоровича Коробейника, в 1995 — докторская, «Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы». За 1980–2014 годы было проведено систематическое исследование (слабо) достаточных множеств в различных по структуре пространствах целых функций одной и многих переменных, разработаны приложения к теории представляющих систем и уравнениям свертки и теория абсолютно представляющих систем подпространств в спектрах локально выпуклых пространств. Среди основных результатов — доказательство совпадения классов слабо достаточных и эффективных по Ийеру множеств, геометрический критерий распределения на плоскости показателей абсолютно представляющих систем экспонент в пространствах голоморфных в выпуклой области функций, новые методы изучения свойств слабо достаточных множеств и абсолютно представляющих систем в многомерном случае.

В 90-е г. А. В. Абанин разработал новые методы изучения порождающих идеалов в нерадиальных классах весовых пространств целых функций, предложил геометрическую характеризацию нулевых множество образующих порождающих идеалов. В это же время он получил интересные результаты в области теории ультрадифференцируемых функций и распределений (полное описание пространств ультрадифференцируемых функций, допускающих аналоги теоремы Уитни о продолжении и теория ультрараспределений, содержащая все предшествующие классические теории). Итогом данной работы стала монография «Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения», вышедшая в издательстве «Наука» в 2007 г. Задача, поставленная автором — «на сравнительно небольшом по объему и разнообразию рассматриваемых вопросов материале обозначить некоторые достигнутые в последнее время результаты, разработанные при этом методы и возможности их использования» — была решена весьма успешно.

В 2009–2013 гг. Александр Васильевич проводил совместные исследования (связанные с уравнениями свертки и теоремами деления) с вьетнамским математиком Ле Хай Хоем и японцем Р. Ишимурой. Были установлены критерии разрешимости уравнений свертки в пространстве голоморфных в выпуклой области функций полиномиального роста, доказано существование экспоненциально-полиномиального базиса в ядре соответствующего оператора. Кроме того, был получен критерий справедливости теоремы деления в пространстве целых функций с двучленными асимптотиками роста и разработано его приложение к разрешимости уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций (2010; совместно с Д. А. Абаниной).

В эти же годы в совместных работах с Лей Хай Хоем установлена двойственность пространств голоморфных функций полиномиального роста и пространств Фреше голоморфных функций заданной граничной гладкости. Кроме того, были развиты методы описания сопряженных пространств для индуктивных пределов последовательностей банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций и проективных спектров таких пространств (2006; совместно с И. А. Филипьевым).

В последние годы Александр Васильевич успешно ведет исследования в области общей теории весовых пространств голоморфных функций. Им получено далеко идущее обобщение классической теоремы Л. Хермандера о продолжении целых функций с оценками роста, разработаны ее приложения к описанию канонических систем весов, установлены критерии принадлежности весовых пространств голоморфных функций к компактным спектрам, найдена непосредственная связь между топологической и алгебраической структурами индуктивных пределов весовых пространств голоморфных функций и их проективных оболочек. Все эти результаты получены совместно с вьетнамским математиком Фам Чонг Тиеном, защитившим кандидатскую диссертацию под руководством А. В. Абанина в 2013 г.

Почти за 40 лет активной научной деятельности он опубликовал более 160 научных работ, большинство которых — в высокорейтинговых научных журналах (Доклады АН, Известия АН, Математические заметки, Сибирский математический журнал, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Studia Mathematica, Comptes Rendus. Mathématique. Académie des Sciences, Arkiv för Matematik, Journal of Approximation Theory, Mathematische Annalen, Mathematische Nachrichten, Proceedings of the American Mathematical Society).

Ряд статей Александр Васильевич написал вместе со своими учениками. Сегодня можно с полной уверенностью утверждать, что им создана собственная научная школа — 10 кандидатов наук, многочисленные магистры, написавшие свои диссертации под его руководством. Немало учеников А. В. Абанина работает сегодня в вузах Ростова и Ростовской области, и все они в полной мере следуют основным принципам учителя — высокая требовательность к себе и своим ученикам, преданность делу, большая самоотдача и высокий профессионализм.

Наряду с педагогической и научной деятельностью А. В. Абанин активно участвует в организации научной и учебной работы в университете. Он возглавляет специализированный совет Д 212.208.29 по защите докторских диссертаций, является председателем

Ростовского математического общества, входит в состав редколлегий таких периодических изданий как «Владикавказский математический журнал» и «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки».

Александр Васильевич ведет активные совместные исследования с математиками из Наньянского технологического университета (Сингапур), входящего в первую сотню ведущих университетов мира, и Национального университета Вьетнама. Он постоянно участвует в работе организационных комитетов различных международных конференций, регулярно выступает с докладами на Международных и Всероссийских конференциях, симпозиумах, школах. В качестве научного руководителя и одного из основных исполнителей принимал участие в выполнении проектов, поддержанных РФФИ и Министерством образования и науки РФ по Федеральной целевой программе «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России». На конкурсе РФФИ 2015 года был поддержан инициативный проект А. В. Абанина «Структура весовых пространств голоморфных функций и классические операторы в них». Кафедра математического анализа является базовой для отдела математического анализа Южного математического института Российской академии наук. За десять лет сотрудничества издано десять сборников научных работ, выполнен совместный научный проект «Синтетические методы изучения операторов и уравнений в функциональных пространствах» (2012–2013 гг.) в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», проведено более десяти международных и молодежных научных конференций.

Те, кому удавалось хоть недолго общаться с Александром Васильевичем, не могли не заметить таких определяющих особенностей характера как надежность, неприятие любой разновидности лжи, уступчивость в мелочах и при этом поразительная цельность и порядочность. Человек, искренне переживающий за судьбу российской науки, он не уехал из страны в тяжелые 90-е — напротив, именно в этот период читались новые учебные курсы, формировалась научная школа, защищали кандидатские диссертации его первые ученики, да и сам он защитил докторскую именно в 1995-м. Не сдается А. В. Абанин и сейчас, когда далеко не все реформы идут на пользу образованию и науке — он постоянно ищет пути усовершенствования учебного процесса, активно занимается научными исследованиями. Именно неравнодушие, педагогический талант, огонек в глазах и не изменившаяся со студенческих лет активная жизненная позиция приводят к тому, что даже среди немногочисленных нынче студентов-математиков находятся люди, которых не отпугивает требовательность и принципиальность, которые именно благодаря Александру Васильевичу начинают понимать, «что значит красиво решить задачу и получить эстетическое наслаждение от красивого решения». Есть у А. В. Абанина сейчас и аспиранты, и магистранты, а значит, научная школа продолжает развиваться.

Всегда рядом с Александром Васильевичем и самые близкие ему люди, полностью разделяющие и научные интересы, и гражданскую позицию (жена, Татьяна Иванова — доцент кафедры информационных систем в строительстве (РГСУ), дочь, Дарья Александровна — доцент кафедры математического анализа ЮФУ, сын, Дмитрий Александрович — профессор института теоретической физики в Торонто).

От всей души желаем Александру Васильевичу здоровья, радости в жизни, новых творческих достижений!

А. О. Ватульян, М. И. Карякин, С. Б. Климентов, Ю. Ф. Коробейник,
А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, Ю. С. Налбандян

Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 82–83

МЯТЕЖНЫЙ ГЕНИЙ: ПАМЯТИ АЛЕКСАНДРА ГРОТЕНДИКА

13 ноября 2014 г. в Сен-Жироне скончался Александр Гротендик. Не стало математического мечтателя XX века, осветившего пути в математику будущего.

Гротендик родился 28 марта 1928 г. в Берлине. Его отец — Александр Шапиро, еврей из России, родился в 1899 г. в Новозыбкове, стал революционером, анархистом, махновцем. Отец, чудом избежавший смерти при царизме и большевиках, сгинул от нацистов в Освенциме в 1942 г. По свидетельству Юрия Манина, Шурик (так его звали в семье) сохранил русский язык. Мать, чью фамилию принял Шурик, так как отца преследовали, — немка Иоганна Гротендик (1900–1957), незаурядная активистка левого толка, бежала с Шуриком во Францию, куда был интернирован и отец Александра, воевавший в красных бригадах Испании. Война — годы страданий, отразившиеся на всей жизни будущего гения.

Научным руководителем Гротендика стал Лоран Шварц (1915–2002). Другим руководителем, а затем старшим соратником, другом и даже пером Гротендика был Жан Дьёдонне (1906–2002). Среди учеников и последователей Гротендика Юрий Манин, Владимир Воеводский, Вильям Ловер, Пьер Делинь, Жиль Пизье и многие другие математики первого ряда.

Творчество и личность Гротендика исключительно многобразны. Вот немногие из тем, ждущих переосмысления:

- Гротендик и проблема аппроксимации.
- Пространства Гротендика.
- Гротендик — анархист и революционер математики.
- Гротендик и революция в теории множеств.
- Гротендик и элиминация и реинкарнация точек.
- Гротендик и топосы.
- Гротендик и мотивы.
- Гротендик и сила абстракции.
- Гротендик и лейбницианство.
- Гротендик — ученик и учитель.
- Гротендик совестливый, страдающий и ищущий.
- Гротендик и меритократизм.
- Гротендик — вершина и закат Бурбаки.
- Посевы и урожаи Гротендика.
- Гротендик и будущее математики.

Принято выделять два основных периода математических занятий Гротендика: 1948–1956 — период функционального анализа и 1956–1970 — период алгебраической геометрии. В этом есть большая несправедливость. Гротендик оставался математиком до конца своих дней, даже покинув IHÉS и вернувшись в alma mater в Монпелье. Он навсегда вошел в историю науки как бескорыстный и совестливый певец математической мечты и красоты:

> *...the only decisive proof of the fertility of ideas or of a new vision is that of time. Fertility is recognizable by offspring, not by honors.*
>
> *Горе тому миру, где презирают мечту. Мечта в нас глубже всех прочих корней...*
>
> *...лучшее из того, что мне удалось сделать в математике, то, над чем я трудился с настоящей страстью, пришло ко мне по своей воле — я не тянул его силой. Если математика всегда приносила мне необыкновенную радость, если моя тяга к ней не остыла в мои зрелые годы, то это не потому, что мне нравится упражнять мускулы, обрывая с деревьев крепко сидящие на ветках зеленые плоды. Нет; я слышу в ней неисчерпаемую тайну, безупречную гармонию духа, готовую открыться любящему взгляду. Эта немыслимая глубина влечет меня к математике, и от предчувствия красоты у меня всякий раз перехватывает дыхание.*

Гротендик оставил потомкам тайну своей мятежной и мятущейся личности. Мотивы многих его поступков будут вечным вызовом и загадкой. Человек бесконечно щедрый и открытый, даривший другим собственные математические идеи и личную исповедь, в необычной, эмоциональной и несколько сумбурной декларации от 3 января 2010 г. неожиданно потребовал убрать из публичного доступа все свои сочинения:

> *Я не имею в виду издавать или переиздавать какие-либо работы или тексты, автором которых я являюсь, абсолютно ни в какой форме, ни в печатной, ни в электронной, ни полностью, ни в отрывках, ни личные тексты, ни научные или иные, ни письма, адресованные кому бы то ни было, никакие переводы текстов, автором которых я являюсь. Любое издание или распространение подобных текстов, каковое осуществлено в прошлом без моего согласия или будет осуществлено в будущем и покуда я жив, противоречит моей явно сформулированной сейчас воле и является в моих глазах незаконным.*

Гротендик покинул наш мир. Значит, ограничения, наложенные им, больше не действуют и интеллектуальное наследие гения открыто для человечества.

С. С. Кутателадзе

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов (≈ 12 стр. формата А4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 53-84-62;
E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17

Выпуск 1

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-50223 от 15 июня 2012 г.

Подписано в печать 17.03.2015. Формат бумаги $60\times84^1/_8$.
Гарн. шрифта Computer modern. Усл. п. л. 9,65. Тираж 100 экз.

Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН и РСО-А
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.