Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 2, С. 5–13

УДК 517.958
DOI 10.46698/t1512-6666-1874-h

ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[#]

Д. С. Аниконов[1], Д. С. Коновалова[1]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: anik@math.nsc.ru, dsk@math.nsc.ru

Аннотация. Исследуется начально-краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка, являющегося математической моделью процесса поперечных колебаний полуограниченной мембраны. Точнее говоря, рассматривается волновое уравнения для случая двух пространственных переменных вместе с начальными условиями, а также с данными на граничной плоскости. Коэффициент уравнения считается постоянным, а все известные функции имеют непрерывные и ограниченные частные производные до третьего порядка включительно. Доказана теорема существования и единственности классического решения задачи и приводится явная формула для него. Из наиболее близких исследований, прежде всего отмечаются фундаментальные работы академиков О. А. Ладыженской и В. А. Ильина, в которых доказаны теоремы существования и единственности решения смешанных задач при условии принадлежности пространственных переменных ограниченному множеству, что не позволяет учесть, например, вариант полуограниченной мембраны. Другим заметным нашим отличием от упомянутых результатов является вывод формулы типа Пуассона, известной ранее для задачи Коши. Наличие сравнительно простой формулы открывает возможности других исследований. В частности, представляется перспективным использовать доказанную явную формулу решения для постановки и анализа обратных задач, как это широко применяется в теории условно-корректных задач. Некоторая часть статьи содержит рассуждения, довольно типичные для теории волновых уравнений. Вместе с тем, имеются и существенные отличия, к которым, прежде всего, можно отнести анализ интеграла типа Дюамеля, содержащего под интегралом разрывную функцию, в то время как традиционный интеграл Дюамеля содержит только гладкие функции. Вследствие этого, потребовалось специальное подробное исследование свойств такого необычного объекта. В целом выполненную работу можно рассматривать, как развитие уже имеющихся достижений, а также как элемент качественной теории смешанных задач для волновых уравнений.

Ключевые слова: смешанная задача, гиперболические уравнения, разрывные функции, задача Коши, интеграл Дюамеля, формула Пуассона.

AMS Subject Classification: 35A05, 35L20.

Образец цитирования: *Аниконов Д. С., Коновалова Д. С.* Формула решения смешанной задачи для гиперболического уравнения // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 2.—С. 5–13. DOI: 10.46698/t1512-6666-1874-h.

1. Обозначения, определения и постановка задачи

В области $G = \{(x_1, x_2, t) : x_1 \in \mathbb{R}^1,\ x_2 > 0,\ t > 0\}$ рассматривается смешанная задача для волнового уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_2^2}\right) = 0,\\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad u(x_1,0,t) = \mu(x_1,t).\end{gathered} \tag{1}$$

[#] Работа выполнена по программе госзадания, проект № FWNF-2022-0009.

Решение этой задачи ищется в классе функций $u(x,t)$, имеющих частные производные до второго порядка включительно, равномерно непрерывные в любой ограниченной области в G. При этом предполагается, что $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $\mu(x_1,t)$ имеют все непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Из других публикаций подобной направленности, прежде всего, нужно указать на работы О. А. Ладыженской, В. А. Ильина и А. Н. Тихонова [1–3], в которых для широкого класса гиперболических уравнений второго порядка ставились и исследовались смешанные задачи. Ими доказаны теоремы существования и единственности решений, понимаемых в классическом и обобщенном смысле. Однако случай принадлежности пространственных переменных неограниченному множеству не был ими охвачен. Более точно в [1] была рассмотрена задача для неограниченных областей, но за счет дополнительных требований эта задача сводилась к предыдущему варианту с ограниченной областью. В этом состоит одно из отличий настоящей работы от упомянутых здесь.

В широком смысле, наша статья является вариантом обобщения классических результатов, расширяющим возможность применения теоретических результатов на практике. При более широком обзоре темы также можно отметить некоторые публикации, содержащие различные другие обобщения классических задач [4–10].

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $B(x,R) = \{\xi = (\xi_1,\xi_2) : |x-\xi| < R\}$, $\Box_a u(x,t)$ — левая часть уравнения (1).

Задача (1) сводится к эквивалентной задаче для функции $v(x,t) = u(x,t) - \mu(x_1,t)$:

$$\Box_a v(x,t) = f(x_1,t), \quad v(x,0) = \varphi_1(x), \quad v_t(x,0) = \psi_1(x), \quad v(x_1,0,t) = 0, \tag{2}$$

где

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \mu(x_1,0), \quad \psi_1(x) = \psi(x) - \mu_t(x_1,0), \quad f(x_1,t) = -\Box_a \mu(x_1,t). \tag{3}$$

В свою очередь, решение задачи (2) представим в виде суммы решений двух более простых задач $v = v_1 + v_2$:

$$\Box_a v_1 = 0, \quad v_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial v_1}{\partial t}(x,0) = \psi_1(x), \quad v_1(x_1,0,t) = 0, \tag{4}$$

$$\Box_a v_2 = f, \quad v_2(x,0) = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t}(x,0) = 0, \quad v_2(x_1,0,t) = 0. \tag{5}$$

Для корректности задач (4), (5) необходимо добавить условия согласования начальных и краевых данных. Отметим, что уравнения в (4), (5) выполняются также и в граничных точках области G. Соответственно везде в дальнейшем будем считать, что

$$\varphi_1(x_1,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2}(x_1,0) = 0, \quad \psi_1(x_1,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2}(x_1,0) = 0, \quad f(x_1,0) = 0.$$

Для исходных данных эти условия можно переписать в виде:

$$\varphi(x_1,0) = \mu(x_1,0), \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2}(x_1,0) = 0, \quad \psi(x_1,0) = \mu_t(x_1,0),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}(x_1,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2}(x_1,0) - a^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_1^2}(x_1,0) = 0. \tag{6}$$

2. Основной результат

Для решения задачи (4) используем известный метод отражения [3, с. 412]. Для этого функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ продолжим нечетным образом для $x_2 < 0$ и обозначим эти продолжения через $\Phi_1(x)$, $\Psi_1(x)$ соответственно. Принятые нами условия согласования обеспечивают принадлежность этих продолжений пространствам $\mathbb{C}^3(D)$, где D — любая ограниченная область переменных (x_1, x_2). Тогда справедлива классическая формула Пуассона:

$$v_1(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{B(x,at)} \frac{\Phi_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi - x|^2}} + \int\limits_{B(x,at)} \frac{\Psi_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi - x|^2}}\right]. \tag{7}$$

Аналогичный подход будем также использовать для задачи (5). Рассмотрим два варианта продолжения функции $f(x_1,t)$ по x_2: $F_1(x_1,x_2,t) = f(x_1,t)$ при всех x_2; $F_2(x_1,x_2,t) = f(x_1,t)$ для $x_2 \geqslant 0$ и $F_2(x_1,x_2,t) = -f(x_1,t)$ для $x_2 < 0$. Функция $F_2(x,t)$ оказывается нечетной по x_2 с возможным разрывом в точках $(x_1, 0)$. Будем использовать функцию $F_2(x,t)$ в качестве правой части в задаче (5) вместо функции $f(x_1,t)$. Однако здесь мы не можем воспользоваться традиционным подходом, основанном на известной формуле Дюамеля, в которой предполагается гладкость правой части уравнения.

Для точек (x,t), $x_2 > 0$, $at > x_2$ определим множество $B^-(x,R) = \{\xi : |x-\xi| < R,\ \xi_2 < 0\}$, где $R = a(t-\tau)$, и интеграл

$$J(x,t) = \int\limits_0^{t-x_2/a} \int\limits_{B^-(x,R)} \frac{f(\xi_1,\tau)\,d\xi\,d\tau}{\sqrt{R^2 - |x-\xi|^2}}. \tag{8}$$

Лемма 1. *Для точек (x,t), $0 \leqslant x_2 \leqslant at$, функция $J(x,t)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению $\Box_a J(x,t) = 0$. Кроме того, на плоскости $x_2 = at$ функция $J(x,t)$ и ее частные производные до второго порядка включительно обращаются в нуль.*

$\lhd$ Функцию $J(x,t)$ запишем в виде повторных интегралов:

$$J(x,t) = \int\limits_0^{t-x_2/a} d\tau \int\limits_{x_1-\sqrt{R^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{R^2-x_2^2}} \left(\int\limits_{x_2-\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2}}^{0} \frac{f(\xi_1,\tau)\,d\xi_2}{\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}} \right) d\xi_1. \tag{9}$$

Легко проверить, что

$$J(x,t) = \int\limits_0^{t-x_2/a} d\tau \int\limits_{x_1-\sqrt{R^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{R^2-x_2^2}} f(\xi_1,\tau) \arccos\frac{x_2}{\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2}}\,d\xi_1. \tag{10}$$

Меняя в (10) порядок интегрирования, получаем

$$J(x,t) = \int\limits_{x_1-\sqrt{a^2t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{a^2t^2-x_2^2}} d\xi_1 \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} f(\xi_1,\tau)\arccos\frac{x_2}{\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2}}\,d\tau. \tag{11}$$

Теперь вычислим частные производные функции $J(x,t)$. Заметим, что

$$t - \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + x_2^2}/a = 0, \quad \xi_1 = x_1 \pm \sqrt{a^2t^2 - x_2^2},$$

а также $\arccos(x_2/\sqrt{R^2 - (\xi_1 - x_1)^2}) = 0$ при $\tau = t - \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + x_2^2}/a$. Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(x,t)}{\partial t} &= \int\limits_{x_1-\sqrt{a^2t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{a^2t^2-x_2^2}} d\xi_1 \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} f(\xi_1,\tau)\frac{\partial}{\partial t} \arccos \frac{x_2}{\sqrt{R^2 - (\xi_1 - x_1)^2}}\, d\tau \\ &= \int\limits_{x_1-\sqrt{a^2t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{a^2t^2-x_2^2}} d\xi_1 \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} \frac{f(\xi_1,\tau)\cdot a^2(t-\tau)\cdot x_2}{\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2}\big(R^2-(\xi_1-x_1)^2\big)}\, d\tau.\end{aligned} \tag{12}$$

Внутренний интеграл в (12), с учетом равенства $f(\xi_1, 0) = 0$, преобразуем при помощи интегрирования по частям и получим:

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} \frac{f(\xi_1,\tau)\cdot a^2(t-\tau)\cdot x_2}{\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2}(R^2-(\xi_1-x_1)^2)}\, d\tau \\ &\qquad = -\int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} \frac{f(\xi_1,\tau)\cdot x_2}{R^2-(\xi_1-x_1)^2} d\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2} \\ &\qquad = \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} \sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2}\,\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f(\xi_1,\tau)\cdot x_2}{R^2-(\xi_1-x_1)^2}\right) d\tau.\end{aligned} \tag{13}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 J(x,t)}{\partial t^2} = \int\limits_{x_1-\sqrt{a^2t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{a^2t^2-x_2^2}} d\xi_1 \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} x_2 \\ \times \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f(\xi_1,\tau)}{R^2-(\xi_1-x_1)^2}\right)\right) d\tau.\end{aligned} \tag{14}$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(x,t)}{\partial x_1} &= \int\limits_{x_1-\sqrt{a^2t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{a^2t^2-x_2^2}} d\xi_1 \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} \frac{f(\xi_1,\tau)(\xi_1-x_1)\,x_2\,d\tau}{\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2}\big(R^2-(\xi_1-x_1)^2\big)} \\ &= \int\limits_{x_1-\sqrt{a^2t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{a^2t^2-x_2^2}} d\xi_1 \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} \sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2} \\ &\qquad\times \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f(\xi_1,\tau)(\xi_1-x_1)x_2}{(R^2-(\xi_1-x_1)^2)a^2(t-\tau)}\right) d\tau,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 J(x,t)}{\partial x_1^2} = \int\limits_{x_1-\sqrt{a^2t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{a^2t^2-x_2^2}} d\xi_1 \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} \frac{\partial}{\partial x_1}\Bigg(\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2}$$
$$\times \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f(\xi_1,\tau)(\xi_1-x_1)x_2}{(R^2-(\xi_1-x_1)^2)a^2(t-\tau)}\right)\Bigg)d\tau, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial J(x,t)}{\partial x_2} = -\int\limits_{x_1-\sqrt{a^2t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{a^2t^2-x_2^2}} d\xi_1 \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} \frac{f(\xi_1,\tau)d\tau}{\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2}}, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial^2 J(x,t)}{\partial x_2^2} = -\int\limits_{x_1-\sqrt{a^2t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{a^2t^2-x_2^2}} d\xi_1 \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} \frac{\partial}{\partial x_2}\Bigg(\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2}$$
$$\times \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f(\xi_1,\tau)}{a^2(t-\tau)}\right)\Bigg)d\tau, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial^2 J(x,t)}{\partial t \partial x_i} = \int\limits_{x_1-\sqrt{a^2t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{a^2t^2-x_2^2}} d\xi_1 \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} \frac{\partial}{\partial x_i}\Bigg(x_2\sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2}$$
$$\times \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f(\xi_1,\tau)}{R^2-(\xi_1-x_1)^2}\right)\Bigg)d\tau. \qquad (19)$$

Используя равенства (14), (16), (18), запишем

$$\Box_a J(x,t) = \int\limits_{x_1-\sqrt{a^2t^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{a^2t^2-x_2^2}} d\xi_1 \int\limits_0^{t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a} I(x,t,\xi_1,\tau)\,d\tau, \qquad (20)$$

где

$$\begin{aligned} I(x,t,\xi_1,\tau) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(x_2 V(x,t,\xi_1,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f(\xi_1,\tau)}{H(x,t,\xi_1,\tau)}\right)\right) \\ &-a^2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2 V(x,t,\xi_1,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f(\xi_1,\tau)(\xi_1-x_1)}{a^2 H(x,t,\xi_1,\tau)(t-\tau)}\right)\right) \\ &+a^2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(V(x,t,\xi_1,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f(\xi_1,\tau)}{a^2(t-\tau)}\right)\right), \end{aligned} \qquad (21)$$

$$V(x,t,\xi_1,\tau) = \sqrt{R^2-(\xi_1-x_1)^2-x_2^2}, \quad H(x,t,\xi_1,\tau) = R^2-(\xi_1-x_1)^2. \qquad (22)$$

Опуская для краткости аргументы функций, прямыми вычислениями убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} I &= V\left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau}\left(\frac{f}{H}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial \tau}\left(\frac{(\xi_1-x_1)f}{(t-\tau)H}\right)\right) \\ &+\frac{1}{V}\left(-\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{(\xi_1-x_1)^2 f}{(t-\tau)H}\right) + a^2(t-\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f}{H}\right) - \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f}{t-\tau}\right)\right) \\ &= -V\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{f}{(t-\tau)H}\right) + \frac{a^2 f}{VH} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{Vf}{(t-\tau)H}\right). \end{aligned} \qquad (23)$$

Обратимся теперь к равенству (20). Заметим, что $V(x,t,\xi_1,t-\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}/a)=0$ и $f(\xi_1,0)=0$. Таким образом, оказывается, что подынтегральное выражение в (20) оказывается производной по τ от функции, обращающейся в нуль в верхнем и нижнем пределах интегрирования по τ. Следовательно, $\Box_a J(x,t)=0$.

Теперь докажем остальные утверждения леммы. Что касается непрерывности функции $J(x,t)$ и ее производных, то это свойство является прямым следствием формул (9), (12)–(19). Осталось доказать обращение в нуль на плоскости $x_2=at$ функции $J(x,t)$ и ее производных. Отметим, что $t-\tau\geqslant \mathrm{const}>0$ и $H\geqslant \mathrm{const}>0$ при $x_2\geqslant\delta>0$. Поэтому в формулах (9), (12)–(19), представляющих функцию $J(x,t)$ и ее производные, неограниченными множителями подынтегральных выражений могут быть только функции $1/V$, интегралы от которых по τ ограничены по модулю единым числом. Поскольку при $at-x_2\to 0$ промежуток интегрирования по ξ_1 стягивается в точку, соответствующие интегралы стремятся к нулю, что и означает справедливость доказываемых свойств при $x_2\geqslant\delta>0$. В силу произвольности δ, указанные свойства, а следовательно, и лемма 1 доказаны полностью. $\rhd$

Теорема 1. *При сделанных предположениях существует единственное решение задачи* (1), *которое представляется в виде*

$$u(x,t)=\mu(x_1,t)+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{B(x,at)}\frac{\operatorname{sgn}(\xi_2)\big(\varphi(\xi_1,|\xi_2|)-\mu(\xi_1,0)\big)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{B(x,at)}\frac{\operatorname{sgn}(\xi_2)\big(\psi(\xi_1,|\xi_2|)-\mu_t(\xi_1,0)\big)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}} \tag{24}$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{B(x,a(t-\tau))}\frac{\operatorname{sgn}(\xi_2)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}\left(-\frac{\partial^2\mu(\xi_1,\tau)}{\partial\tau^2}+a^2\frac{\partial^2\mu(\xi_1,\tau)}{\partial\xi_1^2}\right)d\xi.$$

$\lhd$ Будем использовать функции $F_1(x,t)$, $F_2(x,t)$, введенные после формулы (7). Рассмотрим интеграл типа Дюамеля при $at>x_2$

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{B(x,a(t-\tau))}\frac{F_2(\xi,\tau)\,d\xi}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}, \tag{25}$$

который можно представить в виде

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{B(x,a(t-\tau))}\frac{F_1(\xi,\tau)\,d\xi}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}-\frac{2J(x,t)}{2\pi a}, \tag{26}$$

где функция $J(x,t)$ определена равенством (8). Свойства второго слагаемого в правой части (26) указаны в лемме. Что касается первого слагаемого, то мы не можем считать его классическим интегралом Дюамеля, поскольку функция $F_1(x,t)$ имеет непрерывные производные только первого порядка. Однако то обстоятельство, что $F_1(x,t)$ не зависит от x_2, позволяет методом спуска убедиться в том, что этот интеграл есть решение уравнения в (5). Поэтому $\Box_a U(x,t)=f(x_1,t)$. Заметим, что при $x_2=0$ интеграл $U(x,t)=0$, вследствие нечетности подынтегральной функции и симметрии области интегрирования по ξ_2. Также нетрудно видеть, что $U(x,0) = U_t(x,0) = 0$. Если продолжить нулем функцию $J(x,t)$ для $at \leqslant x_2$, то, вследствие доказанных в лемме свойств функции $J(x,t)$, функция $U(x,t)$ оказывается решением задачи (5). Учитывая редукцию задачи (1) к задачам (2), (4), (5), складывая полученные решения и выражая в формулах (7) и (25) подынтегральные функции через исходные данные задачи (1), получаем формулу (24).

Докажем теперь единственность решения задачи (1). Напомним, что уравнение $\Box_a u = 0$ выполняется также и в граничных точках. Возьмем два решения этой задачи u_1 и u_2. Их разность $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет равенствам $\Box_a w = 0$, $w(x,0) = w_t(x,0) = w(x_1, 0, t) = 0$, вследствие чего функция $w(x,t)$ и ее вторая производная по x_2 равны нулю при $x_2 = 0$. Поэтому нечетное продолжение функции $w(x,t)$ по x_2 оказывается классическим решением задачи Коши для уравнения $\Box_a w = 0$ с нулевыми начальными данными. В силу единственности решения такой задачи, $w = 0$. Таким образом, теорема доказана полностью. $\triangleright$

Еще одним отличием нашей работы от упомянутых выше [1, 2] является наличие простой формулы (24), позволяющей легко построить численный алгоритм. Кроме того, важно отметить, что подобные явные представления широко используются в теории обратных и условно-корректных задач. В подтверждение этой связи укажем на многочисленные публикации, которые можно найти, например, в списках литературы монографий [11–13].

В заключение обсудим некоторые аспекты выполненного исследования. Как видно, основная часть работы посвящена анализу интеграла типа Дюамеля, определенного формулой (25), где используется функция $F_2(x_1, x_2, t)$, вообще говоря, разрывная при $x_2 = 0$. Соответственно, статью можно было бы назвать «Обобщенный интеграл Дюамеля», однако в нашем случае функция $F_2(x_1, x_2, t)$ оказывается кусочно-постоянной по x_2, что снижает общность исследования. Это обстоятельство вызвано тем, что мы рассматривали случай нулевой правой части уравнения в (1). Было бы интересно исследовать и более общий случай.

Литература

1. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения.—М.: Гостехиздат, 1953.—279 с.
2. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи матем. наук.—1960.—Т. 15, № 2 (92).—С. 97–154.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1977.—735 с.
4. *Ильин В. А., Кулешов А. А.* О некоторых свойствах обобщенных решений волнового уравнения из классов L_p и W_p^1 при $p \geqslant 1$ // Дифференц. уравнения.—2012.—Т. 48, № 11.—С. 1493–1500. DOI: 10.1134/S0012266112110043.
5. *Petrova G., Popov B.* Linear transport equations with discontinuous coefficients // Comm. Part. Dif. Equat.—1999.—Vol. 24, № 9–10.—P. 1849–1873.
6. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И., Чугайнова А. П.* Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. Вып. 16.—М.: Изд. МИАН, 2010.—120 с.
7. *Корзюк В. И., Чеб Е. С., Ле Тхи Тху.* Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик // Национальная академия наук Беларуси. Труды Института математики.—2010.—Т. 18, № 2.—С. 36–54.
8. *Яковлева Ю. О.* Задача Коши для гиперболического уравнения и системы гиперболических уравнений третьего порядка с некратными характеристиками // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика.—2013.—№ 12 (155), вып. 31.—С. 109–117.
9. *Алексеева Л. А., Закирьянова Г. К.* Обобщенные решения начально-краевых задач для гиперболических систем второго порядка // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2011.—Т. 51, № 7.—Р. 1280–1293.

10. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения.—2006.—Т. 42, № 9.—P. 1166–1179.
11. *Anikonov D. S., Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V.* Transport equation and Tomography.—Utrecht–Boston: VSP, 2002.—viii+208 p.
12. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Теория операторов и некорректные задачи.—Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки, 2010.—940 с.
13. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах.—М.: Научный мир, 2005.—295 с.

Статья поступила 1 апреля 2022 г.

Аниконов Дмитрий Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
заведующий лабораторией
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: anik@math.nsc.ru
https://orcid.org/0000-0003-4056-0988

Коновалова Дина Сергеевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: dsk@math.nsc.ru
https://orcid.org/0000-0003-1200-4116

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 2, P. 5–13

FORMULA FOR SOLVING A MIXED PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION

Anikonov, D. S.[1] and Konovalova, D. S.[1]

[1] Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS,
4 Ac. Koptyuga Ave., Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: anik@math.nsc.ru, dsk@math.nsc.ru

Abstract. The initial boundary value problem for a second-order differential equation, which is a mathematical model of the process of transverse vibrations of a semi-bounded membrane, is investigated. More precisely, we consider the wave equation for the case of two spatial variables together with the initial conditions, as well as with data on the boundary plane. The coefficient of the equation is considered constant, and all known functions have continuous and bounded partial derivatives up to and including the third order. The existence and uniqueness theorem of the classical solution of the problem is proved and an explicit formula for it is given. Among the closest studies, first of all, the fundamental works of academicians O. A. Ladyzhenskaya and V. A. Ilyin are noted, in which the theorems of the existence and uniqueness of the solution of mixed problems are proved, provided that spatial variables belong to a bounded set, which does not allow taking into account, for example, the variant of a semi-bounded membrane. Our other notable difference from the above results is the proof of a Poisson-type formula, previously known for the Cauchy problem. The presence of a relatively simple formula opens up the possibilities of other studies. In particular, it seems promising to use the proven explicit solution formula for the formulation and analysis of inverse problems, as it is widely used in the theory of ill-posed problems. Some part of the article contains methods that are quite typical for the theory of wave equations. At the same time, there are also significant differences, which, first of all, include the analysis of a Duhamel-type integral containing a discontinuous function under the integral, while the traditional Duhamel integral contains only smooth functions. As a result, a special detailed study of the properties of such an unusual object was required. In general, the work performed can be considered as the development of existing achievements, as well as an element of the qualitative theory of mixed problems for wave equations.

Keywords: mixed problem, hyperbolic equations, discontinuous functions, Cauchy problem, Duhamel integral, Poisson formula.

AMS Subject Classification: 35A05, 35L20.

For citation: *Anikonov, D. S. and Konovalova, D. S.* Formula for Solving a Mixed Problem for a Hyperbolic Equation // *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 2, pp. 5–13 (in Russian). DOI: 10.46698/t1512-6666-1874-h.

References

1. *Ladyzhenskaya, O. A. Mixed Problem for Hyperbolic Equation*, Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1953, 279 p. (in Russian).
2. *Il'in, V. A.* The Solvability Of Mixed Problems For Hyperbolic And Parabolic Equatins, *Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, no. 2, pp. 85–142. DOI: 10.1070/RM1960v015n02ABEH004217.
3. *Tikhonov, A. N. and Samarskiy, A. A. Equations of Mathematical Physics*, Moscow, Nauka, 1977, 735 p. (in Russian).
4. *Ilyin, V. A. and Kuleshov, A. A.* On Some Properties Of Generalized Solutions of the Wave Equation in the Classes L_p and W_p^1 for $p \geqslant 1$, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 1470–1476. DOI: 10.1134/S0012266112110043.
5. *Petrova, G. and Popov, B.* Linear Transport Equations with Discontinuous Coefficients, *Communications in Partial Differential Equations*, 1999, vol. 24, no. 9–10, pp. 1849–1873.
6. *Kulikovsky, A. G., Sveshnikova, E. I. and Chugainova, A. P. Mathematical Methods for Studying Discontinuous Solutions of Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations*, issue 16, Moscow, MIAN Publishing House, 2010, 120 p. (in Russian).
7. *Korzyuk, V. I., Chebe, E. S. and Le Thi Thu* Solution of a Mixed Problem for a Bi-Wave Equation by the Method of Characteristics, *The National Academy of Sciences of Belarus. Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 36–54 (in Russian).
8. *Yakovleva, Y. O.* The Cauchy Problem for a Hyperbolic Equation and a System of Hyperbolic Equations of the Third Order with Non-Multiple Characteristics, *Scientific Bulletin, Ser. Mathematics. Physics*, 2013, no. 12 (155), issue 31, pp. 109–117 (in Russian).
9. *Alexeyeva, L. A. and Zakir'yanova, G. K.* Generalized Solutions of Initial-Boundary Value Problems for Second-Order Hyperbolic Systems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, pp. 1194–1207. DOI: 10.1134/S0965542511070037.
10. *Kozhanov, A. I. and Pulkina, L. S.* On the Solvability of Boundary Value Problems with a Nonlocal Boundary Condition of Integral Form for Multidimensional Hyperbolic Equations, *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246. DOI: 10.1134/S0012266106090023.
11. *Anikonov, D. S., Kovtanyuk, A. E. and Prokhorov, I. V. Transport Equation and Tomography*, Utrecht–Boston, VSP, 2002, viii+208 p.
12. *Lavrentiev, M. M. and Saveliev, L. Ya. Operator Theory and Ill-Posed Problems*, Novosibirsk, Publishing House of the Institute of Mathematics, 2010, 940 p. (in Russian).
13. *Romanov, V. G. Stability in Inverse Problems*, Moscow, Scientific World, 2005, 295 p. (in Russian).

Received April 1, 2022

Dmitry S. Anikonov
Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS,
4 Ac. Koptyuga Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
Head of Laboratory
E-mail: anik@math.nsc.ru
https://orcid.org/0000-0003-4056-0988

Dina S. Konovalova
Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS,
4 Ac. Koptyuga Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
Senior Researcher
E-mail: dsk@math.nsc.ru
https://orcid.org/0000-0003-1200-4116