Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 2, С. 136–143

УДК 517.926
DOI 10.46698/z2651-3365-0189-p

СПЕКТРЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ И ВРАЩАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. Х. Сташ[1]

[1] Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета,
Россия, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 208

E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Аннотация. Известно, что все слабые показатели блуждаемости, как и нижний сильный показатель блуждаемости, на множестве решений линейных однородных треугольных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными на положительной полуоси коэффициентами равны нулю. При этом верхний сильный показатель блуждаемости некоторого решения из указанного множества может принимать положительное значение. В данной работе полностью изучены показатели ориентированной врашаемости и показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней решений линейных однородных треугольных дифференциальных систем с непрерывными (необязательно ограниченными) на положительной полуоси коэффициентами. Установлено, что у любого решения треугольной системы дифференциальных уравнений его показатели колеблемости и вращаемости являются точными, абсолютными и совпадают между собой. Также показано, что спектры этих показателей (т. е. множества значений на ненулевых решениях) треугольных систем состоят из одного нулевого значения. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что показатели ориентированной вращаемости и показатели колеблемости, несмотря на их простые и естественные определения, не являются в теории колебаний аналогами показателя Перрона. Кроме того, установлено совпадение спектров каждого (сильного или слабого, верхнего или нижнего) показателя ориентированной вращаемости и показателя колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней взаимно-сопряженных линейных однородных систем дифференциальных уравнений с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, треугольная дифференциальная система, сопряженная дифференциальная система, показатель ориентированной врашаемости, показатель колеблемости, показатель блуждаемости.

AMS Subject Classification: 34C10, 34D05, 34D08.

Образец цитирования: *Сташ А. Х.* Спектры показателей колеблемости и вращаемости решений однородных дифференциальных систем // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 2.—С. 136–143. DOI: 10.46698/z2651-3365-0189-p.

1. Введение

Напомним, что Ляпуновские характеристики колеблемости, блуждаемости и вращаемости решений дифференциальных уравнений и систем впервые были введены И. Н. Сергеевым в работах [1–7]. Исследования спектров показателей колеблемости и вращаемости автономных систем были начаты в работах [8–11], а полностью завершены в [12, 13].

Настоящая работа посвящена изучению спектров показателей колеблемости и ориентированной вращаемости линейных однородных треугольных дифференциальных систем, а также взаимно-сопряженных двумерных дифференциальных систем.

В докладе [14] была анонсирована теорема о нулевом спектре показателей колеблемости нулей решений линейных однородных треугольных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными коэффициентами. Через год этот результат был независимо получен В. В. Миценко [15] для более узкого класса двумерных треугольных систем — для двумерных систем с ограниченными одним и тем же числом коэффициентами. А спектры показателей вращаемости треугольных систем вовсе не были исследованы. В связи с этим возникают следующие задачи:

1) найти спектры показателей колеблемости знаков (строгих и нестрогих), нулей, корней и гиперкорней линейных однородных треугольных дифференциальных систем с непрерывными (не обязательно ограниченными) коэффициентами;

2) найти спектры показателей ориентированной вращаемости линейных однородных треугольных дифференциальных систем с непрерывными коэффициентами.

Известно, что спектры показателей Ляпунова взаимно-сопряженных правильных дифференциальных систем симметричны относительно нуля (см., например, [16]). Учитывая неотрицательность показателей колеблемости и ориентированной вращаемости на множестве всех решений дифференциальных систем, было бы любопытно ответить на следующие вопросы.

1. Можно ли по спектру какого-либо показателя колеблемости некоторой линейной однородной дифференциальной системы восстановить спектр этого показателя колеблемости сопряженной системы?

2. Можно ли по спектру какого-либо показателя вращаемости некоторой линейной однородной дифференциальной системы восстановить спектр этого показателя вращаемости сопряженной системы?

2. Показатели колеблемости решений дифференциальных систем

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathscr{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с *непрерывными* оператор-функциями $A : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Подмножество множества $\mathscr{M}^n$, состоящее из *треугольных систем*, обозначим через $\mathscr{T}^n$. Пространство решений системы $A \in \mathscr{M}^n$ обозначим через $\mathscr{S}(A)$, а подмножество всех ненулевых решений — через $\mathscr{S}_*(A)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathscr{S}^n_* = \bigcup_{A \in \mathscr{M}^n} \mathscr{S}_*(A).$$

Определение 1 [2]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [3, 4]. Для момента $t > 0$ и функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y,t)$ — число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0,t]$;
$\nu^\sim(y,t)$ — число точек ее *нестрогой смены знака* на промежутке $(0,t]$;
$\nu^0(y,t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;
$\nu^+(y,t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$;

$\nu^*(y,t)$ — число ее *гиперкратных корней* на промежутке $(0,t]$: при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз.

Далее, для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $x \in \mathscr{S}^n_*$ введем обозначение $\nu^\alpha(x,m,t) \equiv \nu^\alpha(\langle x,m\rangle,t)$, где $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$, $\langle x(\cdot),m\rangle$ — скалярное произведение.

Определение 3 [3–6]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x \in \mathscr{S}^n_*$ при $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \left(\check{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right),$$
$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \left(\check{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \underline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right).$$

3. Показатели ориентированной вращаемости

Определение 4 [5]. Для функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^2)$ и конечного момента времени $t > 0$ определим функционал $\Theta(x,t)$, как такую непрерывную ветвь ориентированного угла между векторами $x(t)$ и $x(0)$, что $\Theta(x,0) = 0$. Если найдется момент времени $\tau \in [0,t]$, для которого $x(\tau) = 0$, то по определению (в ущерб непрерывности) считаем $\Theta(x,t) = +\infty$.

Определение 5 [5–7]. Нижние (верхние) сильный и слабый показатели ориентированной вращаемости вектор-функции $x \in \mathscr{S}^n_*$ зададим соответственно с помощью формул

$$\check{\theta}^\bullet(x) = \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\big|\Theta(Lx,t)\big| \ \left(\hat{\theta}^\bullet(x) = \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\big|\Theta(Lx,t)\big|\right),$$
$$\check{\theta}^\circ(x) = \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\big|\Theta(Lx,t)\big| \ \left(\hat{\theta}^\circ(x) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\big|\Theta(Lx,t)\big|\right),$$

где $\mathrm{End}_2\,\mathbb{R}^n$ подмножество множества $\mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$, состоящее из линейных операторов ранга 2.

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какого-либо из перечисленных в определениях 3 и 5 показателей $\hat{\varkappa}(x) = \check{\varkappa}(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является *точным*, а в случае совпадения значений слабого и сильного показателей $\varkappa^\circ(x) = \varkappa^\bullet(x)$ будем говорить, что показатель $\varkappa(x)$ является *абсолютным.*

Замечание 1. Заметим, что показатели вращаемости при $n = 1$ теряют смысл. Поэтому в дальнейшем по умолчанию будем считать, что $n \geqslant 2$.

4. Спектры треугольных систем

В этом разделе полностью изучены спектры показателей колеблемости и вращаемости треугольных систем. Оказалось, что они состоят только из одного нулевого значения.

Теорема 1. *Для любого решения $x \in \mathscr{S}_*(A)$ любой системы $A \in \mathscr{T}^n$ при каждом $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ имеет место следующая цепочка равенств:*

$$\check{\theta}^\bullet(x) = \hat{\theta}^\bullet(x) = \check{\theta}^\circ(x) = \hat{\theta}^\circ(x) = \hat{\nu}^\alpha_\bullet(x) = \check{\nu}^\alpha_\bullet(x) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(x) = \check{\nu}^\alpha_\circ(x) = 0.$$

Следствие. *Спектры всех показателей ориентированной вращаемости и показателей колеблемости треугольных дифференциальных систем состоят из одного нулевого значения.*

$\lhd$ 1. Не уменьшая общности, можно ограничиться рассмотрением системы вида

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn-1}(t) & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Последовательно интегрируя уравнения этой системы, получим фундаментальную систему

$$X(t)=\bigl(x^1(t),\ldots,x^n(t)\bigr)=\bigl[x_{jk}(t)\bigr]$$

вида

$$x_{jk}(t)=0,\quad j<k;$$
$$x_{kk}(t)=A_k(t);$$
$$x_{jk}(t)=A_j(t)\int\limits_0^t A_j^{-1}(\tau)\sum_{s=k}^{j-1}a_{js}(\tau)x_{sk}(\tau)\,d\tau,\quad j>k,$$

где

$$A_k(t)\equiv\exp\int\limits_0^t a_{kk}(\tau)\,d\tau,\quad j,k=1,\ldots,n.$$

Скалярное произведение ненулевого вектора $m\equiv(m_1,\ldots,m_n)$ и решения

$$x(t)=c_1x^1(t)+\cdots+c_nx^n(t)\in\mathscr{S}_*(A),$$

где $c_1,\ldots,c_n$ — произвольные постоянные, имеет вид

$$\langle x,m\rangle=m_1c_1A_1(t)+m_2(c_1x_{21}(t)+c_2A_2(t))+\cdots+m_n(c_1x_{n1}(t)+\cdots+c_{n-1}x_{nn-1}(t)+c_nA_n(t)).$$

Теперь в зависимости от значений c_i, $i=1,\ldots,n$, выбираем вектор $m\in\mathbb{R}^n_*$, для которого функция $\langle x,m\rangle$ не обращается в нуль при любом $t>0$. Если $c_1\neq0$, то берем вектор $m=(1,0,\ldots,0)$. Если же $c_1=0$, то ищем первый ближайший к единице номер r коэффициента c_i, $i=2,\ldots,n$ отличного от нуля. При этом выбираем вектор $m\in\mathbb{R}^n_*$ с нулевыми компонентами за исключением r-го. Таким образом, перебирая все значения c_i, получим, что для любого ненулевого решения x_c найдется такой вектор m_c, что выполнено

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\nu^\alpha(m,x_c,t)=\nu^\alpha(m_c,x_c,t)=0,\quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\},\tag{1}$$

а с ним и цепочка равенств

$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x)=\check{\nu}^\alpha_\circ(x)=0,\quad x\in\mathscr{S}_*(A).$$

На основании (1), с учетом $\nu^\alpha(x_c,m,t)\geqslant0$ при любых $m\in\mathbb{R}^n_*$ и $t>0$, имеем

$$0\leqslant\check{\nu}^\alpha_\bullet(x_c)\leqslant\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_c)=\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x_c,m,t)\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x_c,m_c,t)=\hat{\nu}^\alpha_\circ(x_c)=0.$$

2. В работе [7] доказано, что для любого $x\in\mathscr{S}^n_*$ справедливы неравенства

$$\hat{\theta}^\bullet(x)\leqslant\hat{\nu}^*_\bullet(x),\quad \check{\theta}^\bullet(x)\leqslant\check{\nu}^*_\bullet(x),\quad \hat{\theta}^\circ(x)\leqslant\hat{\nu}^*_\circ(x),\quad \check{\theta}^\circ(x)\leqslant\check{\nu}^*_\circ(x).$$

Откуда получаем $\check{\theta}^\bullet(x)=\hat{\theta}^\bullet(x)=\check{\theta}^\circ(x)=\hat{\theta}^\circ(x)=0$. $\rhd$

5. Спектры ваимно-сопряженных двумерных систем

В этом разделе установлено совпадение спектров каждого из показателей колеблемости и вращаемости взаимно-сопряженных двумерных дифференциальных систем.

Определение 6 [16]. Система $-A^T \in \mathscr{M}^n$ называется *сопряженной* для системы $A \in \mathscr{M}^n$.

Замечание 2. Очевидно, систему $A \in \mathscr{M}^n$ можно рассматривать как сопряженную для системы $-A^T \in \mathscr{M}^n$, т. е. системы A, $-A^T \in \mathscr{M}^n$ взаимно-сопряженные.

Лемма 1 [16]**.** *Пусть задана система $A \in \mathscr{M}^n$ с непрерывными на $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Тогда для любых решений $x \in \mathscr{S}_*(A)$ и $y \in \mathscr{S}_*(-A^T)$ взаимно-сопряженных систем скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ постоянно.*

Лемма 2 [17]**.** *Для произвольной вектор-функции $y \in \mathscr{S}_*^2$ и невырожденной матрицы второго порядка L положим $z(t) = Ly(t)$.*

а) *Пусть $\det L > 0$. Если при некоторых $k \in \mathbb{Z}$ и $T > 0$ выполнено равенство $\Theta(y,T) = \pi k$, то $\Theta(z,T) = \pi k$; если же $\pi k \leqslant \Theta(y,T) \leqslant \pi(k+1)$, то и $\pi k \leqslant \Theta(z,T) \leqslant \pi(k+1)$.*

б) *Пусть $\det L < 0$. Если при некоторых $k \in \mathbb{Z}$ и $T > 0$ выполнено $\Theta(y,T) = \pi k$, то $\Theta(z,T) = -\pi k$; если же $\pi k \leqslant \Theta(y,T) \leqslant \pi(k+1)$, то и $\pi k \leqslant -\Theta(z,T) \leqslant \pi(k+1)$.*

Теорема 2. *Для любой системы $A \in \mathscr{M}^2$ и любого показателя*

$$\omega = \check{\theta}^\bullet, \hat{\theta}^\bullet, \check{\theta}^\circ, \hat{\theta}^\circ, \hat{\nu}_\bullet^\alpha, \check{\nu}_\bullet^\alpha, \hat{\nu}_\circ^\alpha, \check{\nu}_\circ^\alpha, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}, \tag{2}$$

справедливо равенство

$$\mathrm{Spec}_\omega(A) = \mathrm{Spec}_\omega\left(-A^T\right).$$

$\lhd$ 1. Сначала установим биекцию пространства $\mathbb{R}^2$ в себя. Для этого каждому вектору $c \equiv (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ поставим в соответствие вектор $c^* \equiv (-c_2, c_1) \in \mathbb{R}^2$. Установленный изоморфизм порождает и изоморфизм пространств $\mathscr{S}(A)$, $\mathscr{S}(-A^T)$. В самом деле, каждому решению $x \in \mathscr{S}(A)$ системы A с начальным условием $x(0) = c$ поставим в соответствие решение $y \in \mathscr{S}\left(-A^T\right)$ системы $-A^T$ с начальным условием $y(0) = c^*$. Заметим, что векторы c, c^* ортогональны, поэтому ортогональными будут не только векторы $x(0)$, $y(0)$, но, в силу леммы 1, и вектор-функции $x(t)$, $y(t)$ на $\mathbb{R}_+$.

2. Отсюда, с одной стороны, при любых $t > 0$ и $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеем

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t).$$

Беря последовательно верхние и нижние пределы от обеих частей, соответственно получим

$$\hat{\nu}_\circ^\alpha(x) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(y), \quad \check{\nu}_\circ^\alpha(x) = \check{\nu}_\circ^\alpha(y).$$

С другой стороны, при любых фиксированных $t > 0$, $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ и перпендикулярных векторах $m_1, m_2 \in \mathbb{R}^2$ справедливо

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m_1,t) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m_2,t).$$

Следовательно, если инфимум в $\hat{\nu}_\bullet^\alpha(x)$ реализуется на некотором векторе $m^1 \in \mathbb{R}^2_*$, то инфимум в $\hat{\nu}_\bullet^\alpha(y)$ будет реализован на векторе $m^2 \perp m^1$ и $\hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(y)$. Аналогичные рассуждения приводят к равенствам $\check{\nu}_\bullet^\alpha(x) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(y)$.

3. Из леммы 2 следует, что для любых $L \in \mathrm{End}_2 \mathbb{R}^2$ и $t > 0$ справедливо равенство

$$\left[\frac{|\Theta(Lx,t)|}{\pi}\right] = \left[\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi}\right],$$

где $[q]$ — целая часть числа q.

Следовательно, выполняются две цепочки равенств

$$\inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Lx,t)|}{\pi}\right] = \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi}\right],$$

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\frac{|\Theta(Lx,t)|}{\pi} = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Lx,t)|}{\pi}\right] = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi}\right] = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi},$$

из которых следуют совпадение соответствующих нижних показателей ориентированной вращаемости решений $x \in \mathscr{S}(A)$ и $y \in \mathscr{S}\left(-A^T\right)$:

$$\frac{\check{\theta}^\circ(x)}{\pi} = \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \frac{1}{\pi t}|\Theta(Lx,t)| = \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Lx,t)|}{\pi}\right]$$

$$= \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\left[\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi}\right] = \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\frac{|\Theta(Ly,t)|}{\pi} = \frac{\check{\theta}^\circ(x)}{\pi},$$

$$\check{\theta}^\bullet(x) = \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{|\Theta(Lx,t)|}{t} = \inf_{L\in\mathrm{End}_2\mathbb{R}^2} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{|\Theta(Ly,t)|}{t} = \check{\theta}^\bullet(y).$$

Аналогично доказываются совпадения и верхних показателей ориентированной вращаемости.

Таким образом, для любого показателя ω из списка (2) справедливо равенство $\omega(x) = \omega(y)$. $\rhd$

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность профессору И. Н. Сергееву за обсуждение результатов статьи.

Литература

1. *Сергеев И. Н.* Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения.—2004.—Т. 40, № 11.—С. 1576.
2. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И. Г. Петровского.—2006.—Вып. 25.—С. 249–294.
3. *Сергеев И. Н.* Определение полных частот решений линейной системы // Диференц. уравнения.—2009.—Т. 45, № 6.—С. 908.
4. *Сергеев И. Н.* Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сб.—2013.—Т. 204, № 1.—С. 119–138. DOI: 10.4213/sm7928.
5. *Сергеев И. Н.* Определение характеристик вращаемости решений дифференциальных систем и уравнений // Дифференц. уравнения.—2013.—Т. 49, № 11.—С. 1501–1503.
6. *Сергеев И. Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. заметки.—2016.—Т. 99, № 5.—С. 732–751. DOI: 10.4213/mzm10555.
7. *Сергеев И. Н.* Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И. Г. Петровского.—2016.—Вып. 31.—С. 177–219.
8. *Сергеев И. Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем.—2012.—Т. 76, № 1.—С. 149–172. DOI: 10.4213/im5035.
9. *Сергеев И. Н.* Вопросы о спектрах показателей вращаемости и блуждаемости автономных систем // Дифференц. уравнения.—2014.—Т. 50, № 6.—С. 844–845.
10. *Бурлаков Д. С.* Спектры показателей вращения и вращаемости автономных систем с простыми чисто мнимыми собственными числами // Дифференц. уравнения.—2014.—Т. 50, № 6.—С. 845.
11. *Бурлаков Д. С., Цой С. В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. сем. им. И. Г. Петровского.—2014.—Вып. 30.—С. 75–93.
12. *Сташ А. Х.* Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2019.—Т. 29, вып. 4.—С. 558–568. DOI: 10.20537/vm190407.

13. *Сташ А. Х.* Показатели ориентированной вращаемости решений автономных дифференциальных систем // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, № 3.—С. 120–132. DOI: 10.46698/a8125-0078-5238-y.
14. *Сташ А. Х.* О спектрах полных и векторных частот решений треугольных систем линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка // Материалы X Межд. научн. конф. молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь» (Майкоп, 7–8 февраля 2013 г.). Т. 1.—Майкоп: Изд-во АГУ, 2013.—С. 323–325.
15. *Миценко В. В.* О границах блуждаемости и колеблемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем и линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения.—2014.—Т. 50, № 6.—С. 851—852.
16. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.—М.: Наука, 1967.—472 с.
17. *Якубович Б. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.—М.: Наука, 1972.—720 с.

Статья поступила 4 декабря 2022 г.

Сташ Айдамир Хазретович
Кавказский математический центр
Адыгейского государственного университета,
декан факультета математики и компьютерных наук
РОССИЯ, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 208
E-mail: aidamir.stash@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-3008-7859

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 2, P. 136–143

SPECTRA OF OSCILLATION AND ROTATABILITY EXPONENTS OF SOLUTIONS OF HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL SYSTEMS

Stash, A. Kh.[1]

[1] Caucasus Mathematical Center of Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia
E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Abstract. It is known that all weak wandering exponents, as well as the lower strong wandering exponent, are equal to zero on the set of solutions of linear homogeneous triangular differential systems with continuous coefficients bounded on the positive semiaxis. At the same time, the upper strong wandering exponent of some solution from the specified set can take a positive value. In this paper, the exponents of oriented rotatability and the exponents of oscillation of signs, zeros, roots, and hyperroots of solutions of linear homogeneous triangular differential systems with continuous (optionally bounded) on the positive semiaxis by coefficients are fully studied. It has been established that for any solution of a triangular system of differential equations, its oscillation and rotatability exponents are exact, absolute and coincide with each other. It is also shown that the spectra of these exponents (i. e., the set of values on nonzero solutions) of triangular systems consist of one zero value. The results obtained enable us to conclude that, despite their simple and natural definitions, the oriented rotatability exponents and oscillation exponents are not analogues of the Perron exponent. In addition, the coincidence of the spectra of each (strong or weak, upper or lower) exponent of oriented rotatability and the exponent of oscillation of signs, zeros, roots and hyperroots of mutually conjugate linear homogeneous systems of differential equations with continuous coefficients on the positive semiaxis is established.

Keywords: differential equations, triangular differential system, conjugate differential system, exponents of oriented rotatability, exponents of oscillation, wandering exponent.

AMS Subject Classification: 34C10, 34D05, 34D08.

For citation: *Stash, A. Kh.* Spectra of Oscillation and Rotatability Exponents of Solutions of Homogeneous Differential Systems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 2, pp. 136–143 (in Russian). DOI: 10.46698/z2651-3365-0189-p.

References

1. *Sergeev, I. N.* Definition of Characteristic Frequencies of a Linear Equation, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 2004, vol. 40, no. 11, pp. 1576 (in Russian).
2. *Sergeev, I. N.* Definition and Properties of Characteristic Frequencies of a Linear Equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793. DOI: 10.1007/s10958-006-0142-6.
3. *Sergeev, I. N.* Definition of Full Frequencies of Solutions of the Linear System, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 2009, vol. 45, no. 6, pp. 908 (in Russian).
4. *Sergeev, I. N.* The Remarkable Agreement Between the Oscillation and Wandering Characteristics of Solutions of Differential Systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132. DOI: 10.1070/SM2013v204n01ABEH004293.
5. *Sergeev, I. N.* Definition of Characteristics Rotation of Solutions of Differential Systems and Equations, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1501–1503 (in Russian).
6. *Sergeev, I. N.* Oscillation, Rotation, and Wandering Exponents of Solutions of Differential Systems, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, no. 5, pp. 729–746. DOI: 10.1134/S0001434616050114.
7. *Sergeev, I. N.* Lyapunov Characteristics of Oscillation, Rotation, and Wandering of Solutions of Differential Systems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 234, no. 4, pp. 497–522. DOI: 10.1007/s10958-018-4025-4.
8. *Sergeev, I. N.* Oscillation and Wandering Characteristics of Solutions of a Linear Differential Systems, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162. DOI: 10.1070/IM2012v076n01ABEH002578.
9. *Sergeev, I. N.* Questions about the Spectra of Exponents of Rotatability and Wandering of Autonomous Systems, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 2014, vol. 50, no. 6, pp. 844–845 (in Russian).
10. *Burlakov, D. S.* Spectra of Rotation and Rotatability Exponents of Autonomous Systems with Simple Purely Imaginary Eigenvalues, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 2014, vol. 50, no. 6, pp. 845 (in Russian).
11. *Burlakov, D. S. and Tsoii, S. V.* Coincidence of Complete and Vector Frequencies of Solutions of a Linear Autonomous System, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, no. 2, pp. 155–167. DOI: 10.1007/s10958-015-2554-7.
12. *Stash, A. Kh.* Properties of Exponents of Oscillation of Linear Autonomous Differential System Solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 558–568 (in Russian). DOI: 10.20537/vm190407.
13. *Stash, A. Kh.* Oriented Rotatability Exponents of Solution of Autonomous Differential System, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 120–132 (in Russian). DOI: 10.46698/a8125-0078-5238-y.
14. *Stash, A. Kh.* On the Spectra of Total and Vector Frequencies of Solutions of Triangular Systems of Linear Differential Equations of Arbitrary Order, *Materiali X Mejdunarodnoi nauchnoi konferencii molodih uchenih «Nauka. Obrazovanie. Molodej»*, 2013, vol. 1, pp. 323—325 (in Russian).
15. *Micenko, V. V.* On the Boundaries of Wandering and Oscillations of Solutions of Two-Dimensional Triangular Differential Systems and Linear Equations of the Second Order, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], 2014, vol. 50, no. 6, pp. 851–852 (in Russian).
16. *Demidovich, B. P. Lekcii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* [Lectures on the Mathematical Theory of Stability], Moscow, Nauka, 1967, 472 p. (in Russian).
17. *Yakubovich, B. A. and Starjinskii, V. M. Lineinie differencialnie uravneniya s periodicheskimi koefficientami i ih prilojeniya* [Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and their Applications], Moscow, Nauka, 1972, 720 p. (in Russian).

Received December 4, 2022

Aydamir Kh. Stash
Caucasus Mathematical Center of Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia,
Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science
E-mail: aidamir.stash@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-3008-7859