Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

В Л А Д И К А В К А З С К И Й   Н А У Ч Н Ы Й   Ц Е Н Т Р   Р А Н

ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 19, выпуск 2 апрель–июнь, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ

2017

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 3–10

УДК **517.983.2**

$L_p - L_q$-ОЦЕНКИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ЯДРАМИ

М. Н. Гуров, В. А. Ногин

Получены $L_p - L_q$-оценки для обобщенных потенциалов Рисса с осциллирующими ядрами и однородными характеристиками бесконечно дифференцируемыми в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Описаны выпуклые множества $(1/p, 1/q)$-плоскости, для точек которых упомянутые операторы ограничены из L_p в L_q и указаны области, где эти операторы не ограничены.

Ключевые слова: потенциал Рисса, осциллирующее ядро, метод Фурье-мультипликаторов, $L_p - L_q$-оценки, $\mathscr{L}$-характеристика.

Введение

В работе получены $L_p - L_q$-оценки для операторов типа потенциала

$$(R_a^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{a(t')e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}} \varphi(x-t)\, dt, \tag{1}$$

где $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, $a(t')$ $\bigl(t' = \frac{t}{|t|}\bigr)$ — однородная нулевой степени функция, бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, удовлетворяющая условию $a(t') \not\equiv 0$, $t' \in S^{n-1}$.

В работе описаны выпуклые множества $(1/p, 1/q)$-плоскости, для точек которых оператор R_a^α ограничен из L_p в L_q и указаны области, где этот оператор не ограничен (см. теорему 1.1). В некоторых случаях доказана точность полученных оценок (см. замечание 1.1). В частности, получены необходимые и достаточное условия ограниченности оператора (1) в L_p.

В настоящее время имеется ряд работ по $L_p - L_q$-оценкам для операторов свертки с осциллирующими ядрами, в частности, для операторов Бохнера — Рисса и акустических потенциалов, возникающих в различных задачах анализа и математической физики (см. книги [5, 6], а также работы [1–4, 9, 10]. Во всех упомянутых работах, кроме [1], рассматривались ядра, содержащие радиальную характеристику $b(r)$, которая стабилизируется на бесконечности как гёльдеровская функция. Благодаря этому свойству, получение оценок для указанных операторов сводилось к случаю оператора с характеристикой $b(r) \equiv 1$. Подобное сведение в принципе невозможно, когда ядро оператора (1) содержит однородную характеристику $a(t')$.

В работе [1] были получены оценки для потенциала (1) в случае $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$. Однако, использованный в ней метод, основанный на представлении оператора R_a^α через оператор Бохнера — Рисса и некоторый оператор, близкий к акустическому потенциалу, не работает при $\operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n-1}{2}$.

Здесь мы развиваем новый метод, основанный на получении специальных представлений для символа оператора (1) с последующим применением техники Фурье-мультипликаторов, вырождающихся или имеющих особенности на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$.

1. Основные результаты

Для формулировки основного результата будут использованы следующие обозначения: $(A, B, \dots, K)$ — открытый многоугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами в точках A, B, $\dots$, K; $[A, B, \dots, K]$ — его замыкание. Через $\mathscr{L}(A)$ обозначим $\mathscr{L}$-характеристику оператора A, т. е. множество всех точек $(1/p, 1/q)$-плоскости $(1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty)$ таких, что оператор A ограничен из L_p в L_q.

Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$. Введем в рассмотрение следующие точки $(1/p, 1/q)$-плоскости:

$$A = \left(1, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad A' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 0\right),$$

$$C = \left(\frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}, \frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}\right), \quad C' = \left(\frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}, \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}\right),$$

$$E = (1, 0), \quad F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$G = \left(1 - \frac{(n - \operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad G' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{(n - \operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}\right),$$

$$H = \left(1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad H' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right),$$

$$O = (1, 1), \quad O' = (0, 0),$$

$$K = \left(\frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad K' = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{(n-1)(n - \operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad B' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{(n-1)(n - \operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)}\right).$$

Нам понадобятся также следующие множества на $(1/p, 1/q)$-плоскости (см. рис. 1 и 2 для случаев $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n-1}{2}$ и $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, соответственно):

$$\mathscr{L}_1(\alpha, n) = \begin{cases} [A', H', H, A, E] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), & 0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)}, \\ (A', G', C', C, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (C', C), & \frac{n(n-1)}{2(n+1)} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup \{F\}, & \operatorname{Re}\alpha = \frac{n-1}{2},\ \operatorname{Im}\alpha \neq 0, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \alpha = \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', K', K, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup [K', K], & \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n}{2}, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \frac{n}{2} \leqslant \operatorname{Re}\alpha < n,\ \operatorname{Im}\alpha \neq 0, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (B', B), & \frac{n}{2} \leqslant \alpha < n, \end{cases}$$

$$\mathscr{L}_2(\alpha, n) = [O, A, A', O'] \setminus (\{A'\} \cup \{A\}).$$

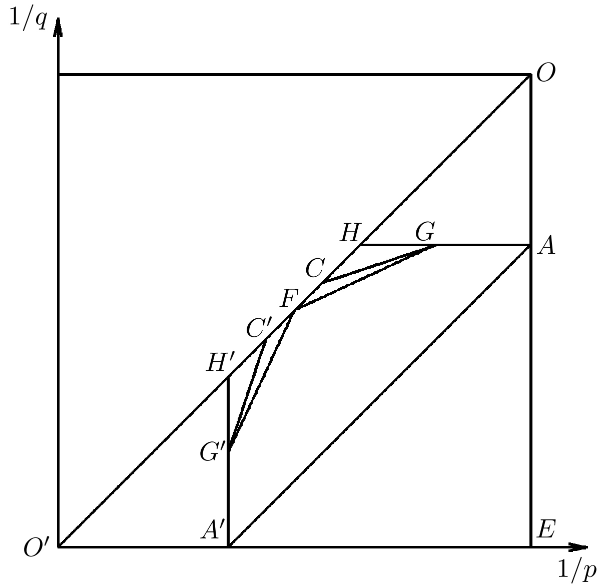

Рис. 1.

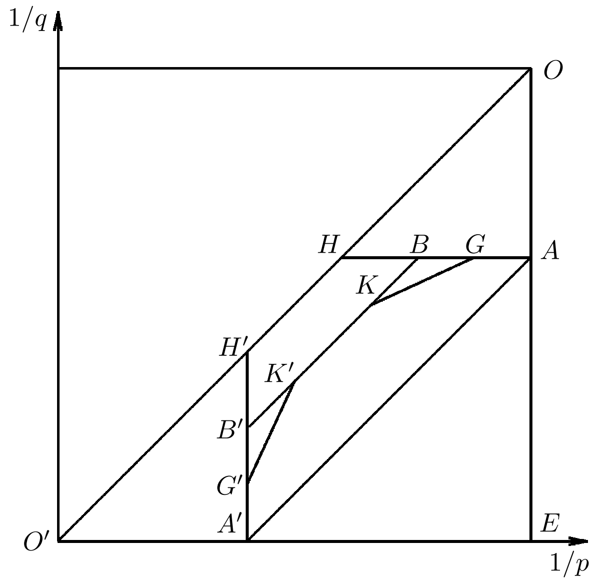

Рис. 2.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1.1. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$.

I. *Справедливо вложение*

$$\mathscr{L}(R_a^\alpha) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n). \tag{2}$$

II. *Множество* $\mathscr{L}(R_a^\alpha)$ *не содержит точек, лежащих:*

1) *на отрезке* $[A, H]$ *и выше него, если* $a(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in S^{n-1}$;

2) *на отрезке* $[A', H']$ *и левее него при том же условии на характеристику* $a(\sigma)$, *что и в п.* 1);

3) *на отрезке* $[O', O]$, *если* $\alpha = (n-1)/2$;

4) *ниже прямой* $A'A$, *а также точки* A' *и* A.

Замечание 1.1. При $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)}$ и $\frac{n}{2} \leqslant \alpha < n$ полученные оценки являются точными. А именно,

$$\mathscr{L}(R_a^\alpha) = [A', H', H, A] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)},$$

$$\mathscr{L}(R_a^\alpha) = (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (B', B), \quad \frac{n}{2} \leqslant \alpha < n.$$

В частности, для таких α получено необходимое и достаточное условие ограниченности оператора (1) в L_p. А именно, этот оператор ограничен в L_p тогда и только тогда, когда $\frac{n}{n-\operatorname{Re}\alpha} < p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$.

Замечание 1.2. На примере оператора (1) можно пояснить влияние осциллирующей экспоненты в ядре на картину ограниченности рассматриваемого оператора. Для этого вначале рассмотрим потенциал Рисса с однородной характеристикой:

$$(I^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{a(t')}{|t|^{n-\alpha}} \varphi(x-t)\, dt, \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < n.$$

Хорошо известно, что оператор I^α ограничен из L_p в L_q тогда и только тогда, когда $1/p - 1/q = \operatorname{Re}\alpha/n$. Перейдем далее от оператора I^α к оператору R_a^α. Тогда, как это следует из (2) и аналогичного вложения, доказанного в [1] при $(n-1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n$, над интервалом (A', A) «надстраивается» выпуклое множество положительной лебеговой меры, для точек $(1/p, 1/q)$ которого полученный оператор ограничен из L_p в L_q.

2. Вспомогательные сведения и утверждения

Ниже мы будем использовать следующие функции. Пусть $\vartheta(r), \varkappa(r), \chi(r) \in C^\infty(0, +\infty)$ таковы, что $0 \leqslant \vartheta(r)$, $\varkappa(r), \chi(r) \leqslant 1$; $\vartheta(r^2) = 1$, если $r \leqslant 1 - \frac{\delta}{2}$, $\vartheta(r^2) = 0$, если $r \geqslant 1 - \frac{\delta}{4}$; $\varkappa(r) = 1$, если $|1-r| \leqslant \frac{\delta}{4}$, $\varkappa(r) = 0$, если $|1-r| \geqslant \frac{\delta}{2}$; $\chi(r) = 0$, если $r \leqslant 1 + \frac{\delta}{4}$, $\chi(r) = 1$, если $r \geqslant 1 + \frac{\delta}{2}$. Функция $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)$ такова, что $0 \leqslant \widetilde{\varkappa}(|\xi|) \leqslant 1$, $\widetilde{\varkappa}(|\xi|) = 0$, если $|1 - |\xi|| \geqslant \delta$ и $\widetilde{\varkappa}(|\xi|) = 1$, если $|1 - |\xi|| \leqslant \frac{\delta}{2}$. Тогда $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)\varkappa(|\xi|) = \varkappa(|\xi|)$.

Будем предполагать, что $\vartheta(r^2) + \varkappa(r) + \chi(r) \equiv 1$.

Теорема 2.1 (см. [11]). *Справедливы следующие утверждения:*

a) *Пусть $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$, $N > [n/2]$ и существуют постоянные $c, \delta > 0$ такие, что $|D^k f(x)| \leqslant c|x|^{-\delta-|k|}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant |k| \leqslant N$. Тогда $f \in \mathscr{R}_0$.*

b) *Пусть $f \in C^N(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $N > [n/2]$, имеет компактный носитель и существуют постоянные $c, \delta > 0$ такие, что $|D^k f(x)| \leqslant c|x|^{-\delta-|k|}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $0 \leqslant |k| \leqslant N$. Тогда $f \in \mathscr{R}_0$.*

Оператор R_a^α представим в следующем виде:

$$(R_a^\alpha \varphi)(x) = (M^\alpha \varphi)(x) + (N^\alpha \varphi)(x), \tag{3}$$

где

$$(M^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}}^{n} \frac{\chi(|t|) a(t') e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}} \varphi(x-t)\, dt,$$

$$(N^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(1-\chi(|t|)) a(t') e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}} \varphi(x-t)\, dt.$$

Через $\widehat{m}^\alpha(\xi)$ обозначим символ оператора M^α. В работе [7] получено следующее представление для $\widehat{m}^\alpha(\xi)$:

$$\widehat{m}^\alpha(\xi) = \widehat{m}^{\alpha,0}(\xi) + \widehat{m}^{\alpha,1}(\xi) + \widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi). \tag{4}$$

Здесь

$$\widehat{m}^{\alpha,0}(\xi) = \vartheta(|\xi|^2)\Gamma(\alpha) \int\limits_{S^{n-1}} \frac{a(\sigma)}{(-i(1+\xi\sigma))^\alpha}\, d\sigma \\ - \vartheta(|\xi|^2) \int\limits_{S^{n-1}} a(\sigma)\, d\sigma \int\limits_0^\infty (1-\chi(\rho))\rho^{\alpha-1} e^{i\rho(1+\xi\cdot\sigma)}\, d\rho,$$

$$\widehat{m}^{\alpha,1}(\xi) = \begin{cases} \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \sum\limits_{k=0}^{N-1} A_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} \\ \qquad \times \frac{\chi_k^+(\xi')}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}(1-|\xi|)^k + \mathscr{R}_\alpha(\xi), & \alpha - k \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2} \ldots; \\ \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|)^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \times \sum\limits_{k=0}^{N-1} (A'_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} + A''_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} \\ \qquad \times \ln(1-|\xi|+i0)) \frac{\chi_k^+(\xi')}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}(1-|\xi|)^k + \mathscr{R}_\alpha(\xi), & \alpha - k = \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2} \ldots, \end{cases}$$

$$\widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi) = \begin{cases} \chi(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \sum\limits_{k=0}^{N-1} A_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} \\ \qquad \times \frac{\chi_k^+(\xi')}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}(1-|\xi|)^k + \mathscr{R}'_\alpha(\xi), & \alpha - k \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2} \ldots; \\ \chi(|\xi|)(1-|\xi|)^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \times \sum\limits_{k=0}^{N-1} (A'_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} + A''_{\alpha-\frac{n+1}{2}-k} \\ \qquad \times \ln(1-|\xi|+i0)) \times \frac{\chi_k^+(\xi')}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}(1-|\xi|)^k + \mathscr{R}'_\alpha(\xi), & \alpha - k = \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2} \ldots \end{cases}$$

Функции $\mathscr{R}_\alpha(\xi)$, $\mathscr{R}'_\alpha(\xi)$ и $\chi_k^\pm(\xi')$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1

$$A_\lambda = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{\frac{i\pi}{2}(\lambda+1)}\Gamma(\lambda+1),$$

$$A'_\lambda = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{\left(\psi(-\lambda) + i\frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{i\pi}{2}(\lambda+1)}}{(-\lambda-1)!},$$

$$A''_\lambda = -\frac{1}{(2\pi)^n} \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}(\lambda+1)}}{(-\lambda-1)!}, \quad N = \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Теорема 2.2 [7]. *Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$ и $\varphi \in \mathscr{S}$. Тогда*

$$(M^\alpha\varphi)(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{m}^\alpha(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) e^{-i(x\cdot\xi)}\, d\xi.$$

Кроме того, в [8] был изучен вопрос о принадлежности классу M_p^q мультипликатора

$$b_\alpha(|\xi|) = \begin{cases} \varkappa(|\xi|) A_{\alpha-\frac{n+1}{2}} (1-|\xi|+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}, & \alpha \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \ldots, \\ \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|)^{\frac{n-1}{2}-\alpha} \quad \left(A'_{\alpha-\frac{n+1}{2}} + A''_{\alpha-\frac{n+1}{2}} \ln(1-|\xi|+i0)\right), & \alpha = \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \ldots, \end{cases}$$

где $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$.

Доказана следующая теорема

Теорема 2.3 [8]. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$. *Тогда*

$$b_\alpha(|\xi|) \in M_p^q, \quad \textit{если} \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \mathscr{L}_1(\alpha, n);$$

$$b_\alpha(|\xi|) \notin M_p^q, \quad \textit{если} \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in [A, H, O] \cup [A', H', O'].$$

При $\operatorname{Re}\alpha = 0$ *имеем*

$$b_\alpha(|\xi|) \in M_p^q \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in [O', E, O] \setminus (\{O'\} \cup \{O\}).$$

Если $\operatorname{Re}\alpha < 0$, *то*

$$b_\alpha(|\xi|) \in M_p^q \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in [O', E, O]. \tag{5}$$

Замечание 2.1. Если $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)}$ и $\frac{n}{2} \leqslant \operatorname{Re}\alpha < n$, то из теоремы 2.3 следует, что

$$b_\alpha(|\xi|) \in M_p^q \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in \mathscr{L}_2(\alpha, n).$$

Замечание 2.2. Нетривиальность теоремы 2.3 при $q = p$ объясняется тем, что $b_\alpha(|\xi|) \notin M_p^p$, если $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$ и $0 < 1/p \leqslant \operatorname{Re}\frac{\alpha}{n}$ либо $1 - \operatorname{Re}\frac{\alpha}{n} \leqslant \frac{1}{p} < 1$. Следовательно, для исследования мультипликатора $b_\alpha(|\xi|)$ не применимы классические мультипликаторные теоремы Михлина, Хёрмандера, Крэ, Лизоркина и др., дающие условия принадлежности мультипликатора классу M_p^p для всех p, $1 < p < \infty$.

3. Доказательство основного результата

Докажем вложение

$$\mathscr{L}(R_a^\alpha) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n).$$

Воспользуемся представлением (3).

Отметим, что ядро оператора N^α принадлежит L_1. Кроме того, для него справедлива теорема С. Л. Соболева (см. [12]). Следовательно,

$$\mathscr{L}(N^\alpha) \supset \mathscr{L}_2(\alpha, n). \tag{6}$$

Рассмотрим оператор M^α, для символа $\widehat{m}^\alpha(\xi)$ которого справедливо представление (4), и исследуем вопрос о принадлежности мультипликатора $\widehat{m}^\alpha(\xi)$ классу M_p^q.

Исходя из представления для мультипликатора $\widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi)$, на основании теоремы 2.1, заключаем, что $\widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi) \in \mathfrak{N}_0$. Кроме того, $\widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi) \in L_1$. Отсюда получаем

$$\widehat{m}^{\alpha,\infty}(\xi) \in M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in [O', O, E]. \tag{7}$$

Рассмотрим мультипликатор $\widehat{m}^{\alpha,1}(\xi)$. Заметим, что $\mathscr{R}_\alpha(\xi) \in \mathfrak{N}_0$ в силу теоремы 2.1. Кроме того, $\mathscr{R}_\alpha(\xi) \in L_1$ (см. [7]). Применяя далее теорему 2.3, будем иметь

$$\widehat{m}^{\alpha,1}(\xi) \in M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in \mathscr{L}_1(\alpha, n). \tag{8}$$

Отметим также, что $\widehat{m}^{\alpha,0}(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Следовательно,

$$\widehat{m}^{\alpha,0}(\xi) \in M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in [O', O, E]. \tag{9}$$

Из (7)–(9) получаем вложение

$$\mathscr{L}(M^\alpha) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n). \tag{10}$$

Из (6) и (10) вытекает (2).

Перейдем к доказательству утверждения II теоремы 1.1.

Докажем 1) в случае $\alpha \neq \frac{(n-1)}{2-j}$, $j \in \mathbb{N}$. Для этого, учитывая (6), (7) и (9), а также соображения выпуклости и двойственности, достаточно показать, что $\widehat{m}^{\alpha,1}(\xi) \notin M_p^q$, если $(1/p, 1/q) \in [A, H]$. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве основного результата работы [8], получаем

$$\widehat{m}^{\alpha,1}(\xi) = (-i)^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) a(-\xi') b_\alpha(|\xi|) + G_\alpha(\xi).$$

Здесь

$$G_\alpha(\xi) = \sum_{k=1}^{N+1} A_{\alpha - \frac{n+1}{2} - k} \frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}} \chi_k^+(\xi') \varkappa(|\xi|)(1 - |\xi| + i0)^{\frac{n-1}{2}+k-\alpha} + g_\alpha(\xi),$$

$$g_\alpha(|\xi|) = \mathscr{R}_\alpha(\xi) + \frac{1-n}{2} \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^{\frac{n+1}{2}-\alpha} A_{\alpha-\frac{n+1}{2}} \widetilde{\varkappa}(|\xi|) \chi_0^+(\xi') \int_0^1 (1-(|\xi|-1)t)^{-\frac{1+n}{2}} \, dt.$$

Рассуждая как и при доказательстве теоремы 1.1 из [8], с учетом того, что $\chi_k^+(\xi') \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $k = 1, \ldots, N+1$, будем иметь

$$G_\alpha(\xi) \in M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in [A, H]. \tag{11}$$

Далее, из условия $a(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in S^{n-1}$ легко вывести, что

$$a(-\xi') b_\alpha(|\xi|) \notin M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in [A, H].$$

Отсюда, с учетом (11) получаем 1) при $\alpha \neq \frac{n-1}{2} - j$, $j \in \mathbb{N}$.

Случай, когда $\alpha = \frac{n-1}{2} - j$ рассматривается аналогично (см. [8]).

Тогда 2) следует из 1) в силу двойственности.

Утверждение 3) вытекает из того, что символ оператора R_a^α имеет особенность на S^{n-1} при $\alpha = \frac{n-1}{2}$ и, следовательно, не принадлежит M_2^2.

Утверждение 4) доказывается аналогично соответствующему утверждению из [1].

Литература

1. *Betilgiriev M. A., Karasev D. N., Nogin V. A.* $L_p - L_q$-estimates for some potential type operators with oscillating kernels // Fract. Cal. Appl. Anal.—2004.—Vol. 7, № 2.—P. 213–241.
2. *Börjeson L.* Estimates for the Bochner–Riesz operator with negative index // Ind. Univ. Math. J.—1986.—Vol. 35, № 2.—P. 225–233.
3. *Karapetyants A. N., Karasev D. N., Nogin V. A.* $L_p - L_q$-estimates for some fractional acoustic potentials and some related operators // Fract. Cal. Appl. Anal.—2005.—Vol. 7, № 1.—P. 155–172.

4. *Karasev D. N., Nogin V. A.* On the boundness of some potential — type operators with oscillating kernels // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278, № 5.—P. 554–574.
5. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and Their Applications.—London: Taylor and Frances Group.—2002.—376 p.—(Analytical Methods and Special Functions; Vol. 5).
6. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.—Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.—355 p.
7. *Гуров М. Н.* О преобразовании Фурье одной осциллирующей функции // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2014.—№ 5.—С. 11–14.
8. *Гуров М. Н., Карасёв Д. Н., Ногин В. А.* Об одном Фурье-мультипликаторе // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 1.—С. 14–20.
9. *Карапетянц А. Н., Карасев Д. Н., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Изв. НАН Армении.—2003.—Т. 38, № 2.—С. 37–62.
10. *Карасев Д. Н.* $L_p - L_q$-оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 3.—С. 418–420.
11. *Самко С. Г., Костецкая Г. С.* Абсолютная интегрируемость интегралов Фурье // Вестн. РУДН. Математика.—1994.—№ 1.—С. 138–168.
12. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—М.: Мир, 1988.—336 с.

Статья поступила 8 июля 2016 г.

Гуров Михаил Николаевич
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: MGurov@inbox.ru

Ногин Владимир Александрович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: vnogin@ns.math.rsu.ru

$L_p - L_q$-ESTIMATES FOR GENERALIZED RISS POTENTIALS WITH OSCILLATING KERNELS

Gurov M. N., Nogin V. A.

We consider a class of multidimensional potential-type operators whose kernels are oscillating at infinity. The characteristics of these operators are infinitely differentiable homogeneous functions. We describe convex sets in the $(1/p; 1/q)$-plane for which these operators are bounded from L_p into L_q and indicate the domains where they are not bounded. In some cases we describe their $\mathscr{L}$-characteristics. To obtain these results we use a new method based on special representation of the symbols of multidimensional potential-type operators. To these representations of the symbols we apply the technique of Fourier-multipliers, which degenerate or have singularities on the unit sphere in $\mathbb{R}^n$.

Keywords: potential-type operators, oscillating kernel, method of Fourier multipliers, $L_p - L_q$-estimates, $\mathscr{L}$-characteristic.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 11–17

УДК **519.17**

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$[1]

А. К. Гутнова, А. А. Махнев

В работе найдены возможные порядки и строение подграфов неподвижных точек автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, симметричный граф, дистанционно регулярный граф, группа автоморфизмов графа.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$. Тогда число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i \leqslant d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа $b_0 = k$ — это степень графа, $c_1 = 1$. Дистанционно регулярный граф Γ диаметра 2 называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ), где $\lambda = a_1, \mu = c_2$.

Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются *числами пересечений графа* Γ.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. Если $\theta_2 = -1$, то по предложению 4.2.17 из [1] граф Γ_3 сильно регулярен и Γ — антиподальный граф тогда и только тогда, когда Γ_3 — коклика.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 15-11-10025 (теорема 1) и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (следствие 1).

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом и графы Γ_2, Γ_3 сильно регулярны. Если $k < 44$, то Γ имеет массив пересечений $\{19, 12, 5; 1, 4, 15\}$, $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$ или $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$. В первых двух случаях согласно [2, с. 211] и [3] граф не существует. В данной работе найдены возможные автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$. Тогда Γ имеет спектр $39^1, 9^{78}, -1^{117}, -6^{104}$ и $v = 1+39+234+26 = 300$ вершин.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 13\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 5$, $\alpha_3(g) = 50s$ и $\alpha_2(g) = 75t$, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 30s$ и $\alpha_2(g) = 45t$, либо $p = 2$, $\alpha_2(g) = 0$ и $\alpha_3(g) = 20s$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо $p = 13$, $n = 1$, $\alpha_3(g) = 130s + 26$ и $\alpha_2(g) = 195t + 39$, либо $p = 2$, $n = 2, 4, 6$, $\alpha_3(g) = 20s - 4n$ и $\alpha_2(g) = 30t - 6n$;*

(3) *Ω состоит из m вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $p = 3$ и либо $m = 3$, $\alpha_3(g) = 30s - 12 \leqslant 180$, $s = 1, 2, ..., 6$, $\alpha_2(g) = 45t - 18$, либо $m = 6$, $\alpha_3(g) = 6, 36$, $\alpha_2(g) = 45t - 36$;*

(4) *Ω содержит вершины b, c, находящиеся на расстоянии 2 в Γ, $p = 2, 3$ и $|\Omega| \leqslant 60$.*

Следствие 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$, группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Тогда 13 не делит $|G|$. В частности, G действует интранзитивно на множестве дуг графа Γ.*

Лемма 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$ имеет следующие числа пересечений:*

(1) $p^1_{11} = 8$, $p^1_{12} = 30$, $p^1_{23} = 24$, $p^1_{22} = 180$, $p^1_{33} = 2$;

(2) $p^2_{11} = 5$, $p^2_{12} = 30$, $p^2_{13} = 4$, $p^2_{22} = 183$, $p^2_{23} = 20$, $p^2_{33} = 2$;

(3) $p^3_{12} = 36$, $p^3_{13} = 3$, $p^3_{23} = 18$, $p^3_{22} = 180$, $p^3_{33} = 4$.

$\lhd$ Вычисления с помощью леммы 4.1.7 из [1]. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *граф Γ_3 сильно регулярен с параметрами $(300, 26, 4, 2)$ и спектром $26^1, 6^{117}, -4^{182}$;*

(2) *дополнительный граф Σ для Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(300, 65, 10, 15)$ и спектром $65^1, 5^{196}, -10^{103}$, окрестность вершины a в графе Σ имеет разбиение двумя регулярными подграфами: Δ_1 степени 7 на 26 вершинах и Δ_2 степени 8 на 39 вершинах, вершина из Δ_1 смежна с 3 вершинами из Δ_2, вершина из Δ_2 смежна с 2 вершинами из Δ_1;*

(3) *вершина из $\Sigma_2(a)$ смежна с 6 вершинами из Δ_1 и с 9 вершинами из Δ_2.*

$\lhd$ Положим $\Delta = \bar{\Gamma}_3$. По замечанию после предложения 4.2.18 из [1] собственные значения графа Δ равны $(\theta^2 + (c_2 - a_1)\theta - k)/c_2$, когда θ пробегает множество собственных значений графа Γ. При $\theta = -1$ получим $\theta_2(\Delta) = -(b_1 + c_2)/c_2$ и c_2 делит b_1.

Заметим, что $k(\Delta) = k + k_2 = k(1 + b_1/c_2)$ делится на $\theta_2(\Delta)$, поэтому Δ — псевдогеометрический граф для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Отсюда Δ — псевдогеометрический граф для $pG_{36}(39, 6)$ и граф Γ_3 сильно регулярен с параметрами $(300, 26, 4, 2)$.

Далее, дополнительный граф Σ для Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(300, 65, 10, 15)$ и спектром 65^1, 5^{196}, -10^{103}.

Для вершины $a \in \Sigma$ подграф $\Gamma_3(a)$ индуцирует в Σ граф Δ_1 степени 7 на 26 вершинах и $\Gamma_1(a)$ индуцирует в Σ граф Δ_2 степени 8 на 39 вершинах. $\rhd$

Лемма 3 [4, теорема 3.2]**.** *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v,k,λ,μ) и собственными значениями k, r, $-m$. Если g — автоморфизм Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то $|\Omega| \leqslant v\cdot \max\{\lambda,\mu\}/(k-r)$.*

Пусть g — нееденичный автоморфизм дистанционно регулярного графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Γ имеет массив пересечений $\{39,30,4;1,5,36\}$, то ввиду леммы 3 имеем $|\Omega| \leqslant 60$.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X,\mathscr{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geqslant 1$ класс R_i состоит из пар (u,w) таких, что $d(u,w)=i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u,w)\in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i>0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0),\ldots,p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1,\ldots,m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_jp_i(j)/n_i$ соответственно, называются *первой и второй матрицей собственных значений схемы* и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j\rangle$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ (см. [4, теорема 17.12]). Фактически, из доказательства теоремы 17.12 следует, что w_j являются столбцами матрицы P и m_ju_j являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v,\mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0,\ldots,W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [5, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = n^{-1}\sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x,x^g)=j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 4. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39,30,4;1,5,36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 117, χ_3 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 104, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$,*

$$\chi_2(g) = \frac{4\alpha_0(g)+\alpha_3(g)}{10-3}, \quad \chi_3(g) = \frac{6\alpha_0(g)+\alpha_2(g)}{15-16}.$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_2(g) - 117$ и $\chi_3(g) - 104$ делятся на p.

$\lhd$ Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 78 & 18 & -2 & -12 \\ 117 & -3 & -3 & 27 \\ 104 & -16 & 4 & -16 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = (39\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 9\alpha_3(g))/100$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 300 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/10 - 3$.

Далее, $\chi_3(g) = (26\alpha_0(g) - 4\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - 4\alpha_3(g))/75$. Учитывая равенство $\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + \alpha_2(g) + \alpha_3(g) = 300$, получим $\chi_3(g) = (6\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/15 - 16$.

Остальные утверждения леммы следуют из [6, лемма 1]. $\rhd$

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$

До конца параграфа предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 5$, $\alpha_3(g) = 50s$ и $\alpha_2(g) = 75t$ и G не содержит элементов порядка 25, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 30s$, $\alpha_2(g) = 45t$, либо $p = 2$, $\alpha_2(g) = 0$ и $\alpha_3(g) = 20s$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $p = 13$, $n = 1$, $\alpha_3(g) = 130s + 26$ и $\alpha_2(g) = 195t + 39$, либо $p = 2$, $n = 2, 4, 6$, $\alpha_3(g) = 20s - 4n$ и $\alpha_2(g) = 30t - 6n$;*

(3) *если Ω состоит из m вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, то $p = 3$ и либо $m = 3$, $\alpha_3(g) = 30s - 12 \leqslant 180$, $s = 1, 2, \dots, 6$, $\alpha_2(g) = 45t - 18$, либо $m = 6$, $\alpha_3(g) = 6, 36$, $\alpha_2(g) = 45t - 36$;*

(4) *если $[a] \subset \Omega$ для некоторой вершины a, то $p = 2$.*

$\lhd$ Пусть Ω — пустой граф. Так как $300 = 12 \cdot 25$, то $p = 2, 3$ или 5. Для $i > 0$ положим $\alpha_i(g) = pw_i$.

Пусть $p = 5$. Так как $\chi_2(g) - 117$ делится на 5, то $\alpha_3(g) = 50s$. Далее, $\chi_3(g) - 104$ делится на 5, поэтому $\alpha_2(g) = 75t$. Допустим, что G содержит элемент f порядка 25, $g = f^5$. Тогда $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/10 - 3$ и $\chi_2(g) - 117$ делится на 25, поэтому $\alpha_3(g) = 200$, $\chi_3(g) = \alpha_2(g)/15 - 16$ и $\chi_3(g) - 104$ делится на 25, поэтому $\alpha_2(g) = 300$, противоречие.

Пусть $p = 3$. Так как $\chi_2(g) - 117$ делится на 3, то $\alpha_3(g) = 30s$. Далее, $\chi_3(g) - 104$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 45t$.

Пусть $p = 2$. Так как $c_2 = 5$, то $\alpha_2(g) = 0$. Далее, число $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/10 - 3$ нечетно, поэтому $\alpha_3(g) = 20s$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 39 и 26, поэтому $p = 13$. Далее, $\chi_2(g) = (4 + \alpha_3(g))/10 - 3$ и $\alpha_3(g) = 130s + 26$, $\chi_3(g) = (6 + \alpha_2(g))/15 - 16$ и $\alpha_2(g) = 195t + 39$.

Пусть $n > 1$. Ввиду границы Дельсарта имеем $n \leqslant 1 + 39/6$ и p делит 26 и $300 - n$. Так как $a_1 = 8$, то p делит $10 - n$, $p = 2$, $n = 2, 4, 6$, число $\chi_2(g) = (4n + \alpha_3(g))/10 - 3$ нечетно и $\alpha_3(g) = 20s - 4n$. Далее, число $\chi_3(g) = (6n + \alpha_2(g))/15 - 16$ четно и $\alpha_2(g) = 30t - 6n$.

Пусть Ω состоит из m вершин, попарно находящихся на расстоянии 3. Тогда Ω является кликой в Γ_3 и $m \leqslant 6$. Далее, p делит 39, $300 - m$ и $6 - m$, поэтому $p = 3$, число $\chi_2(g) = (4m + \alpha_3(g))/10 - 3$ делится на 3, поэтому $\alpha_3(g) = 30s - 4m$. Отсюда $m = 3$, $\alpha_3(g) = 30s - 12 \leqslant 180$ и $s = 1, 2, ..., 6$ или $m = 6$, $\alpha_3(g) = 6, 36$. Число $\chi_3(g) - 104 = (6m + \alpha_2(g))/15 - 120$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 45t - 6m$.

Пусть $[a] \subset \Omega$ для некоторой вершины a. Если $p \geqslant 5$, то $[u] \cap [a]$ является 5-кликой для $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$, противоречие с тем, что для двух вершин $b, c \in [u] \cap [a]$ подграф $[b] \cap [c]$ содержит a, 3 вершины из $[u] \cap [a]$ и 5 вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Если $p = 3$, то с учетом равенств $p^1_{33} = 8$ и $p^3_{13} = 3$ имеем $\Gamma_3(a) \subset \Omega$. Противоречие с тем, что $|\Omega| \leqslant 60$. $\triangleright$

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω содержит вершины b, c, находящиеся на расстоянии 2 в Γ, то $p \leqslant 3$;*

(2) *если $p = 3$ и $|C_G(g)|$ делится на 25, то Ω — пустой граф и либо $\alpha_3(g) = 300$, либо $\alpha_3(g) = \alpha_1(g) = 150$, либо $\alpha_2(g) = 225$, $\alpha_1(g) = 75$.*

$\triangleleft$ Если $p \geqslant 11$, то Ω — вполне регулярный граф с $\lambda = 8$, $\mu = 5$ и степени $k' \geqslant 10$. В случае $\Gamma_3(a) \subset \Omega$ с учетом равенств $p^3_{13} = 3$ и $p^1_{33} = 2$, получим $[a] \subset \Omega$, противоречие с леммой 11. Значит, $p = 11$ и $|\Gamma_3(a) \cap \Omega| = 4$ для любой вершины $a \in \Omega$. Противоречие с тем, что в этом случае получим $|\Omega(a)| = 6$.

В случае $p = 7$ для $a \in \Omega$ подграф $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ имеет 12 вершин, $|\Omega(a)| = 18$ и $5|\Omega_2(a)| = 16y + 9(18 - y)$, поэтому $y = 4$ и $|\Omega_2(a)| = 38$, противоречие с тем, что $|\Omega| \leqslant 60$.

В случае $p = 5$ для $a \in \Omega$ подграф $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ имеет 16 вершин, $|\Omega(a)| = 24$ и $|\Omega_2(a)| \geqslant 24 \cdot 15/5$, противоречие.

Итак, $p = 2, 3$.

Пусть $p = 3$ и $|C_G(g)|$ делится на 25. Если Ω — непустой граф, то $|\Omega|$ делится на 75, противоречие. Значит, Ω — пустой граф и числа $\alpha_3(g) = 30s$, $\alpha_2(g) = 45t$ делятся на 25. Отсюда либо $\alpha_3(g) = 300$, либо $\alpha_3(g) = \alpha_1(g) = 150$, либо $\alpha_2(g) = 225$, $\alpha_1(g) = 75$. $\triangleright$

3. Граф с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$: вершинно симметричный случай

До конца работы будем предполагать, что G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и 13 делит $|G|$. Тогда $|G : G_a| = 300$ и $\pi(G) = \{2, 3, 5, 13\}$.

Лемма 7. *Если f — элемент порядка 13 из G, g — элемент простого порядка $p \neq 13$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то $p = 2$, $|\Omega| = 14$, $\alpha_3(g) = 104$, $\alpha_2(g) = 156$ и $\alpha_2(g) = 26$, в частности, $|C_G(f)|$ не делится на 4.*

$\triangleleft$ Ввиду теоремы 1 $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$ — одновершинный граф, $\alpha_3(f) = 130s + 26$ и $\alpha_2(f) = 195t + 39$.

Если Ω является n-кликой, то $p = 2$, $n = 2, 4, 6$. Противоречие с действием f на Ω.

Если Ω состоит из m вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, то $m = 3$ или $m = 6$, противоречие.

Пусть Ω содержит вершины b, c, находящиеся на расстоянии 2 в Γ. Тогда $|\Omega| = 13l + 1$. Если $p = 3$, то $l = 2$, $\chi_2(g) = (52l + 4 + \alpha_3(g))/10 - 3$ делится на 3, поэтому $\alpha_3(g) = 30m + 12$. Далее, $\chi_3(g) = (78l + 6 + \alpha_2(g))/15 - 16$ и $\alpha_2(g) = 45n + 18$. Так как числа $\alpha_3(g)$, $\alpha_2(g)$ делятся на 13, то $5m + 2$ и $5n + 2$ делятся на 13, поэтому $m = n = 10$, противоречие.

Если $p = 2$, то $l = 1, 3$, число $\chi_2(g) = (52l + 4 + \alpha_3(g))/10 - 3$ нечетно, поэтому $\alpha_3(g) = 20m + 8l - 4$. Далее, число $\chi_3(g) = (78l + 6 + \alpha_2(g))/15 - 16$ четно и $\alpha_2(g) = 30n + 12l - 6$. Так как числа $\alpha_3(g)$, $\alpha_2(g)$ делятся на 13, то $5m + 2l - 1$ и $5n + 2l - 1$ делятся на 13. Если $l = 1$, то $m = n = 5$, а если $l = 3$, то $m = n = 10$. Отсюда $\alpha_3(g) = 104$, $\alpha_2(g) = 156$. $\triangleright$

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *разрешимый радикал $S(G)$ является $\{2, 3\}$-группой;*

(2) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморен $L_2(25)$, $\bar{T}_a$ — диэдральная группа порядкса 26 и $S(G) = 1$.*

$\lhd$ Так как $v = 300$, то $S(G)$ является $\{2,3,5\}$-группой. Ввиду леммы 7 число $|S(G)|$ не делится на 5.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. По [7, теорема 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(25)$, $U_3(4)$, ${}^2F_4(2)'$. Далее, $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ делится на 25 и делит 300. Поэтому $\bar{T} \cong L_2(25)$, $\bar{T}_a$ — диэдральная группа порядка 26 индекса 300 в $\bar{T}$. Отсюда $S(G) = 1$. $\rhd$

Завершим доказательство следствия 1. По лемме 8 цоколь T группы G изоморфен $L_2(25)$ и T_a — диэдральная группа порядка 26. Компьютерные вычисления показывают, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$ не возникает. Следствие 1 доказано.

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular Graphs.—Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
2. *Degraer J.* Isomorph-free exhaustive generation algorithms for association schemes: PhD Thesis.—Univ. Ghent, 2007.—221 pp.
3. *Jurisic A., Vidali J.* Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr.—2012.—Vol. 65.—P. 29–47.
4. *Behbahani M., Lam C.* Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math.—2011.—Vol. 311.—P. 132–144.
5. *Cameron P. J.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts № 45).
6. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН.–2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
7. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 20 декабря 2016 г.

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: gutnovaalina@gmail.com

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

ON AUTOMORPHISMS OF A DISTANCE-REGULAR GRAPH WITH INTERSECTION OF ARRAYS $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$

Gutnova A. K., Makhnev A. A.

J. Koolen posed the problem of studying distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with the second eigenvalue $\leqslant t$ for a given positive integer t. This problem is reduced to the description of distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with non-principal eigenvalue t for $t = 1, 2, \ldots$ Let Γ be a distance regular graph of diameter 3 with eigenvalues $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. If $\theta_2 = -1$, then by Proposition 4.2.17 from the book «Distance-Regular Graphs» (Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.) the graph Γ_3 is strongly regular and Γ is an antipodal graph if and only if Γ_3 is a coclique. Let Γ be a distance-regular graph and the graphs Γ_2, Γ_3 are strongly regular. If $k < 44$, then Γ has an intersection array $\{19, 12, 5; 1, 4, 15\}$, $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$ or $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$. In the first two cases the graph does not exist according to the works of Degraer J. «Isomorph-free exhaustive generation algorithms for association schemes» and Jurisic A., Vidali J. «Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3». In this paper we found the possible automorphisms of a distance regular graph with an array of intersections $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$.

Key words: regular graph, symmetric graph, distance-regular graph, automorphism groups of graph.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 18–27

УДК **517.9**

О РАСЩЕПЛЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ИЗ КОММУТАТИВНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

А. Э. Пасенчук

Рассматривается задача о разложении многочленов с коэффициентами из унитальной коммутативной банаховой алгебры в произведение многочленов с коэффициентами из этой же алгебры. Указываются достаточные условия существования такого разложения и его конструкция, приводятся приложения в теории операторов Теплица на окружности и торе. В частности, для двумерного теплицева оператора со специальным символом произведена равносильная регуляризация.

Ключевые слова: многочлен, коммутативная банахова алгебра, расщепление многочлена, оператор Теплица, регуляризация.

1. Введение

Будем пользоваться стандартными обозначениями $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ для множеств целых, вещественных, комплексных чисел соответственно. Нам понадобятся также следующие подмножества этих множеств: $\mathbb{Z}_+ = \{j \in \mathbb{Z} : j \geqslant 0\}$, $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}_+$, $\Gamma = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1\}$, $D^+ = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < 1\}$, $D^- = \mathbb{C} \backslash D^+$, $\overline{D^\pm} = D^\pm \cup \Gamma$.

Через GB обозначим группу обратимых элементов алгебры B.

Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная банахова алгебра (КБА) с единицей e, а $m \in Z_+$. Через $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ обозначим КБА $\mathfrak{A}$-значных функций вида

$$W(\Gamma, \mathfrak{A}) = \left\{ A(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \xi^j : \ \|A(\xi)\|_W = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|a_j\|_{\mathfrak{A}} < \infty \right\}.$$

Рассмотрим следующие подалгебры КБА $W(\Gamma, \mathfrak{A})$:

$$W^+(\Gamma, \mathfrak{A}) = \left\{ A(\xi) = \sum_j a_j \xi^j : \ a_j = 0, \, j \in \mathbb{Z}_- \right\},$$

$$W^-(\Gamma, \mathfrak{A}) = \left\{ A(\xi) = \sum_j a_j \xi^j : \ a_j = 0, \, j = 1, 2, \dots \right\}.$$

Ясно, что $W^+(\Gamma, \mathfrak{A}) \cap W^-(\Gamma, \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$.

При исследовании операторов Теплица решающим шагом является факторизация символа (см. [1–3]), т. е. его представление в виде $a(\xi) = a^-(\xi) a_0(\xi) a^+(\xi)$, где $a^\pm(\xi) \in GW^\pm(\mathbb{C}, \Gamma)$, $a_0(\xi) \in W(\mathbb{C}, \Gamma)$. В предлагаемой работе изучается аналог такого представления для многочленов с коэффициентами из унитальной КБА без радикала, приводятся некоторые приложения этого результата.

2. Вспомогательные сведения

Доказательства приводимых в этом параграфе фактов труда не представляют и могут легко быть воспроизведены читателем.

Через $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ будем обозначать пространство максимальных идеалов КБА $\mathfrak{A}$, а через $\operatorname{Rad}\mathfrak{A}$ — радикал этой алгебры.

Пусть $\chi \in \mathfrak{M}\mathfrak{A}$, а $\xi_0 \in \Gamma$, обозначим через $\chi \times \xi_0$ функционал, определенный на элементах КБА $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ равенством

$$(\chi \times \xi_0)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \xi^j\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi(a_j)\xi_0^j.$$

Лемма 1. *Пространство максимальных идеалов КБА $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ гомеоморфно компакту $\mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \Gamma$, т. е. имеет вид*

$$\mathfrak{M}W(\Gamma, \mathfrak{A}) = \{\chi \times \xi_0 : \chi \in \mathfrak{M}\mathfrak{A},\ \xi_0 \in \Gamma\}.$$

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — КБА с единицей, $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ — пространство максимальных идеалов КБА $\mathfrak{A}$, $A(\xi) = \sum_j a_j \xi^j \in W(\Gamma, \mathfrak{A})$. Преобразованием Гельфанда элемента $A(\xi)$ является определенная на $\mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \Gamma$ функция $A(\chi, \xi) = \sum_j \chi(a_j)\xi^j$.*

Лемма 2. *Пространство максимальных идеалов КБА $W^{\pm}(\Gamma, \mathfrak{A})$ гомеоморфно компакту $\mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \overline{D^{\pm}}$, т. е. имеет вид*

$$\mathfrak{M}W^{\pm}(\Gamma, \mathfrak{A}) = \{\chi \times \xi_0 : \chi \in \mathfrak{M}\mathfrak{A},\ \xi_0 \in \overline{D^{\pm}}\,\}.$$

Отметим, что ввиду неравенства $|\chi(a_j)| \leqslant \|a_j\|$ при любом фиксированном $\chi \in \mathfrak{M}\mathfrak{A}$ функция $A(\chi, \xi)$ является элементом алгебры $W(\Gamma, \mathbb{C})$. Более того, в силу мультипликативности элементов $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ отображение $A(\xi) \mapsto A(\chi, \xi)$ является гомоморфизмом алгебры $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ в алгебру $W(\Gamma, \mathbb{C})$.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $A(\xi) \in GW(\Gamma, \mathfrak{A})$;
2) $A(\xi_0) \in G\mathfrak{A}$ *для любого фиксированного* $\xi_0 \in \Gamma$;
3) $A(\chi, \xi) \in GC(\mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \Gamma)$, *т. е.* $A(\chi, \xi) \neq 0$, $(\chi, \xi) \in \mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \Gamma$.

Лемма 3. *Радикал КБА $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ состоит из тех и только тех элементов этой алгебры, все коэффициенты Фурье которых, являются элементами радикала КБА $\mathfrak{A}$:*

$$\operatorname{Rad} W(\Gamma, \mathfrak{A}) = \left\{\sum_j a_j \xi^j \in W(\Gamma, \mathfrak{A}) : (\forall\, j)\ a_j \in \operatorname{Rad}\mathfrak{A}\right\}.$$

Следствие 2. *Радикал КБА $W(\Gamma, \mathfrak{A})$ тривиален тогда и только тогда, когда тривиален радикал КБА $\mathfrak{A}$.*

Теорема 2. *Следующие условия равносильны:*

1) $A(\xi) \in GW^{\pm}(\Gamma, \mathfrak{A})$;
2) $A(\xi_0) \in G\mathfrak{A}$ *для любого фиксированного* $\xi_0 \in \overline{D^{\pm}}$;
3) $A(\chi, \xi) \neq 0$, $(\chi, \xi) \in \mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \overline{D^{\pm}}$;
4) $A(\chi, \xi) \neq 0$, $(\chi, \xi) \in \mathfrak{M}\mathfrak{A} \times \Gamma$ *и* $\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma} A(\chi, \xi) = 0$, $\chi \in \mathfrak{M}\mathfrak{A}$.

3. Основной результат

Пусть K — связный компакт. Обозначим через $C(K)$ банахово пространство непрерывных на K функций.

Лемма 4. *Пусть многочлен $p(t,\xi)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(t)\xi^k$, $\alpha_k(t)\in C(K)$, таков, что $p(t,\xi)\neq 0$, $(t,\xi)\in K\times\Gamma$. Тогда индекс $\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma}p(t,\xi)$ не зависит от $t\in K$ и имеет место неравенство $\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma}p(t,\xi)\leqslant n$.*

Теорема 3. *Если многочлен $p(t,\xi)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(t)\xi^k$, $\alpha_k(t)\in C(K)$ и $p(t,\xi)\neq 0$, $(t,\xi)\in K\times\Gamma$, то найдутся многочлены $p_m(t,\xi)$, $q_{n-m}(t,\xi)$ с коэффициентами из $C(K)$ такие, что $p(t,\xi)=p_m(t,\xi)q_{n-m}(t,\xi)$, и при этом*

1) $m=\deg p_m(t,\xi)=\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma}p(t,\xi)$, $n-m=\deg q_{n-m}(t,\xi)$;

2) $p_m(t,\xi)\neq 0$, $(t,\xi)\in K\times\overline{D^-}$; $q_{n-m}(t,\xi)\neq 0$, $(t,\xi)\in K\times\overline{D^+}$.

$\lhd$ Зафиксируем $t\in K$ и положим $m=\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma}p(t,\xi)$. Согласно свойствам индекса $\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma}p(t,\xi)$ есть число нулей многочлена $p(t,\xi)$ в области D^+. Пусть $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\ldots$, $\xi_m(t)$ — все корни этого многочлена, причем каждый корень повторен столько раз, какова его кратность. Тогда, пользуясь теорией вычетов, нетрудно получить, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\xi^s p'_\xi(t,\xi)}{p(t,\xi)}\,d\xi=\sum_{k=1}^{m}\xi_k^s(t),\quad s=1,2,\ldots$$

Из последней формулы следует, что суммы Ньютона $S_k(t)=\sum_{s=1}^{m}\xi_s^k(t)$ корней многочлена, лежащих в области D^+, есть непрерывные на K функции при любом $s=1,2,\ldots$ Но тогда согласно формулам Ньютона — Жирара элементарные симметрические функции корней $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\ldots$, $\xi_m(t)$ также непрерывны на K. Положим $p_m(t)=\prod_{s=1}^{m}(\xi-\xi_s(t))$ и $q_{n-m}(t)=p(t)/p_m(t)$. В силу сделанных замечаний многочлен $p_m(t)$ имеет коэффициенты, непрерывные на K, причем коэффициент при старшей степени равен 1. Пользуясь стандартным алгоритмом деления многочленов, нетрудно заметить, что многочлен $q_{n-m}(t)$ также имеет коэффициенты, непрерывные на K. Условия 1), 2) при этом выполняются по построению. $\rhd$

Пусть $\mathfrak{A}$ — КБА, $P(\xi)=\sum_{j=0}^{n}p_j\xi^j$, $p_j\in\mathfrak{A}$. Для $P(\xi)\in GW(\Gamma,\mathfrak{A})$ положим $\omega_j(P,\xi)=\xi^j(P(\xi))^{-1}$, $j\in\mathbb{Z}_+$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{A}$ — унитальная КБА без радикала, $P(\xi)=\sum_{j=0}^{n}p_j\xi^j$, $p_j\in\mathfrak{A}$. Если $P(\xi)\in GW(\Gamma,\mathfrak{A})$, то найдутся многочлены $P_m(\xi)$, $Q_{n-m}(\xi)$ с коэффициентами из КБА $\mathfrak{A}$ такие, что $P(\xi)=P_m(\xi)Q_{n-m}(\xi)$, и при этом*

1) $\omega_j(P_m,\xi)\in W^-(\Gamma,\mathfrak{A})$, $j=0,1,\ldots,m$, причем $\omega_j(P_m,\infty)=0$, $j=0,1,\ldots,m-1$, $\omega_m(P_m,\infty)=I$;

2) $\omega_m(P_m,\xi)\in GW^-(\Gamma,\mathfrak{A})$;

3) $(Q_{n-m}(\xi))^{-1}\in W^+(\Gamma,\mathfrak{A})$.

$\lhd$ Рассмотрим функцию $P(\chi,\xi)$, $(\chi,\xi)\in\mathfrak{MA}\times\Gamma$. Согласно теореме 1 $P(\chi,\xi)\neq 0$, $(\chi,\xi)\in\mathfrak{MA}\times\Gamma$, поэтому на каждой компоненте связности пространства максимальных идеалов имеет место представление функции $P(\chi,\xi)$, описанное в теореме 3. Можно считать, что представление $P(\chi,\xi)=P_m(\chi,\xi)Q_{n-m}(\chi,\xi)$ имеет место на всем компакте $\mathfrak{MA}\times\Gamma$. Для этого достаточно положить коэффициенты многочленов $P_m(\chi,\xi)$, $Q_{n-m}(\chi,\xi)$ равными функциям, определенным на компонентах связности $\mathfrak{MA}$, при соответствующих степенях ξ. Эти функции непрерывны на каждой компоненте и, следовательно, они непрерывны на $\mathfrak{MA}$. Поскольку $\operatorname{Rad}\mathfrak{A}$ тривиален, то преобразование

Гельфанда есть мономорфизм банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ в $C(\mathfrak{M}\mathfrak{A})$. Это означает, что имеет место представление $P(\xi) = P_m(\xi)Q_{n-m}(\xi)$. При этом утверждения 1), 2), 3) имеют место по построению. $\triangleright$

4. О теплицевых операторах с полиномиальными символами

Пусть H — гильбертово пространство, $L(H)$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве H. Обозначим через $L_2(\Gamma, H)$ гильбертово пространство H-значных функций, определенных на единичной окружности,

$$L_2(\Gamma, H) = \left\{\phi(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j \xi^j : \ \phi_j \in H, \ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\phi_j\|_H^2 < \infty\right\}$$

с очевидными операциями, нормой и скалярным произведением. Проекторы на подпространства

$$L_2^+(\Gamma, H) = \left\{\phi(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j \xi^j \in L_2(\Gamma, H) : \ \phi_j = 0, \ j \in \mathbb{Z}_-\right\},$$

$$L_2^-(\Gamma, H) = \left\{\phi(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j \xi^j \in L_2(\Gamma, H) : \ \phi_j = 0, \ j \in \mathbb{Z}_+\right\}$$

будем обозначать P^+, P^- соответственно.

Рассмотрим оператор Теплица $T_A : L_2^+(\Gamma, H) \to L_2^+(\Gamma, H)$, порождаемый символом $A(\xi) \in W(\Gamma, L(H))$ и действующий по правилу $\phi(\xi) \mapsto (T_A\phi)(\xi) = P^+A(\xi)\phi(\xi)$.

Пусть $\mathfrak{A} \subseteq L(H)$ — коммутативная подалгебра алгебры $L(H)$ с тождественным оператором в качестве единицы, не имеющая радикала. Если $P(\xi) = \sum_{j=0}^n p_j\xi^j$, $p_j \in \mathfrak{A}$, и $P(\xi) \in GW(\Gamma, \mathfrak{A})$, то через $P_m(\xi)$, $Q_{n-m}(\xi)$ будем обозначать многочлены, построенные по функции $P(\xi)$ в теореме 3.

Следующий результат является уточнением хорошо известного результата об обратимости слева оператора Теплица, символом которого является обратимый полином.

Теорема 5. *Если $P(\xi) \in GW(\Gamma, \mathfrak{A})$, то оператор Теплица T_P обратим слева, уравнение $T_P\phi = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_\Gamma \xi^{m-k-1}(P_m(\xi))^{-1} f(\xi)\, d\xi = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

При выполнении этих условий единственное решение уравнения $T_P\phi = f$ имеет вид

$$\phi(\xi) = (Q_{n-m}(\xi))^{-1}P^+(P_m(\xi))^{-1}f(\xi) = P^+(P(\xi))^{-1}f(\xi).$$

Теорема 6. *Пусть $P(\xi) \in GW(\Gamma, \mathfrak{A})$, а $U(\xi) = P(\xi^{-1})$. Тогда оператор Теплица T_U обратим справа, подпространство $\ker T_U$ совпадает с линейной оболочкой системы $S = \left\{\xi^{-j}(P_m(\xi^{-1}))^{-1}\phi_j, j = 0, 1, \ldots, m-1\right\}$, где ϕ_j — произвольные элементы пространства H. Общее решение уравнения $T_U\phi = f$ имеет вид*

$$\phi(\xi) = \sum_{j=0}^{m-1} \xi^{-j}\big(P_m(\xi^{-1})\big)^{-1}\phi_j + \big(P(\xi^{-1})\big)^{-1}f(\xi).$$

$\lhd$ В доказательстве нуждается лишь утверждение о ядре оператора T_U. В силу свойства частичной мультипликативности и обратимости оператора $T_{Q_{n-m}(\xi^{-1})}$ имеет место равенство $\ker T_U = \ker T_{P_m(\xi^{-1})}$. Согласно теореме 4 имеем

$$\omega_j\big(P_m, \xi^{-1}\big) = \xi^{-j}\big(P_m\big(\xi^{-1}\big)\big)^{-1} \in W^+(\Gamma, \mathfrak{A}), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

поэтому $\xi^{-j}\big(P_m\big(\xi^{-1}\big)\big)^{-1}\phi_j \in L_2^+(\Gamma, H)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, для любого $\phi_j \in H$. Элементарная проверка показывает, что

$$T_{P_m(\xi^{-1})}\xi^{-j}\big(P_m\big(\xi^{-1}\big)\big)^{-1}\phi_j = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Это доказывает, что $l(S) \subseteq \ker T_{P_m(\xi^{-1})} = \ker T_U$. То, что все элементы подпространства $\ker T_{P_m(\xi^{-1})}$ являются элементами линейной оболочки системы S, вытекает из следующих соображений. Рассмотрим сопряженный оператор $(T_{P_m(\xi^{-1})})^*$. Нетрудно убедиться в том, что он является оператором Теплица и имеет в качестве символа многочлен $P_m^*(\xi) = \sum_{k=0}^m \alpha_k^*\xi^k$, если $P_m(\xi) = \sum_{k=0}^m \alpha_k\xi^k$. При этом $\alpha_k^* \in \mathfrak{A}^*$, где $\mathfrak{A}^* = \{\alpha^* \in L(H) : \alpha \in \mathfrak{A}\}$. Ясно, что $\mathfrak{A}^*$ — унитальная КБА без радикала и к оператору $T_{P_m^*}$ применима теорема 5. Условия разрешимости

$$\int\limits_\Gamma \xi^{m-k-1}(P_m^*(\xi))^{-1}f(\xi)\,d\xi = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

уравнения $T_{P_m^*}\phi = f$ можно записать в виде условий ортогональности правой части некоторой системе элементов, являющихся элементами ядра сопряженного оператора. При этом линейная оболочка этой системы ввиду нормальной разрешимости оператора $T_{P_m^*}$ совпадает с ядром оператора $(T_{P_m^*})^*$. Учитывая, что $(T_{P_m^*(\xi)})^* = T_{P_m(\xi^{-1})}$, а упомянутая система элементов есть S, убеждаемся в справедливости теоремы. $\rhd$

5. О матричных теплицевых операторах

В этом параграфе будем предполагать, что $H = \mathbb{C}^n$ и, что зафиксирован некоторый базис. Тогда, очевидно, символ теплицева оператора есть матрица-функция порядка n. Пусть $A(\xi) = (a_{jk}(\xi)) \in W(\Gamma, L(\mathbb{C}^n))$, через $(A(\xi))^\times = (A_{kj}(\xi))$ будем обозначать присоединенную матрицу. Разумеется, в приведенных записях $A_{kj}(\xi)$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{kj}(\xi)$ матрицы-функции $A(\xi)$. Ясно, что если $A^\pm(\xi) \in W^\pm(\Gamma, L(\mathbb{C}^n))$, то и $(A^\pm(\xi))^\times \in W^\pm(\Gamma, L(\mathbb{C}^n))$.

Теорема 7. *Пусть $A^+(\xi) \in W^+(\Gamma, L(\mathbb{C}^n))$ такова, что $\det A^+(\xi) = P(\xi)$, где $P(\xi)$ — многочлен. Тогда, если $P(\xi) \neq 0, \xi \in \Gamma$, то оператор Теплица $T_{A^+} : L_2^+(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to L_2^+(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ обратим слева. Если выполнены условия*

$$\sum_{k=1}^n \int\limits_\Gamma \xi^{m-s-1}(P_m(\xi))^{-1}A_{kj}(\xi)f_j(\xi)\,d\xi = 0, \quad j = 1, 2, \ldots,\ s = 0, 1, \ldots, m-1,$$

то уравнение $T_{A^+}\Phi = F$, где $(\phi_1(\xi), \phi_2(\xi), \ldots, \phi_n(\xi))^\tau$, $F(\xi) = (f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi))^\tau$, разрешимо. При выполнении этих условий единственное решение уравнения $T_{A^+}\Phi = F$ имеет вид $\Phi(\xi) = (A^+(\xi))^{-1}F(\xi)$.

Теорема 8. *Пусть $A^-(\xi) \in W^-(\Gamma, L(\mathbb{C}^n))$ такова, что $\det A^-(\xi) = P(\xi^{-1})$, где $P(\xi)$ — многочлен. Тогда, если $P(\xi) \neq 0$, $\xi \in \Gamma$, то оператор Теплица $T_{A^-} : L_2^+(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to L_2^+(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ обратим справа. Имеет место вложение $l(S) \subseteq \ker T_{A^-}$, где $l(S)$ — линейная оболочка системы элементов $S = \big\{\xi^j(P_m(\xi^{-1}))^{-1}\phi_j, j = 0, 1, \ldots, m-1\big\}$, причем ϕ_j — произвольные элементы пространства H.*

6. О двумерных теплицевых операторах

Положим $\Gamma^2 = \Gamma \times \Gamma$, $L_2(\Gamma^2) = L_2(\Gamma, L_2(\Gamma))$, $W(\Gamma^2) = W(\Gamma, W(\Gamma))$, $L_2^{\pm\pm}(\Gamma^2) = L_2^{\pm}(\Gamma, L_2^{\pm}(\Gamma))$, $W^{\pm\pm}(\Gamma^2) = W^{\pm}(\Gamma, W^{\pm}(\Gamma))$. Введем также следующие обозначения: $W^{\pm\bullet}(\Gamma^2) = W^{\pm+}(\Gamma^2) + W^{\pm-}(\Gamma^2)$, $W^{\bullet\pm}(\Gamma^2) = W^{+\pm}(\Gamma^2) + W^{-\pm}(\Gamma^2)$.

Оператор проектирования на подпространство $L_2^{\pm\pm}(\Gamma^2)$ будем обозначать $P^{\pm\pm}$.

Двумерным теплицевым оператором называют оператор $T_A : L_2^{++}(\Gamma^2) \to L_2^{++}(\Gamma^2)$, действующий по правилу $\phi(\xi, \eta) \mapsto P^{++}A(\xi, \eta)\phi(\xi, \eta)$, где $A(\xi, \eta) \in W(\Gamma^2)$. Функцию $A(\xi, \eta)$ называют символом оператора T_A.

До сих пор наиболее общим результатом для оператора $T_a : L_2^{++}(\Gamma^2) \to L_2^{++}(\Gamma^2)$ является следующий критерий нетеровости, полученный И. Б. Симоненко [4].

Теорема 9. *Оператор $T_a : L_2^{++}(\Gamma^2) \to L_2^{++}(\Gamma^2)$ нетеров тогда и только тогда, когда его символ удовлетворяет условиям:*

1) $a(\xi, \eta) \neq 0$, $(\xi, \eta) \in \Gamma^2$;

2) $\operatorname{ind}_\xi a(\xi, \eta) = \operatorname{ind}_\eta a(\xi, \eta) = 0$.

При выполнении условий теоремы индекс оператора T_a равен нулю.

В этом параграфе рассматривается нетеров двумерный оператор Теплица с символом $a(\xi, \eta) = a_{-1}(\eta)\xi^{-1} + a_0(\eta) + a_1(\eta)\xi$, где $a_k(\eta) \in W(\Gamma)$, $k = -1, 0, 1$.

Пусть $b(\xi, \eta) = b_2(\eta)\xi^2 + b_1(\eta)\xi + b_0(\eta)$, где $b_2(\eta), b_1(\eta), b_0(\eta) \in W(\Gamma)$ и функции $b_2(\eta), b_0(\eta)$ не являются тождественными нулями. Нас будут интересовать корни уравнения $b(\xi, \eta) = 0$ в предположении, что переменная $\eta \in \Gamma$ фиксирована. Ясно, что имеются два кривых корня $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$, определяемых по стандартным формулам. Однако эти корни не обязаны обладать, вообще говоря, никакими свойствами непрерывности или гладкости по переменной $\eta \in \Gamma$. Однако, оказывается, что при некоторых дополнительных условиях о кривых $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$ можно утверждать, что они обладают, в некотором смысле, такими свойствами. Например, имеет место следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $b(\xi, \eta) \neq 0$, $(\xi, \eta) \in \Gamma^2$ и $\operatorname{ind}_\xi b(\xi, \eta) = 1$. Тогда*

$$b(\xi, \eta) = d_0(\eta)\big(\xi - \xi_1(\eta)\big)\big(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi\big)$$

и кривые нулей $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$ таковы, что

$$|\xi_1(\eta)| < 1, \ \forall\, \eta \in \Gamma, \quad |\xi_2(\eta)| > 1, \ \forall\, \eta \in \Gamma \quad \textit{и} \quad \xi_1(\eta) \in W(\Gamma), \ \xi_2^{-1}(\eta) \in W(\Gamma).$$

$\lhd$ Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 3. $\rhd$

Замечание. В представлении $b(\xi, \eta) = d_0(\eta)(\xi - \xi_1(\eta))(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi)$ квадратного трехчлена, удовлетворяющего условиям леммы 5, $d_0(\eta) \neq 0$, $\eta \in \Gamma$ и $\operatorname{ind}_\eta d_0(\eta) = \operatorname{ind}_\eta b(\xi, \eta)$.

Лемма 6. *Пусть $a^{+\bullet}(\xi, \eta) \in W^{+\bullet}(\Gamma^2)$ и допускает представление*

$$a^{+\bullet}(\xi, \eta) = a^{--}(\xi, \eta)a^{+-}(\xi, \eta)a^{-+}(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta)\xi^n,$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$, а $a^{\pm\mp}(\xi, \eta) \in W^{\pm\mp}(\Gamma^2)$, причем $a^{+-}(\xi, \eta) \in GW^{+\bullet}(\Gamma^2)$. Тогда оператор Теплица $T_{a^{+\bullet}}$ допускает представление

$$T_{a^{+\bullet}} = T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}T_{\xi^n}.$$

Рассмотрим связанный с символом $a(\xi, \eta)$ многочлен

$$p(\xi, \eta) = \xi a(\xi, \eta) = a_{-1}(\eta) + a_0(\eta)\xi + a_1(\eta)\xi^2.$$

Очевидно, $p(\xi,\eta) \neq 0$, $(\xi,\eta) \in \Gamma^2$ и в силу свойств индекса $\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma} p(\xi,\eta) = 1$, $\operatorname{ind}_{\eta\in\Gamma} p(\xi,\eta) = 0$. Согласно лемме 5 и замечанию к ней найдутся функции $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$ такие, что $|\xi_1(\eta)| < 1$ $(\forall\eta \in \Gamma)$, $|\xi_2(\eta)| > 1$ $(\forall\eta \in \Gamma)$, $\xi_1(\eta) \in W(\Gamma)$, $\xi_2^{-1}(\eta) \in W(\Gamma)$, и при этом имеет место равенство

$$p(\xi,\eta) = d_0(\eta)\big(\xi - \xi_1(\eta)\big)\big(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi\big).$$

Отметим, что $d_0(\eta) \in W(\Gamma)$, $d_0(\eta) \neq 0$, $\eta \in \Gamma$ и $\operatorname{ind}_\eta d_0(\eta) = \operatorname{ind}_\eta p(\xi,\eta) = 0$. Хорошо известно [2], что при выполнении последних условий функция $d_0(\eta) \in W(\Gamma)$ допускает каноническую факторизацию в $W(\Gamma)$: $d_0(\eta) = d^-(\eta)d^+(\eta)$. Принимая во внимание приведенные факты, представим символ в следующем виде:

$$a(\xi,\eta) = d^-(\eta)\big(1 - \xi_1(\eta)\xi^{-1}\big)\big(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi\big)d^+(\eta).$$

В силу свойства частичной мультипликативности отсюда следует, что

$$T_a = T_{d^-(\eta)}T_{(1-\xi_1(\eta)\xi^{-1})(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)}T_{d^+(\eta)}.$$

Поскольку операторы $T_{d^-(\eta)}$, $T_{d^+(\eta)}$ обратимы и при этом

$$(T_{d^-(\eta)})^{-1} = T_{(d^-(\eta))^{-1}}, \quad (T_{d^+(\eta)})^{-1} = T_{(d^+(\eta))^{-1}},$$

то поведение оператора T_a определяется поведением оператора $T_{(1-\xi_1(\eta)\xi^{-1})(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)}$. В связи с этим символ $(1-\xi_1(\eta)\xi^{-1})(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)$ и соответствующий ему оператор Теплица будем называть модельными. Отметим, что операторы Теплица $T_{1-\xi_1(\eta)\xi^{-1}}$, $T_{1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi}$ обратимы и при этом

$$T_{1-\xi_1(\eta)\xi^{-1}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\big(P^{++}\big(\xi_1(\eta)\xi^{-1}\big)P^{++}\big)^j, \quad T_{1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\big(P^{++}\big(\xi_2^{-1}(\eta)\xi\big)P^{++}\big)^j.$$

Запишем модельный символ в виде

$$a(\xi,\eta) = \xi^{-1}\big(\xi - \xi_1(\eta)\big)\big(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi\big).$$

В силу свойства частичной мультипликативности отсюда имеем

$$T_a = T_{\xi^{-1}}T_{(\xi-\xi_1(\eta))(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)}.$$

Поскольку $(\xi - \xi_1(\eta))(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi) \in W^{+\bullet}(\Gamma^2)$, то из

$$\big(\xi - \xi_1(\eta)\big)\big(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi\big) = a^{--}(\xi,\eta)a^{+-}(\xi,\eta)a^{-+}(\xi,\eta)a^{++}(\xi,\eta)\xi,$$

следует, что

$$T_{(\xi-\xi_1(\eta))(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)} = T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_\xi T_{a^{++}}.$$

Отсюда имеем следующее представление оператора Теплица:

$$T_a = T_{\xi^{-1}}T_{(\xi-\xi_1(\eta))(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)} = T_{(\xi-\xi_1(\eta))(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)} = T_{\xi^{-1}}T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_\xi T_{a^{++}}.$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$T_{(1-\xi_1(\eta)\xi^{-1})(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)}\phi^{++}(\xi,\eta) = f^{++}(\xi,\eta).$$

Ввиду полученного представления, имеем

$$T_{\xi^{-1}}T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_{\xi}T_{a^{++}}\phi^{++}(\xi,\eta)=f^{++}(\xi,\eta).$$

Откуда получаем

$$T_{a^{+-}}T_{1-\xi_1(\eta)\xi^{-1}}T_{\xi}T_{a^{++}}\phi^{++}(\xi,\eta)=c^{+}(\eta)+\xi f^{++}(\xi,\eta),$$

где $c^{+}(\eta)\in\ker T_{\xi^{-1}}$. Положим

$$b^{+-}(\xi,\eta)=(a^{+-}(\xi,\eta))^{-1}=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}b_j^{-}(\eta)\xi^{j}.$$

Тогда последнее равенство равносильно следующему:

$$T_{1-\xi_1(\eta)\xi^{-1}}T_{\xi}T_{a^{++}}\phi^{++}(\xi,\eta)=T_{b^{+-}}c^{+}(\eta)+T_{b^{+-}}\xi f^{++}(\xi,\eta).$$

Но тогда

$$\xi a^{++}(\xi,\eta)\phi^{++}(\xi,\eta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\big(P^{++}\xi_1(\eta)\xi^{-1}P^{++}\big)^{k}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}P^{++}b_j^{-}(\eta)\xi^{j}P^{++}c^{+}(\eta)+f_1^{++}(\xi,\eta),$$

где

$$b^{+-}(\xi,\eta)=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}b_j^{-}(\eta)\xi^{j},\quad f_1^{++}(\xi,\eta)=T_{b^{+-}}\xi f^{++}(\xi,\eta).$$

Полагая в последнем равенстве $\xi=0$, получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\big(P^{++}\xi_1(\eta)P^{+}\big)^{k}P^{++}b_k^{-}(\eta)P^{+}c^{+}(\eta)=-f_1^{++}(0,\eta).$$

Нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\big(P^{+}\xi_1P^{+}\big)^{k}P^{+}b_k^{-}P^{+}=P^{+}b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^{+}+\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\Big(\big(P^{+}\xi_1P^{+}\big)^{k}P^{+}b_k^{-}P^{+}-\big(P^{+}b_k^{-}\xi_1^{k}P^{+}\big)\Big).$$

Лемма 7. *Оператор*

$$K=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\Big(\big(P^{+}\xi_1(\eta)P^{+}\big)^{k}P^{+}b_k^{-}(\eta)P^{+}-\big(P^{+}b_k^{-}(\eta)\xi_1^{k}(\eta)P^{+}\big)\Big)$$

вполне непрерывен в пространстве $L_2^{+}(\Gamma)$.

Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$\big(P^{+}b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^{+}+K\big)c^{+}(\eta)=-f_1^{++}(0,\eta).$$

Лемма 8. *Оператор Теплица* $P^{+}b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^{+}\colon L_2^{+}(\Gamma)\to L_2^{+}(\Gamma)$ *обратим.*

$\lhd$ В самом деле, из того, что $b^{+-}(\xi,\eta)\in GW^{+-}(\Gamma^2)$, следует, что $b^{+-}(\xi,\eta)\neq 0$, $|\xi|\leqslant 1$, $|\eta|\geqslant 1$. Поэтому, в частности, $b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)\neq 0$, $\eta\in\Gamma$. Кроме того, в силу гомотопической инвариантости индекса и того, что

$$\big|(1-\lambda)\xi_1(\eta)+\lambda\big|\leqslant|1-\lambda||\xi_1(\eta)|+|\lambda|\leqslant 1,\quad \lambda\in[0,1],$$

имеем

$$\operatorname*{ind}_{\eta\in\Gamma} b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta) = \operatorname*{ind}_{\eta\in\Gamma} b_\lambda(\eta), \quad b_\lambda(\eta) = b^{+-}((1-\lambda)\xi_1(\eta)+\lambda,\eta),\ \lambda\in[0,1].$$

Но $\operatorname{ind}_{\eta\in\Gamma} b_1(\eta) = \operatorname{ind}_{\eta\in\Gamma} b^{+-}(1,\eta) = 0$, поэтому $\operatorname{ind}_{\eta\in\Gamma} b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta) = 0$. Выполнение условий $b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)\neq 0$, $\eta\in\Gamma$ и $\operatorname{ind}_{\eta\in\Gamma} b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)=0$ влечет за собой обратимость оператора $P^+b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^+\colon L_2^+(\Gamma)\to L_2^+(\Gamma)$ (см. [2]). $\rhd$

Пользуясь леммой 8, запишем уравнение для функции $c^+(\eta)$ в виде

$$c^+(\eta) + \widetilde{K}c^+(\eta) = f_2^+(\eta),$$

где

$$\widetilde{K} = \bigl(P^+b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^+\bigr)^{-1}K, \quad f_2(\eta) = -\bigl(P^+b^{+-}(\xi_1(\eta),\eta)P^+\bigr)^{-1}f_1(\eta).$$

Очевидно, это уравнение является уравнением Фредгольма второго рода в пространстве $L_2^+(\Gamma)$. Будем называть это уравнение определяющим.

Теорема 10. *Определяющее уравнение $c^+(\eta)+\widetilde{K}c^+(\eta)=f_2^+(\eta)$, построенное по уравнению $T_a\phi^{++}=f^{++}$ при помощи модельного оператора, равносильно этому уравнению в том смысле, что*

1) *если однородное определяющее уравнение имеет только тривиальное решение, то оператор T_a обратим и единственное решение уравнения $T_a\phi^{++}=f^{++}$ при любой правой части определяется формулой*

$$\phi^{++}(\xi,\eta) = (a^{++})^{-1}P^{++}\xi^{-1}\Biggl(\sum_{k\in Z_+}\bigl(P^{++}\xi_1\xi^{-1}P^{++}\bigr)^k\sum_{j\in Z_+}P^{++}b_j^-\xi^jP^{++}c^+(\eta)+f_1^{++}(\xi,\eta)\Biggr),$$

где $c^+(\eta)$ — решение неоднородного определяющего уравнения;

2) *если однородное определяющее уравнение имеет конечное число линейно независимых решений, а правая часть $f^{++}(\xi,\eta)$ такова, что неоднородное определяющее уравнение разрешимо, то уравнение $T_a\phi^{++}=f^{++}$ разрешимо и его общее решение имеет вид*

$$\phi^{++}(\xi,\eta) = (a^{++})^{-1}P^{++}\xi^{-1}\Biggl(\sum_{k\in Z_+}\bigl(P^{++}\xi_1\xi^{-1}P^{++}\bigr)^k\sum_{j\in Z_+}P^{++}b_j^-\xi^jP^{++}c^+(\eta)+f_1^{++}(\xi,\eta)\Biggr),$$

где $c^+(\eta)$ — общее решение неоднородного определяющего уравнения.

Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.
2. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: Штиинца, 1973.—426 с.
4. *Симоненко И. Б.* О многомерных дискретных свертках // Мат. исследования.—Кишинев: Штиинца, 1968.—Вып. 1.—С. 298–313.

Статья поступила 26 августа 2016 г.

Пасенчук Александр Эдуардович
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: pasenchuk@mail.ru

ON SPLITTING POLYNOMIALS WITH COEFFICIENTS FROM COMMUTATIVE BANACH ALGEBRAS

Pasenchuk A. E.

The problem of decomposition of polynomials with coefficients from a unital commutative Banach algebra into a product of polynomials with coefficients in the same algebra is considered. Sufficient conditions for the existence of such decomposition and its construction are indicated. Some applications in the theory of Toeplitz operators on a circle and a torus are given. In particular, the equivalent regularization for a two-dimensional Toeplitz operator with a special symbol is derived. Equations generated by the corresponding Toeplitz operators in the spaces of measurable square-integrable vector-valued functions on the circle and measurable square summable functions are examined. This leads to the construction of equivalent regularizers for the described Toeplitz operators. The regularizer construction turns out to be equivalent to right canonical Wiener-Hopf factorization of some matrix function built from the symbol in a case of vector functions. An equivalent regularizer is built in explicit form for a two-dimensional Toeplitz operator with a special symbol.

Key words: polynomial, commutative Banach algebra, decomposition of a polynomial, Toeplitz operator, regularization.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 28–35

MINIMUM DOMINATING RANDIC ENERGY OF A GRAPH

P. S. K. Reddy, K. N. Prakasha, V. M. Siddalingaswamy

In this paper, we introduce the minimum dominating Randic energy of a graph and computed the minimum dominating Randic energy of graph. Also, obtained upper and lower bounds for the minimum dominating Randic energy of a graph.

Mathematics Subject Classification (2010): 05C50.

Key words: minimum dominating set, minimum dominating Randic eigenvalues, minimum dominating Randic energy.

1. Introduction

Let G be a simple, finite, undirected graph, The energy $E(G)$ is defined as the sum of the absolute values of the eigenvalues of its adjacency matrix. For more details on energy of graphs (see [5, 6]).

The Randic matrix $R(G) = (R_{ij})_{n\times n}$ is given by Bozkurt et al. [1–3].

$$R_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_i d_i}}, & \text{if } v_i \sim v_j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We can see lower and upper bounds on Randic energy in [1, 2, 4]. Some sharp upper bounds for Randic energy of graphs were obtain in [3].

2. The Minimum Dominating Randic Energy of Graph

Let G be a simple graph of order n with vertex set $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ and edge set E. A subset D of $V = V(G)$ is called a dominating set if every vertex in $V - D$ adjacent to a vertex of D. Minimum dominating set is called a dominating set of minimum power. Let D be a minimum dominating set of a graph G. The minimum dominating Randic matrix $R^D(G) = (R^D_{ij})_{n\times n}$ is given by

$$R^D_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_i d_i}}, & \text{if } v_i \sim v_j, \\ 1, & \text{if } i = j \text{ and } v_i \in D, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The characteristic polynomial of $R^D(G)$ is denoted by $\phi^D_R(G, \lambda) = \det(\lambda I - R^D(G))$. Since the minimum dominating Randic Matrix is real and symmetric, its eigenvalues are real numbers and we label them in non-increasing order $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots \lambda_n$. The minimum dominating Randic Energy is given by

$$RE_D(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|. \tag{1}$$

DEFINITION 2.1. The spectrum of a graph G is the list of distinct eigenvalues $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r$, with their multiplicities $m_1, m_2, \dots, m_r$, and we write it as

$$\mathrm{Spec(G)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ m_1 & m_2 & \dots & m_r \end{pmatrix}.$$

This paper is organized as follows. In the Section 3, we get some basic properties of minimum dominating Randic energy of a graph. In the Section 4, minimum dominating Randic energy of some standard graphs are obtained.

3. Some Basic Properties of Minimum Dominating Randic Energy of a Graph

Let us consider

$$P = \sum_{i<j} \frac{1}{d_i d_j}.$$

Where $d_i d_j$ is the product of degrees of two vertices which are adjacent.

Proposition 3.1. *The first three coefficients of $\phi_R^D(G,\lambda)$ are given as follows:*
(i) $a_0 = 1$,
(ii) $a_1 = -|D|$,
(iii) $a_2 = |D|C_2 - P$.

$\lhd$ (i) From the definition $\Phi_R^D(G,\lambda) = \det[\lambda I - R^D(G)]$, we get $a_0 = 1$.

(ii) The sum of determinants of all 1×1 principal submatrices of $R^D(G)$ is equal to the trace of $R^D(G)$.

$\Rightarrow a_1 = (-1)^1$ trace of $[R^D(G)] = -|D|$.

(iii)

$$\begin{aligned}(-1)^2 a_2 &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ii}a_{jj} - a_{ji}a_{ij} \\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ii}a_{jj} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ji}a_{ij} = |D|C_2 - P. \rhd\end{aligned}$$

Proposition 3.2. *If $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ are the minimum dominating Randic eigenvalues of $R^D(G)$, then*

$$\sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2 = |D| + 2P.$$

$\lhd$ We know that

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} = 2\sum_{i<j}(a_{ij})^2 + \sum_{i=1}^{n}(a_{ii})^2 = 2\sum_{i<j}(a_{ij})^2 + |D| = |D| + 2P. \rhd$$

Theorem 3.1. *Let G be a graph with n vertices and then*

$$RE^D(G) \leqslant \sqrt{n(|D| + 2[P])},$$

where

$$P = \sum_{i<j} \frac{1}{d_i d_j},$$

for which $d_i d_j$ is the product of degrees of two vertices which are adjacent.

$\triangleleft$ Let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be the eigenvalues of $R^D(G)$. Now by Cauchy–Schwartz inequality we have

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right).$$

Let $a_i = 1$, $b_i = \mid \lambda_i \mid$. Then

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right),$$

$$[RE^D]^2 \leqslant n(|D| + 2P),$$

$$[RE^D] \leqslant \sqrt{n(|D| + 2P)},$$

which is upper bound. $\triangleright$

Theorem 3.2. *Let G be a graph with n vertices. If $R = \det R^D(G)$, then*

$$RE^D(G) \geqslant \sqrt{(|D| + 2P) + n(n-1)R^{\frac{2}{n}}}.$$

$\triangleleft$ By definition,

$$\left(RE^D(G)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid \sum_{j=1}^{n} \mid \lambda_j \mid = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid^2\right) + \sum_{i \neq j} \mid \lambda_i \mid\mid \lambda_j \mid.$$

Using arithmetic mean and geometric mean inequality, we have

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \mid \lambda_i \mid\mid \lambda_j \mid \geqslant \left(\prod_{i \neq j} \mid \lambda_i \mid\mid \lambda_j \mid\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
[RE^D(G)]^2 &\geqslant \sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid^2 + n(n-1)\left(\prod_{i \neq j} \mid \lambda_i \mid\mid \lambda_j \mid\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid^2 + n(n-1)\left(\prod_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid^{2(n-1)}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid^2 + n(n-1)R^{\frac{2}{n}} = (|D| + 2P) + n(n-1)R^{\frac{2}{n}}.
\end{aligned}$$

Thus,

$$RE^D(G) \geqslant \sqrt{(|D| + 2P) + n(n-1)R^{\frac{2}{n}}}. \triangleright$$

4. Minimum Dominating Randic Energy of Some Standard Graphs

Theorem 4.1. *The minimum dominating Randic energy of a complete graph K_n is $RE^D(K_n) = \frac{3n-5}{n-1}$.*

$\triangleleft$ Let K_n be the complete graph with vertex set $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. The minimum dominating set $= D = \{v_1\}$. The minimum dominating Randic matrix is

$$R^D(K_n) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Characteristic equation is

$$\left(\lambda + \frac{1}{n-1}\right)^{n-2} \left(\lambda^2 - \frac{2n-3}{n-1}\lambda + \frac{n-3}{n-1}\right) = 0$$

and the spectrum is

$$\operatorname{Spec}_R^D(K_n) = \begin{pmatrix} \frac{(2n-3)+\sqrt{4n-3}}{2(n-1)} & \frac{(2n-3)-\sqrt{4n-3}}{2(n-1)} & \frac{-1}{n-1} \\ 1 & 1 & n-2 \end{pmatrix}.$$

Therefore, $RE^D(K_n) = \frac{3n-5}{n-1}$. $\triangleright$

Theorem 4.2. *The minimum dominating Randic energy of star graph $K_{1,n-1}$ is*

$$RE^D(K_{1,n-1}) = \sqrt{5}.$$

$\triangleleft$ Let $K_{1,n-1}$ be the star graph with vertex set $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Here v_0 be the center. The minimum dominating set $= D = \{v_0\}$. The minimum dominating Randic matrix is

$$R^D(K_{1,n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{n-1}} & \frac{1}{\sqrt{n-1}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n-1}} & \frac{1}{\sqrt{n-1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Characteristic equation is

$$(\lambda)^{n-2}[\lambda^2 - \lambda - 1] = 0$$

spectrum is $\operatorname{Spec}_R^D(K_{1,n-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & n-2 & 1 \end{pmatrix}$. Therefore, $RE^D(K_{1,n-1}) = \sqrt{5}$. $\rhd$

Теорема 4.3. *The minimum dominating Randic energy of Crown graph S_n^0 is*

$$RE^D(S_n^0) = \frac{(4n-7)+\sqrt{4n^2-8n+5}}{n-1}.$$

$\lhd$ Let S_n^0 be a crown graph of order $2n$ with vertex set $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ and minimum dominating set $= D = \{u_1, v_1\}$. The minimum dominating Randic matrix is

$$R^D(S_n^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{1}{n-1} & \ldots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 & \ldots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{n-1} & \ldots & \frac{1}{n-1} & 0 & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{n-1} & \ldots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \ldots & \frac{1}{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \frac{1}{n-1} & \ldots & \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & 0 & \ldots & \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Characteristic equation is

$$\left(\lambda+\frac{1}{n-1}\right)^{n-2}\left(\lambda-\frac{1}{n-1}\right)^{n-2}\left(\lambda^2-\frac{1}{n-1}\lambda-1\right)\left(\lambda^2-\frac{2n-3}{n-1}\lambda+\frac{n-3}{n-1}\right)=0$$

spectrum is

$$\operatorname{Spec}_R^D(S_n^0) = \begin{pmatrix} \frac{(2n-3)+\sqrt{4n-3}}{2(n-1)} & \frac{1+\sqrt{4n^2-8n+5}}{2(n-1)} & \frac{(2n-3)-\sqrt{4n-3}}{2(n-1)} & \frac{1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \frac{1-\sqrt{4n^2-8n+5}}{2(n-1)} \\ 1 & 1 & 1 & n-2 & n-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Therefore, $RE^D(S_n^0) = \frac{(4n-7)+\sqrt{4n^2-8n+5}}{n-1}$. $\rhd$

Theorem 4.4. *The minimum dominating Randic energy of complete bipartite graph $K_{n,n}$of order $2n$ with vertex set $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ is*

$$RE^D(K_{n,n}) = \frac{2\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} + 2.$$

$\lhd$ Let $K_{n,n}$ be the complete bipartite graph of order $2n$ with vertex set $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. The minimum dominating set $= D = \{u_1, v_1\}$. The minimum dominating Randic matrix is

$$R^D(K_{n,n}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Characteristic equation is

$$\lambda^{2n-4}\left(\lambda^2 - \frac{n-1}{n}\right)\left[\lambda^2 - 2\lambda + \frac{n-1}{n}\right] = 0.$$

Hence, spectrum is $\operatorname{Spec}_R^D(K_{n,n}) = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{\frac{1}{n}} & \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} & 1-\sqrt{\frac{1}{n}} & 0 & -\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \\ 1 & 1 & 1 & 2n-4 & 1 \end{pmatrix}$.

Therefore, $RE^D(K_{n,n}) = \frac{2\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} + 2$. $\rhd$

Definition 4.1. The friendship graph, denoted by $F_3^{(n)}$, is the graph obtained by taking n copies of the cycle graph C_3 with a vertex in common. $V(F_n) = 2n+1$.

Теорема 4.5. *The minimum dominating Randic energy of Friendship graph F_n^3 is*

$$RE_D(F_n^3) = n+1.$$

$\lhd$ Let $F_3^{(n)}$ be the friendship graph with $2n+1$ vertices. Here v_1 be the center. The minimum dominating set $= D = \{v_1\}$. The minimum dominating Randic matrix is

$$R^D(F_n^3) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Characteristic equation is

$$\lambda\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^n\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\lambda - \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Hence, spectrum is

$$\operatorname{Spec}_R^D(F_n^3) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & n-1 & 1 & n \end{pmatrix}.$$

Therefore, $RE^D(F_n^3) = n+1$. $\rhd$

Теорема 4.6. *The minimum dominating Randic energy of Cocktail party graph $K_{n\times 2}$ is*

$$RE^D(K_{n\times 2}) = \frac{4n-6}{n-1}.$$

$\lhd$ Let $K_{n\times 2}$ be a Cocktail party graph of order $2n$ with vertex set $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. The minimum dominating set $= D = \{u_1, v_1\}$. The minimum dominating minimum dominating Randic matrix is

$$R^D(K_{n\times 2}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \cdots & 0 & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} \\ \frac{1}{2n-2} & 0 & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \cdots & \frac{1}{2n-2} & 0 & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & 0 & \frac{1}{2n-2} & \cdots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & 0 & \frac{1}{2n-2} \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & 0 & \cdots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \cdots & 1 & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} \\ \frac{1}{2n-2} & 0 & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \cdots & \frac{1}{2n-2} & 0 & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & 0 & \frac{1}{2n-2} & \cdots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & 0 & \frac{1}{2n-2} \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & 0 & \cdots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Characteristic equation is

$$\lambda^{n-1}\left(\lambda + \frac{1}{n-1}\right)^{n-2}(\lambda-1)\left[\lambda^2 - \frac{2n-3}{n-1}\lambda + \frac{n-3}{n-1}\right] = 0.$$

Hence, spectrum is

$$\operatorname{Spec}_R^D(K_{n\times 2}) = \begin{pmatrix} \frac{2n-3+\sqrt{4n-3}}{2(n-1)} & 1 & \frac{2n-3-\sqrt{4n-3}}{2(n-1)} & 0 & \frac{-1}{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & n-1 & n-2 \end{pmatrix}.$$

Therefore, $RE^D(K_{n\times 2}) = \frac{4n-6}{n-1}$. $\rhd$

Acknowledgement. The authors are thankful to the anonymous referee for valuable suggestions and comments for the improvement of the paper. Also, the first author is grateful to Dr. M. N. Channabasappa, Director and Dr. Shivakumaraiah, Principal, Siddaganga Institute of Technology, Tumkur, for their constant support and encouragement.

References

1. *Bozkurt S. B., Gungor A. D., Gutman I., Cevik A. S.* Randic matrix and Randic energy // MATCH Commum. Math. Comput. Chem.—2010.—Vol. 64.—P. 239–250.
2. *Bozkurt S. B., Gungor A. D., Gutman I.* Randic spectral radius and Randic energy // MATCH Commum. Math. Comput. Chem.—2010.—Vol. 64.—P. 321–334.
3. *Serife Burcu Bozkurt, Durmus Bozkurt.* Sharp Upper Bounds for Energy and Randic Energy // MATCH Commum. Math. Comput. Chem.—2013.—Vol. 70.—P. 669–680.
4. *Gutman I., Furtula B., Bozkurt S. B.* On Randic energy // Linear Algebra Appl.—2014.—Vol. 442.—P. 50–57.
5. *Gutman I.* The energy of a graph // Ber. Math. Stat. Sekt. Forschungsz. Graz.—1978.—103.—P. 1–22.
6. *Gutman I.* The energy of a graph: old and new results // Combinatorics and Applications / A. Betten, A. Khoner, R. Laue and A. Wassermann, eds.—Berlin: Springer, 2001.—P. 196–211.
7. *Indulal G., Gutman I., Vijayakumar A.* On distance energy of graphs // Match Commun. Math. Comput. Chem.—2008.—Vol. 60.—P. 461–472.
8. *Rajesh Kanna M. R., Dharmendra B. N., Sridhara G.* Minimum dominating energy of a graph // Int. J. Pure and Appl. Math.—2013.—Vol. 85, № 4.—P. 707–718.

Received August 6, 2016.

P. Siva Kota Reddy, *Prof.*
Department of Mathematics
Siddaganga Institute of Technology
B. H. Road, Tumkuru-572 103, Karnataka, INDIA
E-mail: `pskreddy@sit.ac.in`; `reddy_math@yahoo.com`

K. N. Prakasha, *Prof.*
Department of Mathematics
Vidyavardhaka College of Engineering
P. B. No. 206, Gokulam III Stage, Mysore-570 002, Karnataka, INDIA
E-mail: `prakashamaths@gmail.com`

V. M. Siddalingaswamy, *Prof.*
Department of Mathematics
JSS Academy of Technical Education
Uttarahalli-Kengeri Main Road, Bangalore-560 060, INDIA
E-mail: `swamyvms@yahoo.com`

МИНИМАЛЬНАЯ ДОМИНИРУЮЩАЯ ЭНЕРГИЯ РАНДИЧА ГРАФА

Сива Кота Редди П., Пракаша К. Н., Сиддалингасвами В. М.

В данной работе мы ввели понятие и вычислили минимальную доминирующую энергию Рандича графа. Кроме того, были найдены верхняя и нижняя границы для минимальной доминирующей энергии Рандича.

Ключевые слова: минимальный доминирующий набор, минимальные доминирующие собственные значения Рандича, минимальная доминирующая энергия Рандича.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 36–48

УДК **517.5**

О СТЕПЕННОМ ПОРЯДКЕ РОСТА НИЖНИХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ

Р. Р. Салимов

В работе исследуется асимптотическое поведение в точке нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля. Найдены достаточные условия на функцию Q, при которых отображение имеет степенной порядок роста. В работе приведены приложения этих результатов к классам Орлича — Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, при условии типа Кальдерона на функцию φ и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$. Приведен пример гомеоморфизма, показывающий точность порядка роста.

Ключевые слова: p-модуль, p-ёмкость, нижние Q-гомеоморфизмы, отображения с конечным искажением, класс Соболева, класс Орлича — Соболева.

1. Введение

Напомним некоторые определения. Следуя [1, разд. 9.2], *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ называем произвольное непрерывное отображение $S:\omega\to\mathbb{R}^n$, где ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k\cup\{\infty\}$ и $k=1,\dots,n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называем число прообразов

$$N(S,y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x\in\omega:\ S(x)=y\},\quad y\in\mathbb{R}^n.$$

Другими словами, символ $N(S,y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k (см. [1, разд. 9.2]).

Для борелевской функции $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ ее *интеграл по поверхности* S определяется равенством

$$\int\limits_S \rho\, d\mathscr{A}_k := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, N(S,y)\, dH^k y.$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k\, d\mathscr{A}_k \geqslant 1$$

для каждой поверхности $S\in\Gamma$. Пусть $p\in(1,\infty)$ — заданное фиксированное число. Тогда *p-модулем* семейства Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x).$$

Будем говорить, что свойство P имеет место для *p-почти всех* (p-п.в.) k-мерных поверхностей S семейства Γ, если подсемейство всех поверхностей семейства Γ, для которых свойство P нарушается, имеет p-модуль нуль.

Говорят (см. [1, разд. 9.2]), что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ является *обобщенно p-допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^{n-1}(x)\, d\mathscr{A}_{n-1} \geqslant 1 \tag{1.1}$$

для p-п. в. $S \in \Gamma$.

Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке* x_0, если

$$M_p\left(f\Sigma_{\mathbb{A}}\right) \geqslant \inf_{\rho\in \mathrm{ext_p\,adm}\,\Sigma_{\mathbb{A}}} \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{1.2}$$

для каждого кольца

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \left\{x\in\mathbb{R}^n : \varepsilon_1 < |x-x_0| < \varepsilon_2\right\}, \quad 0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2<d_0,$$

где $d_0 = \operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, а $\Sigma_{\mathbb{A}}$ обозначает семейство всех сфер

$$S(x_0,r) = \left\{x\in\mathbb{R}^n :\, |x-x_0| = r\right\}, \quad r\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2). \tag{1.3}$$

В работах [2] и [3] приводятся приложения нижних Q-гомеоморфизмов к исследованию локального и граничного поведения гомеоморфных решений с обобщенными производными и к задаче Дирихле для уравнений Бельтрами с вырождением.

Теория нижних Q-гомеоморфизмов применима к отображениям с конечным искажением класса Орлича — Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ при наличии условия Кальдерона и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p>n-1$ (см. [4–11]).

В данной работе мы устанавливаем аналоги леммы типа Икомы — Шварца для нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля (см. [12, теорема 2].

Ниже приведен критерий нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля при $p>n-1$ (см. [5, теорема 3.7]). Впервые критерий был доказан при $p=n$ в работе [13, теорема 2.1] (см. также монографию [1, теорема 9.2]).

Лемма 1.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $x_0\in D$. Предположим, что $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D\to\mathbb{R}^n$ является нижним Q-гомеоморфизмом в точке x_0 относительно p-модуля при $p>n-1$ тогда и только тогда, когда*

$$M_p(f\Sigma_R) \geqslant \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}, \quad 0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2<d_0, \tag{1.4}$$

где $d_0 = \operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, Σ_R — семейство всех сфер $S(x_0,r) = \{x\in\mathbb{R}^n : |\,x-x_0| = r\}$, $r\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, и

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathscr{A}_{n-1}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}. \tag{1.5}$$

Инфимум в (1.2) *достигается только для функции*

$$\rho_0(x) = \left(\frac{Q(x)}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(|x-x_0|)}\right)^{\frac{1}{p-n+1}}. \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. Ниже мы используем стандартные соглашения, что $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$, если $a > 0$, и $0 \cdot \infty = 0$ (см., например, [14]).

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$. $E, F \subseteq D$ — произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F; D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

Следующая лемма была получена в работе [10, лемма 5.3].

Лемма 1.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n-1$. Тогда имеет место оценка*

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\Big(\Delta(fS_1, fS_2, fD)\Big) \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}, \tag{1.7}$$

где $S_j = S(x_0, \varepsilon_j)$, $j = 1, 2$, и

$$\left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathscr{A}_{n-1}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}. \tag{1.8}$$

Замечание 1.2. Отметим, что норма $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)$ по некоторым сферам $S(x_0, r)$ может быть равна бесконечности. По теореме Фубини функция $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)$ измерима по r в силу измеримости по x функции Q. Более того,

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} < \infty, \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d(x_0, \partial D). \tag{1.9}$$

Это следует из условия гомеоморфности отображения f и леммы 1.2, поскольку $\frac{p}{p-n+1}$ — емкость невырожденного кольца — не может быть равна нулю. (Определение емкости см. ниже.) Интеграл в (1.9) может быть равен нулю в случае, если $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) = \infty$ п. в., но тогда соотношение (1.7) очевидно.

2. О емкости конденсатора

Следуя работе [15], пару $\mathscr{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором.* Конденсатор $\mathscr{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $G = A \setminus C$ — кольцо, т. е. если G — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus G$ состоит в точности из двух компонент. Говорят также, что конденсатор $\mathscr{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathscr{E} = (A, C)$ — конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в fD. Далее, $f\mathscr{E} = (fA, fC)$.

Функция $u : A \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на прямой*, имеющей непустое пересечение с A, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в A. Функция $u : A \to \mathbb{R}$ принадлежит классу ACL (*абсолютно непрерывна на почти всех прямых*), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(\mathscr{E}) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$; 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$; 3) u принадлежит классу ACL. Также обозначим

$$|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}. \tag{2.1}$$

При $p \geqslant 1$ величину

$$\operatorname{cap_p} \mathscr{E} = \operatorname{cap_p}(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathscr{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dm(x) \tag{2.2}$$

называют *p-ёмкостью* конденсатора $\mathscr{E}$.

В дальнейшем при $p > 1$ мы будем использовать равенство (см. [16, теорема 1])

$$\operatorname{cap_p} \mathscr{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)). \tag{2.3}$$

Известно, что при $1 < p < n$

$$\operatorname{cap_p} \mathscr{E} \geqslant n \Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}}, \tag{2.4}$$

где Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [17, неравенство (8.9)]).

3. О степенном порядке роста нижних Q-гомеоморфизмов

Всюду далее $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$, Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Ниже приведена лемма об оценке искажения емкости сферического конденсатора при нижних Q-гомеоморфизмах.

Лемма 3.1. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p > n$. Предположим, что для некоторых конечных чисел $\lambda > 1$, $\sigma > 0$ и $C_0 > 0$ выполнено условие*

$$\varepsilon^{\sigma} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \geqslant C_0 \quad \left(\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,,\ \varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)\right), \tag{3.1}$$

где

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \Big(\int\limits_{S_r} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathscr{A}_{n-1}\Big)^{\frac{p-n+1}{n-1}}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(f B_{\lambda\varepsilon}, \overline{f B_{\varepsilon}}\right) \leqslant C_0^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}}. \tag{3.2}$$

$\lhd$ Рассмотрим сферическое кольцо

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \varepsilon_1 < |x| < \varepsilon_2\}, \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1.$$

Тогда $\left(B_{\varepsilon_2}, \overline{B}_{\varepsilon_1}\right)$ — кольцевой конденсатор в $\mathbb{B}^n$ и $\left(fB_{\varepsilon_2}, \overline{fB}_{\varepsilon_1}\right)$ — кольцевой конденсатор в $\mathbb{B}^n$.

Пусть $\Gamma^* = \Delta(fS_{\varepsilon_1}, fS_{\varepsilon_2}, f\mathbb{A})$. Тогда согласно (2.3) имеем равенство

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB_{\varepsilon_2}, \overline{fB}_{\varepsilon_1}\right) = M_{\frac{p}{p-n+1}} \left(\Gamma^*\right). \tag{3.3}$$

По лемме 1.2 получаем, что

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB_{\varepsilon_2}, \overline{fB}_{\varepsilon_1}\right) \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|\, Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}. \tag{3.4}$$

Далее, выбирая в (3.4) $\varepsilon_1 = \varepsilon < \varepsilon_0 < \frac{1}{\lambda}$ и $\varepsilon_2 = \lambda\varepsilon$, получим

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB_{\lambda\varepsilon}, \overline{fB_{\varepsilon}}\right) \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\, Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}. \tag{3.5}$$

Из условия (3.1) вытекает оценка (3.2). $\rhd$

Следующий результат является аналогом известной леммы Икомы — Шварца об оценке нижнего предела, см. теорему 2 в [12].

Теорема 3.1. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p > n$, удовлетворяющий условию $f(0) = 0$. Если для некоторых конечных чисел $\lambda > 1$, $\sigma > 0$ и $C_0 > 0$ выполнено условие*

$$\varepsilon^{\sigma} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \geqslant C_0 \tag{3.6}$$

для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$, то

$$\liminf_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}} \leqslant \nu_0 \, C_0^{-\frac{1}{p-n}}, \tag{3.7}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

$\lhd$ Рассмотрим конденсатор $\left(fB_{\lambda\varepsilon}, \overline{fB}_{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$. В силу леммы 3.1 имеем оценку

$$\mathrm{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} \left(fB_{\lambda\varepsilon}, \overline{fB}_{\varepsilon}\right) \leqslant C_0^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}}. \tag{3.8}$$

Используя соотношение (2.4), получаем

$$\mathrm{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} \left(fB_{\lambda\varepsilon}, \overline{fB_{\varepsilon}}\right) \geqslant \nu_1 \left[m\left(\overline{fB_{\varepsilon}}\right)\right]^{\frac{n(p-n+1)-p}{n(p-n+1)}}, \tag{3.9}$$

где ν_1 — константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Комбинируя (3.8) и (3.9), заключаем, что

$$m\left(\overline{fB_{\varepsilon}}\right) \leqslant \nu_0 \, C_0^{-\frac{n}{p-n}} \, \varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}}, \tag{3.10}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Учитывая, что $f(0)=0$, получаем

$$\Omega_n\left(\min_{|x|=\varepsilon}|f(x)|\right)^n\leqslant m\left(\overline{fB_\varepsilon}\right) \tag{3.11}$$

и, следовательно,

$$\min_{|x|=\varepsilon}|f(x)|\leqslant\sqrt[n]{\frac{m\left(\overline{fB_\varepsilon}\right)}{\Omega_n}}. \tag{3.12}$$

Таким образом, учитывая неравенства (3.10) и (3.12), имеем

$$\liminf_{x\to0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}}=\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{\min\limits_{|x|=\varepsilon}|f(x)|}{\varepsilon^{\frac{\sigma}{p-n}}}\leqslant\liminf_{\varepsilon\to0}\left(\frac{m\left(\overline{fB_\varepsilon}\right)}{\Omega_n\varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}}}\right)^{\frac1n}\leqslant\nu_0\,C_0^{-\frac{1}{p-n}},$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p. $\rhd$

Следствие 3.1. *В частности, если для некоторых конечных чисел $\lambda>1$ и $C_0>0$ выполнено условие*

$$\varepsilon^{p-n}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\geqslant C_0 \tag{3.13}$$

для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac1\lambda\right)$, то

$$\liminf_{x\to0}\frac{|f(x)|}{|x|}\leqslant\nu_0C_0^{-\frac{1}{p-n}}, \tag{3.14}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Теорема 3.2. *Пусть $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, $n\geqslant2$, — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p>n$, удовлетворяющий условию $f(0)=0$. Если для некоторых чисел $q_0\in(0,\infty)$, $\gamma\in[0,p-n)$ выполнено условие*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S_r}Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,d\mathscr{A}_{n-1}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}\leqslant q_0\,r^{-\gamma}, \tag{3.15}$$

для п. в. $r\in(0,r_0)$, $r_0\in(0,\frac1e)$, то

$$\liminf_{x\to0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\gamma}{p-n}}}\leqslant\nu_0q_0^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.16}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

$\lhd$ Из условия (3.15) вытекает оценка

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)=\left(\int\limits_{S_r}Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,d\mathscr{A}_{n-1}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}\leqslant\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}q_0\;r^{p-n-\gamma+1}. \tag{3.17}$$

Пусть $\lambda=e$ и $\sigma=p-n-\gamma$. Из неравенства (3.17) следует условие

$$\varepsilon^{p-n-\gamma}\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\geqslant\frac{\varepsilon^{p-n-\gamma}}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}q_0}\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\frac{dr}{r^{p-n-\gamma+1}}=C_0, \tag{3.18}$$

где $C_0=\frac{e^{n+\gamma-p}-1}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}q_0(n+\gamma-p)}$.

Применяя теорему 3.1 с параметрами $\lambda = e$, $\sigma = p - n - \gamma$ и $C_0 = \frac{e^{n+\gamma-p}-1}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}} q_0(n+\gamma-p)}$, получаем оценку

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\gamma}{p-n}}} \leqslant \nu_0 q_0^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.19}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p. $\rhd$

Следствие 3.2. *В частности, если для некоторого конечного числа $q_0 > 0$ выполнено условие*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S_r} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathscr{A}_{n-1}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \leqslant q_0 \tag{3.20}$$

для п. в. $r \in (0, r_0)$, $r_0 \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, то

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0 q_0^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.21}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Следствие 3.3. *Если $Q(x) \leqslant K < \infty$ для п.в. $x \in \mathbb{B}^n$, то*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0\, K^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.22}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Лемма 3.2. *Пусть $Q \in L_\alpha(\mathbb{B}^n)$, $\alpha > \frac{n}{p-n}$, $p > n$. Тогда при $\lambda > 1$ имеет место оценка*

$$\varepsilon^{\sigma} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \geqslant \frac{c_0}{\|Q\|_\alpha} \tag{3.23}$$

для любого $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$, где $\|Q\|_\alpha = \left(\int_{\mathbb{B}^n} Q^\alpha(x)\, dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\sigma = \frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$ и c_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p, λ и α.

$\lhd$ Пусть $\lambda > 1$. Заметим, что

$$(\lambda-1)\varepsilon = \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \|\,Q\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) \frac{dr}{\|\,Q\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}. \tag{3.24}$$

Применяя теорему Фубини и неравенство Гёльдера с показателями $q = \frac{p}{p-n+1}$, $q' = \frac{p}{n-1}$, имеем

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \leqslant ((\lambda-1)\varepsilon)^{-\frac{p}{p-n+1}} \int\limits_{\mathbb{A}} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, dm(x), \tag{3.25}$$

где $\mathbb{A} = \mathbb{A}(0, \varepsilon, \lambda\varepsilon)$.

Применяя еще раз неравенство Гёльдера с показателями $q = \frac{\alpha(p-n+1)}{n-1} > 1$ и $q' = \frac{\alpha(p-n+1)}{\alpha(p-n+1)-n+1}$, получаем

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \leqslant c_1\, \varepsilon^{\theta} \left(\int\limits_{\mathbb{A}} Q^\alpha(x)\, dm(x)\right)^{\frac{n-1}{\alpha(p-n+1)}}, \tag{3.26}$$

где $\theta = \frac{(n-1)(\alpha p-\alpha n-n)}{\alpha(p-n+1)}$ и c_1 — положительная постоянная, зависящая только от n, p, λ и α.

Отсюда вытекает оценка

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\geqslant\frac{c_0}{\|Q\|_{\alpha}},\tag{3.27}$$

где $\|Q\|_{\alpha}=\left(\int_{\mathbb{B}^n}Q^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\sigma=\frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$ и c_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p, λ и α. $\rhd$

Теорема 3.3. *Пусть $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, $n\geqslant 2$, — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p>n$, удовлетворяющий условию $f(0)=0$. Если $Q\in L_{\alpha}(\mathbb{B}^n)$, $\alpha>\frac{n}{p-n}$, то*

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}}}\leqslant\nu_0\|Q\|_{\alpha}^{\frac{1}{p-n}},\tag{3.28}$$

где $\|Q\|_{\alpha}=\left(\int_{\mathbb{B}^n}Q^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ — норма в пространстве $L_{\alpha}(\mathbb{B}^n)$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и α.

$\lhd$ Пусть $\lambda=2$. Поскольку $Q\in L_{\alpha}(\mathbb{B}^n)$ и $\alpha>\frac{n}{p-n}$, то из леммы 3.2 следует, что функция Q удовлетворяет условию (3.6) с параметрами $\sigma=\frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$, $C_0=\frac{c_0}{\|Q\|_{\alpha}}$. Применяя теорему 3.1, получаем оценку

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}}}\leqslant\nu_0\|Q\|_{\alpha}^{\frac{1}{p-n}},\tag{3.29}$$

где $\|Q\|_{\alpha}=\left(\int_{\mathbb{B}^n}Q^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ — норма в пространстве $L_{\alpha}(\mathbb{B}^n)$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и α. $\rhd$

4. Приложения к классам Орлича — Соболева

Напомним некоторые определения. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Гомеоморфизм $f:D\to\mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n\leqslant K(x)\cdot J(x,f)\tag{4.1}$$

для некоторой п.в. конечной функции $K(x)\geqslant 1$, где $f'(x)$ — якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ — ее операторная норма: $\|f'(x)\|=\sup_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$ и $J(x,f)=\det f'(x)$ — якобиан отображения f.

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f\in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [18] (см. также [19]).

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, обозначим символом L^{φ} пространство всех функций $f:D\to\mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_{D}\varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\,dm(x)<\infty\tag{4.2}$$

при некотором $\lambda>0$ (см., например, [20]). Здесь m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пространство L^{φ} называется *пространством Орлича.*

Классом Орлича — Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщенными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D. Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D, мы пишем $f\in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc}\subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Как обычно, мы пишем $f\in W^{1,p}_{\rm loc}$, если $\varphi(t)=t^p$, $p\geqslant 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f\in ACL^p$, т. е. если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D (см. [21, разд. 1.1.3]).

Далее, если f — локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1,\dots,x_n$, $f=(f_1,\dots,f_m)$, $f_i\in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i=1,\dots,m$, и

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\,dm(x)<\infty, \tag{4.3}$$

где $|\nabla f(x)|=\sqrt{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы снова пишем $f\in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0)=0$.

Пусть $p>n-1$, $\alpha=\frac{p}{p-n+1}$. Ранее (см., например, [8–10]) в теоремах о локальном поведении классов Соболева и Орлича — Соболева мы пользовались *p-внешней дилатацией*

$$K_{O,p}(x,f)=\begin{cases}\frac{\|f'(x)\|^p}{|J(x,f)|}, & J(x,f)\neq 0;\\ 1, & f'(x)=0;\\ \infty, & \text{в остальных точках.}\end{cases} \tag{4.4}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться *α-внутренней дилатацией*

$$K_{I,\alpha}(x,f)=\begin{cases}\frac{|J(x,f)|}{l^\alpha(f'(x))}, & |J(x,f)|\neq 0;\\ 1, & f'(x)=0;\\ \infty, & \text{в остальных точках,}\end{cases} \tag{4.5}$$

где $l(f'(x))=\min_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$.

Известно, что

$$K_{I,n}(x,f)\leqslant K^{n-1}_{O,n}(x,f) \tag{4.6}$$

(см., например, [22, разд. 1.2.1]).

Из соотношения (4.6) легко следует неравенство

$$K_{I,\alpha}(x,f)\leqslant K^{\alpha-1}_{O,p}(x,f). \tag{4.7}$$

Действительно,

$$K_{I,\alpha}(x,f)=K^{\frac{\alpha}{n}}_{I,n}(x,f)\,|J^{1-\frac{\alpha}{n}}(x,f)|\leqslant K^{\frac{\alpha(n-1)}{n}}_{O,n}(x,f)\,|J^{1-\frac{\alpha}{n}}(x,f)|=K^{\alpha-1}_{O,p}(x,f). \tag{4.8}$$

Известно, что $K_{I,2}=K_{O,2}$ при $n=2$, но при $n\geqslant 3$ в (4.6) может иметь место строгое неравенство, как это показывает элементарный пример сжатия вдоль одной из осей.

Следующее утверждение см. в [11, теорема 1].

Предложение 4.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $p > n-1$ и $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция такая, что для некоторого $t_* \in (0,\infty)$*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{4.9}$$

Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля с $Q = K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$.

Следствие 4.1. *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класса $W^{1,q}_{\rm loc}$ при $q > n-1$ является нижним $K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}$-гомеоморфизмом относительно p-модуля при $p > n-1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$.*

Следующий ряд теорем вытекает из предложения 4.1 и теорем пункта 3.

Теорема 4.1. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 3$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (4.9) и $f(0) = 0$. Предположим, что $p > n$ и для некоторых конечных чисел $\lambda > 1$, $\sigma > 0$ и $C_0 > 0$ выполнено условие*

$$\varepsilon^{\sigma} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{k_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}(r)} \geqslant C_0 \tag{4.10}$$

для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$, где

$$k_{I,\alpha}(r) = \int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}(x,f)\, d\mathscr{A}_{n-1}\ \alpha = \frac{p}{p-n+1}. \tag{4.11}$$

Тогда имеет место оценка

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}} \leqslant \nu_0\, C_0^{-\frac{1}{p-n}}, \tag{4.12}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n, p, λ и σ.

Следствие 4.2. *В частности, если для некоторых конечных чисел $\lambda > 1$ и $C_0 > 0$ выполнено условие*

$$\varepsilon^{p-n} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{k_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}(r)} \geqslant C_0 \tag{4.13}$$

для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$, где

$$k_{I,\alpha}(r) = \int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}(x,f)\, d\mathscr{A}, \quad \alpha = \frac{p}{p-n+1}, \tag{4.14}$$

то при $p > n$ имеем

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0 C_0^{-\frac{1}{p-n}}, \tag{4.15}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n, p и λ.

Пример. Предположим, что $n \geqslant 3$ и $p > n$, $\sigma > 0$. Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, где

$$f(x) = \frac{x}{|x|}|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}$$

при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Касательная и радиальная дилатации f на сфере $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$, $r \in (0,1)$, легко вычисляются:

$$\delta_T = \frac{|f(x)|}{|x|} = |x|^{\frac{\sigma-p+n}{p-n}}$$

и

$$\delta_r = \frac{\sigma}{p-n}\,|x|^{\frac{\sigma-p+n}{p-n}}.$$

Заметим, что $\delta_T \geqslant \delta_r$. Следовательно, ввиду сферической симметрии мы видим, что

$$K_{I,\alpha}(x,f) = \frac{\delta_T^{n-1}\delta_r}{\delta_r^{\alpha}} = \left(\frac{p-n}{\sigma}\right)^{\frac{n-1}{p-n+1}} |x|^{\frac{(n-1)(\sigma-p+n)}{p-n+1}}, \quad \alpha = \frac{p}{p-n+1}.$$

Интегрируя по сфере S_r, получаем

$$k_{I,\alpha}(r) = \int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}(x,f)\,d\mathscr{A}_{n-1} \,=\, \omega_{n-1}\left(\frac{p-n}{\sigma}\right)^{\frac{n-1}{p-n+1}} r^{\frac{(n-1)(\sigma+1)}{p-n+1}}.$$

Откуда вытекает равенство

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{k_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}(r)} = \frac{\sigma\varepsilon^{\sigma}}{p-n}\,\omega_{n-1}^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} r^{-(\sigma+1)}\,dr = \omega_{n-1}^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\frac{1-\lambda^{-\sigma}}{p-n} = C_0 > 0.$$

Этим показано, что условие (4.10) нашей теоремы выполнено.

С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}} = 1. \tag{4.16}$$

Замечание 4.1. Построенный пример показывает, что найденный порядок роста в оценке (4.12) является точным.

Теорема 4.2. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n, n \geqslant 3,$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (4.9), $p > n$ и $f(0) = 0$.*

1) *Если для некоторых конечных чисел $\theta \in \left[0, \frac{(p-n)(n-1)}{p-n+1}\right)$ и $\kappa_0 > 0$ выполнено условие*

$$\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}(x,f)\,d\mathscr{A}_{n-1} \leqslant \kappa_0 r^{-\theta} \tag{4.17}$$

для п. в. $r \in (0, r_0)$, $r_0 \in \left(0, e^{-1}\right)$, то

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{\theta(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}}} \leqslant \nu_0\kappa_0^{\frac{p-n+1}{(p-n)(n-1)}}, \tag{4.18}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

2) *Если $K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}(x,f) \in L_\beta(\mathbb{B}^n)$, $\beta > \frac{n}{p-n}$, то*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1-\frac{n}{\beta(p-n)}}} \leqslant \nu_0 \|K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}\|_\beta^{\frac{1}{p-n}}, \tag{4.19}$$

где $\|K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}\|_\beta = \left(\int_{\mathbb{B}^n} K_{I,\alpha}^{\frac{\beta}{\alpha-1}}(x,f)dm(x)\right)^{\frac{1}{\beta}}$ — норма в пространстве $L_\beta(\mathbb{B}^n)$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и β.

Следствие 4.3. *Если для некоторого конечного числа $\kappa_0 > 0$ выполнено условие*

$$\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x,f)\, d\mathscr{A}_{n-1} \leqslant \kappa_0 \tag{4.20}$$

для п. в. $r \in (0, r_0)$, $r_0 \in (0, e^{-1})$, то

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \nu_0 \kappa_0^{\frac{p-n+1}{(p-n)(n-1)}}, \tag{4.21}$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Следствие 4.4. *В частности, все результаты имеют место для гомеоморфизмов с конечным искажением класса Соболева $W_{\mathrm{loc}}^{1,q}$ при $q > n-1$.*

Литература

1. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory.—N. Y.: Springer, 2009.—367 p.—(Springer Monogr. in Math.).
2. *Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E.* On boundary value problems for the Beltrami equations // Contemp. Math.—2013.—Vol. 591.—P. 211–242.
3. *Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Алгебра и анализ.—2013.—Т. 25, № 4.—С. 101–124.
4. *Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Об отображениях в классах Орлича — Соболева на римановых многообразиях // Укр. мат. вiсник.—2011.—Т. 8, № 3.—С. 319–342.
5. *Ковтонюк Д. А., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича — Соболева.—Киев: Наукова думка, 2013.—303 с.
6. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича — Соболева // Алгебра и анализ.—2013.—Т. 25, № 6.—С. 1–53
7. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Граничное поведение классов Орлича — Соболева // Мат. заметки.—2014.—Т. 95, № 4.—С. 564–576.
8. *Салимов Р. Р.*, Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ.—2014.—Т. 26, № 6.—С. 143–171.
9. *Салимов Р. Р.* Метрические свойства классов Орлича — Соболева // Укр. мат. вiсник.—2016.—Т. 13, № 1.—С. 129–141.
10. *Салимов Р. Р.* О конечной липшицевости классов Орлича — Соболева // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 1.—С. 64–77.
11. *Салимов Р. Р.* О новом условии конечной липшицевости классов Орлича — Соболева // Мат. Студiї.—2015.—Т. 44, № 1.—С. 27–35.
12. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J.—1965.—Vol. 25.—P. 175–203.
13. *Ковтонюк Д., Рязанов В.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вiсник.—2008.—Т. 5, № 2.—С. 157–181.

14. *Сакс С.* Теория интеграла.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949.
15. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.—1969.—Vol. 448.—P. 1–40.
16. *Шлык В. А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 6.—С. 216–221.
17. *Maz'ya V.* Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math.—2003.—Vol. 338.—P. 307–340.
18. *Iwaniec T., Sverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc.—1993.—Vol. 118.—P. 181–188.
19. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis.—Oxford: Clarendon Press, 2001.
20. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.—М.: Физматлит, 1958.
21. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева.—Ленинград: ЛГУ, 1985.—416 с.
22. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением.—Новосибирск: Наука, 1982.

Статья поступила 23 октября 2014 г.

Салимов Руслан Радикович
Институт математики НАН Украины,
старший научный сотрудник
УКРАИНА, 01601, Киев-4, ул. Терещенковская, 3
E-mail: salimov07@rambler.ru, ruslan623@yandex.ru

ON THE POWER ORDER OF GROWTH OF LOWER Q-HOMEOMORPHISMS

Salimov R. R.

In the present paper we investigate the asymptotic behavior of Q-homeomorphisms with respect to a p-modulus at a point. The sufficient conditions on Q under which a mapping has a certain order of growth are obtained. We also give some applications of these results to Orlicz–Sobolev classes $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, under conditions of the Calderon type on φ and, in particular, to Sobolev classes $W^{1,p}_{\rm loc}$, $p > n-1$. We give also an example of a homeomorphism demonstrating that the established order of growth is precise.

Keywords: p-modulus, p-capacity, lower Q-homeomorphisms, mappings of finite distortion, Sobolev class, Orlicz–Sobolev class.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 49–57

УДК **514.12**

УРАВНЕНИЯ ГАУССА, ПЕТЕРСОНА — КОДАЦЦИ, РИЧЧИ В НЕГОЛОНОМНЫХ РЕПЕРАХ

Л. Н. Шаповалова

В работе рассматривается изометрическое погружение n-мерного хаусдорфового ориентируемого многообразия, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, в m-мерное полное односвязное риманово или псевдориманово пространство постоянной кривизны. С использованием неголономнах реперов выводятся уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци, Риччи для погружений класса C^2 n-мерного многообразия в m-мерное пространство. Основной результат получен с использованием обобщенного внешнего дифференцирования по де Раму. Показано, что при этом формы связности, погружения и кручения обладают непрерывным обобщенным внешним дифференциалом.

Ключевые слова: подмногообразие, погружение, неголономный репер, уравнение Гаусса, уравнение Петерсона — Кодацци, уравнение Риччи.

1. Введение

Для погружений z гладкого n-мерного многообразия X в m-мерное пространство постоянной кривизны, $1 < n < m$, класса C^r, $r \geqslant 3$, вывод уравнений Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи в голономном репере приводится в книге Эйзенхарта [1, с. 253]. В работах С. Б. Климентова [2], Ю. Е. Боровского [3] и П. Е. Маркова [4] эти уравнения выводятся при пониженных требованиях на регулярность погружения z. В работе [2] уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи получены в голономном репере для погружений z класса W^r_q, $r \geqslant 3$, $q > n$, функций, имеющих обобщенные производные по С. Л. Соболеву до r-го порядка включительно, суммируемые с степенью q, n-мерного многообразия X в m-мерное псевдориманово пространство постоянной кривизны, $1 < n < m$. В работе [3] уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи выводятся в голономных реперах для погружений z класса W^1_2 без предположения непрерывности отображения z, $1 < n < m$. В работе [4] эти уравнения получены для погружений z класса C^2 в плоское пространство, и установлено, что при этом формы связности, погружения и кручения обладают непрерывным обобщенным внешним дифференциалом, что не следует из конструкций работы [3].

В данной работе последний результат с использованием неголономных реперов обобщается на случай C^2-погружений z в риманово или псевдориманово пространство постоянной кривизны K.

2. Многообразия и расслоения

В данном пункте приводятся необходимые нам сведения о многообразиях и расслоениях, устанавливаются терминология и обозначения, которые используются для формулировки основного результата.

1.1. Пусть X — связное n-мерное, $n \geqslant 2$, хаусдорфово ориентируемое C^∞-многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности. Расслоение над X с тотальным пространством $P(X)$ будем обозначать символом его тотального пространства $P(X)$, слой над точкой $x \in X - P_x(X)$. Через $T(X)$ и $T^*(X)$ обозначим соответственно касательное и кокасательное расслоение над X. Пусть $\mathscr{E}^r(X, P(X))$ — множество C^r-сечений, $r \geqslant 1$, расслоения $P(X)$.

Для двух многообразий X и Y размерностей n и m соответственно через $C^r(X,Y)$ обозначим множество всех отображений $X \to Y$ класса C^r. Каждое отображение $f : X \to Y$ будем рассматривать как сечение $x \to (x, f(x))$ тривиального расслоения $X \times Y$. Тогда $C^r(X,Y) = \mathscr{E}^r(X, X \times Y)$.

1.2. Обозначим через $\Im^*(X)$ расслоение локальных кореперов на X. В дальнейшем локальным корепером на X будем называть сечение этого расслоения.

Пусть G — группа Ли, являющаяся подгруппой полной линейной группы $\mathbf{GL}(n)$. Как и принято, каждый элемент группы $\mathbf{GL}(n)$ отождествим с его матрицей в каком-либо базисе. Два локальных корепера $\tau, \tau' \in \mathscr{E}^r(X, \Im^*(X))$ с областями определения U и U' соответственно называются *G-согласованными*, если либо $U \cap U' = \varnothing$, либо в каждой точке $x \in U \cap U'$, базисы $\tau(x) = \big(\tau^i(x)\big)_{i=1}^n$, $\tau'(x) = \big(\tau'^k(x)\big)_{k=1}^n$ пространства $T^*_x(X)$ связаны равенством $\tau'^k(x) = p_i^k(x)\tau^i(x)$, где матрица $P = (p_i^k) \in C^r(X, G)$.

Множество всех попарно G-согласованных локальных кореперов называется *G-орбитой*. Так как области определения локальных кореперов покрывают X, то, хотя отношение G-согласованности и не является отношением эквивалентности, множество всех локальных C^r-кореперов на X разбивается на непересекающиеся G-орбиты. Каждая G-орбита однозначно определяется заданием какого-либо ее корепера [5, гл. 2, § 6, с. 144]. Всякая G-орбита представляет собою локально-тривиальное расслоение со стандартным слоем G и структурной группой G.

1.3. В качестве группы G рассмотрим псевдоортогональную группу, определенную следующим образом. Зафиксируем упорядоченный набор $\Delta = \big(\Delta^1, \ldots, \Delta^n\big)$, где $\Delta^i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$. Будем обозначать так же через Δ диагональную $n \times n$-матрицу, диагональные элементы которой в i-ой строке равны Δ^i. Через $\mathrm{O}(n, \Delta)$ обозначим совокупность всех $n \times n$-матриц P, удовлетворяющих условию $\Delta P^T = P^{-1}\Delta$, где P^T — матрица, получаемая из P транспонированием, P^{-1} — матрица, обратная к P. Можно показать, что $\mathrm{O}(n, \Delta)$ является подгруппой группы $\mathbf{GL}(n)$ [6, с. 18]. Группу $\mathrm{O}(n, \Delta)$ будем называть *псевдоортогональной группой сигнатуры* Δ. Если матрица $P \in \mathrm{O}(n, \Delta)$, то в силу ее построения $\det P = \pm 1$. Множество всех матриц $P \in \mathrm{O}(n, \Delta)$ с $\det P = +1$ образует подгруппу группы $\mathrm{O}(n, \Delta)$. Эту группу назовем *специальной псевдоортогональной группой* и будем обозначать $\mathrm{SO}(n, \Delta)$. Доказательство того, что группа $\mathrm{SO}(n, \Delta)$ является группой Ли, приводится в работе [4, с. 23].

1.4. Через $\mathfrak{R}_\Delta(X)$ обозначим $\mathrm{SO}(n, \Delta)$-орбиту локального корепера $\tau \in \mathscr{E}^r(X, \Im^*(X))$. Следующая теорема служит основой для построения тензорного анализа над $\mathfrak{R}_\Delta(X)$ [7, гл. 2, § 1, с. 67–68].

Теорема 1. *Для всякого корепера $\tau = \big(\tau^i\big)_{i=1}^n \in \mathscr{E}^r(X, \mathfrak{R}_\Delta(X))$, $r \geqslant 1$, с областью определения U существует и притом единственная система 1-форм $\Phi_j^i \in \mathscr{E}^{r-1}(U, T^*(U))$,* *удовлетворяющая условиям*

$$d\tau^i = \tau^j \wedge \Phi^i_j, \quad \Delta^i \Phi^i_j + \Delta^j \Phi^i_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Формы Φ^i_j, определяемые равенствами (1), называются *формами связности корепера* τ. Коэффициенты Γ^i_{jk} в разложении $\Phi^i_j = \Gamma^i_{jk}\tau^k$, $i, j, k = 1, \dots, n$, называются *символами Кристоффеля.*

1.5. Обозначим через $\Lambda^2 T^*(X)$ расслоение кососимметрических билинейных форм, через $S^2 T^*(X)$ — расслоение симметрических билинейных форм, $S^2_\Delta T^*(X)$ — подрасслоение невырожденных билинейных форм с нормальным видом

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta^i \tau^i \otimes \tau^i. \tag{2}$$

Всякое сечение расслоения $S^2 T^*(X)$ будем называть *псевдоримановой метрикой сигнатуры* Δ. Поскольку псевдометрика ds^2, определенная равенством (2), не зависит от выбора локального корепера τ из содержащей его орбиты, то всякая $\mathrm{SO}(n, \Delta)$-орбита определяет некоторую псевдориманову метрику сигнатуры Δ. Обратно, всякой псевдоримановой метрике ds^2 можно сопоставить две $\mathrm{SO}(n, \Delta)$-орбиты. В каждой из них псевдометрика имеет вид (2), причем всякие два локальных корепера $\tau = \left(\tau^i\right)^n_{i=1}$ и $\tau' = \left(\tau'^k\right)^n_{k=1}$ из этих орбит связаны равенством $\tau'^j = q^j_i \tau^i$, где $Q = \left(q^j_i\right)$ — матрица из $\mathrm{O}(n, \Delta)$ с определителем, равным -1. Будем считать, что на многообразии X зафиксирована ориентация, и $\mathfrak{R}_\Delta(X)$ — та из этих двух орбит, в которой локальные кореперы связаны с координатным корепером $\left(dx^i\right)^n_{i=1}$ в карте из ориентации матрицами с положительными определителями. Эту орбиту $\mathfrak{R}_\Delta(X)$ будем называть *порожденной псевдоримановой метрикой* ds^2.

2. Пространство постоянной кривизны

Следуя Л. П. Эйзенхарту [1, с. 246], пространство V_m постоянной кривизны K размерности m будем рассматривать в вейерштрассовых координатах. Это позволяет при $K = 0$ отождествлять его с m-мерным плоским пространством, при $K \neq 0$ — с гиперсферой в $(m+1)$-мерном плоском пространстве. Поэтому в этом пункте сначала рассмотрим плоское пространство, а затем — пространство с кривизной $K \neq 0$.

2.1. *Плоским m-мерным пространством* Π_m называется m-мерное аффинное пространство A_m, на векторной части которого задана невырожденная симметрическая билинейная форма. Эта форма называется *скалярным произведением*, Π_m — *псевдоевклидовым пространством.* Введем в Π_m ортонормированную систему координат $(O; a_1, \dots, a_m)$. Упорядоченный набор $\Delta' = \left(\Delta^1, \dots, \Delta^m\right)$, где $\Delta^\alpha = a^2_\alpha = \pm 1$, $\alpha = 1, \dots, m$, будем называть *сигнатурой пространства* Π_m.

Каждой точке P пространства Π_m можно поставить в соответствие упорядоченный набор действительных чисел $\left(x^1, x^2, \dots, x^m\right)$ из разложения $\overline{OP} = x^\alpha a_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m$. Тем самым определено биективное отображение $\varphi : \Pi_m \to R^m$, которое превращает Π_m в гладкое m-мерное многообразие.

2.2. Пусть $z : X \to \Pi_m$ — C^r-погружение, $r \geqslant 2$, n-мерного многообразия X в m-мерное пространство Π_m, $2 \leqslant n < m$. Образ погружения $F = z(X)$ является n-мерным подмногообразием многообразия Π_m. Обозначим через TF касательное расслоение многообразия F, $T^{\perp}F$ — нормальное расслоение, $I(z)$ — метрику на X, индуцированную z. Через $\mathfrak{R}_{\Delta}(X)$ обозначим $\mathrm{SO}(n,\Delta)$-орбиту, порожденную метрикой $I(z)$ сигнатуры $\Delta=\left(\Delta^1,\ldots,\Delta^n\right)$. Для всякого локального корепера $\tau=\left(\tau^i\right)_{i=1}^n\in\mathscr{E}^{r-1}(X,\mathfrak{R}_{\Delta}(X))$ определен локальный репер $e=\left(e_i\right)_{i=1}^n\in\mathscr{E}^{r-1}(X,TF)$, $e_i=\xi_i(z)$, причем $\xi=\left(\xi_i\right)_{i=1}^n$ — локальный репер на X, дуальный кореперу τ. Для векторов репера e выполняются равенства

$$e_ie_j=\Delta_{ij}=\begin{cases}\Delta^i, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\qquad i,j=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Будем предполагать, что в каждой точке $x\in X$ касательное пространство T_xF подмногообразия F содержит n попарно ортогональных неизотропных направлений. Тогда в окрестности каждой точки $x\in X$ в нормальном расслоении [1, гл. 4, § 42, с. 175–179] определен локальный C^{r-1}-репер $\nu=\left(\nu_\sigma\right)_{\sigma=1}^p$, $p=m-n$, удовлетворяющий условиям

$$\nu_\sigma\nu_\tau=\begin{cases}\Delta^{n+\sigma} & \tau=\sigma,\\ 0 & \tau\neq\sigma,\end{cases} \tag{4}$$

$$e_i\nu_\sigma=0,\quad i=1,\ldots,n,\ \sigma=1,\ldots,p.$$

В дальнейшем вместо $\Delta^{n+\sigma}$ будем писать Δ^σ. Поскольку всякий вектор из Π_m может быть представлен в виде линейной комбинации векторов e_i, ν_σ, то сигнатура скалярного произведения в силу (3), (4) в Π_m имеет вид $\Delta'=\left(e_1^2,\ldots,e_n^2,\nu_1^2,\ldots,\nu_p^2\right)$.

Разложение дифференциалов de_i, $d\nu_\sigma$ по базису (e_i,ν_σ) [4] приводит к формулам Гаусса и Вейнгартена

$$\begin{gathered}de_i=\Phi_i^ke_k+\sum_{\sigma=1}^p\Delta^\sigma\omega_i^\sigma\nu_\sigma,\\ d\nu_\sigma=-\sum_{i=1}^n\Delta^i\omega_i^\sigma e_i+\sum_{\tau=1}^p\Delta^\tau\varkappa_\sigma^\tau\nu_\tau,\\ i,k=1,\ldots,n,\quad \tau,\sigma=1,\ldots,p,\quad p=m-n,\end{gathered} \tag{5}$$

где $\Delta^i=e_i^2$, $\Delta^\sigma=\nu_\sigma^2$, Φ_k^i — формы связности локального корепера $\tau\in\mathscr{E}^{r-1}(X,\mathfrak{R}_{\Delta}(X))$, ω_i^σ — 1-формы, называемые *формами погружения*, $\varkappa_\tau^\sigma=-\varkappa_\sigma^\tau$ — 1-формы, называемые *формами кручения*. Для форм погружения [4] выполняются соотношения

$$\omega_i^\sigma\wedge\tau^i=0,\quad i=1,\ldots,n,\ \sigma=1,\ldots,p.$$

Билинейную симметрическую форму $II^\sigma\in\mathscr{E}^{r-2}(X,S^2T^*(X))$, определенную равенством

$$II^\sigma=\omega_i^\sigma\otimes\tau^i=b_{ij}^\sigma\tau^i\otimes\tau^j,$$

называют *второй основной формой многообразия* F или погружения z относительно нормали ν_σ. Симметрия $b_{ij}^\sigma=b_{ji}^\sigma$, $i,j=1,\ldots,n$, $\sigma=1,\ldots,p$, следует из леммы Картана [8, гл. 2, § 7].

Если погружение $z\in C^3(X,\Pi_m)$, то внешнее дифференцирование формул Гаусса и

Вейнгартена [4, с. 25] приводит к уравнениям Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи

$$
\begin{gathered}
\sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^{\sigma} \omega_i^{\sigma} \wedge \omega_j^{\sigma} = \Delta^i (d\Phi_j^i + \Phi_k^i \wedge \Phi_j^k), \\
d\omega_i^{\sigma} = \Phi_i^k \wedge \omega_k^{\sigma} + \sum_{\tau=1}^{p} \Delta^{\tau} \omega_i^{\tau} \wedge \varkappa_{\tau}^{\sigma}, \\
d\varkappa_{\sigma}^{\tau} = \sum_{i=1}^{n} \Delta^i \omega_i^{\tau} \wedge \omega_i^{\sigma} + \sum_{\rho=1}^{p} \Delta^{\rho} \varkappa_{\sigma}^{\rho} \wedge \varkappa_{\rho}^{\tau}, \\
i, j, k = 1, \dots, n, \quad \tau, \sigma = 1, \dots, p.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

2.3. Пусть V_m — m-мерное полное односвязное риманово или псевдориманово пространство постоянной кривизны $K \neq 0$ сигнатуры $\Delta'' = \left(\Delta^1, \dots, \Delta^m\right)$. Будем рассматривать V_m [1, с. 246] как гиперсферу в плоском пространстве Π_{m+1} сигнатуры $\Delta' = \left(\Delta^1, \dots, \Delta^m, \Delta^{m+1}\right)$, заданную уравнением

$$
z^2 = \frac{1}{K}. \tag{7}
$$

Пусть $z : X \to V_m$ C^r-погружение, $r \geqslant 1$, n-мерного многообразия X в m-мерное пространство постоянной кривизны V_m, $2 \leqslant n < m$, $F = z(X)$ — подмногообразие многообразия V_m. Рассматривая подмногообразие F в пространстве Π_{m+1}, будем использовать сведения пунктов 2.1 и 2.2. Дифференцируя равенство (7), получим $zdz = 0$. Следовательно, в каждой точке на F вектор z можно взять в качестве одной из нормалей нормального пространства F в Π_{m+1}. Обозначим эту нормаль ν_{p+1}. Оставшиеся $p = m - n$ нормалей $\left(\nu_{\sigma}\right)_{\sigma=1}^{p}$ определяют нормальное пространство к F в V_m, которое является подпространством касательного пространства V_m в Π_{m+1}. Совокупность $\left(\nu_{\sigma}, \nu_{p+1}\right)_{\sigma=1}^{p}$, $\nu_{p+1} = \frac{z}{|z|}$, $|z| = \sqrt{|z^2|}$, взаимно ортогональных нормалей в каждой точке $x \in X$ образует ортонормированный базис в нормальном пространстве $T_x^{\perp} F$ подмногообразия F в Π_{m+1}, причем выполняются равенства (4). Для последнего элемента сигнатуры Δ' в силу (4) и (7) имеем $\Delta^{m+1} = \frac{K}{|K|}$.

При $r \geqslant 2$ формулы Гаусса и Вейнгартена для погружения $z : X \to V_m \subset \Pi_{m+1}$, используя (5), можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
de_i = \Phi_i^k e_k + \sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^{\sigma} \omega_i^{\sigma} \nu_{\sigma} - K \tau^i \Delta^i z, \\
d\nu_{\sigma} = - \sum_{i=1}^{n} \Delta^i \omega_i^{\sigma} e_i + \sum_{\tau=1}^{p} \Delta^{\tau} \varkappa_{\sigma}^{\tau} \nu_{\tau}, \\
p = m - n, \quad \Delta^i = e_i^2, \quad \Delta^{\tau} = \nu_{\tau}^2, \quad i, k = 1, \dots, n, \ \tau, \sigma = 1, \dots, p.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Если $r \geqslant 3$, то внешнее дифференцирование формул Гаусса и Вейнгартена (8) приводит к уравнениям Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи:

$$\begin{gathered}
\sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^\sigma \omega_i^\sigma \wedge \omega_j^\sigma = \Delta^i (d\Phi_j^i + \Phi_k^i \wedge \Phi_j^k) - K\Delta^i \Delta^j \tau^i \wedge \tau^j, \\
d\omega_i^\sigma = \Phi_i^k \wedge \omega_k^\sigma + \sum_{\tau=1}^{p} \Delta^\tau \omega_i^\tau \wedge \varkappa_\tau^\sigma, \\
d\varkappa_\sigma^\tau = \sum_{i=1}^{n} \Delta^i \omega_i^\tau \wedge \omega_i^\sigma + \sum_{\rho=1}^{p} \Delta^\rho \varkappa_\sigma^\rho \wedge \varkappa_\rho^\tau, \\
i,j,k = 1,\ldots,n, \quad \tau,\sigma = 1,\ldots,p, \quad p = m-n.
\end{gathered} \tag{9}$$

3. Обобщенный внешний дифференциал и его свойства

В данном пункте приводится понятие обобщенного внешнего дифференциала [9, 10], некоторые его свойства, доказательства которых приведены в работе [11], и выводятся уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи для случая C^2–погружений $z : X \to V_m$.

3.1. Пусть U-открытое множество на X, замыкание которого $\overline{U}$ компактно и содержится в некоторой координатной окрестности. Через $\Lambda^l T^*(U)$ обозначим расслоение внешних дифференциальных форм степени $l \geqslant 0$ на U, $l = 0, 1, \ldots$, через $\mathscr{E}_0^s(U, \Lambda^l T^*(U))$ пространство C^s-сечений, $s \geqslant 0$, этого расслоения с компактными носителями, содержащимися в U. Рассмотрим непрерывную на U q-форму ω, $q = 0, 1, \ldots$ Непрерывную $(q+1)$-форму $\Omega \in \mathscr{E}^0(U, \Lambda^{q+1} T^*(U))$ будем называть *обобщенным внешним дифференциалом формы* $\omega \in \mathscr{E}^0(U, \Lambda^q T^*(U))$, если для всякой формы $\psi \in \mathscr{E}_0^1(U, \Lambda^{n-q-1} T^*(U))$ справедливо равенство

$$\int\limits_U \Omega \wedge \psi = (-1)^{q+1} \int\limits_U \omega \wedge d\psi.$$

В этом определении можно потребовать, чтобы $\psi \in \mathscr{E}_0^s(U, \Lambda^{n-q-1} T^*(U))$ для каждого $s \geqslant 1$ [10].

Если $\omega \in \mathscr{E}^1(U, \Lambda^q T^*(U))$, то обобщенный внешний дифференциал $d\omega$ совпадает с обычным внешним дифференциалом. Кроме того, $d\omega$ (если он существует) определяется формой ω однозначно, имеет локальный характер, не зависит от локальных координат на U, и $dd\omega = 0$ [11].

Следующие два предложения касаются свойств обобщенного внешнего дифференциала [11].

Лемма 1. *Если форма $\omega \in \mathscr{E}^0(X, \Lambda^q T^*(X))$ имеет обобщенный внешний дифференциал $d\omega$, то для всякой формы $\varphi \in \mathscr{E}^1(X, \Lambda^p T^*(X))$, $p, q \geqslant 0$, справедливо равенство*

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^q \omega \wedge d\varphi. \tag{10}$$

Лемма 2. *Если многообразие X односвязно, то для всякой формы $\omega \in \mathscr{E}^r(X, T^*(X))$, $r \geqslant 0$, для которой $d\omega = 0$, найдется функция $f \in C^{r+1}(X, R)$, для которой $\omega = df$.*

3.2. Основной результат настоящей работы составляет

Теорема 2. *Для всякого погружения $z : X \to V_m$ класса C^2 формы связности, погружения и кручения обладают непрерывным обобщенным внешним дифференциалом.*

Для них справедливы уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи (8), *если под знаком d понимать символ обобщенного внешнего дифференциала.*

$\triangleleft$ Пусть U — произвольное открытое множество на X с компактным замыканием, содержащимся в некоторой координатной окрестности, $\tau = \big(\tau^i\big)_{i=1}^n$ — локальный C^1-корепер с областью определения U из $\mathrm{SO}(n,\Delta)$-орбиты, порожденной метрикой $I(z)$, $\Phi = \big(\Phi^i_j\big)_{i,j=1}^n$ — связность корепера τ, $\xi = \big(\xi_i\big)_{i=1}^n$ — локальный репер, дуальный кореперу τ. Как и ранее, полагаем $e_i = \xi_i(z)$, при этом $e_i \in C^1(U, \Pi_{m+1})$, $de_i \in \mathscr{E}^0(U, T^*(U) \otimes \Pi_{m+1})$, $i = 1, \ldots, n$. В силу равенства (10), учитывая, что $dde_i = 0$ для всякой формы $\varphi \in \mathscr{E}^1_0(U, \Lambda^{n-2}T^*(U))$, получаем $d\big(de_i \wedge \varphi\big) = -de_i \wedge d\varphi$. Следовательно,

$$\int\limits_U de_i \wedge d\varphi = 0.$$

Подставим de_i из формул Гаусса (8):

$$\int\limits_U \left(\Phi^k_i e_k + \sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^\sigma \omega^\sigma_i \nu_\sigma - K\tau^i \Delta^i z\right) \wedge d\varphi = 0, \quad i, k = 1, \ldots, n.$$

Внесем e_k, ν_σ, z под знак d, по лемме 1 имеем

$$\int\limits_U \Bigg[\Phi^k_i \wedge d(e_k\varphi) + \sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^\sigma \omega^\sigma_i \wedge d(\nu_\sigma \varphi) - K\Delta^i \tau^i \wedge d(z\varphi)$$
$$-\Phi^k_i \wedge de_k \wedge \varphi - \sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^\sigma \omega^\sigma_i \wedge d\nu_\sigma \wedge \varphi + K\Delta^i \tau^i \wedge dz \wedge \varphi\Bigg] = 0.$$

Пользуясь формулами Гаусса и Вейнгартена (8), последнее равенство запишем в виде

$$\int\limits_U \Bigg[\Phi^k_i \wedge d(e_k\varphi) + \sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^\sigma \omega^\sigma_i \wedge d(\nu_\sigma \varphi) - K\Delta^i \tau^i \wedge d(z\varphi)$$
$$-\left(\Phi^k_i \wedge \Phi^j_k - \sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^\sigma \Delta^j \omega^\sigma_i \wedge \omega^\sigma_j - K\Delta^i \tau^i \wedge \tau^j\right) \wedge (e_j\varphi) \tag{11}$$
$$-\left(\Phi^k_i \wedge \Delta^\sigma \omega^\sigma_k + \sum_{\tau=1}^{p} \Delta^\tau \omega^\tau_i \wedge \Delta^\sigma \varkappa^\sigma_\tau\right) \wedge (\nu_\sigma\varphi) + \Phi^k_i \wedge K\Delta^k \tau^k \wedge (z\varphi)\Bigg] = 0.$$

Пусть $e_i = e^\alpha_i a_\alpha$, $\nu = \nu^\alpha_\sigma a_\alpha$, $z = z^\alpha a_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, m+1$, $i = 1, \ldots, n$, $\sigma = 1, \ldots, p$, где $\big(O; a_\alpha\big)_{\alpha=1}^{m+1}$ — ортонормированная система координат в Π_{m+1}, задающая сигнатуру Δ'. Положим в равенстве (11) $\varphi = e^\alpha_i \psi$, где $\psi \in \mathscr{E}^1_0(U, \Lambda^{n-2}T^*(U))$ — произвольная форма, затем умножим его скалярно на a_α. После суммирования по α, $\alpha = 1, \ldots, m+1$, получим

$$\int\limits_U \Delta^j \Phi^j_i \wedge d\psi = \int\limits_U \left(\Delta^j \Phi^k_i \wedge \Phi^j_k - \sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^\sigma \omega^\sigma_i \wedge \omega^\sigma_j - K\Delta^i \Delta^j \tau^i \wedge \tau^j\right) \wedge \psi. \tag{12}$$

Положим в равенстве (11) $\varphi = \nu^\alpha_\sigma \psi$, где $\psi \in \mathscr{E}^1_0(U, \Lambda^{n-2}T^*(U))$ — произвольная форма. После умножения на a_α и суммирования по α, получим

$$\int\limits_U \omega^\tau_i \wedge d\psi = \int\limits_U \left(\Phi^k_i \wedge \omega^\tau_k + \sum_{\sigma=1}^{p} \Delta^\sigma \omega^\sigma_i \wedge \varkappa^\tau_\sigma\right) \wedge \psi. \tag{13}$$

Поскольку равенства (12) и (13) справедливы для всякой формы $\psi \in \mathscr{E}_0^1(U, \Lambda^{n-2}T^*(U))$, то в силу определения обобщенного дифференциала получаем, что формы Φ^i_j и ω^σ_i, $i, j = 1, \ldots, n$, $\sigma = 1, \ldots, p$, обладают обобщенными внешними дифференциалами, совпадающими с правыми частями соответствующих уравнений (8) на U.

Рассмотрим тождество $d(d\nu_\sigma \wedge \varphi) = -d\nu_\sigma \wedge d\varphi$, $\sigma = 1, \ldots, p$. Из этого тождества следует, что

$$\int\limits_U d\nu_\sigma \wedge d\varphi = 0.$$

Подставляя выражение $d\nu_\sigma$ из формул Вейнгартена (8), будем иметь

$$\int\limits_U \left(-\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega^\sigma_i e_i + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa^\tau_\sigma \nu_\tau \right) \wedge d\varphi = 0,$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad \tau, \sigma = 1, \ldots, p.$$

Используя формулу (10), находим

$$\int\limits_U \left[-\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega^\sigma_i e_i \wedge d\varphi + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa^\tau_\sigma \nu_\tau \wedge d\varphi \right] = \int\limits_U \Bigg[-\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega^\sigma_i \wedge d(e_i\varphi)$$

$$+ \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa^\tau_\sigma \wedge d(\nu_\tau \varphi) + \sum_{i=1}^n \Delta^i \omega^\sigma_i \wedge de_i \wedge \varphi - \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa^\tau_\sigma \wedge d\nu_\tau \wedge \varphi \Bigg] = 0.$$

В силу формул (8) имеем

$$\int\limits_U \Bigg[-\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega^\sigma_i \wedge d(e_i\varphi) + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa^\tau_\sigma \wedge d(\nu_\tau \varphi)$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega^\sigma_i \wedge \Phi^j_i + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa^\tau_\sigma \wedge \Delta^j \omega^\tau_j \right) \wedge (e_j \varphi)$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega^\sigma_i \wedge \Delta^\tau \omega^\tau_i - \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \varkappa^\rho_\sigma \wedge \Delta^\tau \varkappa^\tau_\rho \right) \wedge (\nu_\tau \varphi) + \sum_{i=1}^n \omega^\sigma_i \wedge K \Delta^i \tau^i \wedge (z\varphi) \Bigg] = 0.$$

Полагая здесь $\varphi = \nu^\alpha_\rho \psi$, умножая на a_α и суммируя по α, получаем

$$\int\limits_U \varkappa^\rho_\sigma \wedge d\psi = \int\limits_U \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i \omega^\rho_i \wedge \omega^\sigma_i + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varkappa^\tau_\sigma \wedge \varkappa^\rho_\tau \right) \wedge \psi.$$

Из этого равенства и из определения обобщенного внешнего дифференциала следует, что формы $\varkappa^\rho_\sigma$, $\sigma, \rho = 1, \ldots, p$, обладают обобщенным внешним дифференциалом d. Этот дифференциал совпадает с правой частью третьего равенства Риччи из (9). Непрерывность левых частей в (9) следует из непрерывности правых частей равенств. $\triangleright$

Литература

1. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия.—М.: ГИИЛ, 1948.—316 с.
2. *Климентов С. Б.* Глобальная формулировка основной теоремы теории n-мерных поверхностей в m-мерном пространстве постоянной кривизны // Укр. геом. сб.—1979.—№ 22.—С. 64–81.

3. *Боровский Ю. Е.* Системы Пфаффа с коэффициентами из L_n и их геометрические приложения // Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 24, № 2.—С. 10–16.
4. *Марков П. Е.* Общие аналитические и бесконечно малые деформации погружений. I // Изв. вузов. Сер. Математика.—1997.—№ 9 (424)—С. 21–34.
5. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения.— М.: Мир, 1975.—352 с.
6. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли: уч. пособие.—М.: Наука, 1982.—480 с.
7. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны.—М.: Наука, 1982.—480 с.
8. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.—М.–Л.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1948.—432 с.
9. *Де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия.—М.: ГИИЛ, 1956.—250 с.
10. *Боровский Ю. Е.* Вполне интегрируемые системы Пфаффа // Изв. вузов. Сер. Математика.—1959.—№ 3.—С. 35–38.
11. *Марков П. Е.* О погружении метрик, близких к погружаемым // Укр. геом. сб.—1992.—№ 35.—С. 49–67.

Статья поступила 1 августа 2016 г.

Шаповалова Лариса Николаевна
ФГБУ «Северо-Кавказская государственная
зональная машиноиспытательная станция»,
математик
РОССИЯ, 347740, г. Зерноград, ул. Ленина, 32
E-mail: `mpe@mail.ru`

GAUSS, PETERSON–CODAZZI, AND RICCI EQUATIONS IN NONHOLONOMIC FRAMES

Shapovalova L. N.

The isometric immersion of the n-dimensional pseudo-Riemannian manifold to an m-dimensional pseudo-Riemannian space of the constant curvature is under consideration. The manifold is assumed to be Hausdorff and orientable. Using the non-holonomic frames the author derived Gauss, Peterson–Codazzi, Ricci equations for C^2 immersion of this manifold into m-dimensional pseudo-Riemannian space of constant curvature. The main result is obtained with the use of generalized external de Rham derivation. It is found that in this context the forms of connectivity, immersion and torsion have continuous generalized exterior derivations.

Keywords: submanifold, immersion, nonholonomic frame, Gauss equation, Peterson–Codazzi equation, Ricci equation.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 58–72

УДК **517.587**

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОЛИНОМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНАМИ МЕЙКСНЕРА

И. И. Шарапудинов, З. Д. Гаджиева, Р. М. Гаджимирзаев

Рассмотрен вопрос о представлении решения задачи Коши для разностного уравнения r-го порядка с переменными коэффициентами и заданными начальными условиями в точке $x = 0$ путем разложения его решения в ряд Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву на сетке $(0, 1, \ldots)$. Указанное представление базируется на конструировании новых полиномов, ортогональных по Соболеву и порожденных классическими полиномами Мейкснера. Для новых полиномов получена явная формула, содержащая многочлены Мейкснера. Этот результат позволяет исследовать асимптотические свойства сконструированных новых полиномов, ортогональных по Соболеву на сетке $(0, 1, \ldots)$ с заданным весом. Кроме того, это позволяет решить проблему, связанную с вычислением новых полиномов, сводя ее к применению известных рекуррентных соотношений для классических полиномов Мейкснера.

Ключевые слова: разностное уравнение, ортогональные по Соболеву полиномы, ортогональные на сетке полиномы Мейкснера, приближение дискретных функций, смешанные ряды по полиномам Мейкснера.

1. Введение

В настоящей статье рассмотрен вопрос о представлении решения задачи Коши разностного уравнения

$$\sum_{l=0}^{r} a_l(j)\Delta^l y(j) = f(j), \quad j \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями $\Delta^l y(0) = y_l$, $l = 0, 1, \ldots, r-1$, путем разложения $y(j)$ на сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ в ряд Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву на Ω, где функции a_l, $l = 0, 1, \ldots, r-1$, заданы на множестве Ω, $\Delta^l y$ — оператор конечной разности порядка l. Такая задача представляет интерес не только сама по себе, но и в связи с тем, что к ней может быть сведена проблема о приближенном решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$\sum_{l=0}^{r} a_l(t)y^{(l)}(t) = f(t)$$

с начальными условиями $y^{(l)}(0) = y_l$, $l = 0, 1, \ldots, r-1$. Заметим, что уравнение (1) можно переписать в следующем рекуррентном виде:

$$a_r(j)y(j + r) = \sum_{l=0}^{r-1} b_l(j)y(j + l) + f(j), \quad j \in \Omega, \tag{2}$$

в котором $b_l(j)$, $l = 0, 1, \ldots, r-1$, — заданные функции, определенные на сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$. Если функция $|a_r(j)| \geqslant c > 0$, $j \in \Omega$, то точное решение уравнения (1) можно найти с помощью рекуррентной формулы (2). Если же для некоторых $j \in \Omega$ будет $a_r(j) = 0$, то найти соответствующие значения $y(j+r)$ с помощью равенства (2) не возможно. Кроме того, отметим еще, что если значения $f(j)$ функции f, фигурирующей в правой части уравнения (1), содержат погрешности измерений, то использование рекуррентной формулы (2) для нахождения решения задачи $y = y(j)$ может дать неудовлетворительные результаты даже в том случае, когда $|a_r(j)| \geqslant c > 0$, $j \in \Omega$. Таким образом, возникает задача о поиске альтернативных методов решения уравнения (1).

В настоящей работе предлагается новый метод решения задачи Коши (1), основанный на применении полиномов $m^\alpha_{r,n}(x, q)$, $n = 0, 1, \ldots$, ортогональных по Соболеву относительно скалярного произведения вида

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0)\Delta^k g(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j)\Delta^r g(j)\rho(j), \tag{3}$$

т. е.

$$\langle m^\alpha_{r,n}, m^\alpha_{r,m}\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k m^\alpha_{r,n}(0, q)\Delta^k m^\alpha_{r,m}(0, q) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r m^\alpha_{r,n}(j, q)\Delta^r m^\alpha_{r,m}(j, q)\rho(j) = \delta_{n,m},$$

где $\alpha > -1$, а $\rho(x)$ — весовая функция, определенная равенством (14). Полиномы $m^\alpha_{r,k+r}(x, q)$ порождаются классическими полиномами Мейкснера $m^\alpha_n(x, q)$, $n = 0, 1, \ldots$, ортонормированными на сетке Ω с весом $\rho(x)$ посредством равенства (27), причем в случае, когда $0 \leqslant k \leqslant r-1$, полиномы $m^\alpha_{r,k}(x, q)$ определяются равенством (28).

Следует отметить, что теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева, получила в последние три десятилетия интенсивное развитие и нашла ряд важных приложений (см. [1–6] и процитированную там литературу). Характерной особенностью скалярных произведений типа Соболева является, в частности, то, что они, как правило, содержат слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в одной или нескольких точках числовой оси.

С другой стороны, в работах [7–18] были введены так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам как альтернативный рядам Фурье по тем же полиномам аппарат решения задач, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и несколько ее производных. В частности, такая задача часто возникает при решении дифференциальных уравнений численно-аналитическими (спектральными) методами [19, 21]. Смешанные ряды по ортонормированным системам функций оказались естественным и весьма эффективным средством решения краевых задач для дифференциальных уравнений спектральными методами. По этому поводу мы можем отослать, например, к работе [21]. В работе [18] показано, что смешанный ряд функции f по ортонормированной системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ представляют собой ряд Фурье этой функции по новой системе функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения вида

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)\,dt \tag{4}$$

и порожденной самой системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$.

Дискретный аналог скалярного произведения (4) имеет вид (3), где функции f и g заданы на множестве $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$, $\rho = \rho(j)$ — дискретная весовая функция, заданная на множестве Ω. В случае, когда $r = 0$, мы будем считать, что $\sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0)\Delta^k g(0) = 0$. При $r \geqslant 1$ особой точкой в скалярном произведении (3) является $x = 0$, в которой контролируется поведение соответствующих ортогональных по Соболеву полиномов дискретной переменной, благодаря присутствию в (3) выражения $\sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0)\Delta^k g(0)$. В настоящей работе наряду с конструированием полиномов $m_{r,n}^{\alpha}(x,q)$, $n = 0, 1, \ldots$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения вида (3), и изучением некоторых важных свойств этих полиномов, рассмотрена также задача об одновременном приближении на сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ решения $y = y(j)$ задачи Коши (1) и его конечных разностей $\Delta^\nu y(j)$ частичными суммами Фурье функции y по системе $\{m_{r,n}^{\alpha}(x,q)\}_{n=0}^{\infty}$ и их соответствующими конечными разностями. Прежде чем приступить к конструированию системы полиномов $m_{r,n}^{\alpha}(x,q)$, $n = 0, 1, \ldots$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения вида (3) и порожденных классическими полиномами Мейкснера дискретной переменной, мы рассмотрим общую идею построения систем функций, ортонормированных по Соболеву и порожденных заданной ортонормированной системой функций дискретной переменной.

2. Системы дискретных функций, ортонормированных по Соболеву, порожденные ортонормированными функциями

Перейдем к конструированию дискретных функций, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (3), порожденных заданной системой $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной на дискретном множестве $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ с весом $\rho(x)$. Для этого нам понадобятся некоторые обозначения и понятия. Если целое $k \geqslant 0$, то положим $a^{[k]} = a(a-1)\ldots(a-k+1)$, $a^{[0]} = 1$ и рассмотрим следующие функции:

$$\psi_{r,k}(x) = \frac{x^{[k]}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{5}$$

$$\psi_{r,k}(x) = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{(r-1)!}\sum\limits_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t), & r \leqslant x, \\ 0, & x = 0, 1, \ldots, r-1 \end{matrix}\right\}, \quad r \leqslant k, \tag{6}$$

которые определены на сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$. Рассмотрим некоторые важные разностные свойства системы функций $\psi_{r,k}(x)$, определенных равенствами (5) и (6). Введем оператор конечной разности Δf: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ и положим $\Delta^{\nu+1} f(x) = \Delta\Delta^\nu f(x)$. Имеет место следующая

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$\Delta^\nu \psi_{r,k}(x) = \begin{cases} \psi_{r-\nu,\,k-\nu}(x), & 0 \leqslant \nu \leqslant r-1,\ r \leqslant k, \\ \psi_{k-r}(x), & \nu = r \leqslant k, \\ \psi_{r-\nu,\,k-\nu}(x), & \nu \leqslant k < r, \\ 0, & k < \nu \leqslant r. \end{cases} \tag{7}$$

$\lhd$ Справедливость утверждения леммы 1 при $r = 1$ почти очевидна, поэтому мы будем считать, что $r \geqslant 2$. Прежде всего заметим, что если $f(x) = (x-1-t)^{[r-1]}$, то

$\Delta f(x)=(r-1)(x-1-t)^{[r-2]}$, поэтому для $r\leqslant x,k$ в силу (6) имеем

$$\Delta\psi_{r,k}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\left(\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t)-\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t)\right)$$
$$=\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}\left((x-t)^{[r-1]}-(x-1-t)^{[r-1]}\right)\psi_{k-r}(t)$$
$$=\frac{1}{(r-2)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-1-t)^{[r-2]}\psi_{k-1-(r-1)}(t)=\psi_{r-1,k-1}(x).$$

Отсюда убеждаемся в справедливости первого из равенств (7) для $r\leqslant x$. Справедливость равенства $\Delta\psi_{r,k}(x)=\psi_{r-1,k-1}(x)$ для $x=0,1,\dots,r-2$ очевидна. Остается проверить первое из равенств (7) для $x=r-1$. Но в этом случае мы имеем

$$\Delta\psi_{r,k}(x)=\psi_{r,k}(x+1)=\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t)=\frac{(r-1)^{[r-1]}}{(r-1)!}\psi_{k-r}(0)=\psi_{k-r}(0),$$

$$\psi_{r-1,k-1}(x)=\frac{1}{(r-2)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-1-t)^{[r-2]}\psi_{(k-1)-(r-1)}(t)=\frac{(r-2)^{[r-2]}}{(r-2)!}\psi_{k-r}(0)=\psi_{k-r}(0),$$

поэтому мы снова находим $\Delta\psi_{r,k}(x)=\psi_{r-1,k-1}(x)$. Таким образом, полностью доказано первое из равенств (7) для $0\leqslant\nu\leqslant 1$. Его справедливость для $2\leqslant\nu\leqslant r-1$ выводим по индукции.

Рассмотрим второе из равенств (7). В силу уже доказанного первого из равенств (7) и того, что второе из них для $r=1$ легко проверяется, имеем

$$\Delta^r\psi_{r,k}(x)=\Delta\Delta^{r-1}\psi_{r,k}(x)=\Delta\psi_{1,k-r+1}(x)=\psi_{k-r}(x).$$

Тем самым мы доказали второе из равенств (7). Третье и четвертое равенства из (7) непосредственно вытекают из (5). $\triangleright$

Пусть $0\leqslant r$ — целое. Обозначим через l_ρ пространство дискретных функций $f=f(x)$, заданных на сетке $\Omega=\{0,1,\dots\}$, в котором скалярное произведение $\langle f,g\rangle$ определено с помощью равенства (3). Рассмотрим задачу об ортогональности, нормированности и полноте в l_ρ системы $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, состоящей из функций, определенных равенствами (5) и (6).

Теорема 1. *Предположим, что функции $\psi_k(x)$, $k=0,1,\dots$, образуют полную в l_ρ ортонормированную систему с весом $\rho(x)$. Тогда система $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ посредством равенств* (5) *и* (6), *полна в l_ρ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (3).

$\triangleleft$ Из равенства (6) следует, что если $r\leqslant k$ и $0\leqslant\nu\leqslant r-1$, то $(\Delta^\nu\psi_{r,k}(x))_{x=0}=0$, поэтому в силу (3) и (7) имеем

$$\langle\psi_{r,k},\psi_{r,l}\rangle=\sum_{x=0}^\infty\Delta^r\psi_{r,k}(x)\Delta^r\psi_{r,l}(x)\rho(x)=\sum_{x=0}^\infty\psi_{k-r}(x)\psi_{l-r}(x)\rho(x)=\delta_{kl},\quad k,l\geqslant r,$$

$$\langle\psi_{r,k},\psi_{r,l}\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1}\Delta^\nu\psi_{r,k}(0)\Delta^\nu\psi_{r,l}(0)=\delta_{kl},\quad k,l<r.$$

Очевидно также, что

$$\langle \psi_{r,k}, \psi_{r,l} \rangle = 0, \quad \text{если} \quad k < r \leqslant l \quad \text{или} \quad l < r \leqslant k.$$

Это означает, что функции $\psi_{r,k}(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, образуют в l_ρ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (3). Чтобы проверить полноту этой системы в l_ρ предположим, что для функции $f = f(x) \in l_\rho$ имеют место равенства

$$\langle \psi_{r,k}, f \rangle = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Тогда, во-первых, в силу того, что $0 = \langle \psi_{r,k}, f \rangle = \Delta^k f(0)$ при $k = 0, \ldots, r-1$ имеем $f(j) = 0$ для всех $j = 0, \ldots, r-1$. Во-вторых, из равенств $\langle \psi_{r,k}, f \rangle = 0$, $k = r, r+1, \ldots$, и полноты в l_ρ исходной системы $\psi_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$ следует, что $\Delta^r f(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$, и поэтому f совпадает с алгебраическим полиномом степени не выше $r - 1$. Из этих двух фактов вытекает, что $f(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. $\triangleright$

Систему функций $\psi_{r,k}(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, мы будем называть *системой, ортонормированной по Соболеву* относительно скалярного произведения (3).

Из теоремы 1 следует, что система дискретных функций $\psi_{r,k}(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, является ортонормированным базисом в пространстве l_ρ, поэтому для произвольной функции $f(x) \in l_\rho$ мы можем записать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_{r,k} \rangle \psi_{r,k}(x), \tag{8}$$

которое представляет собой ряд Фурье функции $f(x) \in l_\rho$ по системе $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной по Соболеву. Поскольку коэффициенты Фурье $\langle f, \psi_{r,k} \rangle$ имеют вид

$$f_{r,k} = \langle f, \psi_{r,k} \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu f(0) \Delta^\nu \psi_{r,k}(0) = \Delta^k f(0), \quad k = 0, \ldots, r-1,$$

$$f_{r,k} = \langle f, \psi_{r,k} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) \Delta^r \psi_{r,k}(j) \rho(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) \psi_{k-r}(j) \rho(j), \quad k = r, \ldots, \tag{9}$$

то равенство (8) можно переписать в следующем смешанном виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k} \psi_{r,k}(x), \quad x \in \Omega. \tag{10}$$

Поэтому ряд фурье по системе $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ мы будем, следуя работам [7–18], называть *смешанным рядом по исходной ортонормированной системе* $\{\psi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Отметим некоторые важные свойства смешанных рядов (10) и их частичных сумм вида

$$\mathscr{Y}_{r,n}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^{n} f_{r,k} \psi_{r,k}(x). \tag{11}$$

Из (10) и (11) с учетом равенств (7) мы можем записать

$$\Delta^\nu f(x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{\infty} f_{r,k+\nu} \psi_{r-\nu,k}(x), \quad 0 \leqslant \nu \leqslant r-1, \ x \in \Omega, \tag{12}$$

$$\Delta^\nu \mathscr{Y}_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0)\frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{n-\nu} f_{r,k+\nu}\psi_{r-\nu,k}(x),$$

$$\Delta^\nu \mathscr{Y}_{r,n}(f,x) = \mathscr{Y}_{r-\nu,n-\nu}(\Delta^\nu f,x).$$

$$\Delta^\nu \mathscr{Y}_{r,n}(f,0) = \Delta^\nu f(0), \quad 0 \leqslant \nu \leqslant r-1. \tag{13}$$

3. Некоторые сведения о полиномах Мейкснера

При конструировании полиномов, ортогональных по Соболеву и порожденных классическими многочленами Мейкснера нам понадобится ряд свойств этих многочленов, которые мы приведем в настоящем параграфе. Для произвольного α и $0 < q < 1$ положим

$$\rho(x) = \rho(x;\alpha,q) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}, \tag{14}$$

$$M_n^\alpha(x,q) = \frac{q^{-n}}{n!\rho(x)}\Delta^n\left\{\rho(x)x^{[n]}\right\}, \tag{15}$$

где $\Delta^n f(x)$ — конечная разность n-го порядка функции $f(x)$ в точке x, т. е. $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^n f(x) = \Delta\Delta^{n-1} f(x)$ $(n \geqslant 1)$, $a^{[0]} = 1$, $a^{[k]} = a(a-1)\dots(a-k+1)$ при $k \geqslant 1$. Для каждого $0 \leqslant n$ равенство (15) определяет [22], алгебраический полином степени n, для которого $M_n^\alpha(0,q) = \binom{n+\alpha}{n}$. Полные доказательства приведенных ниже свойств полиномов Мейкснера $M_n^\alpha(x,q)$ можно найти, например, в [22, 23]. Прежде всего отметим, что полиномы $M_n^\alpha(x,q)$ допускают следующее явное представление:

$$M_n^\alpha(x,q) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^{[k]}x^{[k]}}{\Gamma(k+\alpha+1)k!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k. \tag{16}$$

Если $\alpha > -1$, то полиномы $M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x,q)$, $n = 0,1,\dots$, образуют ортогональную с весом $\rho(x)$ (см. (14)) систему на множестве $\Omega = \{0,1,\dots\}$:

$$\sum_{x\in\Omega} M_k^\alpha(x)M_n^\alpha(x)\rho(x) = \delta_{n,k}h_n^\alpha(q), \quad 0<q<1,\ \alpha>-1, \tag{17}$$

где

$$h_n^\alpha(q) = \sum_{x=0}^{\infty}\rho(x)\left\{M_n^\alpha(x)\right\}^2 = \binom{n+\alpha}{n}q^{-n}\Gamma(\alpha+1). \tag{18}$$

Нам понадобятся также следующие свойства:

$$\Delta M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x+1) - M_n^\alpha(x) = \frac{q-1}{q}M_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{19}$$

$$M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\frac{r^{[j]}}{j!}M_{k+r-j}^\alpha(x,q), \tag{20}$$

$$M_n^{-l}(x,q) = \frac{(n-l)!}{n!}\left(\frac{1}{q}-1\right)^l(-x)_l M_{n-l}^l(x-l,q), \tag{21}$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_l = a(a+1)\dots(a+l-1)$; l — целое, $1 \leqslant l \leqslant n$.

Лемма 2. *Пусть* $0 \leqslant r$. *Тогда*

$$\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(x,q) = \frac{1}{(1-q)^r} \sum_{i=0}^{r} (-q)^i \binom{r}{i} M_{k+i}^0(x,q).$$

◁ Полагая в (20) $\alpha = r$, имеем

$$M_j^0(x,q) = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} M_{j-\nu}^r(x,q).$$

С другой стороны, мы можем записать

$$\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(x,q) = \sum_{j=0}^{k+r} \gamma_j M_j^0(x,q), \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \frac{1}{h_j^0(q)} \sum_{t=0}^{\infty} \rho(t,0,q) \frac{(t+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(t,q) M_j^0(t,q) \\ &= q^j(1-q) \sum_{t=0}^{\infty} q^t \frac{(t+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(t,q) M_j^0(t,q) \qquad (23) \\ &= \frac{q^j}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r} \sum_{t=0}^{\infty} q^t \frac{\Gamma(t+r+1)}{\Gamma(t+1)} (1-q)^{r+1} M_k^r(t,q) M_j^0(t,q), \end{aligned}$$

в частности, $\gamma_j = 0$ при $j < k$. Из (22) и (23) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \frac{q^j}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r} \sum_{t=0}^{\infty} \rho(t,r,q) M_k^r(t,q) \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} M_{j-\nu}^r(x,q) \\ &= \frac{q^j(-1)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r} \binom{r}{j-k} \sum_{t=0}^{\infty} \rho(t,r,q) \left[M_k^r(t,q)\right]^2 \\ &= \frac{q^j(-1)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r} \binom{r}{j-k} h_k^r(q) = \frac{(-q)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r} \binom{r}{j-k} \binom{k+r}{k} \Gamma(r+1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (22) находим

$$(1-q)^q \frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(x,q) = \sum_{j=k}^{k+r} (-q)^{j-k} \binom{r}{j-k} M_j^0(x,q) = \sum_{i=0}^{r} (-q)^i \binom{r}{i} M_{k+i}^0(x,q). \ \triangleright$$

Из (17) следует, что полиномы

$$m_k^\alpha(x) = m_k^\alpha(x,q) = (h_n^\alpha(q))^{-\frac{1}{2}} M_n^\alpha(x,q) \tag{24}$$

образуют ортонормированную систему на множестве Ω с весом $\rho(x) = \rho(x,\alpha,q)$, т. е.

$$\sum_{x\in\Omega} m_k^\alpha(x) m_n^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{n,k}, \quad 0 < q < 1, \ \alpha > -1. \tag{25}$$

Ниже нам понадобится следующая рекуррентная формула для полиномов Мейкснера $m_n^\alpha(x)$:

$$\begin{aligned}&[(n+\alpha+1)(n+1)q]^{\frac{1}{2}}\, m_{n+1}^\alpha(x)\\ &= [n(q+1)+q(\alpha+1)+(q+1)x]\, m_n^\alpha(x) - [(n+\alpha)nq]^{\frac{1}{2}}\, m_{n-1}^\alpha(x).\end{aligned} \tag{26}$$

4. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные многочленами Мейкснера

Из равенства (25) следует, что если $\alpha > -1$, то полиномы $m_n^\alpha(x,q)$, $n = 0, 1, \ldots$, образуют ортонормированную на $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ с весом $\rho(x)$ систему. Эта система порождает на Ω систему полиномов $m_{r,k+r}^\alpha(x,q)$, $k = 0, 1, \ldots$, определенных равенством

$$m_{r,k+r}^\alpha(x,q) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]} m_k^\alpha(t,q). \tag{27}$$

Кроме того, определим полиномы

$$m_{r,k}^\alpha(x,q) = \frac{x^{[k]}}{k!},\ k = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{28}$$

Покажем, что полином $m_{r,k+r}^\alpha(x,q)$ обращается в нуль, если $x \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$. С этой целью мы рассмотрим следующий дискретный аналог формулы Тейлора:

$$F(x) = Q_{r-1}(F,x) + \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r F(t), \quad x \in \{r, r+1, \ldots\}, \tag{29}$$

где

$$Q_{r-1}(F,x) = F(0) + \frac{\Delta F(0)}{1!}x + \frac{\Delta^2 F(0)}{2!}x^{[2]} + \ldots + \frac{\Delta^{r-1}F(0)}{(r-1)!}x^{[r-1]}. \tag{30}$$

Так как для функции $F(x) = x^{[l+r]}$, где целое $l \geqslant 0$, имеем $\Delta^r F(x) = (l+r)^{[r]}x^{[l]}$ и $Q_{r-1}(F,x) \equiv 0$, то из (29) следует, что

$$\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}t^{[l]} = \frac{1}{(l+r)^{[r]}(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r F(t) = \frac{x^{[l+r]}}{(l+r)^{[r]}}. \tag{31}$$

С другой стороны, функция $x^{[l+r]}$ обращается в нуль в узлах $x \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, поэтому наше утверждение вытекает из того, что полином $m_{k+r}^\alpha(x,q)$ в силу (16) и (24) можно представить в виде линейной комбинации функций вида $x^{[l]}$. Поэтому из теоремы 1 и свойства (20) непосредственно выводим следующий результат.

Теорема 2. *Если $\alpha > -1$, то система полиномов $m_{r,k}^\alpha(x,q)$, $k = 0, 1, \ldots$, порожденная многочленами Мейкснера $m_n^\alpha(x,q)$, $n = 0, 1, \ldots$, посредством равенств* (27) *и* (28), *полна в l_ρ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (3).

5. Дальнейшие свойства полиномов $m_{r,k}^{\alpha}(x,q)$

Перейдем к исследованию дальнейших свойств полиномов $m_{r,k}^{\alpha}(x,q)$, $k=0,1,\ldots$ Речь, в первую очередь, идет о том, чтобы получить представление полиномов $m_{r,k}^{\alpha}(x,q)$, которое не содержит знаков суммирования с переменным верхним пределом типа (27). С этой целью применим формулу (29) к полиному $F(x)=M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q)$ и запишем

$$F(x)=Q_{r-1}(F,x)+\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^{r}M_{k+r}^{\alpha-r}(t,q).$$

Вместо $\Delta^{r}M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q)$ подставим его значение, которое согласно формуле (19) равно $(\frac{q-1}{q})^{r}M_{k}^{\alpha}(x,q)$. Тогда из (29) получим

$$F(x)-Q_{r-1}(F,x)=\left(\frac{q-1}{q}\right)^{r}\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}M_{k}^{\alpha}(t,q). \tag{32}$$

Сопоставляя (27) и (32) с (24), находим

$$\left(\frac{q-1}{q}\right)^{r}\{h_{k}^{\alpha}(q)\}^{\frac{1}{2}}\,m_{r,k+r}^{\alpha}(x,q)=F(x)-Q_{r-1}(F,x). \tag{33}$$

Из (33) имеем

$$m_{r,k+r}^{\alpha}(x,q)=\left(\frac{q}{q-1}\right)^{r}\{h_{k}^{\alpha}(q)\}^{-1/2}\,[F(x)-Q_{r-1}(F,x)],\quad F(x)=M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q). \tag{34}$$

Далее, в силу (19) $\Delta^{\nu}M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q)=(\frac{q-1}{q})^{\nu}M_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(x,q)$, поэтому из (16) находим

$$\Delta^{\nu}M_{k+r}^{\alpha-r}(0,q)=\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+r-\nu)!\Gamma(\nu-r+\alpha+1)}=A_{r,k,\nu}. \tag{35}$$

Равенства (30) и (35), взятые вместе, дают

$$F(x)-Q_{r-1}(F,x)=M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{r,k,\nu}x^{[\nu]}}{\nu!}.$$

Подставив это выражение в (34), находим

$$m_{r,k+r}^{\alpha}(x,q)=\left(\frac{q}{q-1}\right)^{r}\left\{h_{k}^{\alpha}(q)\right\}^{-\frac{1}{2}}\left[M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{r,k,\nu}x^{[\nu]}}{\nu!}\right],\quad k=0,1,\ldots \tag{36}$$

Еще одно важное представление для полиномов $m_{r,k+r}^{\alpha}(x,q)$ можно получить, если мы обратимся к равенствам (16) и (24):

$$m_{k}^{\alpha}(t,q)=\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!\left\{h_{k}^{\alpha}(q)\right\}^{\frac{1}{2}}}\sum_{l=0}^{k}\frac{k^{[l]}t^{[l]}}{\Gamma(l+\alpha+1)l!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^{l}.$$

Подставим это выражение в (27) и воспользуемся равенством (31). Это приводит к следующему явному виду для полиномов $m_{r,k+r}^{\alpha}(x,q)$ $(k=0,1,\ldots)$:

$$m_{r,k+r}^{\alpha}(x,q)=\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!\left\{h_{k}^{\alpha}(q)\right\}^{\frac{1}{2}}}\sum_{l=0}^{k}\frac{k^{[l]}x^{[r+l]}}{\Gamma(l+\alpha+1)l!(r+l)^{[r]}}\left(1-\frac{1}{q}\right)^{l}.$$

6. Полиномы $\{m^0_{r,k}(x,q)\}_{k=0}^{\infty}$

Рассмотрим частный случай, который соответствует выбору $\alpha = 0$. Заметим, что если $\alpha = 0$, то из (35) имеем $A_{r,k,\nu} = 0$ при всех $\nu = 0, 1, \dots, r-1$. Поэтому из (36) имеем

$$m^0_{r,k+r}(x,q) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \left\{h^0_k(q)\right\}^{-\frac{1}{2}} M^{-r}_{k+r}(x,q), \quad k = 0, 1, \dots \tag{37}$$

Далее, если мы обратимся к равенству (21), то можем записать

$$M^{-r}_{k+r}(x,q) = \frac{k!}{(k+r)!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^r x^{[r]} M^r_k(x-r,q). \tag{38}$$

Из (37) и (38) находим

$$m^0_{r,k+r}(x,q) = \frac{k!}{(k+r)!}\left\{h^0_k(q)\right\}^{-\frac{1}{2}} x^{[r]} M^r_k(x-r,q), \quad k = 0, 1, \dots$$

С учетом (18) и (24) этому равенству можно придать также следующий вид:

$$m^0_{r,k+r}(x,q) = \left((k+r)^{[r]}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{[r]} m^r_k(x-r,q), \quad k = 0, 1, \dots \tag{39}$$

С помощью леммы 2 равенство (39) можно записать в виде

$$m^0_{r,k+r}(x,q) = \frac{1}{(1-q)^r}\sum_{i=0}^{r}(-q)^{\frac{i}{2}} m^0_{k+i}(x-r,q), \quad k = 0, 1, \dots$$

Наконец, если $0 \leqslant k \leqslant r-1$, то в силу определения (28)

$$m^0_{r,k}(x,q) = \frac{x^{[k]}}{k!}.$$

Из теоремы 1 следует, что система полиномов $m^0_{r,k}(x,q)$, $k = 0, 1, \dots$, является ортонормированным базисом в пространстве l_ρ, поэтому для произвольной функции $f(x) \in l_\rho$ мы можем записать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\langle f, m^0_{r,k}\rangle m^0_{r,k}(x,q), \tag{40}$$

которое представляет собой ряд Фурье функции $f(x) \in l_\rho$ по системе $\{m^0_{r,k}(x,q)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения (3). Поскольку коэффициенты Фурье $\langle f, m^0_{r,k}\rangle$ имеют вид

$$f_{r,k} = \langle f, m^0_{r,k}\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1}\Delta^\nu f(0)\Delta^\nu m^0_{r,k}(0,q) = \Delta^k f(0), \quad k = 0, \dots, r-1,$$

$$f_{r,k} = \langle f, m^0_{r,k}\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r f(j) m^0_{k-r}(j,q)\rho(j), \quad k = r, \dots,$$

то равенство (40) можно переписать в следующем смешанном виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k} m^0_{r,k}(x,q), \quad x \in \Omega.$$

7. О представлении решения задачи Коши для разностного уравнения рядами Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву

Как уже отмечалось выше, одним из эффективных подходов решения уравнений различных типов (дифференциальных, интегральных, разностных и т. д.) является [19, 20] так называемый спектральный метод, основанный на представлении искомого решения рассматриваемого уравнения в виде ряда по подходящей ортонормированной системе функций и последующего преобразования его к двойственному виду, в котором вместо искомого решения уравнения фигурируют неизвестные коэффициенты его разложения по выбранной ортонормированной системе. Мы вернемся к задаче Коши (1) и, пользуясь разложением (10), представим ее искомое решение y в виде ряда Фурье

$$y(x)=\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k y(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}y_{r,k+r}\psi_{r,k+r}(x),\quad x\in\Omega, \tag{41}$$

по системе $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из функций, определенных равенствами (5) и (6), ортонормированных на сетке Ω по Соболеву относительно скалярного произведения (3). Кроме того, в силу (12) для $x\in\Omega$ и $0\leqslant l\leqslant r-1$ имеем

$$\Delta^l y(x)=\sum_{k=0}^{r-l-1}\Delta^{k+l}y(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}y_{r,r+k}\psi_{r-l,r-l+k}(x), \tag{42}$$

а из (13) следует, что

$$\Delta^r y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}y_{r,r+k}\psi_k(x),\quad x\in\Omega, \tag{43}$$

где для коэффициентов $y_{r,k+r}$ согласно (9) имеет место равенство

$$y_{r,k+r}=\langle y,\psi_{r,k+r}\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r y(j)\psi_k(j)\rho(j),\quad k=0,1,\ldots$$

Отметим, что если будут найдены коэффициенты $y_{r,k}$ из (41) так, чтобы функция $y(x)$ оказалась решением разностного уравнения (1), то мы, очевидно, получим именно то решение этого уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям $\Delta^l y(0)=y_l$, $l=0,1,\ldots,r-1$, другими словами, мы получим решение поставленной задачи Коши. При этом важно заметить, что частичная сумма ряда Фурье (41) вида (см. (11))

$$\mathscr{Y}_{r,n}(y,x)=\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k y(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=0}^{n}y_{r,k+r}\psi_{r,k+r}(x)$$

с $n\geqslant r$ также удовлетворяет (см. (13)) начальным условиям задачи Коши (1) и поэтому может быть рассмотрена в качестве приближенного решения этой задачи. В связи с этим возникает вопрос об оценке отклонения приближенного решения $\mathscr{Y}_{r,n}(y,x)$ задачи Коши (1) от ее точного решения y, представленного в виде (41), другими словами, возникает задача об оценке остатка $|y(x)-\mathscr{Y}_{r,n}(y,x)|$, $x\in\Omega$. На подробном анализе этой проблемы мы здесь не будем останавливаться.

Чтобы завершить переход от уравнения (1) к его двойственному (спектральному) виду, подставим в левой части равенства (1) вместо конечных разностей $\Delta^l y(j)$ их представления из (41)–(43) и в результате получим равенство

$$a_r(x)\sum_{i=0}^{\infty} y_{r,r+i}\,\psi_i(x)+\sum_{l=0}^{r-1}a_l(x)\sum_{i=0}^{\infty}y_{r,r+i}\,\psi_{r-l,r-l+i}(x)=f(x)-\sum_{l=0}^{r-1}a_l(x)\sum_{k=0}^{r-l-1}\Delta^{k+l}y(0)\frac{x^{[k]}}{k!},$$

которое можно переписать еще так:

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_{r,r+i}\left[a_r(x)\psi_i(x)+\sum_{l=0}^{r-1}a_l(x)\psi_{r-l,r-l+i}(x)\right]$$
$$=f(x)-\sum_{l=0}^{r-1}a_l(x)\sum_{k=0}^{r-l-1}\Delta^{k+l}y(0)\frac{x^{[k]}}{k!}. \qquad (44)$$

Полагая

$$g(x)=f(x)-\sum_{l=0}^{r-1}a_l(x)\sum_{k=0}^{r-l-1}\Delta^{k+l}y(0)\frac{x^{[k]}}{k!},$$
$$F_i(x)=a_r(x)\psi_i(x)+\sum_{l=0}^{r-1}a_l(x)\psi_{r-l,r-l+i}(x), \qquad (45)$$

запишем равенство (44) в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^{\infty}y_{r,r+i}F_i(x)=g(x),\quad x\in\Omega. \qquad (46)$$

Тем самым мы пришли к системе линейных уравнений (46) относительно неизвестных коэффициентов $y_{r,r+i}$, $i=0,1,\ldots$

Рассмотрим еще один подход к получению бесконечной системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $y_{r,r+i}$, $i=0,1,\ldots$ А именно, пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — некоторая полная в l_ρ ортонормированная система, состоящая из функций $\varphi_k(x)$, заданных на Ω. Тогда мы можем каждую из функций $F_i(x)$, $i=0,1,\ldots$, разложить в ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и получить представление

$$F_i(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat F_{i,k}\varphi_k(x),\quad i,x\in\Omega, \qquad (47)$$

где

$$\hat F_{i,k}=\sum_{j=0}^{\infty}F_i(j)\varphi_k(j)\rho(j),\quad i\in\Omega.$$

Аналогично

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat g_k\varphi_k(x),\quad x\in\Omega, \qquad (48)$$

где

$$\hat g_k=\sum_{j=0}^{\infty}g(j)\varphi_k(j)\rho(j),\quad k\in\Omega.$$

Подставим в (46) вместо $F_i(x)$ и $g(x)$ правые части равенств (47) и (48). Тогда мы получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} y_{r,r+i}\hat{F}_{i,k}\right)\varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\hat{g}_k\varphi_k(x), \quad x\in\Omega. \tag{49}$$

Из (49), в свою очередь, получаем систему уравнений

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_{r,r+i}\hat{F}_{i,k} = \hat{g}_k, \quad k\in\Omega,$$

относительно неизвестных коэффициентов $y_{r,r+i}$, $i=0,1,\dots$

8. О представлении решения задачи Коши для разностного уравнения рядами Фурье по полиномам $m^0_{r,k}(x,q)$, $k=0,1,\dots$

Рассмотрим частный случай, когда вместо ортонормированной системы $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ берется система полиномов Мейкснера $m^0_k(x,q)$, $k=0,1,\dots$ Тогда вместо системы $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ мы получим систему полиномов $\{m^0_{r,k}(x,q)\}_{k=0}^{\infty}$, рассмотренную нами выше в п. 6. Таким образом, если в представлении (41) функции $\psi_{r,k}(x)$ заменить на полиномы $m^0_{r,k}(x,q)$, то равенства (41)–(43) принимают следующий вид:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k y(0)\frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} y_{r,k+r} m^0_{r,k+r}(x,q), \quad x\in\Omega,$$

$$\Delta^l y(x) = \sum_{k=0}^{r-l-1}\Delta^{k+l} y(0)\frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} y_{r,r+k} m^0_{r-l,r-l+k}(x,q),$$

$$\Delta^r y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{r,r+k} m^0_k(x),$$

где $0\leqslant l\leqslant r-1$,

$$m^0_{r-l,k}(x,q) = \psi_{r-l,k}(x) = \frac{x^{[k]}}{k!}, \quad 0\leqslant k\leqslant r-l-1, \tag{50}$$

$$m^0_{r-l,r-l+k}(x,q) = \psi_{r-l,r-l+k}(x), \quad r-l\leqslant k<\infty.$$

Кроме того, отметим, что в силу (39) мы можем записать

$$\begin{aligned}\psi_{r-l,r-l+k}(x) &= m^0_{r-l,r-l+k}(x,q)\\ &= \left((r-l+k)^{[r-l]}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{[r-l]} m^{r-l}_{k-r+l}(x-r+l,q), \quad r-l\leqslant k<\infty.\end{aligned} \tag{51}$$

Используя равенства (50), (51) и (45) можно указать способ для нахождения значений элементов матрицы $[F_i(x)]_{0\leqslant i,\,x<\infty}$, если только мы найдем способ для вычисления значений полиномов Мейкснера $m^{r-l}_{k-r+l}(x-r+l,q)$, $r-l\leqslant k<\infty$, фигурирующих в (51). Но эту задачу можно решить, обратившись к рекуррентной формуле (26).

Литература

1. *Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M.* On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory.—1991.—Vol. 65.—P. 151–175.
2. *Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L.* Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // J. Comput. Appl. Math.—1993.—Vol. 48, № 1—2.—P. 113—131.
3. *Meijer H. G.* Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory.—1993.—Vol. 73.—P. 1–16.
4. *Kwon K. H., Littlejohn L. L.* The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal.—1995.—№ 2.—P. 289–303.
5. *Kwon K. H., Littlejohn L. L.* Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Ann. Numer. Anal.—1998.—Vol. 28.—P. 547–594.
6. *Marcellan F., Yuan Xu* On Sobolev orthogonal polynomials.—arXiv: 6249v1 [math.C.A] 25 Mar 2014.—P. 1–40.
7. *Шарапудинов И. И.* Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Мат. заметки.—2000.—Т. 67, № 3.—С. 460–470. DOI: 10.4213/mzm858.
8. *Шарапудинов И. И.* Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье — Лежандра // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 5.—С. 143–160. DOI: 10.4213/sm480.
9. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства операторов $\mathscr{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Мат. заметки.—2002.—Т. 72, № 5.—С. 765–795. DOI: 10.4213/mzm466.
10. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Мат. сб.—2003.—Т. 194, № 3.—С. 115–148. DOI: 10.4213/sm723.
11. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам.—Махачкала: Дагестан. науч. центр РАН, 2004.—276 с.
12. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Мат. заметки.—2005.—Т. 78, № 3.—С. 442–465. DOI: 10.4213/mzm2599.
13. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Мат. сб.—2006.—Т. 197, № 3.—С. 135–154. DOI: 10.4213/sm1539.
14. *Шарапудинов Т. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестн. Дагестан. науч. центра РАН.—2007.—Т. 29.—С. 12–23.
15. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Мат. заметки.—2008.—Т. 84, № 3.—С. 452–471. DOI: 10.4213/mzm5541.
16. *Шарапудинов И. И., Муратова Г. Н.* Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2009.—Т. 9, № 1.—С. 68–76.
17. *Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И.* Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Мат. заметки.—2010.—Т. 88, № 1.—С. 116–147. DOI: 10.4213/mzm6607.
18. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональных по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Современные проблемы теории функций и их прил. Материалы 18-й междунар. Саратовской зимней шк.—2016.—С. 329–332.
19. *Trefethen L. N.* Spectral methods in Matlab.—Philadelphia: SIAM, 2000.
20. *Trefethen L. N.* Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equation.—Cornell Univ., 1996.
21. *Магомед-Касумов М. Г.* Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хаара // Современные проблемы теории функций и их прил. Материалы 18-й междунар. Саратовской зимней шк.—2016.—С. 176–178.
22. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на дискретных сетках.—Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.
23. *Gasper G.* Positivity and special function // Theory and Appl. Spec. Funct / Ed. by R. A. Askey.—N. Y.: Acad. Press Inc., 1975.—P. 375–433.

Статья поступила 11 мая 2016 г.

Шарапудинов Идрис Идрисович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Дагестанский государственный педагогический университет,
заведующий кафедрой математического анализа
РОССИЯ, 367003, Махачкала, ул. Яракского, 57
E-mail: sharapud@mail.ru

Гаджиева Зульфия Джамалдиновна
Дагестанский государственный педагогический университет,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 367003, Махачкала, ул. Яракского, 57;

Дагестанский научный центр РАН,
научный сотрудник отдела математики и информатики,
РОССИЯ, 367032, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45
E-mail: zula-1976@bk.ru

Гаджимирзаев Рамис Махмудович
Дагестанский научный центр РАН,
младший научный сотрудник отдела математики и информатики,
РОССИЯ, 367032, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45
E-mail: ramis3004@gmail.com

DIFFERENCE EQUATIONS AND SOBOLEV ORTHOGONAL POLYNOMIALS, GENERATED BY MEIXNER POLYNOMIALS

Sharapudinov I. I., Gadzhieva Z. D., Gadzhimirzaev R. M.

The representation of the Cauchy problem's solution for a difference equation with variable coefficients and given initial conditions at $x = 0$ by expanding this solution in a Fourier series on Sobolev polynomials orthogonal on the grid $(0, 1, \ldots)$. The representation is based on contraction new polynomials orthogonal on Sobolev and generated by classical Meixner's polynomials. For new polynomials an explicit formula containing Meixner polynomials is obtained. This result allows us to investigate the asymptotic properties of new polynomials orthogonal on Sobolev on the grid $(0, 1, \ldots)$ with a given weight. In addition, it allows to solve the problem of the calculation of the polynomials orthogonal on Sobolev, reducing it to use of well known recurrence relations for classical Meixner polynomials.

Key words: difference equation, Sobolev orthogonal polynomials, orthogonal on grid Meixner polynomials, discrete functions approximation, orthogonal on equidistant grid mixed series on Meixner polynomials.

Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 73–77

ЗАМЕТКИ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Ю. Ф. Коробейник

В заметке, посвященной памяти выдающегося российского математика А. Ф. Леонтьева, рассматриваются некоторые вопросы теории мероморфных и выпуклых функций.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, нули дзета-функции Римана, выпуклая функция, односторонняя производная.

1. Одна гипотеза и ее следствия

Перед формулировкой основного результата данного параграфа введем некоторые необходимые для дальнейшего определения и обозначения.

Назовем число T из $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ *ζ-нерегулярной ординатой*, если $\zeta(x_T + iT) = 0$ хотя бы для одного значения x_T из $\mathbb{R}$. Здесь и всюду далее символ $\zeta(z)$ обозначает, как обычно, дзета-функцию Римана, которая, как хорошо известно (см., например, [1]), регулярна в области $0 < |z-1| < +\infty$, а в точке $z = 1$ имеет простой полюс. Далее (см. там же), в вертикальной полуплоскости $E_1 := \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ функция $\zeta(z)$ представляется абсолютно сходящимся обыкновенным рядом Дирихле:

$$\zeta(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-z} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x}\bigl(\cos(y \ln n) - i \sin(y \ln n)\bigr) \quad (\forall\, z = x + iy \in E).$$

Обозначим символом x_0 единственное число из интервала $(1, 2)$ такое, что $\zeta(x_0) = 2$. Тогда, если $z \in E_{x_0} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > x_0\}$, то

$$\operatorname{Re} \zeta(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x} \cos(y \ln n) \geqslant 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x} > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x_0} = 2 - \zeta(x_0) = 0.$$

Благодаря наличию на отрицательной полуоси так называемых «тривиальных нулей» $\zeta(z)$ вида $z = -2m$, $m = 1, 2, \ldots$, значение $T = 0$ является ζ-нерегулярной ординатой и, следовательно, множество μ всех ζ-нерегулярных ординат непусто. Более того, как было установлено Харди лет 100 назад (см., например, [1]), на «срединной» прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ имеется бесконечное множество нулей $\zeta(z)$, и поэтому множество μ содержит бесконечное число элементов. При этом, как известно [1], все нули $\zeta(z)$ вида $x + iT$ при любом $T \neq 0$ могут находиться лишь в интервале $(iT, 1 + iT)$. Отсюда с помощью обычной теоремы единственности для аналитических функций легко показать, что множество μ не имеет конечных предельных точек и поэтому может быть представлено в таком виде: $\mu = \{0\} \cup \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{-\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots$, $\lim \mu_n = +\infty$.

Пусть $T \in (\mu_{k_0}, \mu_{k_0+1})$, $k_0 \geqslant 1$. Зафиксируем какое-либо δ из $\left(0, \frac{x_0-1}{4}\right)$ и обозначим символом $N(T)$ сумму кратностей всех нулей $\zeta(z)$, лежащих внутри прямоугольного контура Γ с вершинами в точках A, C, D, F, где $\Gamma := \bigcup_{k=1}^{4} \Gamma_k$, $\Gamma_1 = [A, C]$, $\Gamma_2 = [C, D]$, $\Gamma_3 = [D, F]$, $\Gamma_4 = [F, A]$; $A = (1 - x_0 - \delta - iT)$, $C = (x_0 + \delta - iT)$, $D = (x_0 + \delta + iT)$, $F = (1 - x_0 - \delta + iT)$.

Гипотеза $\mathbf{A}_1$. Если $T > 1$ и $T \notin \mu$, то справедливо равенство

$$N(T) = g_1(T) + g_2(T), \tag{1}$$

в котором $g_1(T)$ — функция, определенная и непрерывная на интервале $(1, +\infty)$, а функция $g_2(T)$ определена на множестве

$$L := (1, +\infty) \setminus \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$$

и удовлетворяет условию $\sup_{T \in L} |g_2(T)| = q < 2$.

Сформулируем и докажем теперь основной результат данного параграфа.

Теорема. *Если гипотеза A_1 справедлива, то*

1) *верна гипотеза Римана об отсутствии у $\zeta(z)$ нулей в полуплоскости $E_{1/2} := \left\{z : \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\right\}$,*

2) *все нули $\zeta(z)$ на прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ — простые.*

$\triangleleft$ Зафиксируем какой-либо номер $k_0 \geqslant 1$ и возьмем любое значение T из интервала (μ_{k_0}, μ_{k_0+2}), отличное от μ_{k_0+1}. По предположению теоремы равенство (52) выполняется для всех значений T, достаточно близких к μ_{k_0+1}, но отличных от μ_{k_0+1}. Если значение T монотонно возрастает и проходит через точку $T = \mu_{k_0+1}$, то левая часть равенства (52) испытывает при этом разрыв первого рода, причем величина скачка функции $N(T)$ в точке $T = \mu_{k_0+1}$ равна $2n_{k_0+1} + 4m_{k_0+1}$, где n_{k_0+1} — кратность возможного нуля $\zeta(z)$ вида $\frac{1}{2} + i\mu_{k_0+1}$, а m_{k_0+1} — сумма кратностей всех возможных нулей $\zeta(z)$, расположенных в интервале $\left(\frac{1}{2} + i\mu_{k_0+1}, x_0 + i\mu_{k_0+1}\right)$. При этом для любого $k_0 \geqslant 1$ $n_{k_0+1} + m_{k_0+1} \geqslant 1$ (более точно, если $n_{k_0+1} \neq 0$), то $2n_{k_0+1} + 4m_{k_0+1} \geqslant 2$, а когда $m_{k_0+1} \neq 0$, то $2n_{k_0+1} + 4m_{k_0+1} \geqslant 4$).

С другой стороны, в правой части равенства (52) функция $g_1(T)$ по предположению определена и непрерывна в любой точке интервала $(1, +\infty)$ и, в частности, в точке μ_{k_0+1}. Что же касается функции $g_2(T)$, то она может иметь (и обязана иметь из-за поведения левой части (52) и функции $g_1(T)$) в этой точке $T = \mu_{k_0+1}$ разрыв первого рода, причем величина скачка $g_2(T)$ в этой точке не превосходит $2q < 4$. Следовательно, обязательно выполняется равенство $m_{k_0+1} = 0$.

Чтобы завершить доказательство первого утверждения теоремы, достаточно заметить, что номер $k_0 \geqslant 1$ можно выбрать как угодно большим. Кроме того, должно выполняться равенство $n_{k_0+1} = 1$ (уже при всех $k_0 \geqslant 1$), что и доказывает второе утверждение теоремы. $\triangleright$

Отметим некоторые следствия доказанной теоремы (разумеется, предполагая, что гипотеза A_1 верна). Прежде всего, все нули $\zeta(z)$ — простые и лежат на двух взаимно-перпендикулярных прямых — вещественной оси $(-\infty, +\infty)$ и «срединной» прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. Обозначим еще при любом $T > 1$ через B_T квадрат $\{z\colon |\operatorname{Im} z| < T, |\operatorname{Re} z - \frac{1}{2}| < T\}$, через K_T — круг $\{z\colon |z - \frac{1}{2}| < T\}$ и, наконец, через $N_0(T)$ число всех нулей $\zeta(z)$, лежащих в прямоугольнике $\{z\colon 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < T\}$. Возьмем теперь любую функцию $\psi(T)$, определенную и положительную в интервале $(1, +\infty)$ и такую, что

$\lim_{T\to+\infty}\psi(T)=+\infty$. При этом функция $\psi(T)$ может возрастать (до $+\infty$) при $T\to\infty$ как угодно медленно. Тогда из доказанной теоремы прямо вытекает

Следствие. $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{N_0(T)-g_1(T)}{\psi(T)}=0$.

Такое же равенство будет иметь место, если $N_0(T)$ заменить числом $\widehat{N}_0(T)$ всех нулей $\zeta(z)$, принадлежащих квадрату B_T, или числом $\widetilde{N}_0(T)$ всех нулей $\zeta(z)$ из круга K_T, и потребовать, чтобы $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{T}{\psi(T)}=0$.

2. Небольшое замечание к одной теореме из [2]

В первой главе первого тома известной книги У. Хеймана и П. Кеннеди [2], довольно быстро изданного в русском переводе, в числе других в п. 1.3 приводится и теорема 1.6 (см. [2, с. 28]) о свойствах выпуклых функций. Ограничимся здесь лишь одной нужной нам фразой из ее довольно длинной формулировки: «...Левая производная непрерывна справа и не превосходит правой производной...». Эта фраза содержит явную описку и в том виде, в каком она имеется в формулировке теоремы, просто неверна (ошибочность утверждения о непрерывности справа левой производной выпуклой функции легко показать на весьма простых примерах). В вышеприведенной фразе из формулировки теоремы 1.6 из [2] слово «справа» следует заменить на слово «слева».

Я останавливаюсь здесь, возможно, чересчур подробно, на этой описке по двум причинам. Прежде всего, эта описка в формулировке теоремы 1.6 имеется и в английском оригинале [3]. По-видимому, автор (как и переводчик и редактор русского издания) в спешке ее просмотрели. Во-вторых, я хотел бы пожелать всем моим более молодым коллегам внимательно и критично относиться ко всем печатным источникам, которые они используют в своей работе, вникая и в формулировку используемого результата (независимо от научного авторитета его автора) и (по возможности) в его доказательство. В противном случае они могут повторить одну мою довольно неприятную ошибку. Дело в том, что последние 15–20 лет я весьма интенсивно занимаюсь исследованием дзета-функции Римана. Однажды именно с помощью этой теоремы из [2], а, точнее, с помощью этой злополучной фразы из ее формулировки, которая была приведена выше, я довольно легко показал ошибочность гипотезы Линделефа (см., например, [1, гл. 13]), а следовательно, и гипотезы Римана, так как, как известно (см., например, там же), первая следует из второй. Но так как я всегда верил (и до сих пор верю) в справедливость гипотезы Римана, то после весьма кратковременной эйфории я вновь начал просматривать проведенное доказательство и обратил внимание на теоремы 1.6 из [2]. Ознакомившись (впервые!) с ее доказательством, я с удивлением обнаружил, что в нем доказывается (и на мой взгляд совершенно правильно), что правая производная непрерывна справа (и, соответственно, левая производная непрерывна слева), т. е. доказывается утверждение, противоположное вышеприведенной части формулировки теоремы. Таким образом, в исправлении нуждается только указанная выше часть формулировки теоремы 1.6 из [2].

Позднее я совершенно случайно обнаружил в книге [4], опубликованной в Москве еще в 1958 г., правильную формулировку вышеприведенной фразы из теоремы 1.6 [2], для непрерывных выпуклых функций (см. лемму 1.2 и замечание к ней из [4, гл. I, § 1, с. 14–15]).

3. Заключение

В заключение я хотел бы прежде всего выразить свою искреннюю и глубокую благодарность Анатолию Георгиевичу Кусраеву за то, что он постоянно верил (надеюсь, и сейчас верит) в мои творческие возможности и оказывал мне всемерную поддержку.

Я благодарю моих учеников Ю. А. Кирютенко и С. Н. Мелихова за их постоянное ко мне внимание и помощь в техническом оформлении моих результатов в виде статей.

Пробегая мысленно взором свою довольно долгую преподавательскую и научную деятельность, я бы хотел поблагодарить моих университетских учителей Анатолия Петровича Гремяченского, Семена Яковлевича Альпера, Михаила Григорьевича Хапланова, Юрия Семеновича Очана, Петра Степановича Папкова, Вадима Петровича Вельмина за то, что они своими прекрасными лекциями пробудили во мне, семнадцатилетнем пареньке, поступившем в 1947 г. на физическое отделение физико-математического факультета Ростовского университета, любовь к математике и желание всерьез ею заниматься, а также за свое постоянное внимание к моим первым, еще робким студенческим «опусам».

На протяжении шестидесятилетней научной деятельности я неоднократно встречался и беседовал со многими крупными математиками — такими, как, например, И. М. Виноградов, М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, С. М. Никольский, В. С. Владимиров, П. Л. Ульянов, А. А. Гончар, Б. Я. Левин, А. И.Маркушевич, Ф. Д. Гахов, Д. Фогт, Р. Майзе и многие другие — все они внимательно (во всяком случае, так мне казалось) слушали мои выступления на научных семинарах, конференциях, съездах, конгрессах, а затем обстоятельно их обсуждали, зачастую в домашней обстановке, выступая в роли радушных хозяев.

Из этой блестящей плеяды мне хочется выделить Алексея Федоровича Леонтьева, чьи несомненные научные заслуги не оценены должным образом (с моей точки зрения) мировой научной общественностью. На протяжении многих лет он был мне как старший брат, опекавший меня и помогавший по самым разным вопросам. Его влияние на мое научное творчество несомненно. Я неоднократно бывал у него и в его московской квартире, недалеко от МЭИ, и на даче в Валентиновке (нередко — с ночевками), а после переезда А. Ф. Леонтьева в Уфу — и на его тамошней квартире. И всегда я встречал радушный прием и самого Алексея Федоровича, и его верной спутницы жизни Марии Григорьевны.

Уверен, что «леонтьевский посев» в Уфе, уже давший таких хороших математиков, как Напалков В. В., Юлмухаметов Р. С., Хабибулин Б. Н., Гайсин А. М. и многих других, и в будущем обеспечит плодотворную работу башкирских математиков.

Светлой памяти этого замечательного человека и выдающегося ученого, чей столетний юбилей со дня рождения отмечается в мае 2017 года, я и посвящаю эту статью.

Литература

1. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.—407 с.
2. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.—М.: Мир, 1980.—304 с.
3. *Hayman W. K., Kennedy P. B.* Subharmonic functions. Vol. I.—London–N. Y.–San Francisko: Academic Press, 1976.
4. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.—М.: ГИФМЛ, 1958.—271 с.

Статья поступила 25 января 2017 г.

Коробейник Юрий Федорович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `kor@math.rsu.ru`

ON SOME PROBLEMS IN THE THEORY OF FUNCTIONS

Korobeĭnik Yu. F.

The paper devoted the memory of the outstanding Russian mathematician A. F. Leont'ev (1917–1987) consists of three sections. In § 1 the author sets one probably new hypothesis concerning the well known Riemann's Zeta Function $\zeta(z)$ and proves with the helps of this hypothesis that all zeros of $\zeta(z)$ are simple and lie only on the real axis and on the line $\mathrm{Re}\, z = 1/2$. In § 2 the formulation of one theorem on convex functions from the first part of the monography of Hayman W. K. and Kennedy P. B. a bit is slightly corrected. In the last section the author express his gratitude to some mathematicians (especially to A. F. Leont'ev) who supported him throughout his comparatively long scientific career.

Key words: Riemann's Zeta Function and its zeros, convex functions and its derivatives.

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов (≈ 12 стр. формата A4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 53-84-62;
E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 19

Выпуск 2

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-50223 от 15 июня 2012 г.

Подписано в печать 26.06.2017. Дата выхода в свет 17.07.2017.
Формат бумаги $60{\times}84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 9,07. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель и издатель:
Южный математический институт — филиал
Федерального государственного бюджетного
учреждения науки Федерального научного центра
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.