Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
В Л А Д И К А В К А З С К И Й   Н А У Ч Н Ы Й   Ц Е Н Т Р
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18, выпуск 2 апрель–июнь, 2016

## СОДЕРЖАНИЕ



Владикавказ
2016

*Владикавказский математический журнал*
*2016, Том 18, Выпуск 2, С. 3–11*

*УДК* **517.9**

# ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНО-РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ

**О. Г. Авсянкин**

Рассматриваются парные многомерные интегральные операторы с однородно-разностными ядрами, действующие в $L_p$-пространствах. Для таких операторов определен символ, в терминах которого получены необходимые и достаточные условия обратимости операторов.

**Ключевые слова:** интегральный оператор, однородно-разностное ядро, символ, обратимость, сферические гармоники.

## Введение

В настоящее время имеется немало работ, посвященных многомерным интегральным операторам с однородными степени $(-n)$ ядрами и их обобщениями (см., например, [1–4] и цитированные в них источники). В работе [5] были введены и изучены операторы с однородно-разностными ядрами, т. е. с ядрами, которые являются однородными степени $(-n)$ по одним переменным и разностными по другим. Развитием этого направления стала статья [6], в которой была построена и исследована банахова алгебра, порожденная многомерными интегральными операторами с однородно-разностными ядрами.

Данная работа продолжает исследования, начатые в статьях [5] и [6]. Ее целью является изучение парных многомерных интегральных операторов с однородно-разностными ядрами, действующих в пространствах суммируемых функций. Для этих операторов определен символ, представляющий собой совокупность пар функций специального вида. В работе получены необходимые и достаточные условия обратимости парных операторов с однородно-разностными ядрами, которые формулируются в терминах невырожденности их символов.

В работе использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное евклидово пространство; $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$; $x' = x/|x|$; $x \cdot y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$; $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = 1\}$; $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел; $\mathbb{R}_+^{1+m} = \{x \in \mathbb{R}^{1+m} \colon x_1 > 0\}$; $Y_{\nu\mu}(\sigma)$ — сферические гармоники порядка $\nu$; $d_n(\nu)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка $\nu$:

$$d_n(\nu) = (n + 2\nu - 2)\frac{(n + \nu - 3)!}{\nu!(n - 2)!};$$

$I$ — тождественный оператор (ниже из контекста всегда будет ясно в каком пространстве рассматривается этот оператор).

**Постановка задачи и основной результат.** Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$ рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} k(x,y,t-s)\,\varphi(y,s)\,dyds, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^m$, предполагая, что функция $k(x,y,t)$, заданная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, удовлетворяет следующим условиям:

[1°] однородность степени $(-n)$ по переменным $x$ и $y$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y, t) = \alpha^{-n} k(x,y,t) \quad (\forall\, \alpha > 0);$$

[2°] инвариантность относительно группы вращений $SO(n)$ по переменным $x$ и $y$, т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y), t) = k(x,y,t) \quad (\forall\, \omega \in SO(n));$$

[3°] суммируемость, т. е.

$$\kappa := \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} |k(e_1,y,t)||y|^{-n/p}\,dydt < \infty, \quad e_1 = (1,0,\ldots,0).$$

Известно [5], что оператор $K$ ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$, причем $\|K\| \leqslant \kappa$. Далее, определим в $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$ проектор $P$ формулой

$$(P\varphi)(x,t) = \begin{cases} \varphi(x,t), & |x| < 1,\ t \in \mathbb{R}^m, \\ 0, & |x| > 1,\ t \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

и обозначим через $Q$ дополнительный проектор.

Основным объектом исследования в данной работе является парный оператор

$$A = \lambda I + K_1 P + K_2 Q, \tag{2}$$

где $K_j$ — оператор вида (1), $j = 1,2$. Наша цель — установить критерий обратимости оператора $A$.

Чтобы получить условия обратимости оператора $A$, рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$ уравнение, порожденное этим оператором:

$$\lambda\varphi(x,t) + \int\limits_{|y|<1}\int\limits_{\mathbb{R}^m} k_1(x,y,t-s)\varphi(y,s)\,dyds + \int\limits_{|y|>1}\int\limits_{\mathbb{R}^m} k_2(x,y,t-s)\varphi(y,s)\,dyds = f(x,t). \tag{3}$$

Так как функция $k_j(x,y,t)$, где $j = 1,2$, удовлетворяет условию 2°, то по лемме 4.6 книги [7] найдется такая функция $k_{0j}(r,\rho,\tau,t)$, что

$$k_j(x,y,t) = k_{0j}(|x|,|y|,x'\cdot y',t).$$

Это позволяет переписать уравнение (3) в виде

$$\lambda\varphi(x,t) + \int\limits_{|y|<1}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{|x|^n} k_{01}\left(1, \frac{|y|}{|x|}, x'\cdot y', t-s\right)\varphi(y,s)\,dyds \\ + \int\limits_{|y|>1}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{|x|^n} k_{02}\left(1, \frac{|y|}{|x|}, x'\cdot y', t-s\right)\varphi(y,s)\,dyds = f(x,t).$$

Переходя в этом уравнении к сферическим координатам по переменным $x$ и $y$, т. е. полагая $x = r\sigma$, $y = \rho\theta$, приходим к уравнению

$$\lambda\Phi(r\sigma,t) + \int\limits_0^1\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{r}\,D_1\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta, t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds \\ + \int\limits_1^\infty\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{r}\,D_2\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta, t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds = F(r\sigma,t), \quad (4)$$

где

$$\begin{gathered}\Phi(r\sigma,t) = \varphi(r\sigma,t)r^{(n-1)/p}, \quad F(r\sigma,t) = f(r\sigma,t)r^{(n-1)/p}, \\ D_j(\rho,\tau,t) = k_{0j}(1,\rho,\tau,t)\rho^{(n-1)/p'}, \quad j=1,2.\end{gathered} \quad (5)$$

Из условия 3° следует, что

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^1\int\limits_{\mathbb{R}^m} |D_j(\rho,\tau,t)|\rho^{-1/p}(1-\tau^2)^{(n-3)/2}\,d\rho\,d\tau\,dt < \infty. \quad (6)$$

Умножив обе части уравнения (4) на $Y_{\nu\mu}(\sigma)$ и проинтегрировав по единичной сфере, получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\lambda\Phi_{\nu\mu}(r,t) + \int\limits_{S_{n-1}} Y_{\nu\mu}(\sigma)\,d\sigma \int\limits_0^1\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{r}\,D_1\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta, t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds \\ + \int\limits_{S_{n-1}} Y_{\nu\mu}(\sigma)\,d\sigma \int\limits_1^\infty\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{r}\,D_2\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta, t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds = F_{\nu\mu}(r,t), \quad (7)$$

где $r \in \mathbb{R}_+$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 1, 2, \ldots, d_n(\nu)$,

$$\Phi_{\nu\mu}(r,t) = \int\limits_{S_{n-1}} \Phi(r\sigma,t)Y_{\nu\mu}(\sigma)\,d\sigma, \quad F_{\nu\mu}(r,t) = \int\limits_{S_{n-1}} F(r\sigma,t)Y_{\nu\mu}(\sigma)\,d\sigma.$$

Преобразуем интегралы из левой части формулы (7). Меняя порядок интегрирования и используя формулу Функа — Гекке [7, с. 43], получим следующую бесконечную диагональную систему интегральных уравнений:

$$\lambda\Phi_{\nu\mu}(r,t)+\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_{1\nu}\left(\frac{\rho}{r},t-s\right)\Phi_{\nu\mu}(\rho,s)\,d\rho\,ds$$
$$+\int\limits_1^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_{2\nu}\left(\frac{\rho}{r},t-s\right)\Phi_{\nu\mu}(\rho,s)\,d\rho\,ds=F_{\nu\mu}(r,t),\quad (8)$$

где

$$D_{j\nu}(\rho,t)=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)}\int\limits_{-1}^1 D_j(\rho,\tau,t)\,P_\nu(\tau)\,(1-\tau^2)^{(n-3)/2}\,d\tau,\quad j=1,2.\quad (9)$$

Здесь $P_\nu(\tau)$ — многочлены Лежандра, определяемые равенством

$$P_\nu(\tau)=\begin{cases}\cos(\nu\arccos\tau), & n=2;\\ \frac{\nu!(n-3)!}{(n+\nu-3)!}\,C_\nu^{(n-2)/2}(\tau), & n\geqslant 3,\end{cases}$$

где $C_\nu^{(n-2)/2}(\tau)$ — многочлены Гегенбауэра (см., например, [7, с. 41]).

В пространстве $L_p(\mathbb{R}_+^{1+m})$ рассмотрим оператор $A_\nu$, где $\nu\in\mathbb{Z}_+$, определяемый левой частью уравнения (8):

$$(A_\nu g)(r,t)=\lambda g(r,t)+\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_{1\nu}\left(\frac{\rho}{r},t-s\right)g(\rho,s)\,d\rho\,ds$$
$$+\int\limits_1^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,D_{2\nu}\left(\frac{\rho}{r},t-s\right)g(\rho,s)\,d\rho\,ds.$$

**Лемма 1.** *Пусть $\lambda\neq 0$. Тогда существует такое число $\nu_0\in\mathbb{Z}_+$, что для всех $\nu>\nu_0$ операторы $A_\nu$ обратимы.*

$\lhd$ Запишем оператор $A_\nu$ в виде

$$A_\nu=\lambda I+K_{1\nu}P_1+K_{2\nu}Q_1,$$

где оператор $K_{j\nu}$ задается формулой

$$(K_{j\nu}g)(r,t)=\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}D_{j\nu}\left(\frac{\rho}{r},t-s\right)g(\rho,s)\,d\rho\,ds,\quad j=1,2,$$

проектор $P_1$ определяется формулой

$$(P_1g)(r,t)=\begin{cases}g(r,t), & r\in(0,1),\ \ t\in\mathbb{R}^m;\\ 0, & r\in(1,\infty),\ \ t\in\mathbb{R}^m,\end{cases}$$

а $Q_1$ — дополнительный к $P_1$ проектор. Для нормы оператора $K_{j\nu}$ справедлива оценка см. [5]:

$$\|K_{j\nu}\|\leqslant\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^m}|D_{j\nu}(\rho,t)|\rho^{-1/p}\,d\rho\,dt.$$

В силу формулы (9) функции $D_{j\nu}(\rho,t)$, $\nu\in\mathbb{Z}_+$, являются коэффициентами Фурье функции $D_j(\rho,\tau,t)$ по системе многочленов Лежандра, а потому $D_{j\nu}(\rho,t)\to 0$ при $\nu\to\infty$ для почти всех $\rho\in\mathbb{R}_+$, $t\in\mathbb{R}^m$. Тогда, применяя мажорантную теорему Лебега, с учетом (6), заключаем, что $\|K_{j\nu}\|\to 0$ при $\nu\to\infty$. Следовательно, существует такое число $\nu_0\in\mathbb{Z}_+$, что для всех $\nu>\nu_0$ выполняется неравенство $\|K_{1\nu}P_1+K_{2\nu}Q_1\|\leqslant|\lambda|$, а значит, оператор $A_\nu$ обратим. $\rhd$

**Лемма 2.** *Пусть $\lambda\neq 0$ и $\nu_0$ — число, определенное в лемме 1. Для того чтобы оператор $A$ вида (2) был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$, необходимо и достаточно, чтобы все операторы $A_\nu$, где $\nu=0,1,\dots,\nu_0$, были обратимы в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{1+m}_+)$.*

$\lhd$ В пространстве

$$\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m})=\left\{\Phi(r\sigma,t):\,\Phi(r\sigma,t)r^{-(n-1)/p}\in L_p(\mathbb{R}^{n+m})\right\}$$

определим оператор $\widetilde{A}$ следующим образом:

$$\widetilde{A}=\lambda I+\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q},$$

где $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ — естественные аналоги проекторов $P$ и $Q$ в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m})$, а

$$(\widetilde{K}_j\Phi)(r\sigma,t)=\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}D_j\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta,t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds,\quad j=1,2.$$

Очевидно, что оператор $A$ обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$ тогда и только тогда, когда оператор $\widetilde{A}$ обратим в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m})$.

Определим в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m})$ проектор $P_N$ равенством

$$(P_N\Phi)(r\sigma,t)=\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{\mu=1}^{d_n(\nu)}\Phi_{\nu\mu}(r,t)Y_{\nu\mu}(\sigma)$$

и обозначим через $Q_N$ дополнительный проектор. С помощью формулы Функа — Гекке непосредственно проверяется, что $P_N\widetilde{A}Q_N=0$, $Q_N\widetilde{A}P_N=0$. Учитывая эти соотношения, запишем матричное равенство

$$\begin{pmatrix}P_N & Q_N\\ Q_N & P_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{A} & 0\\ 0 & \lambda I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_N & Q_N\\ Q_N & P_N\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda I+P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N & 0\\ 0 & \lambda I+O_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N\end{pmatrix}.$$

Ясно, что оператор $\widetilde{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы операторы $\lambda I+P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N$ и $\lambda I+O_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N$. Покажем, что последний оператор обратим при достаточно большом значении $N$.

В [1, с. 80–81] показано, что для любого $\varepsilon>0$ найдется функция $b_{jN}(\rho,\tau,t)$, $j=1,2$, вида

$$b_{jN}(\rho,\tau,t)=\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}}\sum_{\nu=0}^{N}d_n(\nu)b_{j\nu}(\rho,t)P_\nu(\tau),$$

где $P_\nu(\tau)$ — многочлены Лежандра, для которой оператор

$$(B_{jN}\Phi)(r\sigma,t)=\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{r}\,b_{jN}\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta,t-s\right)\Phi(\rho\theta,s)\,d\rho\,d\theta\,ds$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\widetilde{K}_j-B_{jN}\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m}))}<\varepsilon/2. \tag{10}$$

При этом всегда можно считать, что $N>\nu_0$. С помощью формулы сложения сферических гармоник [7, с. 38] легко проверить, что $Q_NB_{jN}=0$. Тогда

$$\lambda I+Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N=\lambda I+Q_N(\widetilde{K}_1-B_{1N})\widetilde{P}Q_N+Q_N(\widetilde{K}_2-B_{2N})\widetilde{Q}Q_N.$$

Учитывая (10), имеем

$$\begin{aligned}&\|Q_N(\widetilde{K}_1-B_{1N})\widetilde{P}Q_N+Q_N(\widetilde{K}_2-B_{2N})\widetilde{Q}Q_N\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m}))}\\&\leqslant\|\widetilde{K}_1-B_{1N}\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m}))}+\|\widetilde{K}_2-B_{2N}\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m}))}<\varepsilon.\end{aligned}$$

Выберем число $N$ столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\|Q_N(\widetilde{K}_1-B_{1N})\widetilde{P}Q_N+Q_N(\widetilde{K}_2-B_{2N})\widetilde{Q}Q_N\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^{n+m}))}<|\lambda|,$$

из которого следует обратимость оператора $\lambda I+Q_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})Q_N$.

Таким образом, оператор $\widetilde{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\lambda I+P_N(\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})P_N$. Обратимость последнего равносильна обратимости оператора

$$\widetilde{A}_N:=P_N(\lambda I+\widetilde{K}_1\widetilde{P}+\widetilde{K}_2\widetilde{Q})\Big|_{\operatorname{Im}P_N}$$

(см., например, [1, с. 6]). Нетрудно видеть, что уравнение, порожденное оператором $\widetilde{A}_N$ сводится к конечной системе уравнений (8), где $\nu=0,1,\dots,N$. Следовательно, необходимым и достаточным условием обратимости оператора $\widetilde{A}$ является обратимость всех операторов $A_\nu$, $\nu=0,1,\dots,N$. Так как, согласно лемме 1, при $\nu_0<\nu\leqslant N$ операторы $A_\nu$ обратимы, то достаточно считать, что $\nu=0,1,\dots,\nu_0$. $\triangleright$

Таким образом, задача свелась к изучению обратимости в $L_p(\mathbb{R}_+^{1+m})$ операторов $A_\nu$, где $\nu=0,1,\dots,\nu_0$.

Определим изоморфизм $W_p\colon L_p(\mathbb{R}_+^{1+m})\to L_p(\mathbb{R}^{1+m})$ формулой

$$(W_p\varphi)(u,t)=e^{-u/p}\varphi(e^{-u},t),\quad u\in\mathbb{R}^1,\ t\in\mathbb{R}^m.$$

Непосредственно проверяется, что оператор $C_\nu=W_pA_\nu W_p^{-1}$ задается в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{1+m})$ равенством

$$\begin{aligned}(C_\nu\psi)(u,t)=\lambda\psi(u,t)&+\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^m}h_{1\nu}(u-v,t-s)\psi(v,s)\,dv\,ds\\&+\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_{\mathbb{R}^m}h_{2\nu}(u-v,t-s)\psi(v,s)\,dv\,ds,\end{aligned}\tag{11}$$

где
$$h_{j\nu}(u,t) = D_{j\nu}(e^u,t)e^{u/p'}, \quad u \in \mathbb{R}^1,\ t \in \mathbb{R}^m, \tag{12}$$
а $D_{j\nu}(\rho,t)$ определяется формулой (9).

Операторы вида (11) были изучены в работе [8]. Согласно теореме 1.4 из [8] оператор $C_\nu$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы операторы $\lambda I + H_{1\nu}$ и $\lambda I + H_{2\nu}$, где
$$(H_{j\nu}\psi)(u,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^m} h_{j\nu}(u-v,t-s)\,\psi(v,s)\,dv\,ds.$$

Как известно, символом оператора $\lambda I + H_{j\nu}$, $j=1,2$, является функция
$$\sigma_{j\nu}(\xi) = \lambda + \widehat{h}_{j\nu}(\xi) = \lambda + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^m} h_{j\nu}(u,t)e^{i(\xi_1 u + \widetilde{\xi}\cdot t)}\,du\,dt,$$

где $\xi = (\xi_1,\widetilde{\xi}) = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m+1})$. Преобразуем функцию $\sigma_{j\nu}(\xi)$. Применяя формулы (12) и (9), а затем формулу Каталана (см., например, [7, с. 20]), получим
$$\sigma_{j\nu}(\xi) = \lambda + \int_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^m} D_{j\nu}(\rho,t)\rho^{-1/p+i\xi_1}e^{i\widetilde{\xi}\cdot t}\,d\rho\,dt$$
$$= \lambda + \int\limits_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^m} \rho^{-1/p+i\xi_1}e^{i\widetilde{\xi}\cdot t}\,d\rho\,dt \int\limits_{S_{n-1}} D_j(\rho,e_1\cdot\theta,t)P_\nu(e_1\cdot\theta)\,d\theta.$$

Наконец, используя равенство (5), после несложных преобразований приходим к формуле
$$\sigma_{j\nu}(\xi) = \lambda + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} k_j(e_1,y,t)P_\nu(e_1\cdot y')|y|^{-n/p+i\xi_1}e^{i\widetilde{\xi}\cdot t}\,dy\,dt. \tag{13}$$

Совокупность пар функций $(\sigma_{1\nu}(\xi),\sigma_{2\nu}(\xi))$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, определяемых формулой (13), будем называть *символом* оператора $A$. Основным результатом данной работы является следующая

**Теорема 1.** *Для того чтобы оператор $A$ вида (2) был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\nu \in \mathbb{Z}_+$ выполнялось условие*
$$\sigma_{j\nu}(\xi) \neq 0 \quad (\forall\,\xi \in \dot{\mathbb{R}}^{1+m},\ j=1,2), \tag{14}$$
*где $\dot{\mathbb{R}}^{1+m}$ — одноточечная компактификация пространства $\mathbb{R}^{1+m}$.*

$\lhd$ Проанализируем два случая.

1) Пусть $\lambda \neq 0$. Условие (14) является необходимым и достаточным для обратимости всех операторов $\lambda I + H_{j\nu}$, где $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $j=1,2$, а значит, и всех операторов $C_\nu$ вида (11). Так как $A_\nu = W_p^{-1}C_\nu W_p$, то оператор $A_\nu$ обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{1+m}_+)$ тогда и только тогда, когда оператор $C_\nu$ обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{1+m})$. Следовательно, условие (14), необходимо и достаточно, для обратимости всех операторов $A_\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, что в силу леммы 2 равносильно обратимости оператора $A$.

2) Пусть $\lambda = 0$. Предположим, что оператор $A$ обратим. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что все операторы из $\delta$-окрестности оператора $A$ обратимы. Подберем такие числа

$\nu_1 \in \mathbb{Z}_+$ и $\xi_0 \in \mathbb{R}^{1+m}$, что $|\sigma_{1\nu_1}(\xi_0)| < \delta$. Тогда оператор $A - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0)I$ обратим. С другой стороны, символом оператора $A - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0)I$ является совокупность пар функций

$$\big(\sigma_{1\nu}(\xi) - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0), \sigma_{2\nu}(\xi) - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0)\big),$$

где $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку функция $\sigma_{1\nu_1}(\xi) - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0)$ при $\xi = \xi_0$ обращается в нуль, то оператор $A - \sigma_{1\nu_1}(\xi_0)I$ необратим. Получили противоречие. То что оператор $A$ необратим, согласуется с условием (14), так как в этом случае $\sigma_{j\nu}(\infty) = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, 2$. $\triangleright$

Замечание. Отметим, что фактически достаточно требовать выполнения условия (14) для $\nu = 0, 1, \ldots, \nu_0$. Однако использование в записях «неопределенного» числа $\nu_0$ неудобно. Поэтому мы полагаем, что условие (14) выполнено для всех $\nu \in \mathbb{Z}_+$.

Из этой теоремы легко получается критерий обратимости оператора $\lambda I + K$, ранее установленный в [5]. Так как $\lambda I + K = \lambda I + KP + KQ$, то символом этого оператора является совокупность функций

$$\sigma_\nu(\xi) = \lambda + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} k(e_1, y, t) P_\nu(e_1 \cdot y')|y|^{-n/p + i\xi_1} e^{i\widetilde{\xi}\cdot t}\, dy\, dt.$$

**Следствие 1.** *Для того чтобы оператор $\lambda I + K$ был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^{n+m})$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\nu \in \mathbb{Z}_+$ выполнялось условие*

$$\sigma_\nu(\xi) \neq 0 \quad (\forall\, \xi \in \dot{\mathbb{R}}^{1+m}).$$

## Литература


1. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators.—Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2001.—427 p.
2. *Авсянкин О. Г.* О $C^*$-алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига // Докл. РАН.—2008.—Т. 419, № 6.—С. 727–728.
3. *Авсянкин О. Г., Перетятькин Ф. Г.* Об ограниченности и компактности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами // Изв. вузов. Математика.—2013.—№ 11.—С. 64–68.
4. *Авсянкин О. Г.* Проекционный метод для интегральных операторов с однородными ядрами, возмущенных односторонними мультипликативными сдвигами // Изв. вузов. Математика.—2015.—№ 2.—С. 10–17.
5. *Авсянкин О. Г.* Многомерные интегральные операторы с однородно-разностными ядрами // Диф. уравнения.—2012.—Т. 48, № 1.—С. 64–69.
6. *Авсянкин О. Г.* Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородно-разностными ядрами // Мат. заметки.—2014.—Т. 95, вып. 2.—С. 163–169.
7. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1984.—208 с.
8. *Симоненко И. Б.* Операторы типа свертки в конусах // Мат. сборник.—1967.—Т. 74, № 2.—С. 298–313.


*Статья поступила 19 ноября 2015 г.*

Авсянкин Олег Геннадиевич
Южный федеральный университет,
*профессор каф. дифференц. и интегральных уравнений*
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: avsyanki@math.rsu.ru

# PAIRED INTEGRAL OPERATORS WITH HOMOGENEOUS–DIFFERENCE KERNELS

Avsyankin O. G.

We consider the paired multidimensional integral operators with homogeneous-difference kernels, acting in $L_p$-spaces. For these operators the symbol is defined. In term of the symbol the necessary and sufficient conditions for the invertibility of operators are obtained.

**Key words:** integral operator, homogeneous-difference kernel, symbol, invertibility, spherical harmonics.

*Владикавказский математический журнал*
*2016, Том 18, Выпуск 2, С. 12–18*

*УДК* **519.45**

# О КАТЕГОРИИ MR-ГРУПП НАД КОЛЬЦОМ R

**М. Г. Амаглобели**

*К 60-летию Владимира Амурхановича Койбаева*

В работе [1] определена категория степенных MR-групп для ассоциативного кольца R с единицей. Настоящая статья посвящена изучению частичных степенных MR-групп, которые изоморфно вкладываются в свое тензорное пополнение над кольцом R. Ключом к ее пониманию служит понятие тензорного пополнения, введенное в [1]. Как следствие, получено описание свободных MR-групп и свободных MR-произведений на языке групповых конструкций.

**Ключевые слова:** степенная R-группа, линдонова R-группа, холлова R-группа, MR-группа, частичная MR-группа, тензорное пополнение.

## 1. Основные определения

Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей 1. В работе А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова [1] была введена новая категория степенных R-групп MR-группы) как естественное обобщение на некоммутативный случай понятия R-модуля.

Напомним основные определение, следуя статьям [1, 2].

Пусть $L_{\mathrm{gr}} = \langle \cdot, ^{-1}, e\rangle$ — групповой язык (сигнатура), где $\cdot$ — бинарная операция умножения, $^{-1}$ — унарная операция обращения элементов группы, $e$ — константный символ для единицы группы.

Обогатим группой язык $L_{\mathrm{gr}}$ до языка $L^*_{\mathrm{gr}} = L_{\mathrm{gr}} \cup \{f_\alpha(g) :\ \alpha \in \mathrm{R}\}$, где $f_\alpha(g)$ — унарная алгебраическая операция.

Определение 1. Множество $G$ будем называть *линдоновой* R*-группой*, если на нем определены операции $\cdot$, $^{-1}$, $e$ , $\{f_\alpha(g) :\ \alpha \in \mathrm{R}\}$ и выполнены аксиомы:

1) аксиомы группы;

2) для всех $g, h \in G$ и всех элементов $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ выполняются равенства

$$g^1 = g, \quad g^0 = 1, \quad e^\alpha = e; \tag{1}$$

$$g^{\alpha+\beta} = g^\alpha \cdot g^\beta, \quad g^{\alpha\beta} = (g^\alpha)^\beta; \tag{2}$$

$$(h^{-1}gh)^\alpha = h^{-1}g^\alpha h. \tag{3}$$

При записи аксиом мы используем следующее соглашение: для краткости $f_\alpha(g)$ будем записывать в виде $g^\alpha$, $g \in G$, $\alpha \in \mathrm{R}$.

Обозначим через $\mathrm{L_R}$ категорию всех линдоновых R-групп. Так как аксиомы выше являются универсальными аксиомами языка $L^*_{\mathrm{gr}}$, то $\mathrm{L_R}$ является многообразием алгебраических систем языка $L^*_{\mathrm{gr}}$ и, следовательно, из общих теорем универсальной алгебры следует, что можно говорить о многообразии R-групп, об R-гомоморфизмах, R-изоморфизмах, о свободных R-группах и так далее.

Определение 2. Пусть $G, H \in \mathrm{L_R}$. Тогда гомоморфизм $\varphi : G \to H$ называется R-*гомоморфизмом*, если $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^\alpha$ для любых $g \in G$, $\alpha \in \mathrm{R}$.

Существуют абелевы линдоновы R-группы, не являющиеся R-модулями (см. [3], где подробно исследована структура свободной абелевой R-группы). В работе [1] А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников добавили к аксиомам Линдона дополнительную аксиому (квазитождество):

$$(\mathrm{MR}) \qquad (\forall\, g, h \in G)\ (\alpha \in \mathrm{R}) \quad [g, h] = e \Longrightarrow (gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha. \tag{4}$$

Определение 3. Группу $G$ будем называть MR-*группой*, если на $G$ определена операция $g^\alpha$ для всех $g \in G$ и при этом выполнены аксиомы (1)–(4).

Обозначим через $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ класс всех степенных R-групп с аксиомами (1)–(4). Ясно, что этот класс является квазимногообразием в языке $L^*_{\mathrm{gr}}$ и в нем снова есть понятие свободной MR-группы, MR-гомоморфизма и так далее, и, кроме того, выполнено свойство: каждая абелева MR-группа является R-модулем и наоборот.

Большинство естественных примеров степенных R-групп лежат в классе $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$:

1) любая группа является $\mathbb{Z}$-группой;

2) делимая абелева группа является $\mathbb{Q}$-группой;

3) группа периода $n$ является $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-группой;

4) модуль над кольцом R является абелевой MR-группой;

5) произвольная про-$p$-группа является $\mathbb{Z}_p$-группой над кольцом целых $p$-адических чисел $\mathbb{Z}_p$;

6) произвольная нильпотентная степенная R-группа над биномиальным кольцом R (*холлова* R-*группа*), введенная Ф. Холлом в [4], является MR-группой.

**Нильпотентные группы.** Пусть $c > 1$ — натуральное число. Обозначим через $\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}$ категорию нильпотентных R-групп ступени нильпотентности $c$ из класса $\mathrm{L_R}$, т. е. всех R-групп, в которых для любых $x_1, \ldots, x_{c+1}$ выполняется тождество $[x_1, \ldots, x_{c+1}] = 1$, а через $\mathfrak{N}^0_{c,\mathrm{R}}$ — категорию нильпотентных R-групп ступени $c$, в которых выполняется аксиома (MR). Структура R-групп без аксиомы (MR) очень сложна, поэтому в большинстве работ изучаются только R-группы со свойством (MR). Далее, в статье мы будем рассматривать только R-группы с этой аксиомой.

**1.2. Холловы нильпотентные R-группы** [4]**.** Для того чтобы ввести это понятие, нам необходимо ограничить класс рассматриваемых колец.

Определение 4. Кольцо R называется *биномиальным кольцом*, если R — область целостности, содержащая $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца, и с каждым элементом $\alpha \in R$ включает все биномиальные коэффициенты $C^n_\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ , $n \in \mathbb{N}$.

Примерами биномиальных колец являются: любое поле нулевой характеристики, кольцо многочленов над таким полем и кольцо целых чисел.

Определение 5. Нильпотентная группа $G$ ступени нильпотентности $c$ называется R-*группой* (здесь R-*биномиальное кольцо*), если для любого $\alpha \in \mathrm{R}$ и $x \in G$ единственным образом определен элемент $x^\alpha \in G$ и для всех элементов группы $G$ и кольца R выполнены следующие аксиомы ($x$, $y$, $x_1, \ldots, x_n \in G$, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$):

1) $x^1 = x$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$;

2) $(y^{-1}xy)^\alpha = y^{-1}x^\alpha y$;

3) $x_1^\alpha \cdots x_n^\alpha = (x_1 \cdots x_n)^\alpha \tau_2(X)^{C_\alpha^2} \cdots \tau_c(X)^{C_\alpha^c}$, где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\tau_k(X)$ — $k$-е слово Петреску.

Напомним, что для любого натурального $k$ рекурсивно определяется $k$-е слово Петреску формулой

$$x_1^k \cdots x_n^k = \tau_1(X)^{C_k^1} \tau_2(X)^{C_k^2} \cdots \tau_{k-1}(X)^{C_k^{k-1}} \tau_k(X)^{C_k^k}$$

в свободной группе $F$ с порождающими $x_1, \ldots, x_n$. В частности,

$$\tau_1(X) = x_1, \ldots, x_n, \quad \tau_2(X) = \prod\nolimits_{i>j,\ i,j=1}^{n} [x_i, x_j] \mod \gamma_3(F),$$

где $\gamma_3(F)$ — третий член нижнего центрального ряда группы $F$. Обозначим категорию холловых R-групп через $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}$.

Покажем, что структура групп из $\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}$ очень сильно отличается от структуры холловых R-групп из класса $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}$. Для этого приведем структуру свободной R-группы в многообразии $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}$, следуя работе [5]. Мы ограничимся рассмотрением двух биномиальных колец $\mathrm{R} = \mathbb{Q}[t]$, $\mathrm{R} = \mathbb{Q}(t)$. Обозначим через $G_0$ свободную 2-ступенно нильпотентную R-группу с порождающими $x$ и $y$. Хорошо известно, что мальцевская база этой группы состоит из трех элементов $x$, $y$, $[y, x]$. Общий вид элемента $g \in G_0$ следующий: $g = x^\gamma y^\delta [y, x]^\varepsilon$, $\gamma, \delta, \varepsilon \in \mathrm{R}$. В частности, в этой группе коммутант $G_0'$ является свободным R-модулем ранга 1 с порождающим $[y, x]$. Если теперь $G$ — свободная R-группа в многообразии $\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}^0$, то в работе [5] показано, что $G'$ является свободным R-модулем бесконечного ранга и найдена база этого модуля.

Систематическое изучение MR-групп начато в работах [5]–[11]. Отметим, кстати, что результаты этих работ оказались весьма полезны при решении известных проблем Тарского. Настоящая статья посвящена изучению частичных степенных MR-групп, которые изоморфно вкладываются в свое тензорное пополнение над кольцом R. Ключом к ее пониманию служит понятие тензорного пополнения, введенное в [1]. Как следствие, получено описание свободных MR-групп и свободных MR-произведений на языке групповых конструкций.

## 2. Тензорное пополнение

Здесь, следуя [1], вводится основная операция в классе степенных MR-групп. Она естественно обобщает на некоммутативный случай понятие расширения кольца скаляров для модулей.

Определение 6. Пусть $G$ — MR-группа, $\mu : \mathrm{R} \to S$ — гомоморфизм колец. Тогда MS-группа $G^S$ называется *тензорным* MS-*пополнением* MR-*группы* $G$, если $G^S$ удовлетворяет следующему универсальному свойству:

1) существует R-гомоморфизм $\lambda : G \to G^S$ такой, что $\lambda(G)$ MS-порождает $G^S$, т. е. $\langle \lambda(G) \rangle_S = G^S$;

2) для любой MS-группы $H$ и любого R-гомоморфизма $\varphi : G \to H$, согласованного с $\mu$ (т. е. такого, что $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^{\mu(\alpha)}$), существует $S$-гомоморфизм $\psi : G^S \to H$, делающий коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi"'] & G^S \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad (\lambda\psi = \varphi).$$

В [1] доказано, что для любой MR-группы $G$ и любого гомоморфизма $\mu : \mathrm{R} \to S$ тензорное пополнение $G^S$ всегда существует и оно единственно с точностью до изоморфизма. Там же показано, что если $G$ — абелева MR-группа, то $G^S \cong G \underset{R}{\otimes} S$ — тензорное произведение R-модуля $G$ на кольцо $S$.

Операция тензорного пополнения перестановочна с операциями прямого произведения и взятия прямого предела и, вообще говоря, не перестановочна с операциями декартова произведения и взятия обратного предела [7]. Перестановочность тензорного пополнения с прямыми пределами позволяет многие вопросы о пополнениях сводить к случаю конечно порожденной группы. Действительно, пусть $\{G_i\ (i \in I); \pi_i^j\}$ — прямой спектр группы $G$, составленный из конечно порожденных групп $G_i$. Тогда $G = \varinjlim_{t \to I} G_i$ и $G^S \cong \varinjlim_{t \to I} G_i^S$.

Построение тензорного пополнения данной группы удобно вести по шагам, постепенно «доопределяя степени». Это приводит к понятию частичной MR-группы. Также к частичным MR-группам приводят некоторые групповые операции над MR-группами. Пусть R — кольцо, $G$ — группа.

Определение 7. Группу $G$ будем называть *частичной* MR-*группой*, если возведение в степень определено для некоторых пар $(g, \alpha)$, но не обязательно для всех пар; причем, если определена одна часть равенства в аксиомах (1)–(4), то определена и другая часть, и для них выполняются аксиомы (1)–(4) в определении MR-группы.

Класс частичных MR-групп будем обозначать через $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}$. Например, если R — подкольцо кольца $S$, тогда любая MR-группа является частичной MS-группой.

На протяжении всей статьи будем предполагать, что кольцо R в качестве подкольца содержит кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Пусть $G$ — частичная MR-группа, т. е. $G \in \mathscr{P}_{\mathrm{R}}$.

Определение 8. Будем говорить, что группа $G$ является *точной относительно кольца* R, если гомоморфизм $\lambda : G \to G^{\mathrm{R}}$ является вложением.

Определение 9. Будем говорить, что группа $G$ является *точной*, если она является точной относительно любого кольца, содержащего $\mathbb{Z}$.

Пусть R — кольцо, $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ — категория частичных MR-групп. По определению группа $G$ из $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}$ принадлежит $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$, если выполнены следующие условия:

1) для любой максимальной абелевой подгруппы $M$ из $G$ и любого $x \notin M$ пересечение $M \cap M^x = e$;

2) канонический гомоморфизм $j : M \to M \underset{\mathrm{R}}{\otimes} \mathrm{R}$ является вложением.

Сформулируем основную теорему.

**Теорема 1** [9]. *Пусть* $\mathbb{Z}$ *— подкольцо кольца* R *и группа* $G \in \mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$, *причем в* $G$ *и* $\mathrm{R}^+$ (*аддитивная группа кольца* R) *нет элементов порядка* 2. *Тогда группа* $G^R$ *точна, т. е. гомоморфизм* $\lambda : G \to G^R$ *является вложением.*

При доказательстве этой теоремы используется способ построения тензорного пополнения, основанный на конструкции свободного произведения групп с объединенной подгруппой и техника комбинаторной теории групп. Данная теорема дает достаточное условие для точности тензорного пополнения. Заметим, что условие 1) из определения класса $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ является также необходимым. В классе $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ содержатся свободные группы. Он замкнут относительно прямых пределов, свободных произведений и расширений специального вида. Важным следствием из этой теоремы является точность тензорного пополнения для кольца R, содержащего кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Для конкретных колец, например, для тел нулевой характеристики и кольца многочленов $\mathrm{R} = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ с целыми коэффициентами, эта теорема доказана в работах [11–13].

Замечание. Определим класс групп $\mathscr{P}^*_{\mathrm{R}}$, более широкий, чем класс $\mathscr{P}^0_{\mathrm{R}}$. Будем говорить, что группа $G \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{R}}$, если для любой ее максимальной подгруппы $M$ выполнено условие: $M$ либо R-модуль, либо $M$ удовлетворяет условиям 1) и 2) в определении класса $\mathscr{P}^0_{\mathrm{R}}$. Тогда основная теорема справедлива и для групп класса $\mathscr{P}^*_{\mathrm{R}}$.

### 3. Свободные произведения MR-групп

Сформулируем понятие свободной MR-группы. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей 1, $X$ — произвольное множество.

Определение 10. MR-группа $F_{\mathrm{R}}(X)$ с множеством R-порождающих $X$ называется *свободной* MR-*группой с базой* $X$, если выполнено следующее условие: для каждой MR-группы $G$ произвольное отображение $\varphi_0 : X \to G$ продолжается до R-гомоморфизма $\varphi : F_R(X) \to G$. Множество $X$ называется *множеством свободных* MR-*порождающих* $F_R(X)$. Мощность $|X|$ называется *рангом группы* $F_R(X)$.

**Теорема 2.** *Для любых $X$ и* R *свободная* MR-*группа существует и единственна с точностью до* R-*изоморфизма.*

$\lhd$ Пусть $F(X)$ — свободная группа в классе всех групп. Тогда ее тензорное MR-пополнение является свободной MR-группой с базой $X$. Действительно, пусть $\varphi_0 : X \to G$ — произвольное отображение из $X$ в MR-группу $G$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & F(X) \arrow[r] \arrow[d, "\exists\,\varphi_1"] & (F(X))^{\mathrm{R}} \arrow[dl, "\exists\,\varphi"] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

Тогда $\varphi_0$ продолжается до гомоморфизма $\varphi_1 : F(X) \to G$ по свойству свободной группы, а последнее отображение продолжается до R-гомоморфизма $\varphi : (F(X))^{\mathrm{R}} \to G$. Следовательно, $(F(X))^R$-свободная MR-группа с базой $X$.

Единственность следует из единственности тензорного пополнения. $\rhd$

Сформулируем следствие из основной теоремы 1 и теоремы 2.

**Следствие.** *Пусть $R$ — кольцо, содержащее $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца. Тогда свободная группа $F(X)$ точна относительно кольца $\mathbb{Z}$. Другими словами, $F(X)$ является подгруппой $F_R(X)$.*

$\lhd$ По теореме 2 $F_{\mathrm{R}}(X) \cong (F(X))^{\mathrm{R}}$. Так как $F(X) \in \mathscr{P}^0_{\mathrm{R}}$ и не содержит инволюций, то по теореме 1 гомоморфизм $\lambda : F(X) \to (F(X))^{\mathrm{R}}$ является вложением. $\rhd$

Введем конструкцию свободного произведения в категории MR-групп.

Определение 11. Пусть $G_i$, $i \in I$, — MR-группы. MR-группа $\underset{R}{*} G_i$ называется *свободным произведением в категории* $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$, если R-гомоморфизмы $\varphi_i : G_i \to \underset{R}{*} G_i$ таковы, что для любых R-гомоморфизмов $\psi_i : G_i \to H$, где $H$ — произвольная MR-группа, существует R-гомоморфизм $\psi : \underset{R}{*} G_i \to H$, делающий коммутативными следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & \underset{R}{*} G_i \arrow[dl, dashed, "\exists\,\psi"] \\
H &
\end{tikzcd} \qquad (\psi_i = \varphi_i \psi, \ \ i \in I)$$

и $\underset{\mathrm{R}}{*}G_i$ MR-порождается множеством $\{\varphi_i(g_i),\ g_i \in G_i,\ i \in I\}$.

Из категорных соображений следует, что группа $\underset{R}{*}G_i$ определена однозначно с точностью до R-гомоморфизма.

**Теорема 3.** *Пусть $R$ — кольцо, содержащее кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца, $G_i$, $i \in I$, — некоторое множество MR-групп. Тогда*

1) $\underset{R}{*}G_i \cong (*G_i)^R$;

2) *гомоморфизм* $\lambda : *G_i \to (*G_i)^R$ *является вложением.*

$\lhd$ Пусть $\varphi_i^0 : G_i \to *G_i$ — канонические вложения. Так как класс $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}$ замкнут относительно свободных произведений [9], то к нему можно применить конструкцию тензорного пополнения. Пусть $\lambda : *G_i \to (*G_i)^{\mathrm{R}}$ — гомоморфизм из определения тензорного пополнения. Обозначим через $\varphi_i = \lambda \circ \varphi_i^0$, $i \in I$. Тогда $\varphi_i : G_i \to (*G_i)^{\mathrm{R}}$ есть совокупность R-гомоморфизмов. Пусть $\psi_i : G_i \to H$, $i \in I$, — произвольные R-гомоморфизмы. Для того чтобы доказать, что группа $(*G_i)^{\mathrm{R}}$ является свободным произведением в категории $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ (т. е. доказать, что $\underset{\mathrm{R}}{*}G_i \cong (*G_i)^{\mathrm{R}}$), мы должны замкнуть диаграмму

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i^0"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & *G_i \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, dashed, "\exists\,\varphi"] & (*G_i)^R \arrow[dl, dashed, "\exists\,\psi"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

до коммутативной.

По определению свободного произведения $\underset{R}{*}G_i$ существует частичный R-гомоморфизм $\varphi : \underset{R}{*}G_i \to H$. В силу универсального свойства тензорного пополнения существует R-гомоморфизм $\psi$, продолжающий $\varphi$. Он и будет искомым. Свойство порождаемости $(*G_i)^R$ образами $\varphi_i(G_i)$ также выполнено, а потому $(*G)^R$ является свободным произведением в $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$, т. е. $\underset{R}{*}G_i \cong (*G_i)^R$.

2) Для доказательства того, что $\lambda$ есть вложение достаточно доказать, что группа $*G_i \in \mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ (см. замечание). Последнее легко следует из теоремы Куроша о подгруппах свободного произведения. $\rhd$

**Теорема 4.** *Класс $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ замкнут относительно свободных произведений.*

$\lhd$ Пусть $G_i$, $i \in I$, — семейство групп из $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ и $\lambda_i : G_i \to G_i^R$ — гомоморфизмы из определения тензорного пополнения. По условию они являются вложениями. Отсюда следует, что гомоморфизм $\lambda : G_i \to *G_i^R$ также является вложением. По пункту 2) теоремы 3 гомоморфизм $\varphi : G_i^R \to \underset{R}{*}G_i^R$ есть вложение, а по пункту 1) этой теоремы $\underset{R}{*}G_i^R \cong (*G_i^R)^R$. Отсюда и следует утверждение теоремы. $\rhd$

## Литература


1. *Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Степенные группы. I. Основы теории и тензорные пополнения // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 5.—С. 1106–1118.
2. *Lyndon R. C.* Groups with parametric exponents // Trans. Amer. Math. Soc.—1960.—Vol. 96.—P. 518–533.
3. *Baumslag G.* Free abelian $X$-groups // Illinois J. Math.—1986.—Vol. 30, № 2.—P. 235–245.
4. *Hall Ph.* The Edmonton Notes on Nilpotent Groups. Queen Mary College Math. Notes. Mathematics Department.—London: Queen Mary College, 1969.—iii+76 p.
5. *Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N.* Exponential groups. II. Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups // Internat. J. Algebra Comput.—1996.—Vol. 6, № 6.—P. 687–711.

6. *Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V.* Discriminating completions of hyperbolic groups. Dedicated to John Stallings on the occasion of his 65th birthday // Geom. Dedicata.—2002.—Vol. 92.—P. 115–143.
7. *Amaglobeli M. G.* On the permutability of a functor of tensor completion with principal group operations // Appl. Math. Inform. Mech.—2010.—Vol. 15, № 1.—P. 3–10.
8. *Amaglobeli M., Bokelavadze T.* Abelian and nilpotent varieties of power groups // Georgian Math. J.—2011.—Vol. 18, № 3.—P. 425–439.
9. *Amaglobeli M.* Power groups // J. Math. Sci.—2012.—Vol. 186, № 6.—P. 811–865.
10. *Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.* Свободные 2-ступенно нильпотентные R-группы // Докл. АН.—2012.—Т. 443, № 4.—С. 410–413.
11. *Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.* Расширения централизаторов в нильпотентных группах // Сиб. мат. журн.—2013.—Т. 54, № 1.—С. 8–20.
12. *Baumslag G.* On free $\mathscr{D}$-groups // Comm. Pure Appl. Math.—1965.—Vol. 18.—P. 25–30.
13. *Полин С. В.* Свободные разложения в многообразиях $\lambda$-групп // Мат. сб.—1972.—Т. 87, № 129.—С. 377–395.


*Статья поступила 29 октября 2015 г.*

Амаглобели Михаил Георгиевич
Тбилисский государственный университет
им. Ив. Джавахишвили
*профессор кафедры алгебры и геометрии*
ГРУЗИЯ, 0186, Тбилиси, ул. Университетская, 2
E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge

## CATEGORY OF MR-GROUPS OVER A RING R

Amaglobeli M.

The category of exponential MR-groups for an associative ring R with unity is defined in [1]. The present paper is devoted to the study of partial exponential MR-groups which are isomorphically embedded in their tensor completion over the ring R. The key to its understanding is the notion of tensor completion introduced in [1]. As a consequence, the description of free MR-groups in the language of group constructions is obtained.

**Key words:** exponential R-group, Lyndon R-group, Hall R-group, MR-group, partial MR-group, tensor completion.

*Владикавказский математический журнал*
*2016, Том 18, Выпуск 2, С. 19–30*

*УДК* **517.95**

# ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Ж. А. Балкизов**

При определенном условии на коэффициенты, входящие в рассматриваемое уравнение, в работе найдено условие однозначной разрешимости первой краевой задачи для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения. Единственность решения задачи доказана методом Трикоми, а существование — методом интегральных уравнений. Решения, получающиеся относительно следа от искомого решения интегральных уравнений, найдены и выписаны в явном виде. Показано, что в случае, когда нарушено условие теоремы, однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 1 имеет бесконечное множество линейно-независимых решений.

**Ключевые слова:** вырождающееся гиперболическое уравнение, первая краевая задача, задача Гурса, задача Коши, функция Миттаг-Леффлера.

На евклидовой плоскости независимых переменных $x$ и $y$ рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{(m-2)/2} u_x, & y < 0, \\ y^n u_{xx} - u_{yy} + b y^{(n-2)/2} u_x, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a$, $b$, $m$, $n$ — константы, причем $m > 0$, $n > 0$.

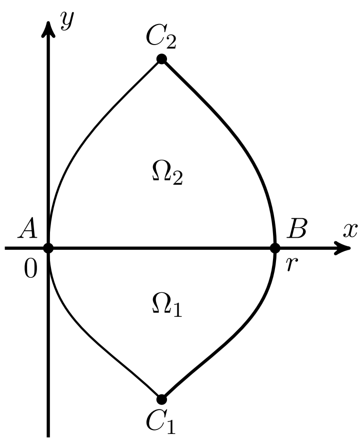


Рис. 1.

Через $\Omega_1$ обозначим область, ограниченную характеристиками

$$\sigma_1 = AC_1 : \ x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0,$$

$$\sigma_2 = C_1B : \ x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$$

уравнения (1) при $y < 0$, выходящими из точек $A = (0,0)$ и $B = (r,0)$, пересекающимися в точке $C_1 = (r/2,\, y_1)$ и отрезком $AB$ прямой $y = 0$, а через $\Omega_2$ — область, ограниченную характеристиками

$$\sigma_3 = AC_2 : \ x - \frac{2}{n+2} y^{(n+2)/2} = 0,$$

$$\sigma_4 = C_2B : \ x + \frac{2}{n+2} y^{(n+2)2} = r$$

уравнения (1) при $y > 0$, выходящими из точек $A$ и $B$, пересекающиеся в точке $C_2 =$

$(r/2, y_2)$ и отрезком $AB$ прямой $y = 0$, $y_1 = -\left[\frac{r(m+2)}{4}\right]^{2/(m+2)}$, $y_2 = \left[\frac{r(n+2)}{4}\right]^{2/(n+2)}$; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$, где $J = \{(x,0) : 0 < x < r\}$ — интервал $AB$ прямой $y = 0$ (рис. 1).

Методами функционального анализа и интегральных уравнений в работе [1] была исследована краевая задача со смещением для уравнения (1) в случае, когда $\Omega_1 \equiv \varnothing$ и коэффициент $b = 0$. В работе [2] получена априорная оценка решения первой и второй задачи Дарбу для общего вырождающегося гиперболического уравнения

$$u_{yy} - k(y)u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \tag{2}$$

с коэффициентом $k(y) > 0$ при $y \neq 0$, который может обращаться в нуль при $y = 0$. В случае, когда в уравнении (2) коэффициент $k(y) = (-y)^m$, $m \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)$, а коэффициенты $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ этого уравнения и его правая часть $f(x,y)$ удовлетворяют условиям Геллерстедта в работе [3] доказано существование и единственность функции Грина — Адамара $G(x,y;\xi,\eta)$, с помощью которой выписывается решение второй задачи Дарбу для уравнения (2). В работе [4] были поставлены и исследованы характеристическая задача Коши и задача Гурса для класса вырождающихся внутри области гиперболических уравнений вида (2). В работе [5] сделаны некоторые обобщения по постановке и исследованию первой и второй задачи Дарбу для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения вида (2). В работе [6] в описанной выше области $\Omega$ для уравнения (1) при $a = 0$, $b = 0$ исследована краевая задача с разрывными условиями склеивания в случае, когда данные задаются на противоположных сторонах $\sigma_2$ и $\sigma_3$ характеристического четырехугольника $\Omega$. Исследованию задачи со смещением для уравнения (1) в области $\Omega$ посвящена работа [7]. Задачи со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения, содержащего слагаемые с младшими производными исследованы в работе [8]. Достаточно полная библиография по вырождающимся гиперболическим уравнениям имеется в монографиях [9–12].

*Регулярным в области $\Omega$ решением* уравнения (1) назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$; $u_x(x,0), u_y(x,0) \in L(0,r)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

В работе исследуется следующая

Задача 1. Найти регулярное в области $\Omega$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,y) = \psi_1(x) \quad (\forall\,(x,y) \in \sigma_2), \tag{3}$$

$$u(x,y) = \psi_2(x) \quad (\forall\,(x,y) \in \sigma_4), \tag{4}$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — заданные функции из класса $C^1[r/2, r]$, причем $\psi_1(r) = \psi_2(r)$.

Задача 1 относится к классу краевых задач, определенному в работе [13] и названному в монографии [11, с. 236] первой краевой задачей для уравнения параболо-гиперболического типа.

**Теорема 1.** *Пусть коэффициенты $a$ и $b$ уравнения* (1) *таковы, что*

$$|a| \leqslant \frac{m}{2}, \quad |b| \leqslant \frac{n}{2}, \quad (2a-m)^2 + (2b-n)^2 \neq 0.$$

*Тогда существует единственное решение задачи* 1.

$\lhd$ Введем обозначения:

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{5}$$

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < r. \tag{6}$$

В области $\Omega_1$ уравнение (1) совпадает с вырождающимся гиперболическим уравнением вида

$$(-y)^m\, u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{(m-2)/2} u_x = 0, \tag{7}$$

порядок вырождения которого равен $m$, а в области $\Omega_2$ — с уравнением

$$y^n u_{xx} - u_{yy} + b y^{(n-2)/2} u_x = 0 \tag{8}$$

с порядком вырождения $n$.

Найдем решение задачи Коши (5)–(7). В характеристических координатах

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}$$

уравнение (7) приводится к уравнению Эйлера — Дарбу — Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\beta_1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\alpha_1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \tag{9}$$

где $\alpha_1 = \frac{m-2a}{2(m+2)}$, $\beta_1 = \frac{m+2a}{2(m+2)}$.

Пусть вначале $|a| < \frac{m}{2}$. Общее решение уравнения (9) в этом случае выписывается по формуле [9, с. 14]

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) = (\eta-\xi)^{1-\alpha_1-\beta_1} \int\limits_{\xi}^{\eta} \Psi(s)(s-\xi)^{\beta_1-1}(\eta-s)^{\alpha_1-1}\, ds \\ + \int\limits_{\xi}^{\eta} \Phi(s)\,(s-\xi)^{-\alpha_1}\,(\eta-s)^{-\beta_1}\, ds, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ — произвольные функции из класса $C[0,r] \cap C^2]0,r[$.

Положив $s = \xi + t(\eta-\xi)$, представление (10) перепишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) = (\eta-\xi)^{1-\alpha_1-\beta_1} \int\limits_{0}^{1} \Phi\,[\xi + (\eta-\xi)t]\, t^{-\alpha_1}(1-t)^{-\beta_1}\, dt \\ + \int\limits_{0}^{1} \Psi\,[\xi + (\eta-\xi)t]\, t^{\beta_1-1}(1-t)^{\alpha_1-1}\, dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Область $\Omega_1$ в характеристических координатах $(\xi,\eta)$ переходит в треугольную область вида $\Omega_1' = \{(\xi,\,\eta) : \,0 < \xi < \eta < r\}$, а начальные условия (5)–(6) переходят в условия

$$u(\xi,\xi) = \tau(\xi), \quad [2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{-\alpha_1-\beta_1} \lim_{\eta\to\xi}\,(\eta-\xi)^{\alpha_1+\beta_1}\,(u_\xi - u_\eta) = \nu(\xi). \tag{12}$$

Удовлетворяя общее решение (11) условиям (12), находим

$$\Psi(\xi) = \frac{\tau(\xi)}{B(\alpha_1,\beta_1)}, \quad \Phi(\xi) = -\frac{[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1-1}}{B(1-\alpha_1, 1-\beta_1)}\nu(\xi),$$

где $B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$ — интеграл Эйлера первого рода (бета-функция).

Таким образом, решение задачи (12) для уравнения (9), в случае, когда $|a|<\frac{m}{2}$ имеет следующий вид:

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{B(\alpha_1,\beta_1)}\int\limits_0^1 \tau\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{\beta_1-1}(1-t)^{\alpha_1-1}\,dt$$
$$-\frac{[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1-1}}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)}(\eta-\xi)^{1-\alpha_1-\beta_1}\int\limits_0^1 \nu\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{-\alpha_1}(1-t)^{-\beta_1}\,dt.$$

Возвращаясь к переменным $(x,y)$, из последней формулы найдем

$$\begin{gathered}u(x,y)=\frac{1}{B(\alpha_1,\beta_1)}\int\limits_0^1 \tau\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\right]t^{\beta_1-1}(1-t)^{\alpha_1-1}\,dt\\ +\frac{y}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)}\int\limits_0^1 \nu\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\right]t^{-\alpha_1}(1-t)^{-\beta_1}\,dt.\end{gathered}\tag{13}$$

Из (13) при условии (3) находим

$$u(x,y)\,|_{\sigma_2}=\frac{1}{B(\alpha_1,\beta_1)}\int\limits_0^1 \tau\left[x+(r-x)(2t-1)\right]t^{\beta_1-1}(1-t)^{\alpha_1-1}\,dt$$
$$-\frac{(1-\alpha_1-\beta_1)^{\alpha_1+\beta_1-1}}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)}(r-x)^{1-\alpha_1-\beta_1}\int\limits_0^1 \nu\left[x+(r-x)(2t-1)\right]t^{-\alpha_1}(1-t)^{-\beta_1}\,dt=\psi_1(x).$$

С помощью замены $s=x+(r-x)(2t-1)$ последнее соотношение приводится к виду

$$\frac{(2r-2x)^{1-\alpha_1-\beta_1}}{B(\alpha_1,\beta_1)}\int\limits_{2x-r}^{r} \tau(s)(s+r-2x)^{\beta_1-1}(r-s)^{\alpha_1-1}\,ds$$
$$-\frac{[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1-1}}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)}\int\limits_{2x-r}^{r} \nu(s)(s+r-2x)^{-\alpha_1}(r-s)^{-\beta_1}\,ds=\psi_1(x).$$

Переобозначив в последнем равенстве $2x-r$ через $x$ найдем

$$\begin{gathered}\frac{(r-x)^{1-\alpha_1-\beta_1}}{B(\alpha_1,\beta_1)}\int\limits_x^r \tau(t)(t-x)^{\beta_1-1}(r-t)^{\alpha_1-1}\,dt\\ -\frac{[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1-1}}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)}\int\limits_x^r \nu(t)(t-x)^{-\alpha_1}(r-t)^{-\beta_1}\,dt=\psi_1\left(\frac{x+r}{2}\right).\end{gathered}\tag{14}$$

Воспользуемся далее следующим определением оператора дробного интегро-дифференцирования [14, с. 28]: оператором дробного (в смысле Римана — Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке $a \in [A, B] \subset R$ называется оператор $D^{\alpha}_{ax}$, который действует на функцию $\varphi(t) \in L[A, B]$ по формуле:

$$D^{\alpha}_{ax}\varphi(t) = \frac{\operatorname{sgn}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_a^x |x-t|^{-(\alpha+1)}\,\varphi(t)\,dt, \quad \alpha < 0,$$

$$D^{\alpha}_{ax}\varphi(t) = \operatorname{sgn}^{[\alpha]+1}(x-a)\frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} D^{\alpha-[\alpha]-1}_{ax}\varphi(t), \quad \alpha > 0,$$

где $\operatorname{sgn}^{[\alpha]+1}(z)$ означает знак числа $z$, а $\Gamma(x)$ — интеграл Эйлера второго рода (гамма-функция). С учетом приведенного выше определения, соотношение (14) перепишется в следующей форме:

$$\frac{\Gamma(\beta_1)(r-x)^{1-\alpha_1-\beta_1}}{B(\alpha_1,\beta_1)} D^{-\beta_1}_{rx}\left[\tau(t)(r-t)^{\alpha_1-1}\right] - \frac{[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1-1}\,\Gamma(1-\alpha_1)}{B(1-\alpha_1,1-\beta_1)} D^{\alpha_1-1}_{rx}\left[\nu(t)(r-t)^{-\beta_1}\right] = \psi_1\left(\frac{x+r}{2}\right). \quad (15)$$

Обращая уравнение (15) относительно функции $\nu(x)$, находим

$$\nu(x) = \gamma_1 D^{1-\alpha_1-\beta_1}_{rx}\tau(t) - \gamma_2(r-x)^{\beta_1} D^{1-\alpha_1}_{rx}\left[\psi_1\left(\frac{t+r}{2}\right)\right], \quad (16)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{2\Gamma(1-\beta_1)\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_1-\beta_1)\,[2(1-\alpha_1-\beta_1)]^{\alpha_1+\beta_1}}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(\alpha_1)\gamma_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}.$$

Так как $\tau(x)$, $\psi_1\left(\frac{x+r}{2}\right) \in C[0,r]$, а $\tau'(x)$, $\psi_1'\left(\frac{x+r}{2}\right) \in L[0,r]$, то пользуясь свойством оператора дробного дифференцирования порядка $0 < \alpha < 1$ [15, с. 43]

$$D^{\alpha}_{rx}\varphi(t) = \frac{\varphi(r)}{\Gamma(1-\alpha)}(r-x)^{-\alpha} - D^{\alpha-1}_{rx}\varphi'(t), \quad (17)$$

с учетом условия согласования $\tau(r) = \psi_1(r)$, выражение (16) перепишем в следующей форме:

$$\nu(x) = -\gamma_1 D^{-(\alpha_1+\beta_1)}_{rx}\tau'(t) + \frac{\gamma_2}{2}(r-x)^{\beta_1} D^{-\alpha_1}_{rx}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right). \quad (18)$$

Соотношение (18) есть основное фундаментальное соотношение между искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области $\Omega_1$ на линию $y = 0$ в случае, когда $|a| < \frac{m}{2}$.

Если $a = \frac{m}{2}$, то в уравнении (9) коэффициенты $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \frac{m}{m+2}$ и решение задачи (5)–(7) имеет вид [9, с. 15]

$$u(x,\,y) = \tau\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right] + \frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\,(2t-1)\right]\,(1-t)^{-\beta_1}\,dt. \quad (19)$$

Удовлетворяя (19) граничному условию (3) на характеристике $\sigma_2 = C_1B$, приходим к равенству

$$\nu(x) = (2-2\beta_1)^{-\beta_1}\,(r-x)^{\beta_1}\,\psi_1'\left(\frac{x+r}{2}\right). \quad (20)$$

Если же $a = -\frac{m}{2}$, то $\alpha_1 = \frac{m}{m+2}$, $\beta_1 = 0$. Решение задачи (5)–(7) в этом случае имеет вид [9, с. 15]

$$u(x,\,y) = \tau\left[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right] + \frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\,(2t-1)\right](1-t)^{-\alpha_1}\,dt. \quad (21)$$

Из представления (21) с учетом условия (3) приходим к фундаментальному соотношению между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ следующего вида:

$$\nu(x) = \frac{(2-2\alpha_1)^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}\left[-2D_{rx}^{-\alpha_1}\tau'(t) + D_{rx}^{-\alpha_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right)\right]. \quad (22)$$

Аналогично, используя следующие представления решения задачи (5), (6), (8) в области $\Omega_2$:

$$u(x,y) = \frac{1}{B(\alpha_2,\beta_2)}\int\limits_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}(2t-1)\right]t^{\beta_2-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,dt + \frac{y}{B(1-\alpha_2,1-\beta_2)}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}(2t-1)\right]t^{-\alpha_2}(1-t)^{-\beta_2}\,dt, \quad |b| < \frac{n}{2}, \quad (23)$$

$$u(x,y) = \tau\left[x + \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}\right] + \frac{2y}{n+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}(2t-1)\right](1-t)^{\beta_2}\,dt, \quad b = \frac{n}{2}, \quad (24)$$

$$u(x,\,y) = \tau\left[x - \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}\right] + \frac{2y}{n+2}\int\limits_0^1 \nu\left[x - \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}\,(2t-1)\right](1-t)^{-\alpha_2}\,dt, \quad b = -\frac{n}{2}, \quad (25)$$

с учетом условия (4) находим следующие фундаментальные соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из области $\Omega_2$ на линию вырождения $J$:

$$\nu(x) = \gamma_3 D_{rx}^{-(\alpha_2+\beta_2)}\tau'(t) - \frac{\gamma_4}{2}(r-x)^{\beta_2}D_{rx}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right), \quad |b| < \frac{n}{2}, \quad (26)$$

$$\nu(x) = -(2-2\beta_2)^{-\beta_2}\,(r-x)^{\beta_2}\,\psi_2'\left(\frac{x+r}{2}\right), \quad b = \frac{n}{2}, \quad (27)$$

$$\nu(x) = \frac{(2-2\alpha_2)^{-\alpha_2}}{\Gamma(1-\alpha_2)}\left[2D_{rx}^{-\alpha_2}\tau'(t) - D_{rx}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right)\right], \quad b = -\frac{n}{2}. \quad (28)$$

В формулах (23)–(28)

$$\alpha_2 = \frac{n-2b}{2(n+2)}, \quad \beta_2 = \frac{n+2b}{2(n+2)};$$

$$\gamma_3 = \frac{2\Gamma(1-\beta_2)\Gamma(\alpha_2+\beta_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(1-\alpha_2-\beta_2)\,[2(1-\alpha_2-\beta_2)]^{\alpha_2+\beta_2}}, \quad \gamma_4 = \frac{\Gamma(\alpha_2)\gamma_3}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2)}.$$

Докажем сначала единственность решения задачи 1. Рассмотрим интеграл

$$J^* = \int\limits_0^r \tau(x)\nu(x)\,dx.$$

При $\psi_1(x) \equiv 0$ из соотношений (18), (20), (22) для различных значений $a$ получаем соответственно равенства

$$\nu(x) = -\gamma_1 D_{rx}^{-(\alpha_1+\beta_1)}\tau'(t), \quad |a| < \frac{m}{2}; \tag{29}$$

$$\nu(x) = 0, \quad a = \frac{m}{2}; \tag{30}$$

$$\nu(x) = -\frac{2(2-2\alpha_1)^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} D_{rx}^{-\alpha_1}\tau'(t), \quad a = -\frac{m}{2}. \tag{31}$$

Воспользуемся следующим свойством положительности оператора дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана — Лиувилля) $D_{ax}^{\alpha}$ порядка $\alpha < 1$ [16, с. 46]: для любого $0 < \alpha < 1$ и любой функции $u(x) \in A_0^{\alpha}[0,r]$ скалярное произведение $(u, D_{rx}^{\alpha}u)_0 \geqslant 0$, причем $(u,\, D_{rx}^{\alpha}u)_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

В силу данного свойства при $|a| < \frac{m}{2}$ из соотношения (29) с учетом (17) будем иметь, что

$$\begin{aligned} J^* &= \int\limits_0^r \tau(x)\nu(x)\,dx = -\gamma_1 \int\limits_0^r \tau(x)\, D_{rx}^{-(\alpha_1+\beta_1)}\tau'(t)\,dx \\ &= \gamma_1 \int\limits_0^r \tau(x)\, D_{rx}^{1-(\alpha_1+\beta_1)}\tau(t)\,dx = \gamma_1 \Big(\tau(x),\, D_{rx}^{1-(\alpha_1+\beta_1)}\tau(t)\Big)_0 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Стало быть, и при $a = -\frac{m}{2}$ из соотношения (31) также получим неравенство $J^* \geqslant 0$, а при $a = \frac{m}{2}$ из (30) получаем равенство $J^* = 0$.

Аналогично из соотношений (26)–(28) с учетом (17) в случае однородной задачи 1, находим

$$\nu(x) = \gamma_3 D_{rx}^{-(\alpha_2+\beta_2)}\tau'(t) = -\gamma_3 D_{rx}^{1-(\alpha_2+\beta_2)}\tau(t), \quad |b| < \frac{n}{2}; \tag{33}$$

$$\nu(x) = 0, \quad b = \frac{n}{2}; \tag{34}$$

$$\nu(x) = \frac{2\,(2-2\alpha_2)^{-\alpha_2}}{\Gamma(1-\alpha_2)} D_{rx}^{-\alpha_2}\tau'(t) = -\frac{2\,(2-2\alpha_2)^{-\alpha_2}}{\Gamma(1-\alpha_2)} D_{rx}^{1-\alpha_2}\tau(t), \quad b = -\frac{n}{2}. \tag{35}$$

Отсюда при $|b| < \frac{n}{2}$ и $b = -\frac{n}{2}$ следует, что интеграл $J^* \leqslant 0$, а при $b = \frac{n}{2}$ интеграл $J^* = 0$.

Таким образом, при выполнении условия $(2a-m)^2 + (2b-n)^2 \neq 0$ теоремы 1 для рассматриваемого интеграла $J^*$, с одной стороны, имеет место неравенство $J^* \geqslant 0$, а с другой $J^* \leqslant 0$, откуда заключаем, что $J^* = 0$. А равенство $J^* = 0$ в силу приведенного выше свойства положительности оператора дробного интегро-дифференцирования может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x)=0$. При этом из соотношений (29)–(31) и (33)–(35) следует, что и $\nu(x)=0$. Тогда из формул (13), (19), (21), (23)–(25) заключаем, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $\Omega$, откуда и вытекает единственность решения задачи 1.

Перейдем к доказательству существования решения задачи 1. Пусть вначале $|a|<\frac{m}{2}$ и $|b|<\frac{n}{2}$. Для определенности предположим, что $m<n$. При $m>n$ исследование проводится аналогично. Исключая из соотношений (18) и (26) искомую функцию $\nu(x)$, с учетом условий (3)–(4) относительно $\tau'(x)$ приходим к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка

$$\gamma_1 D_{rx}^{-(\alpha_1+\beta_1)}\tau'(t)+\gamma_3 D_{rx}^{-(\alpha_2+\beta_2)}\tau'(t) = \frac{\gamma_2}{2}(r-x)^{\beta_1}D_{rx}^{-\alpha_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right)+\frac{\gamma_4}{2}(r-x)^{\beta_2}D_{rx}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right), \quad (36)$$

$$\tau(r)=\tau_r, \quad (37)$$

где $\tau_r=\psi_1(r)=\psi_2(r)$.

Применим к обеим частям уравнения (36) оператор дробного дифференцирования $D_{rx}^{\alpha_1+\beta_1}$ и воспользуемся следующим законом композиции операторов дробного интегро-дифференцирования с одинаковыми началами [14, с. 44]:

$$D_{ax}^{\alpha}\,|t-a|^{\alpha+\beta}\,D_{at}^{\beta}\varphi(s)=|x-a|^{\beta}\,D_{ax}^{\alpha+\beta}\,|t-a|^{\alpha}\,\varphi(t),$$

который является справедливым для любых $\alpha\in]0,1]$, $\beta<0$ и $\varphi(x)\in L[0,r]$. Тогда уравнение (36) перепишется в следующей форме:

$$\tau'(x)+\frac{\gamma_3}{\gamma_1}D_{rx}^{-\delta}\tau'(t)=F_1(x), \quad (38)$$

где $\delta=(\alpha_2+\beta_2)-(\alpha_1+\beta_1)=\frac{2(n-m)}{(m+2)\,(n+2)}$,

$$F_1(x)=\frac{\gamma_2}{2\gamma_1}(r-x)^{-\alpha_1}D_{rx}^{\beta_1}(r-t)^{\alpha_1+\beta_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right)+\frac{\gamma_4}{2\gamma_1}D_{rx}^{\alpha_1+\beta_1}(r-t)^{\beta_2}D_{rt}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{s+r}{2}\right).$$

Относительно $\tau'(x)$ уравнение (38) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с ядром

$$K(x,t)=(t-x)^{\delta-1}/\Gamma(\delta).$$

Интегрированными ядрами ядра $K(x,t)$ служат функции

$$K_n(x,t)=(t-x)^{\delta-1}\frac{(t-x)^{\delta n}}{\Gamma(n\delta+\delta)},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

а функция

$$R\left(x,t;-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)^n K_n(x,t)=(t-x)^{\delta-1}E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}(t-x)^{\delta};\delta\right],$$

где $E_{1/\delta}(z;\mu)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\delta k+\mu)}$ — функция типа Миттаг-Леффлера, служит резольвентой ядра $K(x,t)$.

С помощью резольвенты $R\left(x,t;-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)$ ядра $K(x,t)$ решение уравнения (38) выписывается в явном виде по формуле

$$\tau'(x) = F_1(x) - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}\int\limits_x^r (t-x)^{\delta-1}E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}(t-x)^{\delta};\delta\right]F_1(t)\,dt,$$

откуда

$$\tau(x) = \tau(r) - \int\limits_x^r \left\{1-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}(t-x)^{\delta}E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_3}{\gamma_1}(t-x)^{\delta};\delta+1\right]\right\}F_1(t)\,dt. \tag{39}$$

Для остальных значений параметров $a$ и $b$ решение $\tau(x)$ задачи, получающейся после исключения функции $\nu(x)$ из соответствующих фундаментальных соотношений находятся по формулам:

$$\tau(x) = \tau(r) - \frac{\gamma_2}{2\gamma_1}\int\limits_x^r (r-t)^{-\alpha_1}D_{rt}^{\beta_1}(r-s)^{\alpha_1+\beta_1}\psi_1'\left(\frac{s+r}{2}\right)dt$$
$$-\frac{(2-2\beta_2)^{-\beta_2}}{\gamma_1}D^{\alpha_1+\beta_1-1}(r-t)^{\beta_2}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right),\quad |a|<\frac{m}{2},\ b=\frac{n}{2};$$

$$\tau(x) = \tau(r) - \int\limits_x^r \left\{1-\frac{\gamma_6}{\gamma_1}(t-x)^{\delta}E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_6}{\gamma_1}(t-x)^{\delta};\ \delta+1\right]\right\}F_2(t)\,dt,$$
$$|a|<\frac{m}{2},\ b=-\frac{n}{2};$$

$$\tau(x) = \tau(r) - \frac{\gamma_4}{2\gamma_3}\int\limits_x^r (r-t)^{-\alpha_2}D_{rt}^{\beta_2}(r-s)^{\alpha_2+\beta_2}\psi_2'\left(\frac{s+r}{2}\right)dt$$
$$-\frac{(2-2\beta_1)^{-\beta_1}}{\gamma_3}D^{\alpha_2+\beta_2-1}(r-t)^{\beta_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right),\quad a=\frac{m}{2},\ |b|<\frac{n}{2};$$

$$\tau(x) = \psi_2\left(\frac{r+x}{2}\right) - \frac{(2-2\beta_1)^{-\beta_1}}{\gamma_6}D_{rx}^{\alpha_2-1}(r-t)^{\beta_1}\psi_1'\left(\frac{r+t}{2}\right),$$
$$a=\frac{m}{2},\ b=-\frac{n}{2};$$

$$\tau(x) = \tau(r) - \int\limits_x^r \left\{1-\frac{\gamma_3}{\gamma_5}(t-x)^{\delta}E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_3}{\gamma_5}(t-x)^{\delta};\delta+1\right]\right\}F_3(t)\,dt,$$
$$a=-\frac{m}{2},\ |b|<\frac{n}{2};$$

$$\tau(x) = \psi_1\left(\frac{r+x}{2}\right) - \frac{(2-2\beta_2)^{-\beta_2}}{\gamma_5}D_{rx}^{\alpha_1-1}(r-t)^{\beta_2}\psi_2'\left(\frac{r+t}{2}\right),$$
$$a=-\frac{m}{2},\ b=\frac{n}{2};$$

$$\tau(x)=\tau(r)-\int\limits_x^r\left\{1-\frac{\gamma_6}{\gamma_5}(t-x)^\delta E_{1/\delta}\left[-\frac{\gamma_6}{\gamma_5}(t-x)^\delta;\delta+1\right]\right\}F_4(t)\,dt,$$

$$a=-\frac{m}{2},\ b=-\frac{n}{2},$$

где

$$\gamma_5=\frac{2^{1-\alpha_1}(1-\alpha_1)^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)},\quad \gamma_6=\frac{2^{1-\alpha_2}(1-\alpha_2)^{-\alpha_2}}{\Gamma(1-\alpha_2)};$$

$$F_2(x)=\frac{1}{2\gamma_1}\left[\gamma_2(r-x)^{-\alpha_1}D_{rx}^{\beta_1}(r-t)^{\alpha_1+\beta_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right)+\gamma_6\,D_{rx}^{-\delta}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right)\right],$$

$$F_3(x)=\frac{1}{2\gamma_5}\left[\gamma_4D_{rx}^{\alpha_1}(r-t)^{\beta_2}D_{rt}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{r+s}{2}\right)-\gamma_5\psi_1'\left(\frac{r+x}{2}\right)\right],$$

$$F_4(x)=\frac{1}{2\gamma_5}\left[\gamma_5\psi_1'\left(\frac{r+x}{2}\right)+\gamma_6D_{rx}^{-\delta}\psi_1'\left(\frac{r+t}{2}\right)\right].$$

Если $m=n$, то $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$, а потому уравнение (36) в этом случае перепишется в следующем виде

$$D_{rx}^{-(\alpha_1+\beta_1)}\tau'(t)$$
$$=\frac{1}{2\left(\gamma_1+\gamma_3\right)}\left[\gamma_2(r-x)^{\beta_1}D_{rx}^{-\alpha_1}\psi_1'\left(\frac{t+r}{2}\right)+\gamma_4(r-x)^{\beta_2}D_{rx}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{t+r}{2}\right)\right],\quad(40)$$

Решение задачи (37), (40) имеет вид

$$\tau'(x)=\frac{\gamma_2}{2\left(\gamma_1+\gamma_3\right)}\left[D_{rx}^{\alpha_1+\beta_1}(r-t)^{\beta_1}D_{rt}^{-\alpha_1}\psi_1'\left(\frac{r+s}{2}\right)+\gamma_4D_{rx}^{\alpha_2+\beta_2}(r-t)^{\beta_2}D_{rt}^{-\alpha_2}\psi_2'\left(\frac{r+s}{2}\right)\right],$$

откуда

$$\tau(x)=\tau(r)-\frac{\gamma_2}{2\left(\gamma_1+\gamma_3\right)}\int\limits_x^r(r-t)^{-\alpha_1}D_{rt}^{\beta_1}(r-s)^{\alpha_1+\beta_1}\psi_1'\left(\frac{r+s}{2}\right)dt$$
$$-\frac{\gamma_4}{2\left(\gamma_1+\gamma_3\right)}\int\limits_x^r(r-t)^{-\alpha_2}D_{rt}^{\beta_2}(r-s)^{\alpha_2+\beta_2}\psi_2'\left(\frac{r+s}{2}\right)dt.$$

После того, как функция $\tau(x)$ найдена по одной из перечисленных выше формул, функцию $\nu(x)$ легко найти из соответствующих фундаментальных соотношений. Тогда решение исследуемой задачи 1 выписывается как решение задачи Коши для уравнения (1) в соответствующей области $\Omega_1$ или $\Omega_2$. $\rhd$

В случае, когда имеет место равенство $(2a-m)^2+(2b-n)^2=0$ из (20) и (27) заключаем, что для разрешимости исследуемой задачи 1 необходимо, чтобы заданные функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ удовлетворяли условию

$$(2-2\beta_1)^{-\beta_1}\,(r-x)^{\beta_1}\,\psi_1'\left(\frac{x+r}{2}\right)+(2-2\beta_2)^{-\beta_2}\,(r-x)^{-\beta_2}\,\psi_2'\left(\frac{x+r}{2}\right)=0.\quad(41)$$

При выполнении равенства (41) однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 1 имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида

$$u(x,y)=g\left[x+\frac{2}{l+2}\,|y|^{(l+2)/2}\right]-g(r),$$

где $g(x)$ — произвольная функция из класса $C^1[0, r] \cap C^2]0, r[$; $l = m$ при $y < 0$ и $l = n$ при $y > 0$. Общее решение задачи 1 при соблюдении условия (41) дается формулой

$$u(x, y) = g\left[x + \frac{2}{l+2}\,|y|^{(l+2)/2}\right] - g(r) + \frac{2y}{l+2}\int\limits_0^1 \nu^*\left[x + \frac{2}{l+2}\,|y|^{(l+2)/2}\,(2t-1)\right](1-t)^{-l/(l+2)}\,dt,$$

где $\nu^*(x) = (2-2\beta_1)^{-\beta_1}(r-x)^{\beta_1}\psi_1'\left(\frac{x+r}{2}\right) = -(2-2\beta_2)^{-\beta_2}(r-x)^{-\beta_2}\psi_2'\left(\frac{x+r}{2}\right)$.

Таким образом, в отличие от строго гиперболических уравнений, для которых однородная первая краевая задача имеет только тривиальное решение [13], однородная первая краевая задача для вырождающихся гиперболических уравнений вида (1) при $(2a-m)^2 + (2b-n)^2 = 0$ будет иметь нетривиальное решение.

Автор выражает благодарность А. М. Нахушеву за постоянное внимание и поддержку.

## Литература


1. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 187, № 4.—С. 736–739.
2. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // Диф. уравнения.—1971.—Т. 7, № 1.—С. 49–56.
3. *Gellerstedt S.* Sur un equation linearre aux derivees partieelles de type mixte // Arkiv Mat., Astr. och Fysik.—1937.—Bd. 25A, № 29.—P. 1–25.
4. *Кальменов Т. Ш.* О характеристической задаче Коши для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений // Диф. уравнения.—1973.—Т. 9, № 1.—С. 84–96.
5. *Нахушев А. М.* К теории краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений // Сообщения АН ГССР.—1975.—Т. 77, № 3.—С. 545–548.
6. *Кумыкова С. К., Нахушева Ф. Б.* Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Диф. уравнения.—1978.—Т. 14, № 1.—С. 50–64.
7. *Кумыкова С. К.* Краевая задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Диф. уравнения.—1980.—Т. 16, № 1.—С. 93–104.
8. *Салахитдинов М. С., Мирсабуров М.* О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Диф. уравнения.—1981.—Т. 17, № 1.—С. 129–136.
9. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения.—Минск: Вышэйшая школа, 1977.—160 с.
10. *Репин О. А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов.—Самара: Самарский филиал СГУ, 1992.—161 с.
11. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных.—М.: Наука, 2006.—287 с.
12. *Кальменов Т. Ш.* К теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений. Цикл научных работ Т. Ш. Кальменова.—Алматы: ИМММ, 2013.—406 с.
13. *Нахушев А. М.* К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа // Диф. уравнения.—1978.—Т. 14, № 1.—С. 66–73.
14. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.
15. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
16. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—271 с.

*Статья поступила 30 июня 2015 г.*

Балкизов Жираслан Анатольевич
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
*научный сотрудник отдела уравнений смешанного типа*
РОССИЯ, 360017, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а
E-mail: Giraslan@yandex.ru

# THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION

Balkizov Zh. A.

Under certain hypothesis on the coefficients the condition is found for unique solvability of the first boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation in the region. The uniqueness of the solution of the problem is proved by Tricomi method and existence by the method of integral equations. The solutions obtained with respect to the traces of the sought solution of integral equations are found and written out explicitly. It is shown that whenever the hypothesis of the theorem is violated, then the homogeneous problem corresponding to the problem under study has an infinite number of linearly independent solutions.

**Key words:** degenerate hyperbolic equation, first boundary value problem, Goursat problem, Cauchy problem, Mittag-Leffler function.

*Владикавказский математический журнал*
*2016, Том 18, Выпуск 2, С. 31–40*

*УДК* **539.3, 539.5, 519.63**

# О ЗАДАЧЕ КОШИ В ТЕОРИИ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ[1]

**А. О. Ватульян, Л. С. Гукасян, Р. Д. Недин**

Рассмотрена плоская задача о колебаниях неоднородной среды. Сформулирована обратная задача об определении модулей Ламе по заданным компонентам вектора смещений. Выявлены условия, при которых исследуемая задача сводится к решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Представлены способы решения прямой и обратной задач на основе проекционного метода с элементами двумерной интерполяции. Проведен сравнительный анализ.

**Ключевые слова:** коэффициентная обратная задача, коэффициенты Ламе, слабая постановка, задача Коши, проекционный метод, метод конечных элементов.

## Введение

Коэффициентные обратные задачи — один из интенсивно развивающихся разделов математической физики. Исследования в этом направлении имеют многочисленные приложения в сейсмологии, горной механике, неразрушающем контроле и других областях знания.

Совершенствование и развитие моделей деформирования упругих тел в настоящее время происходит в двух направлениях. Первое направление развивается по пути учета анизотропии среды, что приводит к изучению краевых задач для эллиптических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, не обладающих свойством сферической симметрии; для таких моделей разработаны эффективные средства исследования как на основе прямых конечноэлементных технологий, так и на основе граничноэлементных подходов, позволяющих понизить размерность изучаемой задачи. Второе направление учитывает неоднородность и приводит к исследованию краевых задач для эллиптических дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. Для таких моделей успехи в исследовании конкретных задач при известных законах неоднородности значительно скромнее, при этом наиболее часто используются такие вычислительные технологии, как метод конечных элементов и метод конечных разностей. При этом главная проблема при использовании такой модели состоит в определении законов неоднородности из некоторой дополнительной информации. В качестве такой информации могут быть использованы поля смещений внутри тела на фиксированной частоте (первая постановка), либо амплитудно-частотные характеристики тела, измеренные на



[1] Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (114072870112), «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур», Гранта Президента Российской Федерации МК-5440.2016.1, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-38-60157 мол_а_дк.

границе при известном виде воздействия (вторая постановка) [1]. В обоих случаях необходимо решать некоторые обратные задачи на основании подходов, изложенных в работе [2, 3]. В первом случае обратная задача по определению неизвестных функций (обычно это коэффициенты Ламе) линейна, во втором — существенно нелинейна.

Настоящая работа посвящена анализу первой постановки, поскольку именно она позволяет понять основные трудности, возникающие при изучении проблемы идентификации и наметить пути их преодоления.

## 1. Общая постановка обратной задачи для упругой среды

Рассмотрим установившиеся колебания упругой среды в двумерном случае. Пусть плоская область $S \subset \mathrm{R}_2$ ограничена гладкой кривой $l = l_1 \cup l_2$. Краевая задача об установившихся колебаниях с частотой $\omega$ имеет вид

$$(c_{ijkl}u_{k,l})_j + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

$$u_i|_{l_1} = 0,\ c_{ijkl}u_{k,l}n_j|_{l_2} = P_i, \tag{2}$$

где $c_{ijkl}(x)$ — компоненты тензора упругих постоянных, удовлетворяющие известным свойствам симметрии, $\rho(x)$ — плотность, которые являются функциями координат $x_1$, $x_2$, $u_i$ — компоненты вектора смещений[1]. Задача (1)–(2) о нахождении компонент вектора $u_i$ достаточно подробно исследована в литературе при известных гладких и кусочно-гладких законах неоднородности, и для нее доказаны теоремы существования и единственности [4], разработаны эффективные вычислительные схемы, основанные либо на конечноэлементных, либо конечноразностных подходах. В то же время в рамках этой модели весьма актуальными являются обратные задачи об определении законов изменения материальных характеристик по некоторой дополнительной информации о решении [5]. При этом наиболее часто исследуются две постановки. В первой постановке известны поля смещений внутри области на некоторой частоте, во второй — поля смещений на границе в некотором частотном диапазоне. В рамках первой и второй постановок исследовано достаточно большое число задач для упругих балок и стержней, когда колебания описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго или четвертого порядка, однако для существенно двумерных и трехмерных задач такие задачи даже в первой постановке практически не исследованы [6].

Поставим цель — по известным в наборе точек области S и на ее границе полям смещений $u_i$ определить компоненты $c_{ijkl}(x)$. Ясно, что в такой общей постановке задача является недоопределенной, поскольку требуется определить все компоненты тензора модулей упругости в рамках описанной выше модели, и в дальнейшем изучим две наиболее простые и важные задачи для изотропной неоднородной среды, в которых число неизвестных функций, характеризующих неоднородность упругих свойств, равно числу уравнений.

## 2. Постановка обратной задачи в изотропном случае

Планарные колебания область $S$ описываются следующей краевой задачей:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i,j = 1,2, \tag{3}$$

[1] Индекс, стоящий после запятой, означает производную по соответствующей координате; например, $u_{k,l}$ следует понимать как $\partial u_k/\partial x_l$.

$$u_i\big|_{l_1}=0, \quad \sigma_{ij}n_j\big|_{l_2}=p_i, \tag{4}$$

где $\sigma_{ij}=\lambda u_{kk}\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})$.

Здесь в постановку задачи входят две положительные функции $\lambda(x_1,x_2)$ и $\mu(x_1,x_2)$, характеризующие законы изменения коэффициентов Ламе.

Основное внимание в настоящей работе уделим задаче определения модулей $\lambda(x_1,x_2)$ и $\mu(x_1,x_2)$ по известным компонентам поля перемещений в наборе точек из задачи 2.

В развернутом виде краевая задача (3)–(4) имеет вид

$$\begin{gathered}
(\lambda(u_{1,1}+u_{2,2}))_{,1}+(\mu(u_{1,2}+u_{2,1}))_{,2}+(\mu(2u_{1,1}))_{,1}+\rho\omega^2u_1=0,\\
(\lambda(u_{1,1}+u_{2,2}))_{,2}+(\mu(u_{1,2}+u_{2,1}))_{,1}+(\mu(2u_{2,2}))_{,2}+\rho\omega^2u_2=0,\\
u_i\big|_{l_1}=0,\\
\big[(\lambda(u_{1,1}+u_{2,2})+\mu(2u_{1,1}))n_1+\mu(u_{1,2}+u_{2,1})n_2\big]\big|_{l_2}=P_1,\\
\big[(\lambda(u_{1,1}+u_{2,2})+\mu(2u_{2,2}))n_2+\mu(u_{1,2}+u_{2,1})n_1\big]\big|_{l_2}=P_2.
\end{gathered} \tag{5}$$

Обратная задача состоит в определении положительных функций $\lambda\,(x_1,x_2)$ и $\mu\,(x_1,x_2)$, удовлетворяющих (5) при известных функциях $u_1\,(x_1,x_2)$ и $u_2\,(x_1,x_2)$.

## 3. Исследование задачи о планарных колебаниях

Обезразмерим уравнения и граничные условия в (5), вводя безразмерные параметры и переменные

$$g=\frac{\mu}{\mu_0}, \quad q=\frac{\lambda}{\mu_0}, \quad \kappa^2=\frac{\rho_0\omega^2a^2}{\mu_0}, \quad \mu_0=\max\mu, \quad a=\operatorname{diam}S, \quad \rho_0=\max_{x\in S}\rho, \quad \gamma=\frac{\rho}{\rho_0}.$$

Далее будем рассматривать случай, когда

$$q,g\in C_+^\infty(S), \quad C_+^\infty(S)=\big\{f:\ f\in C^\infty(S),\ f\geqslant f_0>0\big\}.$$

Тогда краевая задача (5) примет вид

$$\begin{gathered}
a_{11}q_{,1}+a_{12}g_{,1}+a_{13}g_{,2}+\Phi_1(x,q,g)=0,\\
a_{21}q_{,2}+a_{22}g_{,1}+a_{23}g_{,2}+\Phi_2(x,q,g)=0,\\
P_j^*=P_j\mu_0^{-1},\\
\big[(qa_{11}+ga_{12})n_1+ga_{13}n_2\big]\big|_{l_2}=P_1^*,\\
\big[(qa_{11}+ga_{23})n_2+ga_{13}n_1\big]\big|_{l_2}=P_2^*,
\end{gathered} \tag{6}$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{gathered}
a_{11}=u_{1,1}+u_{2,2}=a_{21}, \quad a_{12}=2u_{1,1},\\
a_{13}=u_{1,2}+u_{2,1}, \quad a_{22}=a_{13}, \quad a_{23}=2u_{2,2},\\
\Phi_1=\gamma\kappa^2u_1+qa_{11,1}+g(a_{12,1}+a_{13,2}),\\
\Phi_2=\gamma\kappa^2u_2+qa_{21,2}+g\left(a_{22,1}+a_{23,2}\right).
\end{gathered} \tag{7}$$

Отметим, что система (6) представляет собой краевую задачу для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно двух неизвестных функций $q$, $g$. Для того чтобы сформулировать задачу Коши для этих функций, необходимо, исходя из (6), определить значения искомых функций на границе $l_2$. Для их определения необходимо, чтобы система (6) имела положительные решения; для разрешимости ее необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta = a_{11}\left[a_{13}\left(n_1^2 - n_2^2\right) + \left(a_{13} - a_{12}\right) n_1 n_2\right] \neq 0, \tag{8}$$

а положительность регулируется ограничениями на нагрузку $P_1^*$, $P_2^*$. Так, например, условие положительности нарушается, когда $n_2 = 0$, $P_2^* = 0$ либо $n_1 = 0$, $P_1^* = 0$, что не дает ограничений на $g$ на границе, и задача Коши оказывается недоопределенной. Таким образом, на этапе постановки задачи уже можно выделить классы нагрузок, при которых невозможно построить единственное решение обратной задачи.

Если данные задачи таковы, что можно определить положительные данные Коши для искомых функций, то задача Коши

$$\begin{aligned} &a_{11}q_{,1} + a_{12}g_{,1} + a_{13}g_{,2} + \Phi_1(x,q,g) = 0,\\ &a_{21}q_{,2} + a_{22}g_{,1} + a_{23}g_{,2} + \Phi_2(x,q,g) = 0,\\ &q\big|_{n=0} = q_0, \quad g\big|_{n=0} = g_0, \end{aligned} \tag{9}$$

является определенной. В этом случае изучим вопрос о ее единственности. Для этого в (9) перейдем к локальной системе координат, связанной с частью границы области $S_0 \subset S$, где вектор нагрузок $(P_1^*, P_2^*)$ отличен от нуля. Пусть уравнение границы задано параметрически $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, $s \in [S_-, S_+]$. Введем локальную систему координат $(s,n)$ соотношениями

$$x_1 = x_1(s) - n x_2'(s), \quad x_2 = x_2(s) + n x_1'(s), \tag{10}$$

считая, что $(x_1')^2 + (x_2')^2 = 1$ и перепишем (9) в описанной системе координат. Тогда имеем следующую систему

$$\begin{aligned} &A_{11}\frac{\partial q}{\partial n} + A_{12}\frac{\partial q}{\partial s} + A_{13}\frac{\partial g}{\partial n} + A_{14}\frac{\partial g}{\partial s} + \Phi_1^*(x,q,g),\\ &A_{21}\frac{\partial q}{\partial n} + A_{22}\frac{\partial q}{\partial s} + A_{23}\frac{\partial g}{\partial n} + A_{24}\frac{\partial g}{\partial s} + \Phi_2^*(x,q,g). \end{aligned} \tag{11}$$

Разрешив эту систему относительно нормальных производных $\frac{\partial q}{\partial n}$ и $\frac{\partial g}{\partial n}$, получим каноническую систему (при условии $A_{11}A_{23} - A_{21}A_{13} \neq 0$) следующего вида

$$\begin{gathered} \frac{\partial q}{\partial n} = \psi_1\left(s,n,q,g,\frac{\partial q}{\partial s},\frac{\partial g}{\partial s}\right), \quad \frac{\partial g}{\partial n} = \psi_2\left(s,n,q,g,\frac{\partial q}{\partial s},\frac{\partial g}{\partial s}\right),\\ q\big|_{n=0} = q_0, \quad g\big|_{n=0} = g_0. \end{gathered} \tag{12}$$

В предположении бесконечной дифференцируемости функций $q$, $g$ решение задачи (12) строится в виде степенных рядов по координате $n$; отсюда и вытекает единственность решения [7, 8].

Этот результат справедлив для некоторой подобласти $S_0 \subset S$, которая получается, если использовать замену переменных (10). Для оставшихся подобластей $S$ можно использовать описанную выше процедуру, поскольку на границе $S_0$ после первого этапа уже будут иметься данные Коши. Отметим, что для некоторых типов областей достаточно однократной процедуры. Таковы, например, прямоугольник, кольцевой сектор.

### 4. Некоторые аспекты численной реализации

Для проведения вычислительных экспериментов в рамках поставленной обратной задачи необходимо располагать входными данными задачи в виде измеренных в наборе точек области $S$ компонент вектора смещений, которые могут быть сгенерированы путем решения соответствующей прямой задачи с заранее заданными законами изменения коэффициентов Ламе, которые на этапе решения обратной задачи подлежат восстановлению.

Наиболее эффективными методами решения обратных задач в рамках сформулированной постановки являются метод конечных элементов и различные вариации проекционных методов [6]. Ниже, в п. 4.1, рассмотрим проекционный метод, основанный на использовании слабой постановки исходной краевой задачи (3), (4). Для этого введем гладкие функции $\nu_i$, удовлетворяющие главным граничным условиям, налагаемым на вектор перемещений: $\nu_i|_{l_1} = 0$. Умножая уравнения (3) на пробные функции $\nu_i$ и интегрируя по области $S$, получим

$$\int\limits_S \left(\sigma_{ij,j}\nu_i + \rho\omega^2 u_i\nu_i\right)\, ds = 0.$$

Преобразуя интеграл с помощью формулы Грина, получим соотношение

$$\int\limits_S \left(\sigma_{ij,j}\nu_i + \rho\omega^2 u_i\nu_i\right)\, ds = \int\limits_{\partial S} \sigma_{ij}\nu_i n_j\, ds - \int\limits_S \left(\sigma_{ij}\nu_{i,j} - \rho\omega^2 u_i\nu_i\right)\, ds,$$

которое с учетом граничного условия (4) примет вид

$$\int\limits_{l_2} p_i\nu_i\, dl_2 - \int\limits_S \left(\sigma_{ij}\nu_{i,j} - \rho\omega^2 u_i\nu_i\right)\, ds = 0. \tag{13}$$

Отметим, что способ получения слабой постановки исходной краевой задачи показывает, что для функции $u_i$, удовлетворяющей главным граничным условиям, можно требовать гораздо меньших ограничений на гладкость, чем для функций сильного решения (т. е. решения задачи в ее исходной постановке) [9, 10], что важно при использовании конечноэлементных и проекционных трактовок.

**4.1. Исследование прямой задачи.** Прямая задача заключается в нахождении функций перемещения $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$ с учетом заданных коэффициентов Ламе. Воспользуемся идеей проекционных методов и представим искомые функции в виде конечного разложения по некоторым базисным функциям, удовлетворяющим главным граничным условиям. В качестве базиса возьмем набор бигармонических полиномов. Таким образом,

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i, \tag{14}$$

где $\phi_1 = x_1x_2$, $\phi_2 = x_1^2x_2$, $\phi_3 = x_1^3x_2$, $\phi_4 = x_1x_2^3$, $\phi_5 = x_1^4x_2$, $\phi_6 = x_1^2x_2^3$, $\phi_7 = x_1^3x_2^3$,

$$\phi_8 = x_1x_2^5, \quad \phi_9 = x_1^6x_2, \quad \phi_{10} = x_1^4x_2^3, \ldots,$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i, \tag{15}$$

$$\varphi_1 = x_1^2, \quad \varphi_2 = x_1 x_2^2, \quad \varphi_3 = x_1^3, \quad \varphi_4 = x_1^2 x_2^2, \quad \varphi_5 = x_1^4,$$
$$\varphi_6 = x_1^3 x_2^2, \quad \varphi_7 = x_1 x_2^4, \quad \varphi_8 = x_1^5, \quad \varphi_9 = x_1^4 x_2^2, \quad \varphi_{10} = x_1^2 x_2^4, \ \ldots$$

В качестве пробных функций выбирались те же самые элементы базиса: $\nu_1 = \phi_i$, $\nu_2 = \varphi_i$. Подставляя данные представления в уравнение (13) и интегрируя по области $S$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения $c_i$, $d_i$, $i = 1, \ldots, n$, решение которой дает искомые коэффициенты разложения функций перемещения.

**4.2. Исследование обратной задачи.** В качестве дополнительной информации служат данные о $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$ в некотором наборе точек в области область $S$, полученные в результате решения прямой задачи, описанной в п. 4.1. Данная задача является некорректной, так как входная информация о функциях представлена в виде некоторого набора данных, в связи с чем обратная задача решается в два этапа. На первом этапе по обоим наборам значений $u_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2)$ строится двумерный интерполяционный многочлен Лагранжа; тем самым преодолевается некорректность вычисления производной от функций, заданных таблично. На втором этапе используется проекционный метод, описанный выше; представим искомые функции в виде разложения

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i \psi_i, \quad \mu = \sum_{i=1}^{n} \tilde{d}_i \psi_i, \tag{16}$$

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_2 = x_1, \quad \psi_3 = x_1^2, \quad \psi_4 = x_2^2, \quad \psi_5 = x_1^4, \quad \psi_6 = x_2^4, \ \ldots$$

Как и в случае решения прямой задачи, в качестве пробных функций выбирались элементы базиса (14)–(15). Используя слабую постановку, аналогичным образом формулируем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения $\tilde{c}_i$, $\tilde{d}_i$, $i = 1, \ldots, n$, решение которой дает искомые коэффициенты разложений, формирующих реконструкцию неизвестных законов неоднородности $\lambda(x_1, x_2)$ и $\mu(x_1, x_2)$.

## 5. Результаты вычислительных экспериментов

В этом разделе представлены результаты вычислительных экспериментов по решению прямой и обратной задач. Рассмотрена прямоугольная область с параметрами: $S = \{x_1 \in [0, l],\ x_2 \in [-b, b]\}$, где $l = 100$ см, $b = 10$ см, $\rho = 7856$ кг/см$^3$. Будем считать, что грань $x_1 = 0$ жестко защемлена, на грани $x_1 = l$ задана касательная нагрузка $P\big|_{x_1 = l} = 3000$ кгс/см$^2$, а грани $x_2 = \pm b$ свободны от нагрузок.

**5.1. Прямая задача.** Для оценки точности полученных результатов решения прямой задачи, проведено сравнение этого решения с решением, полученных с помощью метода конечных элементов. Для оценки точности проанализирована относительная погрешность $\delta_i = \frac{|u_i - \tilde{u}_i|}{\max|u_i|} 100\%$, где $u_i$ — решение задачи проекционным методом, $\tilde{u}_i$ — методом конечных элементов.

На рис. 1–3 представлены результаты решения прямой задачи для неоднородного закона изменения $\lambda(x_1, x_2) = \lambda_0 \cdot \left(0.3 + (\frac{x_1}{l})^2 + (\frac{x_2}{b})^2\right)$ и $\mu(x_1, x_2) = \mu_0 \cdot \left(0.3 + (\frac{x_1}{l})^2 + (\frac{x_2}{b})^2\right)$, где $\lambda_0 = 0.462 \cdot 10^6$ кг/см$^2$, $\mu_0 = 0.69 \cdot 10^6$ кг/см$^2$. Графически результаты решения $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$ представлены в двух сечениях пластины: при $x_2 = b$ и при $x_1 = l$. Относительная погрешность на всей области $S$ представлена справа на рисунках в виде поверхности. На графиках сплошной линией показано решение, полученное методом конечных элементов.

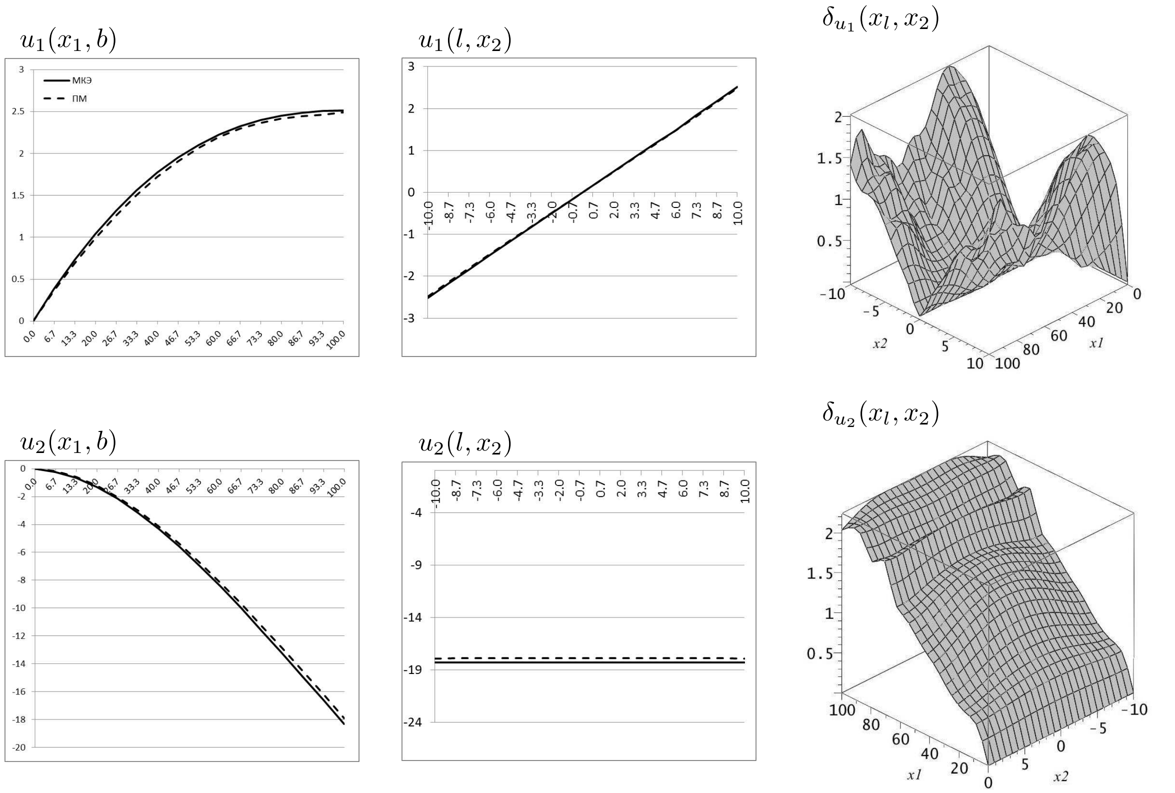


**Рис. 1.** Сравнительные результаты решений прямой задачи проекционным методом и МКЭ в статике ($\omega = 0$). Сверху представлены результаты для $u_1(x_1, x_2)$, снизу — для $u_2(x_1, x_2)$.

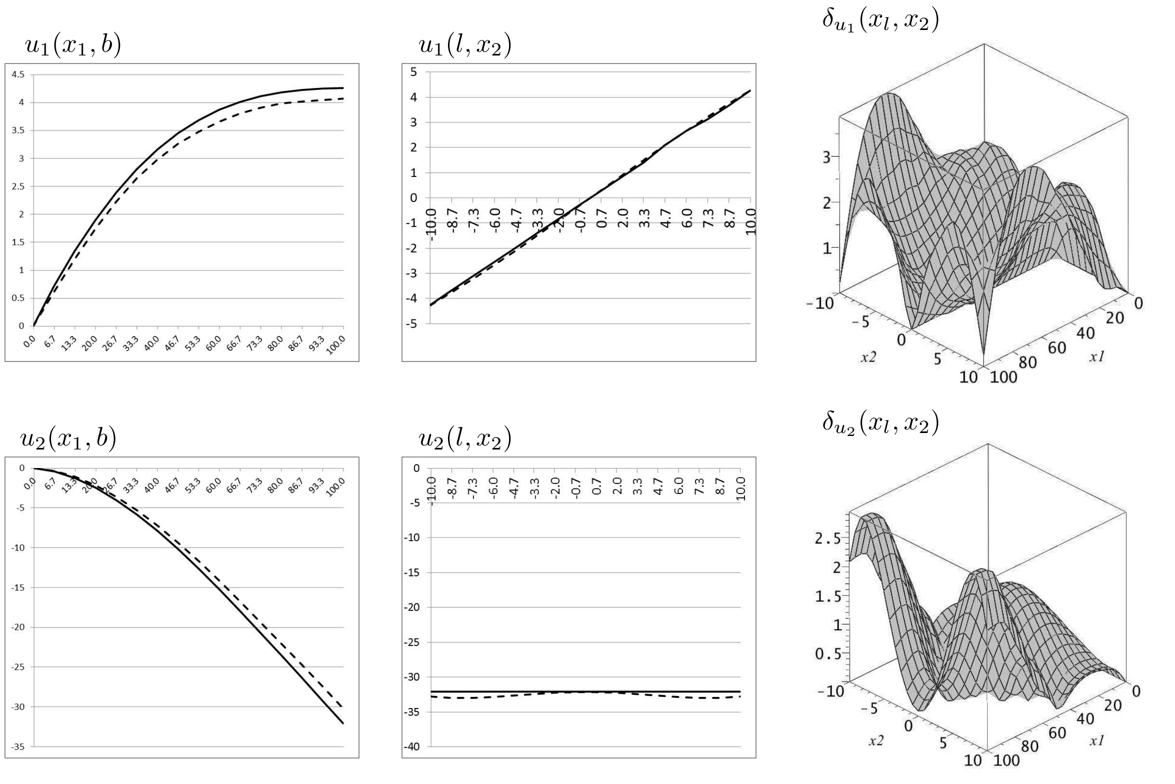


**Рис. 2.** Сравнительные результаты решений прямой задачи проекционным методом и МКЭ при частоте $\omega = 3 \cdot 2\pi$ рад/с.

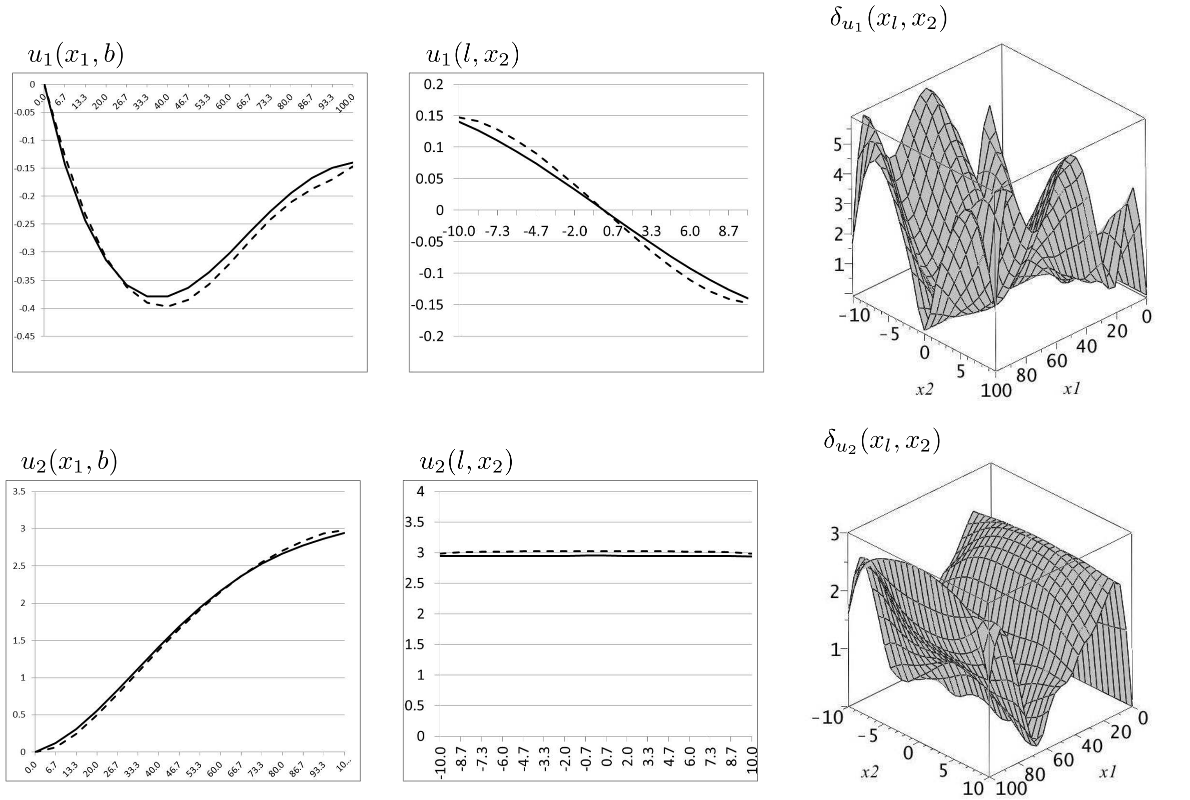


**Рис. 3.** Сравнительные результаты решений прямой задачи проекционным методом и МКЭ при частоте $\omega = 11 \cdot 2\pi$ рад/с.

Анализ результатов серии численных экспериментов показал, что относительная погрешность решения прямой задачи предложенным проекционным способом в сравнении с методом конечных элементов для прямоугольной области не превосходит 6% в области до второго резонанса. Количество базисных функций $n$ варьируется от восьми до пятнадцати; в зависимости от выбора $n$ погрешность может существенно меняться.

### 5.2. Обратная задача

Вычислительные эксперименты по реконструкции проводились для разных законов изменения модулей упругости, включая монотонные и немонотонные законы; в данной статье представим лишь некоторые из них. Эксперименты проведены для разных частотных диапазонов до третьего резонанса. Выявлено, что наиболее благоприятным с точки зрения точности реконструкции частотным диапазоном является первый, т. е. до первого резонанса. Для оценки точности восстановления проанализирована относительная погрешность реконструкции $\delta_\mu$ и $\delta_\lambda$ [11].

На рис. 4–6 приведены результаты по восстановлению неизвестных $\lambda(x_1, x_2)$ и $\mu(x_1, x_2)$ на частоте $\omega = 3 \cdot 2\pi$ рад/с (первый частотный диапазон). На графиках сплошной линией изображено точное решение, точками — результаты реконструкции; поверхность справа иллюстрирует погрешность идентификации.

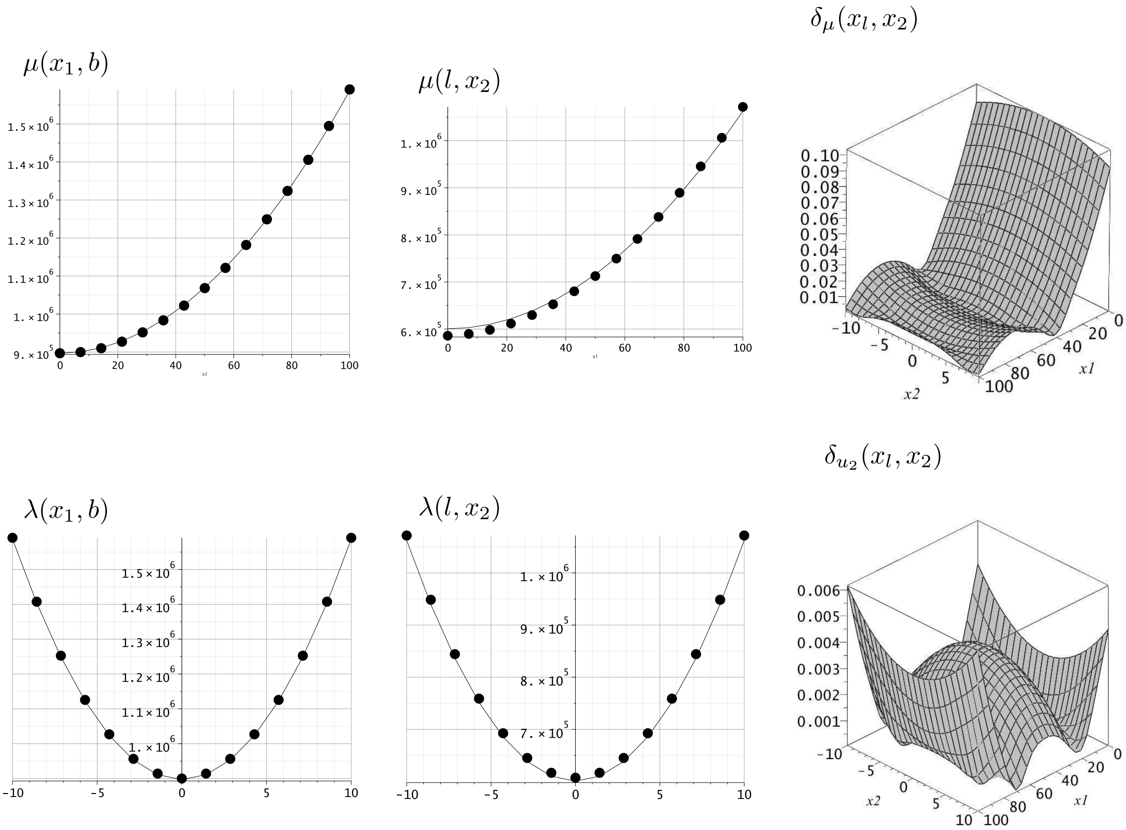


**Рис. 4.** Результаты реконструкции законов неоднородности
$\lambda(x_1, x_2) = \lambda_0 \cdot \left(0.3 + \left(\frac{x_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2\right)$, $\mu\,(x_1, x_2) = \mu_0 \cdot \left(0.3 + \left(\frac{x_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2\right)$,
$\lambda_0 = 0.462 \cdot 10^6$ кг/см$^2$ и $\mu_0 = 0.69 \cdot 10^6$ кг/см$^2$, $n = 4$.

Анализируя полученные численные результаты, необходимо отметить, что при восстановлении законов неоднородности изменения модулей по некоторым полиномиальным законам, схема работает достаточно эффективно; относительная погрешность не превосходит 0.04% (без учета зашумления входных данных). Для более сложных законов погрешность реконструкции доходит до 9.5%.

## Заключение

В работе рассмотрены обратные задачи по идентификации неоднородных материальных свойств плоской упругой области. Проанализированы условия единственности постановок обратных задач. Исследована прямая задача по нахождению перемещений для формирования дополнительной входной информации обратной задачи; проведена оценка точности получаемого решения прямой задачи путем сравнения с конечноэлементным расчетом. Предложена схема решения обратной задачи, основанная на применении слабой постановки задачи и проекционного метода. Проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции различных законов неоднородности коэффициентов Ламе пластины. Предложенный способ идентификации является эффективным в частотном диапазоне ниже первого резонанса для идентификации различных неоднородных монотонных и немонотонных законов изменения.

## Литература


1. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—223 с.
2. *Ватульян А. О.* К теории обратных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ.—2010.—Т. 74, № 6.—С. 909–916.
3. *Bonnet M., Constantinescu A.* Inverse problems in elasticity // Inverse Probl.—2005.—№ 21.—P. 1–50.
4. *Бочарова О. В., Ватульян А. О.* О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журн.—2009.—Т. 55, № 3.—С. 275–282.
5. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний.—М.: Мир, 1984.—472 с.
6. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1986.—287 с.
7. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем.—М.: Машиностроение, 1970.—736 с.
8. *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных.—Ленинград: Гостехиздат, 1934.—359 с.
9. *Dudarev V. V., Nedin R. D., Vatulyan A. O.* Nondestructive identification of inhomogeneous residual stress state in deformable bodies on the basis of the acoustic sounding method // Advanced Materials Research.—2014.—Vol. 996.—P. 409–414.
10. *Nedin R. D., Vatulyan A. O.* Inverse Problem of Non-homogeneous Residual Stress Identification in Thin Plates // Int. J. Solids Struct.—2013.—№ 50.—P. 2107–2114.
11. *Ватульян А. О. Гукасян Л. С.* О задаче Коши для уравнения в частных производных первого порядка и ее приложениях в теории обратных задач // Вестн. ДГТУ.—2012.—Т. 68, № 7.—С. 11–20.


*Статья поступила 15 сентября 2015 г.*

Ватульян Александр Ованесович
Южный федеральный университет,
*заведующий кафедрой теории упругости*
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
Южный математический институт ВНЦ РАН,
*заведующий отделом дифференциальных уравнений*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: vatulyan@aaanet.ru

Гукасян Лусинэ Суреновна
Донской государственный технический университет,
*старший преподаватель кафедры прикладной математики*
РОССИЯ, 344010, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail: luska-90@list.ru

Недин Ростислав Дмитриевич
Южный математический институт ВНЦ РАН,
*младший научный сотрудник*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: rdn90@bk.ru

## ON THE CAUCHY PROBLEM IN THE THEORY OF COEFFICIENT INVERSE PROBLEMS FOR ELASTIC BODIES

Vatulyan A. O., Gukasyan L. S., Nedin R. D.

The inverse problems on the identification of inhomogeneous material properties of an elastic plate is considered. The condition of uniqueness of the inverse problems statements are analyzed. Direct problem on finding displacements to formulate the additional input data of the inverse problem is investigated; the accuracy of the direct problem solution is estimated by means of comparison with finite-element computation. A scheme of the inverse problem solving is proposed based on the application of the weak statement of the initial boundary problem and the projection method. A series of computation experiments on a reconstruction of various types of inhomogeneity laws of the Lame' coefficients is performed.

**Key words:** coefficient inverse problem, the Lame' coefficients, weak statement, projection method, finite element method, biharmonic polynomials.

*Владикавказский математический журнал*
*2016, Том 18, Выпуск 2, С. 41–48*

*УДК* **512.64 + 517.5**

# К ВОПРОСУ О ЧИСЛЕ КОМПОНЕНТ СВЯЗНОСТИ ДОПОЛНЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СПЕКТРА ЛЕНТОЧНЫХ ТЁПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ

**С. А. Золотых, В. А. Стукопин**

В работе получены оценки снизу для максимального числа компонент связности дополнения предельного спектра ленточных тёплицевых матриц, символ которых — полином Лорана заданной степени. Приведены примеры полиномов, являющихся символами тёплицевых матриц, предельный спектр которых делит комплексную плоскость на заданное число компонент связности.

**Ключевые слова:** ленточная тёплицева матрица, символ тёплицевой матрицы, предельный спектр, число компонент связности.

## 1. Введение

В данной работе мы решаем задачу оценки снизу максимального числа компонент связности дополнения предельного спектра ленточных тёплицевых матриц, символы которых, лорановские полиномы заданной степени. Здесь мы уточняем результат, полученный в работе [1], явно указывая параметры символа последовательности ленточных тёплицевых матриц, дополнение предельного спектра которых имеет заданное число компонент связности из промежутка значений, границы которого найдены в работе [1]. Эта часть общей задачи исследования геометрии предельного спектра. Следует сказать, что знание геометрии предельного спектра может быть полезно как при аналитическом исследовании асимптотического поведения собственных значений ленточных тёплицевых матриц, поскольку дифференциально-геометрические свойства предельного спектра связаны со скоростью сходимости собственных значений к точкам предельного спектра, так и при приближенном нахождении собственных значений, поскольку позволяет уточнить области выбора начальных приближений [2]. Кроме того, геометрия и топология предельного спектра может отражать важные качественные характеристики физических моделей, исследование которых сводится к исследованию предельного спектра тёплицевых матриц (правда, как правило, не ленточных). Данная работа также, как и работа [3], содержит результаты, уточняющие топологические характеристики предельного спектра.

Уточним постановку задачи. Сначала напомним необходимые для понимания работы понятия (см. [3]). Пусть $f$ — комплекснозначная функция, аналитическая в окрестности окружности единичного радиуса $S^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$:

$$f(z) = \sum_{k \in Z} a_k z^k. \tag{1}$$

Будем обозначать через $T_n(f)$ тёплицеву матрицу размера $n \times n$, т. е. матрицу $T_n(f) = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, матричные элементы которой задаются формулой $a_{i,j} = a_{i-j}$, где $a_k$ находятся из (1). Отметим, что у тёплицевой матрицы на каждой из диагоналей, параллельных главной, стоят одинаковые элементы. Заметим, что если для $k < -r$ и для $k > h$, $a_k = 0$, т. е. аналитическая функция $f(z)$ превращается в лорановский полином

$$f(z) = \sum_{k=-r}^{h} a_k z^k,$$

то соответствующая такой функции тёплицева матрица называется *ленточной.*

Упорядочим каким-нибудь образом собственные значения $\{\lambda_{n,i}\}_{i=-n+1}^{n-1}$ матрицы $T_n(f)$, например, по возрастанию их модуля: $|\lambda_{n,i}| \leqslant |\lambda_{n,j}|$ при $i < j$. Пусть $\sigma_n = \sigma(T_n(f)) = \{\lambda_{n,0}, \ldots, \lambda_{n,n}\}$ — спектр матрицы $T_n(f)$. Множество предельных точек последовательностей $\{\lambda_k\}$, где $\lambda_k \in \sigma_{i_k}$, $\lim_{k\to\infty} i_k = \infty$ будем называть *предельным спектром последовательности тёплицевых матриц* $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначать через $\sigma_l(f)$.

Естественные вопросы, которые сразу возникают: как связан предельный спектр с функцией $f(z)$ (которую также называют символом каждой из матриц последовательности $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$), какова геометрическая структура предельного спектра? Естественно ожидать, что ответ на второй вопрос будет дан в терминах функции $f$.

Задача геометрического описания предельного спектра издавна привлекает внимание многих математиков. В классической работе Ф. Спитцера и П. Шмидта [4] было получено описание предельного спектра в терминах совпадения модулей корней многочлена строящегося по символу последовательности ленточных тёплицевых матриц. Используя такое описание Ф. Спитцер и П. Шмидт доказали, что предельный спектр, либо одномерное множество, являющееся объединением аналитических дуг, либо нульмерное множество. Позднее Ульман доказал связность предельного спектра [5]. Более тонкие геометрические вопросы о строении предельного спектра ленточных несамосопряженных матриц являются нерешенными до настоящего времени. В данной работе мы исследуем вопрос о числе компонент дополнения предельного спектра ленточных тёплицевых матриц. Нетривиальным уже является тот факт, что число этих компонент может быть сколь угодно большим, оно растет не медленнее некоторой линейной функции от степени многочлена $f$ — символа ленточной тёплицевой матрицы. Мы строим конкретные примеры символов — полиномов Лорана, таких, что предельный спектр соответствующих им тёплицевых матриц разбивает комплексную плоскость на максимальное число компонент связности равное $\left[\frac{k+1}{2}\right]$, где $2k$ — степень полинома Лорана, являющегося символом данной последовательности тёплицевых матриц. Как отмечено выше, мы уточняем в данной работе, результат полученный в работе [1], явно строя такие символы, что предельный спектр тёплицевых матриц, определяемых этими символами, разбивает комплексную плоскость на любое наперед заданное число компонент связности из промежутка $\left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{k+1}{2}\right]\right\}$. Точнее говоря, мы показываем явными формулами, каким образом следует выбирать параметры полиномов Лорана для того, чтобы предельный спектр разбивал комплексную плоскость на заданное число компонент связности $r$, где $1 \leqslant r \leqslant [\frac{k+1}{2}]$. В приложении приведены численные примеры, подтверждающие справедливость полученных результатов. Таким образом, мы получаем некоторые оценки снизу для максимального числа компонент на которые может разбивать комплексную плоскость предельный спектр последовательности тёплицевых матриц с символом заданной степени $k$. Ниже мы будем использовать следующие стандартные обозначения. Через $\sigma(A)$ будем обозначать спектр оператора $A$:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in C : \ A - \lambda I \text{ — необратим}\}.$$

## 2. Основной результат работы

Будем рассматривать многочлен

$$b(t) = \mu + t^{-k}(t-\alpha)^k(t-\beta)^k, \tag{2}$$

где $\mu$, $\alpha$, $\beta$ — комплексные числа и $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Пусть

$$a(t) = t^{-1}(t-\alpha)(t-\beta). \tag{3}$$

Легко видеть, что в силу формул (2), (3)

$$b(t) = \mu + (a(t))^k. \tag{4}$$

Следующая лемма приведена в работе [1].

**Лемма 1.** *Предельные спектры последовательностей ленточных тёплицевых матриц с символами $a(t)$ и $b(t)$ связаны следующим соотношением:*

$$\sigma_l(b(t)) = \mu + (\sigma_l(a(t)))^k. \tag{5}$$

Сформулируем теперь основной результат работы. Пусть $k$ — натуральное число, а $b(t)$ определяется формулой (2). Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** 1. *Если $k = 1$ или $k = 2$, то $C \setminus \sigma_l(b)$ связен.*

2. *Если $k \geqslant 3$, то $C \setminus \sigma_l(b)$ может иметь $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ компонент (включая неограниченную компоненту).*

3. *Для каждого натурального числа $j$ между 1 и $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ существуют такие $\alpha$, $\beta$, что $C \setminus \sigma_l(b)$ имеет ровно $j$ компонент. Именно $\alpha$, $\beta$ находятся из уравнений:*

$$\begin{cases} -(\alpha+\beta) + 2\sqrt{\alpha\cdot\beta} = f_1, \\ -(\alpha+\beta) - 2\sqrt{\alpha\cdot\beta} = f_2. \end{cases} \tag{6}$$

*При этом $f_1$, $f_2$ следует выбирать так, чтобы разность значений их аргументов удовлетворяла следующему условию:*

$$\frac{\pi(r-1)}{k} < |\arg(f_1) - \arg(f_2)| < \frac{\pi r}{k}, \quad r = 1, \dots, k. \tag{7}$$

*В этом случае число компонент связности дополнения предельного спектра будет равняться $\left[\frac{r+1}{2}\right]$ .*

$\triangleleft$ Так как дополнение отрезка прямой связно, то мы получаем из равенства (5) доказываемое утверждения для $k = 1$. При $k = 2$ мы получаем, что предельный спектр $\sigma_l(b)$ представляет собой простую разомкнутую кривую, поскольку угол между концевыми точками в этом случае больше чем $\pi$ и меньше, чем $2\pi$. В этом случае также получается одна компонента связности дополнения предельного спектра. Покажем, что в силу формулы (5) и учитывая, что $\sigma_l(a)$ это отрезок, множество $\sigma_l(b)$ имеет не более $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ компонент и что каждое значение числа компонент между 1 и $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ может быть реализовано (например, мы получаем точно $\left[\frac{k+1}{2}\right]$, если значение $|\mu - (\alpha+\beta)| > 0$ достаточно мало и значение $|\alpha \cdot \beta| > 0$ достаточно велико). Действительно, выберем фокусы $f_1$, $f_2$ так, чтобы выполнялось условие (7), т. е.

$$\frac{\pi(s-1)}{k} < |\arg(f_1) - \arg(f_2)| < \frac{\pi s}{k}, \quad s = 1, \dots, k. \tag{8}$$

Именно, пусть $f_1 = r\cdot\exp\left(\frac{\pi i(s-1)}{2k}\right)$, $f_2 = r\cdot\exp\left(-\frac{\pi i(s-1)}{2k}\right)$. Тогда, используя формулу (6), мы находим явные значения параметров $\alpha$, $\beta$:

$$\begin{cases}\alpha = -\frac{f_1+f_2}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{f_1\cdot f_2},\\ \beta = -\frac{f_1+f_2}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{f_1\cdot f_2}.\end{cases} \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что предельный спектр $\sigma_l(a)$ представляет собой отрезок: $\sigma_l(a) = \{z\in C : z = z(t) = tf_1 + (1-t)f_2, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Будем следить за точками отрезка при возведении в $k$-ую степень (мы отождествляем точки плоскости с комплексными числами):

$$(z(t))^k = (t\cdot f_1 + (1-t)\cdot f_2)^k = \left(t\cdot\left(r\cdot\exp\left(\frac{\pi i(s-1)}{2k}\right)\right) + (1-t)\left(r\cdot\exp\left(-\frac{\pi i(s-1)}{2k}\right)\right)\right)^k.$$

Будем следить сначала за концевыми точками отрезка $z(1)$, $z(0)$. Получаем:

$$(z(1))^k = (f_1)^k = r^k\cdot\exp\left(\frac{\pi i(s-1)}{2}\right), \quad (z(0))^k = (f_2)^k = r^k\cdot\exp\left(-\frac{\pi i(s-1)}{2}\right).$$

Нетрудно видеть, что в силу непрерывности отображения возведения в степень, образом отрезка при этом отображении является кривая, имеющая $\left[\frac{s-1}{2}\right]$ самопересечений. (При возведении в степень модуль и аргумент функции являются непрерывными функциями, соответственно, модуля и аргумента независимой переменной.) В силу монотонности роста (убывания) модуля точек отрезка $z$ при возведении в степень $k$ при $|z| > 1$ ($|z| < 1$) все точки самопересечений различны. Следовательно, эта кривая разбивает плоскость на $\left[\frac{s-1}{2}\right] + 1 = \left[\frac{s+1}{2}\right]$ компонент связности при $s = 1,\dots,k$. $\triangleright$

Замечание 1. Отметим, что из доказательства теоремы следует явный способ построения символа тёплицевых матриц, предельный спектр которых делит комплексную плоскость на число $s = 1,\dots,k$ компонент связности, удовлетворяющих условию теоремы. Действительно, зафиксируем произвольное комплексное число $z_0$, отличное от 0. Выберем угол $\phi$, удовлетворяющий условию (8):

$$\frac{\pi(s-1)}{k} < \phi < \frac{\pi s}{k}.$$

Положим $f_1 = z_0$, $f_2 = e^{i\phi}z_0$. Используя формулы (9) найдем явно значения параметров $\alpha$, $\beta$:

$$\begin{cases}\alpha = -\frac{z_0+e^{i\phi}z_0}{4} + \frac{1}{2}z_0e^{i\phi/2},\\ \beta = -\frac{z_0+e^{i\phi}z_0}{4} - \frac{1}{2}z_0e^{i\phi/2}.\end{cases}$$

## 3. Приложение. Примеры вычисления предельных спектров

Рассмотрим символ $b(t) = \mu + t^{-k}(t-\alpha)^k(t-\beta)^k$ с параметрами $\mu = 0 + i$, $\alpha = 3 - 5i$, $\beta = 1 + 3i$. Ниже приведены примеры построения предельного спектра последовательности тёплицевых матриц с символом $b(t)$. На рис. 1, 3 приведены графики предельных спектров, построение которых осуществлено на основе доказанной выше теоремы 1, на рис. 1 для параметра $k = 1$, а на рис. 3 для значения параметра $k = 3$. На рис. 2, 4 приведены примеры построения спектров тёплицевых матриц размера $20 \times 20$ с символом $b(t)$, выполненных с использованием программы аналитических вычислений Maple. Видно, что уже для матриц размера $20 \times 20$ предельный спектр достаточно хорошо приближается обычным спектром.

Ниже приведены графики предельного спектра (рис. 1) и спектра тёплицевой матрицы размера $20 \times 20$ с символом $b(t) = \mu + t^{-k}(t-\alpha)^k(t-\beta)^k$ при $k = 1$. В этом случае дополнение предельного спектра связно (число компонент связности равно 1).

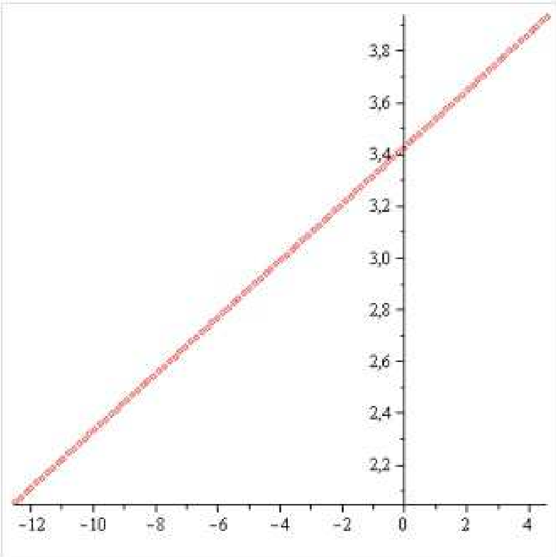


**Рис. 1.** Предельный спектр тёплицевой матрицы с символом $b(t)$ при $k = 1$.

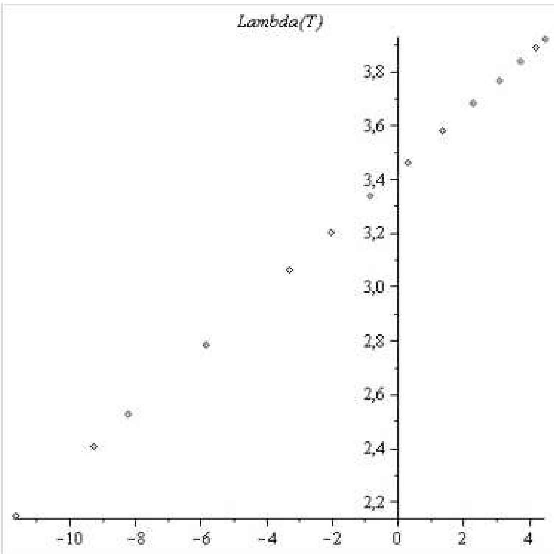


**Рис. 2.** Предельный спектр тёплицевой матрицы размера $20 \times 20$ с символом $b(t)$ при $k = 1$ (Maple).

Заметим, что далее мы используем формулу (8). В этом случае $s = k = 3$, $\arg(f_1) - \arg(f_2) = 2.48$, и это значение удовлетворяет условию

$$\frac{2\pi}{3} < 2.48 < \pi.$$

В этом случае достигается максимальное число компонент связности предельного спектра, равное 2.

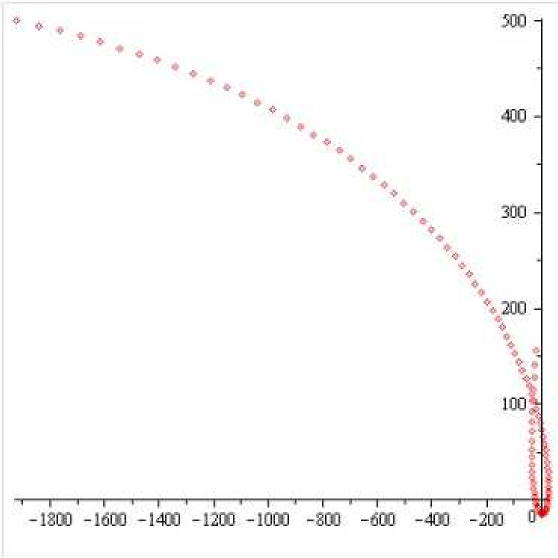


**Рис. 3.** Предельный спектр тёплицевой матрицы с символом $b(t)$ при $k = 3$.

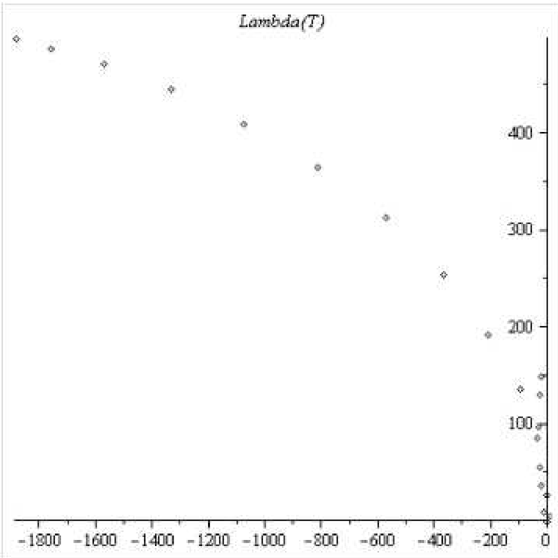


**Рис. 4.** Предельный спектр тёплицевой матрицы размера $20 \times 20$ с символом $b(t)$ при $k = 3$ (Maple).

Следующий рисунок содержит график предельного спектра, символа

$$b(t) = \mu + t^{-k}(t - \alpha)^k(t - \beta)^k$$

с параметрами $\mu = 1 + 3.9i$, $\alpha = 2 + 7i$, $\beta = -1 - 3i$, $k = 6$, разбивающего комплексную плоскость на 3 компоненты связности.

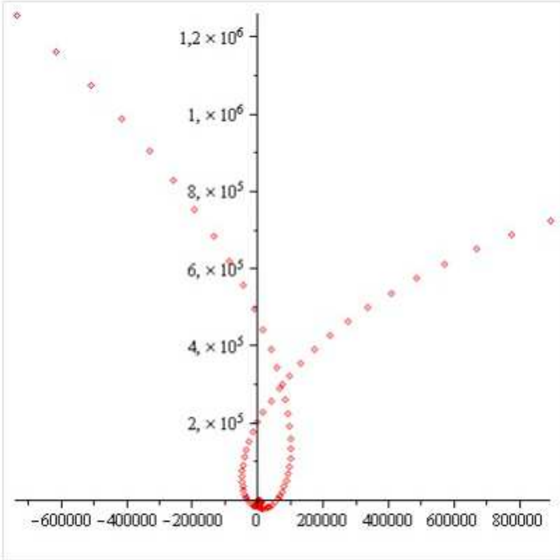


**Рис. 5.** Предельный спектр тёплицевой матрицы с символом $b(t)$ при $k = 6$.

## Литература


1. *Bottcher A. C., Grudsky S. M.* Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices.—Philadelphia: SIAM, 2005.—422 p.
2. *Batalshchikov A. A., Grudsky S. M., Stukopin V. A.* Asymptotics of eigenvalues of symmetric Toeplitz band matrices // Linear Algebra and its Appl.—2015.—Vol. 469.—P. 464–486.
3. *Золотых С. А., Стукопин В. А.* О вычислении предельного спектра ленточных тёплицевых матриц // Мат. форум. Т. 7. Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2013.—С. 80–87.—(Итоги науки. Юг России).
4. *Schmidt P., Spitzer F.* The Toeplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial // Math. Scand.—1960.—Vol. 8.—P. 15–38.
5. *Ullman K.* A problem of Schmidt and Spitzer // Bull. Amer. Math. Soc.—1967.—Vol. 73.—P. 883–885.


*Статья поступила 16 июня 2015 г.*

Золотых Светлана Андреевна
Донской государственный технический университет,
*старший преподаватель кафедры математики*
РОССИЯ, 344010, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail: `svetlana.zolotyx@mail.ru`

Стукопин Владимир Алексеевич
Донской государственный технический университет,
*доцент кафедры прикладной математики*
РОССИЯ, 344010, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

Южный математический институт ВНЦ РАН,
*старший научный сотрудник отдела мат. анализа*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `stukopin@mail.ru`

# ON THE NUMBER OF CONNECTED COMPONENTS OF THE COMPLEMENT OF LIMITING SPECTRUM OF TOEPLITZ BAND MATRICES

Zolotikh S. A., Stukopin V. A.

We obtain lower bounds for the maximum number of connected components of complement of limiting spectrum of Toeplitz band matrix whose symbol is a Laurent polynomial of a given degree. We also give examples of polynomials which are symbols of Toeplitz matrices whose limiting spectrum divides the complex plane into the given number of connected components.

**Key words:** banded Toeplitz matrices, symbol of the Toeplitz matrix, limiting spectrum, number of connected components.

*Владикавказский математический журнал*
*2016, Том 18, Выпуск 2, С. 49–54*

*УДК* **004.934**

# РЕГУЛЯРИЗОВАННОЕ СУММИРОВАНИЕ РЯДА ХААРА НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

**М. Л. Казарян**

Исследуется задача суммирования ряда Хаара непрерывной функции. Приводится доказательство теоремы об устойчивости и равномерной сходимости регуляризованного обобщенной сумматорной функцией ряда Фурье — Хаара непрерывной функции, заданного приближенными коэффициентами.

**Ключевые слова:** преобразование Хаара, ряд Хаара, метод регуляризации Тихонова, регуляризирующий множитель, класс функций $S_p$, $1 \leqslant p < \infty$.

Аппарат дискретных ортогональных преобразований (ДОП) имеет достаточно широкое применение [1]. Последние годы отмечены интенсивным применением функций Уолша, Хаара, Радемахера в различных теоретических и практических исследованиях: теория функций и функциональный анализ, теория аппроксимации, теория вероятностей, связь и телевидение, обработка сигналов и распознавание сигналов и т. д.

Система Хаара оказалась полезной при решении некоторых актуальных вопросов общей теории ортогональных рядов. Первые практические применения систем Уолша и Хаара относятся к области связи. Благодаря работам Х. Хармута функции Уолша вошли в технику телевидения. Им же, на основе упомянутых систем, построена теория секвентного анализа [3].

Остановимся подробнее на рядах Хаара. Важное приложение функции Хаара нашли в практической обработке изображений. При цифровой обработке сигналов приходится иметь дело с данными, известными приближенно, что делает невозможным применение традиционных методов решения этих задач. Эта же ситуация возможна при рассмотрении показаний приборов в геофизике, в дистанционном зондировании Земли [7], в телекоммуникационных процессах [2] и т. д.

Подобные задачи являются некорректными [5]. Исследования ряда Хаара на корректность уже проводились [2]. В данной статье предлагается продолжить начатые исследования.

**Предварительные сведения.** Известно [5], что задача суммирования ряда Фурье интегрируемой с квадратом на отрезке $[a,b]$ функции $f(t)$ с приближенными коэффициентами $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ вместо точных коэффициентов

$$a_k = \int\limits_a^b f(t)\,\psi_k(t)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

по некоторой ортонормированной системе функций $\{\psi_k(t)\}$ является некорректно поставленной. А именно, если

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_k - a_k)^2 \leqslant \delta^2, \quad \delta > 0, \tag{1}$$

то погрешность, т. е. отклонение функции $f(t)$ и суммы ее ряда Фурье с коэффициентами $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ вместо $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, в равномерной метрике может оказаться сколь угодно большой.

Определение 1. Определим функции вейвлет-Хаара следующим образом [4]:

$$\chi_1(t) \equiv 1,$$

$$\chi_{mj}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}}, & \text{при } t \in \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{2j-1}{2^m}\right), \\ -2^{\frac{m-1}{2}}, & \text{при } t \in \left[\frac{2j-1}{2^m}, \frac{j}{2^{m-1}}\right), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $m = 1, 2, \ldots,$ $j = 1, \ldots, 2^{m-1}$, а при $j = 2^{m-1}$ правый из отрезков считается замкнутым также справа. При нумерации функций одним индексом $k$ полагается $k = 2^{m-1} + j$.

Это определение отличается от определения самого Хаара [8] значениями функций Хаара в точках разрыва, но при этом сохраняется основное свойство системы Хаара — равномерное стремление ряда Фурье — Хаара непрерывной на $[0, 1]$ функции $f(t)$ к $f(t)$.

В случае системы Хаара не удовлетворяется условие равномерной ограниченности, а предложенный в [5] метод не обеспечивает непрерывность функции, аппроксимирующей непрерывную функцию. Эти исследования были уже проведены [1, 2].

Также ранее [2] было обосновано рассмотрение задачи регуляризации ряда вейвлет-Хаара с приближенными коэффициентами.

В решении этой задачи значительную роль играют классы $S_p$, $1 \leqslant p < \infty$, которые были введены и детально описаны И. М. Соболем (см. [4]) для изучения многомерных квадратурных формул и содержат функции с быстро сходящимся рядом Хаара.

Определение 2 [4]. Через $S_p$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначим класс функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

1) представимы рядом Хаара

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \chi_k(t);$$

2)

$$A_p(f) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |a_{mj}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant A, \quad A = \mathrm{const},\ A \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть

$$S_p = \bigcup_{A>0} S_p(A).$$

Введем несколько обозначений. Через $C(0;1)$ обозначим пространство функций, непрерывных на отрезке $[0;1]$, а через $L^p(0;1)$ — пространство интегрируемых в $p$-й степени функций [5].

Определим функцию $\varphi(t)$, представляющую обобщенный метод суммирования и являющуюся аналогом сумматорной функции из [5], следующим образом.

Определение 3. Непрерывную справа в точке 0 монотонную функцию $\varphi(t)$ с

$$\varphi(0)=1, \quad \lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0, \quad \int\limits_0^\infty \varphi(t)\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt<\infty \tag{3}$$

назовем *обобщенной сумматорной функцией*, а метод суммирования рядов посредством этой функции — *обобщенным методом суммирования.*

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1** [4]. *Если ряд Хаара*

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\,\chi_k(t)$$

*с произвольными действительными коэффициентами, сходится равномерно на* $[0;1]$, *то он является рядом Фурье — Хаара для своей суммы.*

Пусть вместо точных коэффициентов $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ функции $f(t)$ известны их приближенные значения $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ так, что удовлетворяется соотношение (1). Тогда справедливы следующие теоремы.

**Теорема 2** [4]. *Пусть* $f(t)\in S_p$, $1\leqslant p<\infty$, $t\in[0,1]$, $\alpha=\alpha(\delta)$ *монотонно стремится к нулю и* $\delta\alpha^{-\frac{1}{2}}(\delta)\to 0$ *при* $\delta\to 0$. *Тогда*

1) $f_\delta(\alpha,t)=\sum_{k=1}^\infty \varphi(\alpha k)c_k\,\chi_k(t)$ *принадлежит* $S_{p'}$, $p'=\max(2,p)$;

2) $f_\delta(\alpha,t)$ *равномерно на* $[0;1]$ *стремится к* $f(t)$.

Учитывая условие (2), теорему 2 можно переформулировать следующим образом:

**Теорема 3** [4]. *Пусть последовательность действительных чисел* $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяет условию* (2) *и вместе с* $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ — *условию* (1). *Пусть далее* $\alpha=\alpha(\delta)$ *монотонно стремится к нулю и* $\delta\alpha^{-\frac{1}{2}}(\delta)\to 0$ *при* $\delta\to 0$. *Тогда*

1) *Функции* $f(t)=\sum_{k=1}^\infty a_k\,\chi_k(t)$ *и* $f_\delta(\alpha,t)=\sum_{k=1}^\infty \varphi(\alpha k)c_k\,\chi_k(t)$ *принадлежат соответственно классам* $S_p$, $1\leqslant p<\infty$ *и* $S_{p'}$, $2\leqslant p'<\infty$.

2) $f_\delta(\alpha,t)$ *равномерно на* $[0,1]$ *стремится к* $f(t)$.

**Регуляризованное суммирование ряда непрерывной функции.** Классы $S_p$, $1\leqslant p<\infty$, содержат достаточно большое количество непрерывных функций. Но поскольку не все непрерывные функции входят в классы $S_p$, то отдельное рассмотрение задачи для классов $C(0;1)$ представляется целесообразным. Здесь мы докажем аналог теоремы 2 для функций из $C(0;1)$. Мы убедимся, что, как и в предыдущей теореме, аппроксимирующая функция принадлежит классу $S_{p'}$, $2\leqslant p'<\infty$.

**Теорема 4.** *Пусть* $f(t)$ *непрерывная на* $[0;1]$ *функция,* $0<\alpha\leqslant 1$, $\alpha=\alpha(\delta)$ *монотонно стремится к нулю и* $\delta\alpha^{-\frac{1}{2}}(\delta)\to 0$ *при* $\delta\to 0$. *Тогда*

$$f_\delta(\alpha,t)=\sum_{k=1}^\infty \varphi(\alpha k)\,c_k\,\chi_k(t)$$

1) *стремится к* $f(t)$ *равномерно на отрезке* $[0;1]$;

2) *при фиксированном* $\alpha$, $f_\delta(\alpha,t)\in S_{p'}$, $p'\geqslant 2$.

$\lhd$ Рассмотрим отклонение

$$\left|f(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\alpha k)c_k\,\chi_k(t)\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{k(\alpha)}[1-\varphi(\alpha k)]a_k\,\chi_k(t)\right|+\left|\sum_{k=k(\alpha)+1}^{\infty}a_k\,\chi_k(t)\right|$$
$$+\left|\sum_{k=k(\alpha)+1}^{\infty}a_k\,\varphi(\alpha k)\chi_k(t)\right|+\left|\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\alpha k)\gamma_k\chi_k(t)\right|=S_1+S_2+S_3+S_4,$$

где $\gamma_k=c_k-a_k$, $k=0,1,\ldots$

Отдельно оценим суммы $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$. Для $S_1$ получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{k(\alpha)}[1-\varphi(\alpha k)]a_k\,\chi_k(t)\right|\leqslant[1-\varphi(\alpha k(\alpha))]\sum_{k=1}^{k(\alpha)}|a_k\chi_k(t)|$$
$$\leqslant\ A[1-\varphi(\alpha k(\alpha))]\sum_{m=1}^{m(\alpha)-1}2^{\frac{m-1}{2}},$$

где $A=\mathrm{const}$, $k(\alpha)\leqslant 2^{m(\alpha)-1}\leqslant 2k(\alpha)$. Поскольку

$$\sum_{m=1}^{m(\alpha)-1}2^{\frac{m-1}{2}}\leqslant 2\sqrt{k(\alpha)},$$

следовательно,

$$S_1\leqslant A_1[1-\varphi(\alpha k(\alpha))]\sqrt{k(\alpha)}=A_1[1-\varphi(\alpha k(\alpha))]k(\alpha)\frac{1}{\sqrt{k(\alpha)}},$$

где $A_1=\mathrm{const}$. Ввиду непрерывности справа функции $\varphi(t)$ в точке $t=0$, всегда можно выбрать $\alpha$ и, соответственно, число $k(\alpha)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varphi(\alpha k(\alpha))\geqslant 1-\frac{c}{k(\alpha)}.$$

Откуда следует, что

$$S_1\leqslant\frac{c}{k(\alpha)},\quad c=\mathrm{const},$$

и, следовательно, $S_1$ стремится к нулю при $\alpha\to 0$.

Сумма $S_2$ является остатком разложения непрерывной функции по системе функций Хаара и оценивается с помощью непрерывности этой функции следующим образом [4]:

$$S_2\leqslant c_0\omega\left(\frac{1}{k(\alpha)},f\right),\quad c_0=\mathrm{const}\,.$$

Сумма

$$\sum_{k=k(\alpha)+1}^{\infty}a_k\,\varphi(\alpha k)\chi_k(t)$$

есть остаток равномерно сходящегося ряда. Действительно, так как $f(t)$ непрерывна, то частные суммы ее разложения

$$\sum_{k=1}^{N}a_k\,\chi_k(t)$$

ограничены, а $\varphi(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \to 0$, следовательно, согласно признаку Дирихле, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \varphi(\alpha k)\, \chi_k(t)$$

сходится равномерно, откуда следует, что $S_3$ равномерно стремится к нулю при $k(\alpha) \to \infty$.

Перейдем к оценке суммы $S_4$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, \varphi(\alpha k)\, \chi_k(t)\right| = \left|\gamma_1\, \varphi(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \gamma_{mj}\, \varphi(\alpha(2^{m-1}+j))\, \chi_{mj}(t)\right|$$

$$\leqslant |\gamma_1\, \varphi(\alpha)| + \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \gamma_{mj}\, \varphi(\alpha(2^{m-1}+j))\, \chi_{mj}(t)\right|.$$

Поскольку

$$\left|\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \gamma_{mj}\, \varphi(\alpha(2^{m-1}+j))\, \chi_{mj}(t)\right| \leqslant \delta \left( \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \varphi^2(\alpha(2^{m-1}+j))\, \chi_{mj}^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \delta\varphi(\alpha 2^{m-1}) 2^{\frac{m-1}{2}},$$

то

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, \varphi(\alpha k))\, \chi_k(t)\right| \leqslant \delta + \delta \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(\alpha 2^{m-1}) 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

Отсюда, учитывая условия, наложенные на $\varphi(t)$ (см. (1)), нетрудно убедиться, что

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, \varphi(\alpha k))\, \chi_k(t)\right| \leqslant \delta + \delta \frac{\alpha^{-\frac{1}{2}}}{\ln 2} \int_0^{\infty} \varphi(t) t^{-\frac{1}{2}}\, dt \leqslant c_1 \delta(\alpha) \alpha^{-\frac{1}{2}},$$

где $c_1 = \mathrm{const}$.

Таким образом, первая часть теоремы доказана, так как сопоставление полученных для сумм $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ оценок показывает, что равномерная сходимость $f_\delta(\alpha, t)$ к $f(t)$ обеспечена.

Докажем вторую часть теоремы. Из доказательства первой части, очевидно, что функция $f_\delta(\alpha, t)$ есть сумма равномерно сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha k) c_k \chi_k(t)$ и, что согласно теореме 1 функция $f_\delta(\alpha, t)$ представима своим рядом Фурье — Хаара. Это означает, что первое условие определения классов $S_p$ выполнено. Не трудно убедиться, что коэффициенты функции $f_\delta(\alpha, t)$ удовлетворяют условию (2). Именно, при $p' \geqslant 2$ и фиксированном $\alpha$

$$A_p(f_\delta(\alpha, t)) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |\varphi(\alpha(2^{m-1}+j)) c_{mj}|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \varphi(\alpha 2^{m-1}) \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{mj}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \varphi(\alpha 2^{m-1}) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь мы воспользовались следующим известным неравенством [6]: если $0 < q < q'$, то

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant M} |U_j| \leqslant \left\{ \sum_{j=1}^{M} |U_j|^{q'} \right\}^{\frac{1}{q'}} \leqslant \left\{ \sum_{j=1}^{M} |U_j|^{q} \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Обозначим $\alpha 2^x = t$, $\alpha \ln 2 \cdot 2^x dx = dt$. Тогда для $A_p(f_\delta(\alpha, t))$ получаем оценку

$$A_p(f_\delta(\alpha,t)) \leqslant c_2\alpha^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^\infty \varphi(t)t^{-\frac{1}{2}}\,dt = c_3\alpha^{-\frac{1}{2}}, \quad c_3 = \mathrm{const}\,.$$

Следовательно, для каждого фиксированного $\alpha$ функция $f_\delta(\alpha, t)$ принадлежит $s_2$. $\rhd$

**Выводы.** В работе исследуются ряды Хаара на корректность методом регуляризации Тихонова. Рассматривается задача регуляризованного суммирования для классов $C(0;1)$.

Доказана теорема об устойчивости и равномерной сходимости регуляризованного обобщенной сумматорной функцией ряда Хаара из класса непрерывных функций с приближенными коэффициентами, а также доказано, что аппроксимирующая функция принадлежит классу $S_{p'}$, $2 \leqslant p' < \infty$.

## Литература


1. *Казарян М. Л.* Исследование задач цифровой обработки сигналов посредством дискретных ортогональных преобразований на устойчивость.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 2009.—81 с.
2. *Казарян М. Л.* Вейвлет-преобразования Хаара в системе телекоммуникаций и исследование их на устойчивость // Телекоммуникации.—2014.—№ 9.—С. 7–13.
3. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений.—М.: Мир, 1982.
4. *Соболь И. М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара.—М.: Наука, 1969.—288 с.
5. *Тихонов А. Н.* Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР.—1964.—Т. 156, № 2.—С. 268–271.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциальных и интегральных исчислений. Т. 2.—М.: Наука, 1964.—463 с.
7. *Шовенгердт Р. А.* Дистанционное зондирование. Методы и модели обработки изображений.—М.: Техносфера, 2010.—560 с.
8. *Haar A.* Zur Theoria der orthogonalen Funktionsysteme // Math. Fnn.—1910.—Vol. 69.—P. 331–371.


*Статья поступила 10 июля 2014 г.*

Казарян Маретта Левоновна
Северо-Осетинский государственный университет,
*доцент кафедры прикладной математики*
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;

Финансовый университет при правительстве России,
*заведующая кафедрой математики и информатики*
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Молодежная, 7
E-mail: `marettak@bk.ru`

# REGULARIZED SUMMATION OF HAAR SERIES OF CONTINUOUS FUNCTIONS

Kazarian M. L.

We study the problem of summation of Haar series of continuous functions. We present the proof of the stability and uniform convergence of Haar series regularized by generalized summation function for the class of continuous functions with approximate coefficients.

**Key words:** Haar transformation, Haar series, Tikhonov regularization method, regularizing multiplier, class of functions $S_p$, $1 \leqslant p < \infty$.

*Владикавказский математический журнал*
*2016, Том 18, Выпуск 2, С. 55–66*

*УДК* **517.9**

# ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ПОДХОДА СИМОНЕНКО — КОЗАКА В ТЕОРИИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**А. В. Лукин**

В работе представлено обобщение локальной структуры Симоненко — Козака на случай алгебр, порожденных многомерными операторами с компактными коэффициентами. Построенная локальная структура используется для получения критерия применимости проекционного метода решения уравнений для операторов многомерной свертки с компактными операторными коэффициентами.

**Ключевые слова:** интегральный оператор, оператор свертки, локальный метод, проекционный метод, компактные коэффициенты.

## 1. Введение

В [1] представлена теория проекционных методов для одномерных уравнений типа свертки. Для многомерных уравнений матричной свертки критерий применимости проекционного метода получен А. В. Козаком [2] на основе модификации локального метода И. Б. Симоненко [3, 4]. Исследование фредгольмовости многомерных интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа [5] редуцируется к исследованию операторов свертки на группе $\mathbb{R}^n$ с компактными коэффициентами при $n \geqslant 2$. В связи с этим представляется актуальным построение проекционного метода для решения уравнений с таким типом операторов. Распространение подхода Козака — Симоненко для сверток с операторными коэффициентами потребовало построения новой локальной структуры на основе имеющейся в [2], и исследования ее свойств. В настоящей работе для алгебры, порожденной операторами с компактными операторными коэффициентами, представлена конструкция такой локальной структуры, которая затем используется для получения критерия применимости проекционного метода для уравнений многомерной свертки с компактными коэффициентами. Построенный проекционный метод усиливает результаты [6, 7], где получено достаточное условие применимости приближенного метода решения уравнений свертки на группе $\mathbb{R}^n$ с компактными коэффициентами на основе редукции к проекционному методу для матричных сверток.

## 2. Основные результаты

Пусть $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{C}^k$, $k \geqslant 2$, — вещественное и комплексное $k$-мерные векторные пространства. Если $W$ — банахово пространство, то через $\mathscr{L}(W)$ обозначим банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов в $W$. Пусть $X$ и $Y$ — линейные пространства с мерой $\mu$. Через $L_p(X)$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначим банахово пространство измеримых комплекснозначных функций, суммируемых на $X$ с $p$-ой степенью, и обычной нормой. Через $L_p(X) \otimes L_p(Y)$ обозначим топологическое тензорное произведение пространств $L_p(X)$ и $L_p(Y)$ (см., например, [8]). Рассмотрим операторные алгебры $\mathscr{A}(\subset \mathscr{L}(L_p(X)))$ и $\mathscr{B}(\subset \mathscr{L}(L_p(Y)))$, $1 < p < \infty$. Если $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$, то через $A \otimes B$ обозначим тензорное произведение операторов $A$ и $B$, а через $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ — топологическое тензорное произведение алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Если $\mathscr{U}$ — банахова алгебра, то $\mathscr{U}^+$ — ее унитализация.

Приведем классическое определение проекционного метода (см. [9, с. 189]). Пусть $\{P_m\}_{m \geqslant 1} (\subset \mathscr{L}(L_p(X)))$ — последовательность проекторов, сильно сходящаяся к тождественному оператору $I_{\mathscr{L}(L_p(X))}$, и $A \in \mathscr{L}(L_p(X))$. Рассмотрим уравнение

$$Af = g. \tag{1}$$

Проекционным методом называется приближенный метод решения уравнения (1), состоящий в отыскании решения $f_m (\in P_m L_p(X))$ уравнения

$$P_m A P_m f_m = P_m g. \tag{2}$$

Если, начиная с некоторого номера $m_0$, для любого $g (\in L_p(X))$ уравнение (2) имеет единственное решение $f_m$, и при $m$ стремящемся к бесконечности последовательность $\{f_m\}_{m \geqslant m_0}$ стремится к решению уравнения (1), то говорят, что к оператору $A$ применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_m\}_{m \geqslant 1}$.

Пусть $\mathscr{V}_p$ — замкнутая подалгебра $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k))$, порожденная операторами свертки

$$(C_a f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} a(x-y) f(y)\, dy, \quad a \in L_1(\mathbb{R}^k);$$

$\mathfrak{X}$ — произвольный хаусдорфов компакт с мерой, $\mathscr{K}_p$ — идеал компактных операторов в $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k))$. Рассмотрим банахову алгебру $\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p} (= \mathscr{V}_p \otimes \mathscr{K}_p)$. Пусть $M$ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^k$. Будем предполагать, что для каждой точки $x$ границы $\partial M$ множества $M$ существует конус $K_x$ с вершиной в $x$, окрестности $u$, $v$ точки $x$ и $C^1$-диффеоморфизм $\varphi : u \to v$ такие, что $\varphi(x) = x$, $\varphi'(x) = I$ и $\varphi(M \cap u) = K_x \cap v$. В [2] в качестве примеров таких множеств приводится замкнутое множество с гладкой границей и образ замкнутого многогранника $M$ при $C^1$-диффеоморфизме $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$.

В пространстве $L_p(\mathfrak{X})$ зафиксируем базис $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$. Рассмотрим проектор $Q^m$, определенный в $L_p(\mathfrak{X})$ следующим образом:

$$(Q^m f)(y) = \sum_{i=1}^{m} f_i \eta_i(y), \quad f_i \in \mathbb{C}.$$

В [10, с. 132] доказано, что нормы таких проекторов ограничены в совокупности. Через $P_M$ обозначим проектор, действующий в $L_p(\mathbb{R}^k)$ по формуле:

$$(P_M f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in M, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin M. \end{cases}$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

**Теорема 1.** *Пусть $A \in (\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+$. Для того, чтобы операторы*

$$(P_{mM} \otimes Q^m) A (P_{mM} \otimes Q^m) : (P_{mM} \otimes Q^m) L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}) \to (P_{mM} \otimes Q^m) L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$$

*были обратимы для всех $m$, начиная с некоторого номера $m_0$, и выполнялось условие*

$$\sup_{m\geqslant m_0} \|((P_{mM}\otimes Q^m)A(P_{mM}\otimes Q^m))^{-1}\| < \infty, \tag{3}$$

*необходимо и достаточно, чтобы для всех $x$ $(\in \partial M)$ были обратимы операторы*

$$(P_{K_x}\otimes I)A(P_{K_x}\otimes I) : (P_{K_x}\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X}) \to (P_{K_x}\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X}).$$

**Следствие 1.** *Если $0\in \operatorname{int} M$, то к оператору $A(\in(\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+)$ применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_{mM}\otimes Q^m\}_{m\geqslant 1}$ тогда и только тогда, когда оператор $A$ обратим и для всех $x(\in\partial M)$ обратимы операторы $(P_{K_x}\otimes I)A(P_{K_x}\otimes I)$.*

Доказательство следствия вытекает из теоремы 1 и критерия применимости проекционного метода (см. [1, с. 91]). Доказательство теоремы 1, основанное на применении локального метода Симоненко — Козака, проводится в разделе 4. Раздел 3 содержит обобщение конструкции локальной структуры для алгебр операторов с операторными коэффициентами.

## 3. Вспомогательная локальная структура

Приведем несколько определений, обобщающих классический подход локального метода [4]. Пусть $\mathscr{A}$ — банахова алгебра с единицей $e$, $X$ — компакт, а $\Sigma_X$ — борелевская $\sigma$-алгебра подмножеств пространства $X$. Пусть задано некоторое отображение $p:\Sigma_X\to\mathscr{A}$. Говорят, что это отображение порождает в алгебре $\mathscr{A}$ *локальную структуру над пространством* $X$, если выполняются условия:

1) $p(X)=e$;
2) $(\forall\, u,v\in\Sigma_X)$ $p(u\cap v)=p(u)p(v)$;
3) для любых $u,v\in\Sigma_X$, если $u\cap v=\varnothing$, то $p(u\cup v)=p(u)+p(v)$;
4) $\sup\limits_{u\in\Sigma_X}\|p(u)\|<\infty$.

Элемент $a\in\mathscr{A}$ называется *элементом локального типа*, если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств $u,v\in\Sigma_X$ $\ p(u)ap(v)=0$.

Пусть $M(X)$ — банахова алгебра ограниченных комплексных функций, определенных на $X$, с обычными операциями и нормой, $K(X)=\{1_u\}_{u\in\Sigma_X}$ — семейство характеристических функций множеств $u\in\Sigma_X$. Через $S(X)$ обозначим минимальную замкнутую подалгебру алгебры $M(X)$, содержащую $K(X)$. Очевидно, что $S(X)$ содержит банахову алгебру $C(X)$ непрерывных вещественных функций на $X$.

Элемент $a\in\mathscr{A}$ называется *локально обратимым слева* (*справа*) в точке $x\in X$, если существуют окрестность $u$ точки $x$ и элемент $b\in\mathscr{A}$ такие, что $bap(u)=p(u)$ $(p(u)ab=p(u))$. Элемент $a\in\mathscr{A}$ называется *локально обратимым* в точке $x\in X$, если он локально обратим слева и справа в этой точке.

Элементы $a,b\in\mathscr{A}$ будем называть *эквивалентными в точке* $x\in X$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует окрестность $u$ точки $x$ такая, что

$$\|(a-b)p(u)\|<\varepsilon,\quad \|p(u)(a-b)\|<\varepsilon.$$

Сокращенно будем писать $a\sim_x b$.

Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — банаховы алгебры с локальными структурами над пространствами $X$ и $Y$, порожденными отображениями $p:\Sigma_X\to\mathscr{A}$ и $p':\Sigma_Y\to\mathscr{B}$; $a\in\mathscr{A}$ и $b\in\mathscr{B}$ — элементы этих алгебр, $x\in X$ и $y\in Y$ — фиксированные точки. Пусть существуют окрестности $u$ и $v$ точек $x$ и $y$, гомеоморфизм $\varphi : u \to v$ и изоморфизм $T : p(u)\mathscr{A}p(u) \to p'(v)\mathscr{B}p'(v)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\varphi(x) = y$;
2) $(\forall\, w \in \Sigma_u) \quad T(p(w)) = p'(\varphi(w))$;
3) $T(p(u)ap(u)) \sim_y p'(v)bp'(v)$.

Тогда говорят, что элемент $a$ в точке $x$ *квазиэквивалентен* элементу $b$ в точке $y$. Сокращенно будем писать $a \sim_x\sim_y b$ или $a \sim_x \varphi$, $T \sim_y b$.

Пусть $X$ — измеримое подмножество в $\mathbb{R}^k$, через $\mathfrak{A}_X$ обозначим множество семейств $\{A_m\}_{m\geqslant 1}$ линейных ограниченных операторов

$$A_m : (P_{mX} \otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}) \to (P_{mX} \otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$$

таких, что $\sup_{m\geqslant 1} \|A_m\| < \infty$. Операции сложения, умножения и умножения на скаляр в $\mathfrak{A}_X$ можно ввести покоординатно, а норму определить равенством $\|\{A_m\}_{m\geqslant 1}\| = \sup_{m\geqslant 1} \|A_m\|$. Непосредственно проверяется, что множество $\mathfrak{A}_X$ с введенными таким образом операциями и нормой является банаховой алгеброй. Определим в $\mathfrak{A}_X$ следующее множество: $\mathfrak{J}_X = \big\{\{A_m\}_{m\geqslant 1} \in \mathfrak{A}_X : \ \lim_{m\to\infty} \|A_m\| = 0\big\}$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{J}_X$ является замкнутым двухсторонним идеалом в $\mathfrak{A}_X$. Через $\mathscr{A}_X$ обозначим фактор-алгебру $\mathfrak{A}_X/\mathfrak{J}_X$. Класс смежности элемента $\{A_m\}_{m\geqslant 1}$ $(\in \mathfrak{A}_X)$ по идеалу $\mathfrak{J}_X$ обозначим через $[\{A_m\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_X}$. Для каждого оператора $A : L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}) \to L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$ определим элемент $j_X(A)$ $(\in \mathscr{A}_X)$ формулой

$$j_X(A) = \big[\{(P_{mX} \otimes Q^m)A(P_{mX} \otimes Q^m)\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_X}. \tag{4}$$

Пусть $\dot{\mathbb{R}}^k$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^k$, $\overline{X}$ — замыкание множества $X$ в $\dot{\mathbb{R}}^k$.

**Теорема 2.** *Отображение $p : \Sigma_{\overline{X}} \to \mathscr{A}_X$, определенное равенством*

$$p(u) = \big[\{P_{m(u\cap X)} \otimes Q^m\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_X},$$

*порождает в алгебре $\mathscr{A}_X$ локальную структуру над пространством $\overline{X}$.*

Выполнение четырех условий определения локальной структуры проверяется прямыми выкладками.

Зафиксируем безусловный базис $\{e_1(x), e_2(x), \ldots, e_i(x), \ldots\}_{i=1}^{\infty}$ в $L_p(\mathbb{R}^k)$ и безусловный базис $\{\eta_1(y), \eta_2(y), \ldots, \eta_j(y), \ldots\}_{j=1}^{\infty}$ в $L_p(\mathfrak{X})$. Известно, что последовательность вида

$$\{e_1\eta_1, e_1\eta_2, \ldots, e_1\eta_j, \ldots, e_2\eta_1, e_2\eta_2, \ldots, e_2\eta_j, \ldots, e_i\eta_1, e_i\eta_2, \ldots, e_i\eta_j, \ldots\}_{i,j=1}^{\infty} \tag{5}$$

образует безусловный базис в пространстве $L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$. Пусть $f(x,y) \in (P_{mX} \otimes Q^m)$ $L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$. Тогда функцию $f$ можно разложить по базису (5):

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^m e_i(x)\eta_j(y), \quad \alpha_{ij}^m \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Введем отображение $\mu : S(\overline{X}) \to \mathscr{A}_X$ формулой $\mu(\varphi) = [\{\Phi_m\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_X}$, где

$$(\Phi_m f)(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^m \varphi(x/m) e_i(x)\eta_j(y), & x \in mX, \\ 0, & x \notin mX. \end{cases} \tag{7}$$

**Лемма 1.** 1) $\{\Phi_m\}_{m\geqslant 1}\in\mathfrak{A}_X$.

2) *$\mu$ является непрерывным гомоморфизмом.*

3) $\|\mu(\varphi)\|\leqslant\|\varphi\|_{S(\overline{X})}$.

4) $(\forall\, u\in\Sigma_{\overline{X}})\quad \mu(1_u)=p(u)$.

Лемма 1 доказывается прямыми выкладками. Из теоремы, доказанной в [2, с. 59], следует, что построенный гомоморфизм единственный.

**Теорема 3.** *Для любого оператора $A\in(\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+$ элемент $j_X(A)$ локального типа.*

$\lhd$ Доказательство теоремы сводится к доказательству следующего утверждения. Пусть $\lambda I+A\in(\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+$, где $\lambda\in\mathbb{C}$, и $\{u_m\}_{m\geqslant 1}$, $\{v_m\}_{m\geqslant 1}$ — семейства измеримых подмножеств $\mathbb{R}^k$. Пусть $\rho(u_m,v_m)$ — расстояние между множествами $u_m$ и $v_m$. Если

$$\lim_{m\to\infty}\rho(u_m,v_m)=\infty,$$

то

$$\lim_{m\to\infty}\|(P_{u_m}\otimes Q^m)(\lambda I+A)(P_{v_m}\otimes Q^m)\|=0. \tag{8}$$

Рассмотрим оператор вида $\lambda I+\sum_{i=1}^{l}\tilde{A}_i\otimes B_i$, где $\tilde{A}_i$ — оператор свертки с финитным ядром $a_i(x)$, $B_i\in\mathscr{K}_p$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Так как операторы такого вида плотны в $(\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+$, то лемму достаточно доказать для таких операторов. Так как имеется конечное число ядер $a_i(x)$, то существует шар радиуса $r$ такой, что при $|x|>r$ все ядра $a_i(x)$ обращаются в нуль. Так как при $\rho(u_m,v_m)>r$ $P_{u_m}\tilde{A}_iP_{v_m}=O$ и $P_{u_m}P_{v_m}=O$, то из равенства

$$\big(P_{u_m}\otimes Q^m\big)\Bigg(\lambda I+\sum_{i=1}^{l}\tilde{A}_i\otimes B_i\Bigg)\big(P_{v_m}\otimes Q^m\big)=\lambda\big(P_{u_m\cap v_m}\otimes Q^m\big)+\sum_{i=1}^{l}P_{u_m}\tilde{A}_iP_{v_m}\otimes Q^mB_iQ^m$$

следует, что при достаточно больших $m$

$$(P_{u_m}\otimes Q^m)\big(\lambda I+\sum_{i=1}^{l}\tilde{A}_i\otimes B_i\big)(P_{v_m}\otimes Q^m)=O,$$

что доказывает равенство (8). $\rhd$

## 4. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1 опирается на три леммы. Первая лемма устанавливает связь между обратимостью и локальной обратимостью операторов с компактными коэффициентами. Отметим при этом, что рассматриваемый оператор может и не быть оператором типа свертки.

**Лемма 2.** *Пусть $K$ — измеримый конус с вершиной в нуле и оператор $A\in(\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k))\otimes\mathscr{K}_p)^+$ такой, что элемент $j_K(A)$ локального типа. Для того, чтобы оператор*

$$(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I):(P_K\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})\to(P_K\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$$

*был обратим, необходимо и достаточно, чтобы элемент $j_K(A)$ был локально обратим в нуле.*

$\lhd$ *Необходимость.* Так как оператор $(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)$ обратим в $(P_K\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$, то существует число $m_0$ такое, что для любого $m\geqslant m_0$ оператор $(P_K\otimes Q^m)A(P_K\otimes Q^m)$ обратим в соответствующем пространстве $(P_K\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$. Следовательно, при

$m \geqslant m_0$ существует оператор $C_m$, обратный к $(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)$. Тогда элемент $c = [\{C_m\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_K}$ будет обратным, а значит, и локально обратным, к $j_K(A)$. Необходимость доказана.

*Достаточность.* Пусть элемент $j_K(A)$ локально обратим в нуле. Тогда существует элемент $b = [\{B_m\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_K} (\in \mathscr{A}_K)$ и окрестность $u(\subset \overline{K})$ точки 0 такие, что

$$bj_K(A)p(u) = p(u).$$

Следовательно, для любого $f(\in (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}))$

$$\lim_{m\to\infty} \|B_m(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)(P_{mu} \otimes Q^m)f - (P_{mu} \otimes Q^m)(P_K \otimes Q^m)f\| = 0.$$

Пусть $\beta = \sup_{m\geqslant 1} \|B_m\|$. Из предыдущего равенства получаем, что для любого фиксированного числа $\varepsilon(> 0)$ найдется номер $m_0$ такой, что для любого $m$ $(\geqslant m_0)$

$$\|B_m(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)(P_{mu} \otimes Q^m)f - (P_{mu} \otimes Q^m)(P_K \otimes Q^m)f\| \leqslant \varepsilon;$$

$$\|(P_{mu} \otimes Q^m)(P_K \otimes Q^m)f\| - \varepsilon \leqslant \beta\|(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)(P_{mu} \otimes Q^m)f\|. \tag{9}$$

Так как $mu \cap K$ является для $K$ исчерпывающей последовательностью подмножеств и последовательность $\{Q^m\}_{m\geqslant 1}$ сильно сходится к $I_{\mathscr{L}(L_p(\mathfrak{X}))}$, то

$$\lim_{m\to\infty} \|(P_{mu} \otimes Q^m)(P_K \otimes Q^m)f - f\| = 0; \quad \lim_{m\to\infty} \|(P_K \otimes Q^m)f - f\| = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим числовую последовательность $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Из (9) следует, что

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\exists\, m_0^n)\ (\forall\, m \geqslant m_0^n)$$

$$\frac{1}{\beta}\left\|(P_{mu} \otimes Q^m)(P_K \otimes Q^m)f\right\| - \frac{\varepsilon_n}{\beta} \leqslant \left\|(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)(P_{mu} \otimes Q^m)f\right\|.$$

Следовательно, существует строго монотонно возрастающая последовательность $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$, такая что для любого натурального $n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\beta}\left\|(P_{m_n u} \otimes Q^{m_n})(P_K \otimes Q^{m_n})f\right\| - \frac{\varepsilon_n}{\beta} \leqslant \left\|(P_K \otimes Q^{m_n})A(P_K \otimes Q^{m_n})(P_{m_n u} \otimes Q^{m_n})f\right\|. \tag{11}$$

Из (10) следует равенство

$$\lim_{m\to\infty} \left\|(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)(P_{mu} \otimes Q^m)f - (P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)f\right\| = 0. \tag{12}$$

Переходя к пределу в неравенстве (11) при $n \to \infty$, учитывая (10) и (12), получаем, что для любой функции $f(\in (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}))$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\beta}\|f\| \leqslant \|(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)f\|. \tag{13}$$

Покажем, что образ оператора $(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)(\in \mathscr{L}((P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})))$ замкнут, т. е.

$$\mathrm{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I) = \overline{\mathrm{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)}. \tag{14}$$

Для этого рассмотрим последовательность $f_n(\in \mathrm{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I))$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f(\in \overline{\mathrm{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)}), \tag{15}$$

и покажем, что $f \in \operatorname{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)$. Известно, что

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\exists\, \varphi_n \in (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}))\quad (P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)\varphi_n = f_n. \tag{16}$$

Из фундаментальности последовательности $\{(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и неравенства (13) следует фундаментальность последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу полноты пространства $(P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$, существует функция $\varphi \in (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)\varphi_n = (P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)\varphi. \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) получаем равенство $(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)\varphi = f$, следовательно, $f \in \operatorname{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)$, что доказывает (14). Таким образом, из (13), (14) и теоремы об обратимости оператора, отграниченного от нуля [10, с. 119] следует обратимость оператора

$$(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I) : (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}) \to \operatorname{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I).$$

Докажем равенство

$$\overline{\operatorname{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)} = (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}). \tag{18}$$

Из локальной обратимости в нуле элемента $j_K(A)$ следует, что существует $c\ (\in \mathscr{A}_K)$ и окрестность $v(\subset \overline{K})$ точки 0 такие, что

$$p(v)j_K(A)c = p(v). \tag{19}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\in C(\overline{K}))$, для которой $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \notin v$. Умножим (19) слева на элемент $\mu(\varphi)$, где $\mu$ — гомоморфизм, определяемый формулой (7). Так как согласно лемме 1 $p(v) = \mu(1_v)$, то равенство (19) переписывается в виде $\mu(\varphi)j_K(A)c = \mu(\varphi)$. Так как элемент $j_K(A)$ локального типа, то из теоремы, доказанной в [2, с. 62] следует, что $j_k(A)$ коммутирует с любым элементом из $\mu(C(\overline{K}))$, следовательно,

$$\mu(\varphi)j_K(A)c = j_K(A)\mu(\varphi)c = \mu(\varphi). \tag{20}$$

Умножим правую часть равенства (20) на $p(\overline{K})$. Получим $j_K(A)\mu(\varphi)cp(\overline{K}) = \mu(\varphi)p(\overline{K})$. Пусть элемент $c$ имеет вид $c = [\{C_m\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_K}$. Пусть $f \in (P_K\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$. Из последнего равенства следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\|(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)\Phi_m C_m(P_K \otimes Q^m)f - \Phi_m(P_K \otimes Q^m)f\| = 0. \tag{21}$$

Так как $mv \cap K$ — исчерпывающая последовательности подмножеств для $K$, то

$$(\forall\,\varepsilon > 0)\ (\exists\, r > 0)\quad \int\limits_{K\setminus rv\times\mathfrak{X}} |f(x,y)|^p\,dxdy < \varepsilon.$$

Из непрерывности функции $\varphi(x)$ следует, что

$$(\exists\, m_0)\ (\forall\, m \geqslant m_0)\quad \max_{x\in rv}|1-\varphi(x/m)|^p < \varepsilon.$$

Из этих соображений следует равенство

$$\lim_{m\to\infty}\|\Phi_m(P_K \otimes Q^m)f - f\| = 0. \tag{22}$$

Докажем равенство

$$\lim_{m\to\infty}\big\|(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-(P_K\otimes Q^m)A(P_K\otimes Q^m)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f\big\|=0.$$

Так как $\Phi_m\in\mathscr{L}((P_K\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X}))$, то достаточно показать, что

$$\lim_{m\to\infty}\|(P_K\otimes I)A\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-(P_K\otimes Q^m)A\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f\|=0. \tag{23}$$

Отметим, что оператор $A$ представим в виде $A=\lambda I+\widetilde{A}$, где $\lambda\in\mathbb{C}$, $\widetilde{A}\in\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k))\otimes\mathscr{K}_p$. Оценим норму оператора из (23)

$$\begin{gathered}\|(P_K\otimes I)A\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-(P_K\otimes Q^m)A\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f\|\\ =\|(P_K\otimes I)\widetilde{A}\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-(P_K\otimes Q^m)\widetilde{A}\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f\|\\ \leqslant\|(P_K\otimes I)\widetilde{A}-(P_K\otimes Q^m)\widetilde{A}\|\|\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)\|\|f\|.\end{gathered} \tag{24}$$

Для $\widetilde{A}$ имеет место утверждение, аналогичное лемме 1 из [6]. Согласно этому утверждению

$$\lim_{m\to\infty}\|(P_K\otimes I)\widetilde{A}-(P_K\otimes Q^m)\widetilde{A}\|=0. \tag{25}$$

Так как $\{\Phi_m\}_{m\geqslant1}\in\mathfrak{A}_K$, то $\{\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)\}_{m\geqslant1}\in\mathfrak{A}_K$, и существует $\beta>0$ такое, что

$$\sup_{m\geqslant1}\|\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)\|<\beta.$$

Следовательно, (24) оценивается так:

$$\|(P_K\otimes I)\widetilde{A}-(P_K\otimes Q^m)\widetilde{A}\|\|\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)\|\|f\|\leqslant\beta\|(P_K\otimes I)\widetilde{A}-(P_K\otimes Q^m)\widetilde{A}\|\|f\|.$$

Таким образом, из последнего неравенства, (24) и (25) следует (23).

Для функции $f$ имеет место оценка:

$$\begin{gathered}\|(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-f\|\\ \leqslant\|(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-(P_K\otimes Q^m)A(P_K\otimes Q^m)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f\|\\ +\|(P_K\otimes Q^m)A(P_K\otimes Q^m)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-\Phi_m(P_K\otimes Q^m)f\|+\|\Phi_m(P_K\otimes Q^m)f-f\|.\end{gathered}$$

Из равенств (21)–(23) следует, что $\lim_{m\to\infty}\|(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-f\|=0$. Обозначим через $\psi_m=\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f$. Тогда последнее равенство эквивалентно

$$\lim_{m\to\infty}\|(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)\psi_m-f\|=0,$$

что доказывает равенство (18). Замкнутость образа оператора $(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)$ была доказана ранее (см. (14)), как и обратимость этого оператора на своем образе. Таким образом, мы доказали, что $(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)$ обратим в пространстве $(P_K\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$. $\rhd$

Пусть $u$, $v$ $(\subset\mathbb{R}^k)$ — окрестности точки $x(\in\mathbb{R}^k)$ с гладкими границами, $\varphi:u\to v$ — $C^1$-диффеоморфизм такой, что $\varphi(x)=x$ и $\varphi'(x)=I$. Пусть

$$\sup_{x\in u}\big|(J\varphi)(x)\big|<\infty,\quad \sup_{y\in v}\big|(J\varphi^{-1})(y)\big|<\infty,$$

где $(J\varphi)(x) = \det\varphi'(x)$ — якобиан преобразования $\varphi$. Определим отображение $T_\varphi : p(u)\mathscr{A}_{\mathbb{R}^k}p(u) \to p(v)\mathscr{A}_{\mathbb{R}^k}p(v)$ следующим образом: пусть $a = [\{A_m\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}} (\in \mathscr{A}_{\mathbb{R}^k})$, тогда

$$T_\varphi(p(u)ap(u)) = \big[\big\{(P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)A_m(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}, \quad (26)$$

где оператор $T_m : (P_{mv}\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X}) \to (P_{mu}\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$ определяется формулой

$$(T_m f)(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^m e_i(m\varphi(x/m))\eta_j(y), & x \in mu, \\ 0, & x \notin mu, \end{cases}$$

где $f(x,y) \in (P_{mv}\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$ и ее разложение по базису (5) имеет вид (6).

Следующая лемма доказывается прямыми выкладками.

**Лемма 3.** *$T_\varphi$ является изоморфизмом банаховых алгебр $p(u)\mathscr{A}_{\mathbb{R}^k}p(u)$ и $p(v)\mathscr{A}_{\mathbb{R}^k}p(v)$.*

**Лемма 4.** *Если $A \in (\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+$, то $j_{\mathbb{R}^k}(A) \sim_x \varphi$, $T_\varphi \sim_x j_{\mathbb{R}^k}(A)$.*

$\lhd$ Проверим три условия определения квазиэквивалентности. Выполнение первого условия очевидно, второе также легко проверяется прямыми выкладками. Отметим лишь, что для любого $w \in \Sigma_u$ справедливо равенство

$$(P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mw}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m) = P_{m\varphi(w)}\otimes Q^m. \quad (27)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и докажем, что $T_\varphi(p(u)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(u)) \sim_x p(v)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(v)$, т. е. что существует окрестность $w(\subset \dot{\mathbb{R}}^k)$ точки $x$ такая, что

$$\begin{aligned} &\|(T_\varphi(p(u)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(u)) - p(v)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(v))p(w)\| < \varepsilon, \\ &\|p(w)(T_\varphi(p(u)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(u)) - p(v)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(v))\| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как по теореме 3 элемент $j_{\mathbb{R}^k}(A)$ локального типа, то достаточно доказать только первое неравенство. Представим оператор $A$ в виде $A = \lambda I + \widetilde{A}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\widetilde{A} \in \mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p}$. Тогда, применяя (4), (26) и (27), получаем

$$\begin{gathered} \|(T_\varphi(p(u)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(u)) - p(v)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(v))p(w)\| \\ = \|[\{((P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)\widetilde{A}(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m) \\ -(P_{mv}\otimes Q^m)\widetilde{A}(P_{mv}\otimes Q^m))(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\|. \end{gathered}$$

Справедлива модификация леммы 1 из [6], из которой следует, что существует $m_0$ такое, что для любого $m \geqslant m_0$ выполняется неравенство

$$\|(I\otimes Q^m)\widetilde{A}(I\otimes Q^m) - \widetilde{A}\| < \varepsilon. \quad (29)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\big\|\big[\big\{\big((P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)\widetilde{A}(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m)\\
&-(P_{mv}\otimes Q^m)\widetilde{A}(P_{mv}\otimes Q^m)\big)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|\\
&\leqslant \big\|\big[\big\{(P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)(\widetilde{A}-(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0}))\\
&\times(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|\\
&+\big\|\big[\big\{(P_{mv}\otimes Q^m)(\widetilde{A}-(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0}))(P_{mv}\otimes Q^m)\\
&\times(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|+\big\|\big[\big\{\big((P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)(I\otimes Q^{m_0})\\
&\times\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0})(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m)-(P_{mv}\otimes Q^m)(I\otimes Q^{m_0})\\
&\times\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0})(P_{mv}\otimes Q^m)\big)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|.
\end{aligned}\tag{30}$$

Оценим отдельно каждое слагаемое. Из того, что $P_{mv}\otimes Q^m$, $P_{mu}\otimes Q^m$, $T_m$, $T_m^{-1}$ и $P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m$ ограничены в совокупности и из (29) следует, что существует $C>0$ такое, что

$$\begin{aligned}
&\big\|\big[\big\{(P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)(\widetilde{A}-(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0}))(P_{mu}\otimes Q^m)\\
&\times T_m(P_{mv}\otimes Q^m)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|<C\left(\sup_{t\in u}|J\varphi(t)|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{t\in v}|J\varphi^{-1}(t)|\right)^{\frac{1}{p}}\varepsilon.
\end{aligned}\tag{31}$$

Аналогичным образом получаем оценку

$$\big\|\big[\big\{(P_{mv}\otimes Q^m)(\widetilde{A}-(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0}))(P_{mv}\otimes Q^m)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|<C\varepsilon.\tag{32}$$

Для третьего слагаемого в (30) имеет место равенство

$$\begin{aligned}
&\big\|\big[\big\{((P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0})(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m)\\
&-(P_{mv}\otimes Q^m)(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0})(P_{mv}\otimes Q^m)\big)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|\\
&=\big\|\big[\big\{((P_{mv}\otimes Q^{m_0})T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(P_{mu}\otimes Q^{m_0})T_m(P_{mv}\otimes Q^{m_0})\\
&-(P_{mv}\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(P_{mv}\otimes Q^{m_0}))(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^{m_0})\big\}_{m\geqslant m_0}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|.
\end{aligned}$$

Из леммы 3, доказанной в [2, с. 68], следует, что существует окрестность $w$ ($\subset\dot{\mathbb{R}}^k$) точки $x$ такая, что

$$\begin{aligned}
&\big\|\big[\big\{((P_{mv}\otimes Q^{m_0})T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(P_{mu}\otimes Q^{m_0})T_m(P_{mv}\otimes Q^{m_0})\\
&-(P_{mv}\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(P_{mv}\otimes Q^{m_0}))(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^{m_0})\big\}_{m\geqslant m_0}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|<\varepsilon.
\end{aligned}\tag{33}$$

Таким образом, из (30)–(33) получаем справедливость неравенства (28). $\rhd$

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Из условия теоремы вытекает, что элемент $j_M(A)$ обратим в алгебре $\mathscr{A}_M$. Так как по теореме 3 элемент $j_M(A)$ локального типа, то из леммы 4 можно вывести, что $j_M(A)\sim_x\sim_x j_{K_x}(A)$ для любого $x(\in\partial M)$. Тогда на основании теоремы 5 из [2, с. 65] элемент $j_{K_x}(A)$ локально обратим в точке $x$. В силу леммы 2, учитывая инвариантность оператора $A$ относительно сдвига, получаем, что операторы $(P_{K_x} \otimes I)A(P_{K_x} \otimes I)$ обратимы для всех $x$ $(\in \partial M)$.

*Достаточность.* Пусть операторы $(P_{K_x} \otimes I)A(P_{K_x} \otimes I)$ обратимы для всех $x(\in \partial M)$. Тогда $j_{K_x}(A)$ локально обратим в точке $x$. В силу квазиэквивалентности $j_M(A) \sim_x\sim_x j_{K_x}(A)$ элемент $j_M(A)$ локально обратим в каждой точке $x(\in \partial M)$. Если $\operatorname{int} M \neq \varnothing$, то существует такая точка $x_0(\in \partial M)$, что $\operatorname{int} K_{x_0} \neq \varnothing$. Пусть $y_0 \in \operatorname{int} K_{x_0}$. Тогда $j_{K_{x_0}}(A) \sim_{y_0}\sim_{y_0} j_{\mathbb{R}^k}(A)$. Следовательно, $j_{\mathbb{R}^k}(A)$ локально обратим в точке $y_0$. Так как оператор $A$ инвариантен относительно сдвига, то элемент $j_{\mathbb{R}^k}(A)$ локально обратим в точке $x(\in \mathbb{R}^k)$. Для $x \in \operatorname{int} M$ $j_M(A) \sim_x\sim_x j_{\mathbb{R}^k}(A)$. Следовательно, элемент $j_M(A)$ локально обратим в каждой точке $x$ $(\in M)$. Тогда по теореме 3 из [2, с. 63] он обратим. Это означает, что операторы $(P_{mM} \otimes Q^m)A(P_{mM} \otimes Q^m)$ обратимы, начиная с некоторого $m_0$ и выполняется (3). $\triangleright$

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. М. Деундяку за руководство работой и множество ценных и полезных замечаний.

## Литература


1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
2. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Диф. и интегральные уравнения и их приложения. Сб. науч. трудов.—Элиста: Изд-во КалмГУ, 1983.—С. 58–73.
3. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных интегральных уравнений. I–II // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1965.—Т. 29, № 3, 4.—С. 567–586, 757–782.
4. *Симоненко И. Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих.—Ростов-н/Д.: ЦВВР, 2007.—120 с.
5. *Деундяк В. М., Мирошникова Е. И.* Об ограниченности и фредгольмовости интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа и переменными коэффициентами // Изв. вузов. Матем.—2012.—№ 7.—С. 1–15.
6. *Деундяк В. М., Лукин А. В.* Приближенный метод решения операторных уравнений свертки на группе $\mathbb{R}^n$ с компактными коэффициентами и приложения // Изв. вузов Северо-Кавказский регион.—2013.—№ 6.—С. 5–8.
7. *Лукин А. В.* Проекционный метод решения уравнений свертки с операторными коэффициентами // Тез. докл. междунар. конф. «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — IV».—Ростов-н/Д., 2014.—С. 36.
8. *Пилиди В. С.* О бисингулярном уравнении в пространстве $L_p$ // Мат. исследования.—1972.—Т. 7, № 3.—С. 167–175.
9. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений.—М.: Наука, 1969.—456 с.
10. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа.—М.: Высшая школа, 1982.—271 с.


*Статья поступила 25 мая 2015 г.*

Лукин Александр Васильевич
Южный федеральный университет,
*аспирант кафедры алгебры и дискретной математики*
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 28/2
E-mail: alexanderlukin9@gmail.com

# APPLICATION OF SIMONENKO-KOZAK'S LOCAL PRINCIPE IN THE SECTION METHOD THEORY OF SOLVING CONVOLUTION EQUATIONS WITH OPERATOR COEFFICIENTS

Lukin A. V.

In this work we generalize the Simonenko–Kozak's local structure to algebras generated by multidimensional operators with compact coefficients. Then we apply this local structure to receive the criteria of applicability the method of solving equations for multidimensional convolution operators with compact coefficients.

**Key words:** integral operator, convolution operator, local method, section method, compact coefficients.

*Владикавказский математический журнал*
*2016, Том 18, Выпуск 2, С. 67–75*

УДК **517.165**

# ОБ ОДНОМ ДИСКРЕТНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ХАРДИ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ВЕСОМ[1]

**Р. Г. Насибуллин**

Мы доказываем новые дискретные неравенства типа Харди с логарифмическими весами. Логарифмический вес находится под знаком модуля. Константа в неравенстве является точной.

**Ключевые слова:** неравенства типа Харди, логарифмический вес, точность констант.

## 1. Введение

В 1920 г. при попытке упростить неравенства Гильберта (см. [20, с. 272]), Г. Х. Харди в статье [19] получил неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p, \tag{1}$$

где $p>1$, $a_n>0$ и $A_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$.

Следующее утверждение является аналогом дискретного неравенства (1) в интегральном случае [20]:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{F^p}{x^p}\,dx\leqslant\left(\frac{p}{|p-1|}\right)^p\int\limits_0^{\infty}f^p\,dx,\quad p>1,\ p\neq 1, \tag{2}$$

где $f(x)$ — неотрицательная измеримая функция на $[0,\infty)$, а

$$F(x)=\begin{cases}\int\limits_0^x f(t)\,dt, & p>1,\\ \int\limits_x^{\infty} f(t)\,dt, & p<1.\end{cases}$$

Константа $(p/|p-1|)^p$ в общем случае не может быть заменена меньшей постоянной. Несмотря на то, что константа неулучшаема, не существует функции, на которой эта константа достигается.

Дальнейшие исследования и обобщения неравенств типа Харди можно найти в работах [2–18, 21–37]. Неравенства типа Харди широко распространены, поскольку они



[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 12-01-00636-а и № 14-01-00351-а.

находят широкое применение в математической физике, в анализе и в теории дифференциальных уравнений [1, 5, 11, 16, 24]. Например, С. Л. Соболев использовал их в теории вложения функциональных пространств. Ф. Г. Авхадиев [1] использовал неравенства Харди для оценки жесткости кручения. Результаты А. Лаптева, Т. Вейдла из [24], и результаты А. Балинского, А. Лаптева и А. В. Соболева из [11] могут быть применены при изучении отрицательности спектра двумерного оператора Шрёдингера. Другое применение этих результатов относится к проблеме существования резонансных состояний.

Отметим, что в статьях [13, 14, 17, 20, 26] авторы получили дискретные неравенства Харди. Например, в [26] было доказано следующее обобщение неравенства типа Харди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left( \frac{\sum\limits_{n=1}^{n} a_n^{\frac{1}{p}}}{n} \right)^p \leqslant \left( \frac{p}{p-1-\alpha} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} \left( n - \frac{1}{2} \right)^{\alpha} a_n, \tag{3}$$

где $a_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $p > 1$ и $-1 < \alpha < p-1$.

Ясно, что дискретные неравенства (1) и (3) при $p = 1$ и интегральное неравенство (2) при $p = 1$ теряют смысл. В интегральном неравенстве логарифмический вес помогает устранить эту особенность и позволяет получить аналог неравенства (2) при исключительном случае параметра. Примеры использования логарифмов в неравенствах типа Харди можно увидеть в [2–4, 16, 21, 25, 31, 32]. Приведем лишь результат Ю. А. Дубинского из статьи [16]:

**Теорема А.** *Пусть $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^1$ — локально интегрируемая функция такая, что интеграл*

$$\int_0^{\infty} |f(r)|^p r^{p-1} dr, \qquad p > 1,$$

*сходится. Тогда для любого $R > 0$*

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{r \left| \ln \frac{r}{R} \right|^p} \left| \int_R^r f(t) dt \right|^p dr \leqslant \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{\infty} |f(r)|^p r^{p-1} dr. \tag{4}$$

Обратим внимание, что в (4) логарифмический вес находится под знаком модуля (см. также [3, 16, 25, 31]). Будут ли верны дискретные аналоги неравенства (4)? В этой работе мы попытаемся ответить на этот вопрос. В первой части этой статьи мы приведем основные и вспомогательные утверждения. Вторая часть посвящена доказательству точности констант. Статьи Ф. Г. Авхадиева и К.-Й. Виртца [8–10] также посвящены получению и доказательству точности констант.

## 2. Основные результаты

Верна следующая

**Теорема 1.** *Пусть $p > 1$, $l \in [1, p]$, $a_i \geqslant 0$ и при целом $n \geqslant 1$ полагаем, что*

$$A_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{[R]-1} a_i - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i, & 1 \leqslant n \leqslant [R], \\ \sum\limits_{i=0}^{n} a_i - \sum\limits_{i=0}^{[R]+1} a_i, & n \geqslant [R]+1, \end{cases}$$

*где $[R]$ — целая часть от числа $R>1$. Тогда верно следующее неравенство типа Харди:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^{p-l}a_n^l}{(n+1)^{1-l}}\left|\log\frac{n}{R}\right|^{l-p}.$$

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 2.** *Пусть $p\geqslant 1$, $n\in\mathbb{N}$, и пусть $R$ — произвольное нецелое положительное число. Если $R>n+1$, то*

$$p-(p-1)\left(\frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{R}{n}\right)}+\frac{\log\frac{R}{n+1}}{\log\frac{R}{n}}\right)\geqslant 1, \tag{5}$$

*и если $R<n-1$, то*

$$p-(p-1)\left(\frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)}+\frac{\log\frac{n-1}{R}}{\log\frac{n}{R}}\right)\geqslant 1. \tag{6}$$

◁ Преобразуем неравенство (5). Имеем следующие эквивалентные переходы

$$p-1\geqslant(p-1)\left(\frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{R}{n}\right)}+\frac{\log\frac{R}{n+1}}{\log\frac{R}{n}}\right)\Longleftrightarrow 1\geqslant\frac{1+(n+1)\log\frac{R}{n+1}}{(n+1)\log\frac{R}{n}}$$

$$\Longleftrightarrow(n+1)\log\frac{R}{n}\geqslant 1+(n+1)\log\frac{R}{n+1}\Longleftrightarrow(n+1)\log\frac{n+1}{n}\geqslant 1.$$

Последнее неравенство легко устанавливается.

Теперь перепишем (6). Имеем

$$1\geqslant\frac{1}{(n+1)\log\frac{n}{R}}+\frac{\log\frac{n-1}{R}}{\log\frac{n}{R}}.$$

После элементарных вычислений можем получить, что

$$(n+1)\log\frac{n}{R}\geqslant 1+(n+1)\log\frac{n-1}{R}\Longleftrightarrow(n+1)\log\frac{n}{n-1}\geqslant 1.$$

Последнее утверждение также можно легко показать. ▷

◁ Доказательство теоремы. Пусть $1\leqslant n\leqslant[R]-2$. Определим функцию $X$ следующим образом:

$$X(n)=\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{R}{n}\right)^p}-\frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}a_n.$$

Из определения $A_n$ следует, что

$$X(n)=\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{R}{n}\right)^p}-\frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}(A_n-A_{n+1})$$

$$=\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\log\frac{R}{n}}-\frac{p}{p-1}\right)+\frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}A_{n+1}$$

$$=\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\log\frac{R}{n}}-\frac{p}{p-1}\right)+\frac{p}{p-1}\left(\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{\frac{(p-1)p}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^p}\right)^{\frac{1}{p}}\log\frac{R}{n+1}.$$

Используя неравенство Гёльдера при соответствующих значениях параметров, мы имеем

$$
\begin{gathered}
X(n)\leqslant \frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\log\frac{R}{n}}-\frac{p}{p-1}\right)\\
+\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{\frac{(p-1)p}{p-1}}\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^{-1}}+\frac{1}{p-1}\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^{p-1}}\\
=\frac{1}{p-1}\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^{p-1}}-\frac{1}{p-1}\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\left(p-\frac{p-1}{(n+1)\log\frac{R}{n}}-(p-1)\frac{\log\frac{R}{n+1}}{\log\frac{R}{n}}\right).
\end{gathered}
$$

Далее воспользовавшись леммой 1, получаем

$$
X(n)\leqslant\frac{1}{p-1}\left(\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^{p-1}}-\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\right),\quad 1\leqslant n\leqslant[R]-2.
$$

Очевидно, что $X([R])=0$. Осталось оценить $X([R]-1)$. Используя вышеприведенные рассуждения и неравенство

$$
1\leqslant[R]\log\frac{[R]}{[R]-1},
$$

несложно показать, что

$$
X([R]-1)\leqslant-\frac{1}{p-1}\frac{A_{[R]-1}^p}{\left(\log\frac{R}{[R]-1}\right)^{p-1}}.
$$

Далее оценим $\sum_{n=1}^{[R]}X(n)$. Имеем

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{[R]}X(n)=\sum_{n=1}^{[R]}\left(\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{R}{n}\right)^p}-\frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}a_n\right)\\
\leqslant\frac{1}{p-1}\sum_{n=1}^{[R]-2}\left(\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log\frac{R}{n+1}\right)^{p-1}}-\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}\right)\\
-\frac{1}{p-1}\frac{A_{[R]-1}^p}{\left(\log\frac{R}{[R]-1}\right)^{p-1}}=-\frac{1}{p-1}\frac{A_1^p}{(\log R)^{p-1}}\leqslant 0.
\end{gathered}
$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{[R]}X(n)\leqslant 0$. Таким образом, справедливо неравенство

$$
\sum_{n=1}^{[R]}\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{R}{n}\right)^p}\leqslant\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{[R]}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{R}{n}\right)^{p-1}}a_n. \tag{7}
$$

Пусть теперь $n\geqslant[R]+3$. Определим функцию $Y$ следующим образом:

$$
Y(n)=\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^p}-\frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}a_n.
$$

Используя определение $A_n$, легко показать, что

$$Y(n)=\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{R}{n}\right)^p}-\frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}(A_n-A_{n-1})$$
$$=\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\log\frac{n}{R}}-\frac{p}{p-1}\right)+\frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}A_{n-1}$$
$$=\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\log\frac{n}{R}}-\frac{p}{p-1}\right)$$
$$+\frac{p}{p-1}\left(\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{\frac{p(p-1)}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^p}\right)^{\frac{1}{p}}\log\frac{n-1}{R}.$$

В силу неравенства Гёльдера, получим

$$Y(n)\leqslant\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)}-\frac{p}{p-1}\right)$$
$$+\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{\frac{p(p-1)}{p-1}}\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^{\frac{1-p}{p-1}}}+\frac{1}{p-1}\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^{p-1}}$$
$$=\frac{1}{p-1}\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^{p-1}}-\frac{1}{p-1}\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\left(p-\frac{p-1}{(n+1)\log\frac{n}{R}}-(p-1)\frac{\log\frac{n-1}{R}}{\log\frac{n}{R}}\right).$$

В последнем утверждении мы использовали тот факт, что $p\in(1,p]$ и $\log\frac{n-1}{R}/\log\frac{n}{R}<1$.

Из леммы 1 следует оценка

$$Y(n)\leqslant\frac{1}{p-1}\left(\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^{p-1}}-\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\right),\quad n\geqslant[R]+3.$$

Теперь оценим $Y([R]+1)$ и $Y([R]+2)$. Очевидно, что $Y([R]+1)=0$. Используя неравенство

$$1\leqslant([R]+3)\log\frac{[R]+2}{[R]+1},$$

имеем

$$Y([R]+2)\leqslant-\frac{1}{p-1}\frac{A_{[R]+2}^p}{\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{p-1}}.$$

Следовательно, для фиксированного целого $N>[R]+1$, получаем

$$\sum_{n=[R]+1}^{N}Y(n)\leqslant-\frac{1}{p-1}\frac{A_{[R]+2}^p}{\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{p-1}}$$
$$+\sum_{n=[R]+3}^{N}\frac{1}{p-1}\left(\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^{p-1}}-\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\right)=-\frac{1}{p-1}\frac{A_N^p}{\left(\log\frac{N}{R}\right)^{p-1}}\leqslant 0,$$

т. е. $\sum_{n=[R]+1}^{N}Y(n)\leqslant 0$. Следовательно,

$$\sum_{n=[R]+1}^{N}\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^p}\leqslant\frac{p}{p-1}\sum_{n=[R]+1}^{N}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}a_n. \tag{8}$$

В итоге из (7) и (8), имеем

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}\leqslant\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^{p-1}}{\left|\log\frac{n}{R}\right|^{p-1}}\,a_n.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}\right)^{1-\frac{1}{l}}\left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^l\frac{A_n^{p-l}a_n^l}{(n+1)^{1-l}}\left|\log\frac{n}{R}\right|^{l-p}\right)^{\frac{1}{l}}$$
$$\leqslant\left(1-\frac{1}{l}\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{p}{p-1}\right)^l\frac{A_n^{p-l}a_n^l}{(n+1)^{1-l}}\left|\log\frac{n}{R}\right|^{l-p}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^l\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^{p-l}a_n^l}{(n+1)^{1-l}}\left|\log\frac{n}{R}\right|^{l-p}.$$

Устремляя $N\to\infty$, получаем утверждение теоремы. $\rhd$

**Следствие 3.** *Пусть $a_n\geqslant 0$ при каждом целом $n\geqslant 1$, $p>1$ и*

$$A_n=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{[R]-1}a_i-\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i, & 1\leqslant n\leqslant [R],\\ \sum\limits_{i=0}^{n}a_i-\sum\limits_{i=0}^{[R]+1}a_i, & n\geqslant [R]+1,\end{cases}$$

*где $[R]$ — целая часть любого неотрицательного $R>1$. Тогда верно следующее неравенство типа Харди*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^p}{(n+1)^{1-p}}.$$

## 3. Точность константы

Покажем, что константа в неравенстве теоремы 1 неулучшаема при $l=p$.

Пусть

$$a_n=\begin{cases}0, & 1\leqslant n\leqslant [R],\\ \frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{p}}}, & n\geqslant [R]+1,\end{cases}$$

причем $p-1-\varepsilon>0$.

Определим $Y$ как

$$Y=\sum_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{a_n^p}{(n+1)^{1-p}}.$$

Прямые вычисления дают

$$Y=\sum_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^{1+\varepsilon}}\geqslant\sum_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}$$

$$>\int_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{1}{(r+1)\left(\log\frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}dr=\int_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{d\log\frac{r+1}{R}}{\left(\log\frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon}.$$

Верно следующее соотношение

$$Y<\frac{1}{([R]+2)\left(\log\frac{[R]+1}{R}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{p}}}+\int_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{1}{(r+1)\left(\log\frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}\,dr.$$

Таким образом,

$$Y=\frac{1}{\varepsilon}\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon}+O(1).$$

Также имеем неравенство

$$A_n=\sum_{i=[R]+2}^{n}a_i=\sum_{i=[R]+2}^{n}\frac{1}{(i+1)\left(\log\frac{i}{R}\right)^{(1+\varepsilon)/p}}$$

$$>\int_{[R]+2}^{n}\frac{dr}{(r+1)\left(\log\frac{r}{R}\right)^{(1+\varepsilon)/p}}\geqslant\int_{[R]+2}^{n}\frac{dr}{(r+1)\left(\log\frac{r+1}{R}\right)^{(1+\varepsilon)/p}}$$

$$=\frac{p}{p-1-\varepsilon}\left(\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{\frac{p-1-\varepsilon}{p}}-\left(\log\frac{[R]+3}{R}\right)^{\frac{p-1-\varepsilon}{p}}\right)=\frac{p}{p-1-\varepsilon}\,H(n).$$

Следовательно,

$$\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^p}\geqslant\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\frac{H^p(n)}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^p}$$

$$=\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\left(1-\left(\frac{\log\frac{[R]+3}{R}}{\log\frac{n+1}{R}}\right)^{\frac{p-1-\varepsilon}{p}}\right)^p\frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}$$

$$\geqslant\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\frac{1-K_n}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}},$$

где $K_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Таким образом,

$$X=\sum_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^p}\geqslant\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\sum_{n=[R]+1}^{N}\frac{1-K_n}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}$$

$$>\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\int_{[R]+1}^{N}\frac{dr}{(r+1)\left(\log\frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}-\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\sum_{n=[R]+1}^{N}\frac{K_n}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}$$

$$=\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\frac{1}{\varepsilon}\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon}+O(1).$$

Ясно, что

$$\frac{X}{Y} > \frac{\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon} + \varepsilon O(1)}{\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon} + \varepsilon O(1)}.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{X}{Y} \geqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p.$$

Таким образом, при любом $\varepsilon_0 > 0$ существует $a_n = a_n(\varepsilon)$ такое, что выполнено неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p} \geqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (1-\varepsilon_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^p}{(n+1)^{1-p}}.$$

Это показывает, что константа неравенства теоремы 1 при $l = p$ является точной.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Ф. Г. Авхадиева за ценные советы и замечания.

## Литература


1. *Авхадиев Ф. Г.* Неравенства для интегральных характеристик областей.—Казань: КГУ, 2006.—140 с.
2. *Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г., Шафигуллин И. К.* Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства // Изв. вузов. Матем.—2011.—№ 9.—С. 90–94.
3. *Насибуллин Р. Г.* Обобщения неравенств типа Харди в форме Ю. А. Дубинского // Мат. заметки.—2014.—Vol. 95, № 1.—С. 109–122.
4. *Насибуллин Р. Г., Тухватуллина А. М.* Неравенства типа Харди с логарифмическими и степенными весами для специального семейства невыпуклых областей // Уфимский мат. журн.—2013.—Т. 5, № 2.—С. 43–55.
5. *Соболев Л. С.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных производных.—М.: Наука, 1989.—254 с.
6. *Ancona A.* On strong barriers and an inequality of Hardy's for domains in $R^n$ // J. London Math. Soc.—1986.—Vol. 34.—P. 274–290.
7. *Avkhadiev F. G.* Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants // Lobachevskii J. Math.—2006.—Vol. 21.—P. 3–31.
8. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains // Z. Angew. Math. Mech.—2007.—Vol. 87.—P. 632–642.
9. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Weighted Hardy inequalities with sharp constants // Lobachevskii J. Math.—2010.—Vol. 31.—P. 1–7.
10. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.—2011.—Vol. 18.—P. 723–736.
11. *Balinsky A., Laptev A., and Sobolev A. V.* Generalized Hardy inequality for the magnetic Dirichlet forms // J. of Statistical Physics.—2004.—Vol. 116, № 1–4.—P. 507–521.
12. *Brezis H., Marcus M.* Hardy's inequality revisited // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 4.—1997.—Vol. 25, № 1–2.—P. 217–237.
13. *Chen C., Luor D., and Ou Z.* Extensions of Hardy's inequality // J. Math. Anal. Appl.—2002.—Vol. 273.—P. 160–171.
14. *Čižmešija A.* On weighted discrete Hardy's inequality for negative power numbers // J. Math. Inequal. Appl.—2005.—Vol. 8, № 2.—P. 273–285.
15. *Davies E. B.* A review of Hardy's inequalities // The Maz'ya anniversary Collection. Vol. 2. Oper. Theory Adv. Appl.—1999.—Vol. 110.—P. 55–67.
16. *Dubinskii Yu. A.* A Hardy-type inequality and its applications // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.—2010.—Vol. 269.—P. 106–126.
17. *Gao P.* Hardy type inequalities via auxiliary sequences // J. Math. Anal. Appl.—2008.—Vol. 343.—P. 48–57.

18. *Gord Sinnamon.* Weighted inequalities for positive operators // J. Math. Inequal. Appl.—2005.—Vol. 8, № 3.—P. 419–440.
19. *Hardy G. H.* Note on a theorem of Hilbert // Math. Zeitschr.—1920.—Vol. 6.—P. 314–317.
20. *Hardy G. H., Littlewood J. E., and Polya G.* Inequalities.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.
21. *Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., and Laptev A.* A geometrical version of Hardy's inequality // J. Funct. Anal.—2002.—Vol. 189, № 2.—P. 539–548.
22. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted Inequalities of Hardy's type.—World Sci. Publ. Co Inc., 2003.—376 p.
23. *Landau E.* A note on a theorem concerning series of positive terms: extract from a letter of Prof. E. Landau to Prof. J. Schur // J. London Math. Soc.—1926.—Vol. 1.—P. 38–39.
24. *Laptev A., Weidl T.* Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms // Operator Theory: Advances and Appl.—1999.—Vol. 108.—P. 299–305.
25. *Ling-Yau Chan.* Some extensions of Hardy's inequality // Canad. Math. Bull.—1979.—Vol. 22, № 2.—P. 165–169.
26. *Liu J., Xuande Zhang, and Bo Jiang.* Some generalizations and improvements of discrete Hardy's inequality // Comp. Math. Appl.—2012.—Vol. 63.—P. 601–607.
27. *Miclo L.* An example of application of discrete Hardy's inequalities // Markov Processes Relat. Fields.—1999.—Vol. 5, № 3.—P. 319–330.
28. *Miklyukov V. M., Vuorinen M. K.* Hardy's inequalities for $W_0^{1,p}$ — functions on Riemannian manyfolds // Proc. Amer. Math. Soc.—1999.—Vol. 127, № 9.—P. 2745–2754.
29. *Muckenhoupt B.* Hardy's inequality with weights // Stud. Math.—1972.—Vol. 44, № 1.—P. 31–38.
30. *Okpoti Ch. A., Persson L.-E., and Wedestig A.* Weight characterizations for the discrete Hardy inequality with kernel // J. Math. Inequal. Appl.—2006.—Vol. 2006.—P. 1–14.
31. *Pachpatte B. G.* A note on certain inequalities related to Hardy's inequality // Indian J. Pure Appl. Math.—1992.—Vol. 23, № 11.—P. 773–776.
32. *Pečarić J. E., Love E. R.* Still more generalization of Hardy's inequality // J. Austral. Math. Soc. Ser. A.—1995.—Vol. 59.—P. 214–224.
33. *Qiang Chen, Bicheng Yang.* Half-discrete Hardy-Hilbert's inequality with two interval variables // J. Math. Inequal. Appl.—2013.—Vol. 485.
34. *Stepanov V. D.* The weighted Hardy's inequality for nonincreasing functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1993.—Vol. 338, № 1.—P. 173–186.
35. *Talenti G.* Osservazione sopra una classe di disuguaglianze // Rend. Semin. Mat. Efis. Milano.—1969.—Vol. 39.—P. 171–185.
36. *Tomaselli G.* A class of inequalities // Boll. Unione Mat. Ital. Ser.—1969.—Vol. 4, № 6.—P. 622–631.
37. *Wannebo A.* Hardy Inequalities // Proc. Amer. Math. Soc.—1990.—Vol. 109, № 1.—P. 85–95.

*Статья поступила 28 августа 2014 г.*

Насибуллин Рамиль Гайсаевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
*старший преподаватель каф. теории функций и приближений*
*Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского*
РОССИЯ, 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18
E-mail: `NasibullinRamil@gmail.com`

## ON A DISCRETE HARDY TYPE INEQUALITY WITH LOGARITHMIC WEIGHT

Nasibullin R. G.

We prove a new discrete Hardy type inequality with logarithmic weight. Logarithmic factors are located under the module sign. The constant in this inequality is sharp.

**Key words:** Hardy type inequality, logarithmic weight, sharpness of constants.

*Владикавказский математический журнал*
*2016, Том 18, Выпуск 2, С. 76–85*

*УДК* **517.95**

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

**Т. К. Юлдашев**

Рассмотрены вопросы об однозначной разрешимости обратной задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма в частных производных третьего порядка с вырожденным ядром. Метод вырожденного ядра, разработанный для интегрального уравнения Фредгольма второго рода, модифицирован для случая рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма в частных производных третьего порядка. С помощью обозначения интегро-дифференциальное уравнение типа Фредгольма сведено к системе алгебраических уравнений. Используя дополнительное условие относительно основной неизвестной функции, получим нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, и относительно функции восстановления получим интегральное уравнение типа Вольтерра первого рода. Применим принцип сжимающих отображений, который дает и фактический метод нахождения решений — метод последовательных приближений. Далее определяется функция восстановления.

**Ключевые слова:** обратная задача, интегро-дифференциальное уравнение, уравнение типа Фредгольма, вырожденное ядро, система алгебраических уравнений, однозначная разрешимость.

## 1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению прямых и обратных задач для уравнений неклассической математической физики. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1]. Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы. Часто изучение задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах сводится к рассмотрению дифференциальных уравнений третьего порядка [2]. К дифференциальным уравнениям в частных производных третьего порядка также сводятся задачи изучения распространения волн в слабодиспергирующих средах, в холодной плазме и магнитной гидродинамике и т. д. Изучению уравнений в частных производных третьего порядка посвящено большое количество работ (см., например, [2–8]).

Теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной теории дифференциальных уравнений. Интенсивное исследование обратных задач обусловлено и необходимостью разработки математических методов решения прикладных проблем. Обратную задачу назовем линейной, если функция восстановления входит в данное уравнение линейно. Линейные обратные задачи рассматривались, в частности, в [9–21].

В настоящей работе предлагается методика изучения обратной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма в частных производных третьего порядка с вырожденным ядром.

Итак, рассматривается в области $\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l$ интегро-дифференциальное уравнение типа Фредгольма третьего порядка с вырожденным ядром

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \lambda \int\limits_0^T K(t,s)\frac{\partial u(s,x)}{\partial s}\,ds\right)$$
$$= p(t)\,\beta(x) + f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(s,y)\,u(s,y)\,dy\,ds\right) \quad (1)$$

с условиями

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad u_t(0,x) = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega_l, \quad (2)$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in \Omega_T, \quad (3)$$

$$u(t_0,x) = \eta(x), \quad 0 < t_0 < T, \quad x \in \Omega_l, \quad (4)$$

где $p(t) \in C(\Omega_T)$, $f(x,\gamma) \in C(\Omega_l \times R)$, $\varphi_k(x) \in C^1(\Omega_l)$, $k = 1,2$, $\psi(t) \in C^2(\Omega_T)$, $\psi(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, $K(t,s) = \sum_{i=1}^n a_i(t)\,b_i(s)$, $0 < a_i(t), b_i(s) \in C(\Omega_T)$, $\eta(x) \in C^1(\Omega_l)$, $\beta(x) \in C(\Omega_l)$ — функция восстановления, $\Omega_T \equiv [0,T]$, $\Omega_l \equiv [0,l]$, $\lambda$ — спектральный параметр, $0 < \int_0^T \int_0^l |H(t,x)|\,dx\,dt < \infty$.

Под решением обратной задачи (1)–(4) понимаем пару функций $\{u(t,x) \in C^{2,1}(\Omega), \beta(x) \in C(\Omega_l)\}$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2)–(4).

## 2. Начальная задача (1)–(3)

В уравнении (1) сделаем замену $u_{tx}(t,x) = \vartheta(t,x)$. Тогда оно приобретает вид

$$\frac{\partial \vartheta(t,x)}{\partial t} + \lambda \int\limits_0^T K(t,s)\,\vartheta(s,x)\,ds = p(t)\,\beta(x) + f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(s,y)\,u(s,y)\,dy\,ds\right). \quad (5)$$

С помощью обозначения

$$c_i(x) = \int\limits_0^T b_i(s)\,\vartheta(s,x)\,ds \quad (6)$$

уравнение (1) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \vartheta(t,x)}{\partial t} = -\lambda \sum_{i=1}^n a_i(t)\,c_i(x) + p(t)\,\beta(x) + f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(s,y)\,u(s,y)\,dy\,ds\right).$$

В силу постановки задачи правая часть этого выражения суть непрерывные функции своих аргументов. Путем интегрирования по $t$ из последнего равенства получаем

$$\vartheta(t,x) = D_1(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_0^t a_i(s)\, ds \cdot c_i(x) + q(t)\,\beta(x) + t\, f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(s,y)\, u(s,y)\, dy\, ds\right), \quad (7)$$

где $D_1(x) \in C^1(\Omega_l)$ — произвольная функция, которая подлежит определению, $D_1(0)=0$, $q(t) = \int_0^t p(s)ds$.

Подставляя (7) в (6), имеем

$$c_i(x) = \int_0^T b_i(s) \Bigg[ D_1(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_0^s a_i(\theta)\, d\theta \cdot c_i(x) + q(s)\,\beta(x) + s\, f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta,y)\, u(\theta,y)\, dy\, d\theta\right)\Bigg] ds. \quad (8)$$

Примем обозначение

$$B_i(x) = \int_0^T b_i(s) \left[ D_1(x) + q(s)\,\beta(x) + s\, f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta,y)\, u(\theta,y)\, dy\, d\theta\right)\right] ds. \quad (9)$$

Пусть

$$A_{ij} = \int_0^T b_i(s) \int_0^s a_i(\theta)\, d\theta\, ds > 0. \quad (10)$$

Тогда выражение в (8) запишем в виде следующей системы алгебраических уравнений (САУ):

$$c_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, c_j(x) = B_i(x), \quad i = 1, \ldots, n. \quad (11)$$

САУ (11) однозначно разрешима при любых конечных $B_i(x)$, если выполняется следующее условие:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \ldots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & 1+\lambda A_{22} & \ldots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \lambda A_{n2} & \ldots & 1+\lambda A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12)$$

Определитель $\Delta(\lambda)$ в (12) есть многочлен относительно $\lambda$ степени не выше $n$. Уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет не более $n$ различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Другие значения $\lambda$ являются регулярными, при которых условие (12) выполняется. Для регулярных значений $\lambda$

система (11) имеет единственное решение при любой конечной правой части. В настоящей работе для таких регулярных значений параметра $\lambda$ устанавливается однозначная разрешимость поставленной обратной задачи (1)–(4).

Сначала решения САУ (11) записываем в виде

$$c_i(x) = \frac{\Delta_i(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

где

$$\Delta_i(\lambda, x) = \begin{vmatrix} 1+\lambda A_{11} & \ldots & \lambda A_{1(i-1)} & B_1(x) & \lambda A_{1(i+1)} & \ldots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \ldots & \lambda A_{2(i-1)} & B_2(x) & \lambda A_{2(i+1)} & \ldots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \ldots & \lambda A_{n(i-1)} & B_n(x) & \lambda A_{n(i+1)} & \ldots & 1+\lambda A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_i(\lambda, x)$ находятся функции $B_i(x)$. В свою очередь, в составе функций $B_i(x)$ находятся пока неизвестные функции $D_1(x)$, $u(t, x)$ и $\beta(x)$. В самом деле, эти неизвестные функции находились в правой части САУ (11). Чтобы вывести их вне знака определителей, выражение в (9) запишем в следующем виде:

$$B_i(x) = D_1(x)\, B_{1i} + f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta, y)\, u(\theta, y)\, dy\, d\theta\right) B_{2i} + \beta(x)\, B_{3i},$$

где

$$B_{1i} = \int\limits_0^T b_i(s)\, ds, \quad B_{2i} = \int\limits_0^T s\, b_i(s)\, ds, \quad B_{3i} = \int\limits_0^T q(s)\, b_i(s)\, ds.$$

В этом случае согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_i(\lambda, x) = D_1(x)\, \Delta_{1i}(\lambda) + f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta, y)\, u(\theta, y)\, dy\, d\theta\right) \Delta_{2i}(\lambda) + \beta(x)\, \Delta_{3i}(\lambda),$$

где

$$\Delta_{ki}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda A_{11} & \ldots & \lambda A_{1(i-1)} & B_{k1} & \lambda A_{1(i+1)} & \ldots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \ldots & \lambda A_{2(i-1)} & B_{k2} & \lambda A_{2(i+1)} & \ldots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \ldots & \lambda A_{n(i-1)} & B_{kn} & \lambda A_{n(i+1)} & \ldots & 1+\lambda A_{nn} \end{vmatrix}, \quad k = 1, \ldots, 3.$$

Тогда формула (13) записывается в виде

$$c_i(x) = D_1(x) \frac{\Delta_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta, y)\, u(\theta, y)\, dy\, d\theta\right) \frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \beta(x) \frac{\Delta_{3i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}. \tag{14}$$

Итак, мы решили САУ (11):

$$c_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_{ij}\, c_j(x) = D_1(x)\, B_{1i}$$
$$+ f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta, y)\, u(\theta, y)\, dy\, d\theta\right) B_{2i} + \beta(x)\, B_{3i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и решения представили в виде функций (14).

Подстановка (14) в (7) дает следующее уравнение:

$$u_{tx}(t,x) = D_1(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_0^t a_i(s)\,ds \Bigg\{ D_1(x)\,\frac{\Delta_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta,y)\,u(\theta,y)\,dy\,d\theta\right) \frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \beta(x)\,\frac{\Delta_{3i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \Bigg\} + q(t)\,\beta(x) + t\,f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta,y)\,u(\theta,y)\,dy\,d\theta\right). \tag{15}$$

Путем интегрирования по $x$ и по $t$ из (15) получаем

$$u(t,x) = D_2(x) + \int_0^t E(s)\,ds + t\int_0^x D_1(y)\,dy - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)\,a_i(s)\,ds \times \int_0^x \left\{ D_1(y)\,\frac{\Delta_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + f\left(y, \int_0^T \int_0^l H(\theta,z)\,u(\theta,z)\,dz\,d\theta\right)\frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \beta(y)\frac{\Delta_{3i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right\} dy + \overline{q}(t)\int_0^x \beta(y)\,dy + \frac{t^2}{2}\int_0^x f\left(y, \int_0^T \int_0^l H(\theta,z)\,u(\theta,z)\,dz\,d\theta\right) dy, \tag{16}$$

где $D_2(x)$, $E(t)$ — произвольные непрерывные функции, которые будут определяться из условий (2) и (3), $\overline{q}(t) = \int_0^t q(s)\,ds$.

Из (16), используя условия (2) и (3), получаем следующие равенства:

$$\varphi_1(x) = D_2(x), \quad \psi(t) = \int_0^t E(s)\,ds, \quad \varphi_2(x) = \int_0^x D_1(y)\,dy.$$

Тогда интегральное уравнение (16) запишется в виде

$$u(t,x) = Q(t,x) + \mu(t)\int_0^x \beta(y)\,dy + \nu(t)\int_0^x f\left(y, \int_0^T \int_0^l H(s,z)\,u(s,z)\,dz\,ds\right) dy, \tag{17}$$

где

$$Q(t,x) = \varphi_1(x) + \psi(t) + \varphi_2(x)\left[ t - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)\,a_i(s)\,ds\,\frac{\Delta_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right],$$

$$\mu(t) = \overline{q}(t) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)\,a_i(s)\,ds\,\frac{\Delta_{3i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

$$\nu(t) = \frac{t^2}{2} - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_0^t (t-s)\,a_i(s)\,ds\,\frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

Итак, исходную задачу (1)–(3) свели к интегральному уравнению (17). Уравнение (17) относительно основной неизвестной функции $u(t,x)$ является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода, а относительно функции восстановления $\beta(x)$ является интегральным уравнением типа Вольтерра первого рода.

## 3. Теорема об однозначной разрешимости обратной задачи

Учет дополнительного условия (4) в (17) дает

$$\mu(t_0)\int\limits_0^x \beta(y)\,dy + \nu(t_0)\int\limits_0^x f\left(y, \int\limits_0^T\int\limits_0^l H(s,z)\,u(s,z)\,dz\,ds\right)dy = g(x), \tag{18}$$

где $g(x) = \eta(x) - Q(t_0,x)$.

Путем дифференцирования из (18) для функции восстановления $\beta(x)$ получаем следующее соотношение:

$$\beta(x) = \overline{g}(x) - \overline{F}(t_0)\,f\left(x, \int\limits_0^T\int\limits_0^l H(s,z)\,u(s,z)\,dz\,ds\right), \tag{19}$$

где $\overline{g}(x) = \frac{g'(x)}{\mu(t_0)}$, $\overline{F}(t_0) = \frac{\nu(t_0)}{\mu(t_0)}$.

Подставляя (19) в (17), относительно основной неизвестной функции $u(t,x)$ окончательно получим следующее интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода:

$$u(t,x) = \Re u(t,x) \equiv h(t,x) + \Phi(t)\int\limits_0^x f\left(y, \int\limits_0^T\int\limits_0^l H(s,z)\,u(s,z)\,dz\,ds\right)dy, \tag{20}$$

где

$$h(t,x) = Q(t,x) + \mu(t)\int\limits_0^x \overline{g}(y)\,dy, \quad \Phi(t) = \nu(t) - \overline{F}(t_0)\,\mu(t).$$

Для произвольной функции $l(t,x) \in C(\Omega)$ рассматривается следующая норма:

$$\|l(t,x\|_C = \max\left\{\left|l(t,x)\right| : (t,x)\in\Omega\right\}.$$

**Теорема.** *Пусть*

1) *выполняются условия* $(10), (12)$, $\mu(t_0)\neq 0$*;*
2) $\Delta = \max\{|h(t,x)| : (t,x)\in\Omega\} < \infty$*;*
3) $M = \max\left\{\left|\int_0^x \Phi(t)\,f\,(y,\gamma)\,dy\right| : (t,x)\in\Omega\right\} < \infty$*;*
4) $|f(x,\gamma_1) - f(x,\gamma_2)| \leqslant L(x)|\gamma_1-\gamma_2|$, $\delta_1 = |\gamma| \leqslant \int_0^T\int_0^l |H(t,x)|\,dx\,dt < \infty$*;*
5) $\delta_2 = \max\left\{\int_0^x |\Phi(t)|\,L(y)\,dy : (t,x)\in\Omega\right\} < \infty$, $\rho = \delta_1\delta_2 < 1$.

*Тогда существует единственная пара решений* $\left\{u(t,x)\in C^{2,1}(\Omega),\ \beta(x)\in C(\Omega_l)\right\}$ *обратной задачи* (1)–(4).

$\lhd$ Рассмотрим следующий итерационный процесс для уравнения (20):

$$u_0(t,x) = 0, \quad u_{k+1}(t,x) = \Re u_k(t,x), \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{21}$$

В силу условий теоремы из (21) получаем следующие оценки:

$$\|u_1(t,x)-u_0(t,x)\|_C \leqslant \max\left\{\left|h(t,x)+\Phi(t)\int\limits_0^x f(y,0)\,dy\right| :\ (t,x)\in\Omega\right\} \leqslant \Delta+M, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\|u_{k+1}(t,x)-u_k(t,x)\|_C \leqslant \max\Bigg\{&\big|\Phi(t)\big| \\ &\times\int\limits_0^x L(y)\int\limits_0^T\int\limits_0^l |H(s,z)|\,\|u_k(s,z)-u_{k-1}(s,z)\|_C\,dz\,ds\,dy :\ (t,x)\in\Omega\Bigg\} \\ &\leqslant \delta_1\max\left\{\big|\Phi(t)\big|\int\limits_0^x L(y)\,\|u_k(t,y)-u_{k-1}(t,y)\|_C\,dy :\ (t,x)\in\Omega\right\} \\ &\leqslant \rho\,\|u_k(t,x)-u_{k-1}(t,x)\|_C. \end{aligned} \tag{23}$$

В силу последнего условия теоремы из оценки (23) следует, что оператор в правой части (20) является сжимающим. Из оценок (22) и (23) заключаем, что для оператора (20) существует единственная неподвижная точка (см., например, [22, с. 389–401]). Следовательно, интегральное уравнение (20) имеет единственное решение $u(t,x)\in C(\Omega)$. Здесь предполагается, что неподвижная точка оператора автоматически попадает в $C^{2,1}(\Omega)$ благодаря соотношению

$$u(t,x)=\Re u(t,x)\in C^{2,1}(\Omega).$$

Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости

$$\|u_{k+1}(t,x)-u(t,x)\|_C \leqslant \frac{\rho^{k+1}}{1-\rho}\,(\Delta+M).$$

Подставляя решение уравнения (20) в формулу (19), однозначно восстановим вторую неизвестную функцию $\beta(x)$. $\rhd$

Отметим, что условие $\mu(t_0)\neq 0$ в теореме эквивалентно следующему условию:

$$p(t)\neq\lambda\sum_{i=1}^n a_i(t)\,\frac{\Delta_{3i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

## 4. Пример решения обратной задачи

Рассмотрим простейший пример. В области $\Omega\equiv\Omega_1\times\Omega_1$ решаем интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным ядром

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+\int\limits_0^1 t\cdot s\,\frac{\partial u(s,x)}{\partial s}\,ds\right)=\left(1+\frac{t}{3}\right)\cdot\beta(x) \tag{24}$$

при условиях

$$u(0,x)=3x,\quad u_t(0,x)=1,\quad u(t,0)=t, \tag{25}$$

$$u\left(\frac12,x\right)=\frac12x^2+3x+\frac12, \tag{26}$$

где $\beta(x)\in C\big(\Omega_1\big)$ — функция восстановления, $\Omega_1\equiv[0;1]$.

В уравнении (24) сделаем замену $u_{tx}(t,x) = \vartheta(t,x)$. Тогда оно приобретает вид

$$\frac{\partial \vartheta(t,x)}{\partial t} + \int\limits_0^1 t\, s\, \vartheta(s,x)\, ds = \left(1 + \frac{t}{3}\right) \beta(x). \tag{27}$$

С помощью обозначения

$$c(x) = \int\limits_0^1 s\, \vartheta(s,x)\, ds \tag{28}$$

уравнение (24) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \vartheta(t,x)}{\partial t} + t\, c(x) = \left(1 + \frac{t}{3}\right) \beta(x).$$

Путем интегрирования по $t$ из последнего равенства получаем

$$\vartheta(t,x) = D_1(x) - \frac{t^2}{2}\, c(x) + \left(t + \frac{t^2}{6}\right)\beta(x), \tag{29}$$

где $D_1(x)$ — произвольная функция, которая подлежит определению.

Подставляя (29) в (28), имеем

$$c(x) = \frac{4}{9} D_1(x) + \frac{1}{3}\, \beta(x). \tag{30}$$

Теперь, подставляя выражение (30) в (29), имеем следующее соотношение:

$$u_{tx}(t,x) = \frac{9 - 2t^2}{9} D_1(x) + t\, \beta(x). \tag{31}$$

Путем интегрирования по $x$ и по $t$ из (31) получаем

$$u(t,x) = D_2(x) + \int\limits_0^t E(s)\, ds + \frac{27t - 2t^3}{27} \int\limits_0^x D_1(y)\, dy + \frac{t^2}{2} \int\limits_0^x \beta(y)\, dy, \tag{32}$$

где $D_2(x)$, $E(t)$ — произвольные функции, которые подлежат определению.

Используя условия (25), из (32) приходим к следующему соотношению:

$$u(t,x) = 3x + t + \frac{t^2}{2} \int\limits_0^x \beta(y)\, dy. \tag{33}$$

Учет дополнительного условия (26) в (33) дает $\int_0^x \beta(y)\, dy = 4x^2$ или $\beta(x) = 8x$. Подставляя это в (33), получим $u(t,x) = 2t^2x^2 + 3x + t$. Подстановка полученных выше результатов $\beta(x) = 8x$ и $u(t,x) = 2t^2x^2 + 3x + t$ в первоначальное интегро-дифференциальное уравнение (24) дает тождество $8x\left(1 + \frac{t}{3}\right) \equiv 8x\left(1 + \frac{t}{3}\right)$. Кроме того, функция $u(t,x) = 2t^2x^2 + 3x + t$ удовлетворяет поставленным условиям (25) и (26). Следовательно, решением обратной задачи (24)–(26) в области $\Omega \equiv \Omega_1 \times \Omega_1$ является пара функций $\left\{2t^2x^2 + 3x + t; 8x\right\}$.

## Литература


1. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек.—М.: Наука, 2006.—248 с.
2. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 4.—С. 689–699.
3. *Андреев А. А., Яковлева Ю. О.* Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками // Вестн. Самарского гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2013.—Т. 30, № 1.—С. 31–36.
4. *Бештоков М. Х.* Априорные оценки решения нелокальных краевых задач для псевдопараболического уравнения // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, вып. 3.—С. 19–36.
5. *Зикиров О. С.* О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка // Изв. вузов. Математика.—2014.—№ 7.—С. 63–71.
6. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Диф. уравнения.—2011.—Т. 47, № 5.—С. 705–713.
7. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. Самарского гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2012.—Т. 29, № 4.—С. 17–25.
8. *Сопуев А., Аркабаев Н. К.* Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика. Механика.—2013.—Т. 21, № 1.—С. 16–23.
9. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач.—М.: МГУ, 1994.—285 с.
10. *Денисов А. М.* Обратная задача для квазилинейной системы уравнений в частных производных с нелокальным краевым условием // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2014.—Т. 54, № 10.—С. 1571–1579.
11. *Кононенко Л. И.* Прямая и обратная задачи для сингулярной системы с медленными и быстрыми переменными в химической кинетике // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, вып. 1.—С. 39–46.
12. *Костин А. Б.* Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Мат. сб.—2013.—Т. 204, № 10.—С. 3–46.
13. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Линейные операторы и некорректные задачи.—М.: Наука, 1991.—331 с.
14. *Мегралиев Я. Т.* Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода // Тр. ИММ УрО РАН.—2014.—Т. 19, № 1.—С. 226–235.
15. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Мат. сб.—1992.—Т. 183, № 4.—С. 49–88.
16. *Прилепко А. И., Ткаченко Д. С.* Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2003.—Т. 43, № 4.—С. 562–570.
17. *Романов В. Г.* Обратные задачи для математической физики.—М.: Наука, 1984.—264 с.
18. *Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.* Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 3.—С. 633–647.
19. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестн. Самарского гос. ун-та. Сер. Естеств. науки.—2013.—№ 1.—С. 58–66.
20. *Юлдашев Т. К.* Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2014.—№ 1.—С. 153–163.
21. *Юлдашев Т. К.* Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2015.—№ 2.—С. 180–189.
22. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.—495 с.


*Статья поступила 19 мая 2015 г.*

Юлдашев Турсун Камалдинович
Сибирский государственный аэрокосмический
университет им. М. Ф. Решетнева,
*доцент кафедры высшей математики*
РОССИЯ, 660014, Красноярск, пр. им. газ. «Красноярский рабочий»
E-mail: `tursunbay@rambler.ru`

# INVERSE PROBLEM FOR A THIRD ORDER FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH DEGENERATE KERNEL

Yuldashev T. K.

It is considered the questions of one value solvability of the inverse problem for a third order nonlinear partial Fredholm type integro-differential equation with degenerate kernel. The method of degenerate kernel for second kind Fredholm integral equations is modified for the case of third order partial Fredholm type integro-differential equation. The Fredholm type integro-differential equation is reduced to a system of algebraic equations. By the aid of additional condition it is obtained a second kind nonlinear Volterra type integral equation with respect to main unknown function and a first kind linear Volterra type integral equation with respect to restore function. It is used the method of compressing maps, which gave us the real method of finding the solutions — the method of successive approximations. Further is defined the restore function.

**Key words:** inverse problem, integro-differential equation, Fredholm type equation, degenerate kernel, system of algebraic equations, one valued solvability.

## Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи в порядке цитирования или по алфавиту. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книгЁ— автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов ($\approx$ 12 стр. формата А4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.



Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 53-84-62;
E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

**ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ**

**Том 18**

**Выпуск 2**

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-50223 от 15 июня 2012 г.

Подписано в печать 15.06.2016. Дата выхода в свет 25.06.2016.
Формат бумаги $60{\times}84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 9,88. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель и издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.