Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 4, С. 91–104

УДК 517.984.46
DOI 10.46698/y9559-5148-4454-e

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕВЫРОЖДЕННЫМИ ЯДРАМИ

Д. Ж. Култураев[1], **Ю. Х. Эшкабилов**[1]
[1] Каршинский государственный универтитет,
Узбекистан, 180100, Карши, ул. Кучабаг, 17
E-mail: davron_2189@mail.ru, yusup62@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматриваются линейные ограниченные самосопряженные интегральные операторы T_1 и T_2 в гильбертовом пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$, так называемые частично интегральные операторы. Частично интегральный оператор T_1 действует на функцию $f(x,y)$ по первому аргументу и выполняет определенное интегрирование по аргументу x, а частично интегральный оператор T_2 действует на функцию $f(x,y)$ по второму аргументу и выполняет определенное интегрирование по аргументу y. Оба оператора является ограниченными, однако оба не являются компактными операторами. Однако оператор T_1T_2 является компактным и $T_1T_2 = T_2T_1$. Частично интегральные операторы возникают в различных областях механики, теории интегро-дифференциальных уравнений и теории операторов Шредингера. В работе исследованы спектральные свойства линейных ограниченных самосопряженных частично интегральных операторов T_1, T_2 и $T_1 + T_2$ с невырожденными ядрами. Получена формула для описания существенных спектров частично интегральных операторов T_1 и T_2. Показано, что дискретный спектр у операторов T_1 и T_2 отсутствует. Доказана теорема о структуре существенного спектра частично интегрального оператора $T_1 + T_2$. Изучена задача о существовании счетного числа собственных значений в дискретном спектре частично интегрального оператора $T_1 + T_2$.

Ключевые слова: частично интегральный оператор, спектр, существенный спектр, дискретный спектр, невырожденное ядро.

AMS Subject Classification: 47A10, 47A11, 47B38, 47G10.

Образец цитирования: *Култураев Д. Ж., Эшкабилов Ю. Х.* О спектральных свойствах самосопряженных частично интегральных операторов с невырожденными ядрами // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 4.—С. 91–104. DOI: 10.46698/y9559-5148-4454-e.

1. Введение

Линейные уравнения и операторы с частными интегралами возникают в различных областях механики [1–4], теории интегро-дифференциальных уравнений [5, 6], теории операторов Шредингера [7–9] и в ряде других прикладных задач [10–12]. Частично интегральные операторы T_1 и T_2 действуют в пространстве функций с двумя переменными $x \in \Omega_1$ и $y \in \Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 являются замкнутыми линейно связанными ограниченными множествами в $\mathbb{R}^{\nu_1}$ и $\mathbb{R}^{\nu_2}$, соответственно. Оператор T_1 интегрирует функцию $f(x,y)$ по аргументу $x \in \Omega_1$ на множестве Ω_1, а оператор T_2 интегрирует функцию $f(x,y)$ по аргументу $y \in \Omega_2$ на множестве Ω_2. Обычно операторы T_1 и T_2 являются ограниченными, но не являются компактными операторами. Последнее обстоятельство вызывает интерес

© 2022 Култураев Д. Ж., Эшкабилов Ю. Х.

специалистов к исследованию спектров операторов T_1, T_2 и T_1+T_2. Легко проверяется равенство $T_1T_2=T_2T_1$, и T_1T_2 является компактным интегральным оператором.

В [13] изучен спектр ЧИО (частично интегрального оператора) T_1+T_2 в L_2 с положительными ядрами. Затем в 1991 г. А. С. Калитвин и П. П. Забрейко [14] исследовали спектральные свойства частично интегральных операторов вида T_1+T_2 в пространстве L_p, $p\geqslant 1$. Линейные операторы и уравнения с частными интегралами в разных функциональных пространствах исследовались в монографиях [11, 12], см. также [15].

В работе [16] исследованы существенный и дискретный спектры суммы тензорных произведений самосопряженного компактного оператора и тождественного оператора в гильбертовом пространстве L_2. В статье [17] изучаются спектральные свойства ЧИО T_1 с ограниченным ядром. Затем в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ изучены спектральные свойства самосопряженных ЧИО T_1, T_2 и T_1+T_2 с непрерывным ядром трех переменных и доказана теорема, описывающая свойства существенного и дискретного спектра ЧИО T_1+T_2 [18]. Доказана теорема о дискретном спектре для самосопряженного ЧИО $H_0-(T_1+T_2)$ с непрерывным ядром в [19], где H_0 — оператор умножения на непрерывную функцию.

В работе [20] получено явное выражение для существенного спектра и доказано существование собственного значения ЧИО $H_0-(T_1+T_2)$ с ядром трех переменных (в частном случае, сокр. ЧИО). Исследованы существенный и дискретный спектры самосопряженных ЧИО T_1, T_2 и T_1+T_2 типа Фредгольма в пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$ с вырожденным ядром в [21].

Несмотря на ряд публикаций о спектрах ЧИО, отсутствуют теоремы о точном описании существенных спектров самосопряженных ЧИО, возникающих в прикладных задачах. В данной статье, в гильбертовом пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$ изучаются спектральные свойства самосопряженных ЧИО типа Фредгольма T_1, T_2 и T_1+T_2 с невырожденными ядрами. Дано точное описание существенных спектров операторов T_1 и T_2 (§ 3). Получено явное описание существенного спектра ЧИО T_1+T_2 и изучено существование счетного числа собственных значений в дискретном спектре ЧИО T_1+T_2 с невырожденным ядром (§ 4).

2. Необходимые сведения и предложения

Пусть T_1 — линейный интегральный оператор в пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$, заданный по формуле

$$(T_1f)(x,y)=\int_a^b k(x,s,y)f(s,y)\,ds. \tag{1}$$

Здесь $k(x,s,y)$ измеримая функция в смысле Лебега на $[a,b]^2\times[c,d]$ и интеграл в (1) понимается в смысле меры Лебега на [a, b].

Ядро $k(x,s,y)$ интегрального оператора T_1 обычно удовлетворяет условию

$$\int_a^b k(x,s,y)f(s,y)\,ds\in L_2([a,b]\times[c,d]),\quad \forall\, f\in L_2([a,b]\times[c,d]).$$

Следовательно, оператор T_1 является линейным ограниченным оператором на $L_2([a,b]\times[c,d])$. Если, кроме того, ядро $k(x,s,y)$ удовлетворяет условию

$$k(x,s,y)=\overline{k(s,x,y)}\ \text{ для почти всех }\ x,s\in[a,b]\ \text{ и }\ y\in[c,d],$$

тогда оператор T_1 является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$.

Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $A:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ — линейный ограниченный самосопряженный оператор. Через $\sigma(A)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ и $\sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ обозначим, соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр самосопряженного оператора A (см. [22, 23]).

Введем также следующие обозначения:

$$E_{\min}(A)=\inf\{\lambda:\lambda\in\sigma_{\mathrm{ess}}(A)\},\quad E_{\max}(A)=\sup\{\lambda:\lambda\in\sigma_{\mathrm{ess}}(A)\}.$$

Число $E_{\min}(A)\in\sigma(A)$ ($E_{\max}(A)\in\sigma(A)$) будем называть нижним краем (верхним краем) существенного спектра оператора A.

Для существенно ограниченной измеримой функции $\varphi\geqslant 0$ на измеримом множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^\nu$ мы определим [24]

$$\operatorname{esssup}_\Omega(\varphi)=\inf\big\{C:\ \mu(\{\xi\in\Omega:\ \varphi(\xi)>C\})=0\big\},$$

где $\mu(\cdot)$ мера Лебега на $\mathbb{R}$. Для измеримой функции φ на множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^\nu$, число $\lambda\in\mathbb{R}$ называется [24] существенным значением функции φ, если

$$\mu(\{\xi\in\Omega:\lambda-\varepsilon<\varphi(\xi)<\lambda+\varepsilon\})>0,$$

для всех $\varepsilon>0$. Обозначим через $\operatorname{essran}(\varphi)$ множество всех существенных значений функции φ.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — полная ортонормированная система функций из $L_2[a,b]$ и пусть $\{h_k(y)\}_{k=1}^\infty$ — система существенно ограниченных измеримых вещественных функций на $[c,d]$. Определим измеримую функцию $k_1(x,s,y)$ на $[a,b]^2\times[c,d]$ с помощью следующего правила:

$$k_1(x,s,y)=\sum_{k=1}^\infty\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}\,h_k(y),\tag{2}$$

где $|h_k(y)|\leqslant M_k$, $k\in\mathbb{N}$ и $\sum_{k=1}^\infty M_k=M<\infty$.

Предложение 1. *Частично интегральный оператор T_1 с ядром $k_1(x,s,y)$ (2) является самосопряженным ограниченным линейным оператором на $L_2([a,b]\times[c,d])$.*

$\lhd$ Линейность и самосопряженность интегрального оператора T_1 с ядром (2) проверяется легко. Мы докажем ограниченность оператора T_1. Имеем

$$T_1f(x,y)=\int\limits_a^b\left[\sum_{k=1}^\infty\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}\,h_k(y)\right]f(s,y)\,ds=\sum_{k=1}^\infty\widehat{T}_k^{(1)}f(x,y),$$

где

$$\widehat{T}_k^{(1)}f(x,y)=\int\limits_a^b\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}\,h_k(y)f(s,y)\,ds,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Пусть $f\in L_2([a,b]\times[c,d])$. Тогда для каждого интегрального оператора $\widehat{T}_k^{(1)}$, $k\in\mathbb{N}$, используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\big|\widehat{T}_k^{(1)}f(x,y)\big|\leqslant\big|h_k(y)\big|\,\big|\varphi_k(x)\big|\sqrt{\int\limits_a^b\big|f(s,y)\big|^2\,ds}.$$

Следовательно,

$$\left\|\widehat{T}_k^{(1)} f\right\|^2 \leqslant \int\limits_a^b \left|\varphi_k(x)\right|^2 dx \int\limits_c^d \left|h_k(y)\right|^2 \int\limits_a^b \left|f(s,y)\right|^2 ds dy \leqslant M_k^2 \left\|f\right\|^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\|T_1 f\| \leqslant M\|f\|$. Таким образом, оператор T_1 является ограниченным оператором в $L_2([a,b]\times[c,d])$. Предложение 1 доказано. $\rhd$

Рассмотрим следующие ортогональные проекторы P_k, $k \in \mathbb{N}$, в пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$:

$$P_k f(x,y) = \int\limits_a^b \varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}\, f(s,y)\, d\mu_1(s), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Предложение 2. *Пусть E — тождественный оператор в пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$. Тогда $P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots = E$.*

$\lhd$ По предположению $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система в $L_2[a,b]$. Для каждого $f(x,y) \in L_2([a,b]\times[c,d])$ имеем $f(x,\omega) \in L_2[a,b]$ при п. в. $\omega \in [c,d]$ и, пользуясь свойством ряда Фурье в гильбертовом пространстве $L_2[a,b]$, получим

$$f(x,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\omega)\varphi_n(x) \ \text{ при п. в. } \omega \in [c,d], \tag{3}$$

где

$$c_n(\omega) = \int\limits_a^b f(x,\omega)\,\overline{\varphi_n(x)}\, dx, \quad \omega \in [c,d].$$

Из (3) получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)\varphi_j - f_\omega \right\|_{L_2[a,b]} = 0 \ \text{ при п. в. } \omega \in [c,d],$$

где $f_\omega(x) = f(x,\omega)$.

Отсюда имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j - f_\omega \right\|_{L_2([a,b]\times[c,d])} = 0.$$

Таким образом, для каждого $f(x,y) \in L_2([a,b]\times[c,d])$ верно равенство $f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)\varphi_n(x)$. Отсюда

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^b f(s,y)\,\overline{\varphi_n(s)}\, ds \right) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_k\, f(x,y),$$

т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} P_k = E$. Предложение 2 доказано. $\rhd$

Предложение 3. *Для спектра $\sigma(T_1)$ ЧИО T_1 с невырожденным ядром $k_1(x,s,y)$ (2), справедливо включение*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{essran}(h_k) \subset \sigma(T_1).$$

Предложение 4. *Число $\lambda_0 \neq 0$ является собственным значением оператора T_1 тогда и только тогда, когда существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\mu_2(h_{j_0}^{-1}(\{\lambda_0\})) > 0$.*

Предложение 5. *Любое собственное значение $\lambda \neq 0$ ЧИО T_1 является бесконечно кратным.*

Доказательства предложений 3, 4 и 5 аналогичны доказательствам теоремы 2.3, предложений 2.1 и 2.4 из [21], соответственно.

3. Спектр частично интегрального оператора T_1

В этом параграфе будем исследовать спектр ЧИО T_1 с невырожденным ядром (2).

Предложение 6. *Имеет место свойство $0 \in \sigma(T_1)$.*

$\lhd$ Пусть $\lambda_k \in \operatorname{essran}(h_k) \neq \varnothing$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\lambda_k \in \sigma(T_1)$, $k \in \mathbb{N}$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ сходящийся, то $\lim_{k\to\infty} M_k = 0$. В силу $|h_k(y)| \leqslant M_k$, $k \in \mathbb{N}$, имеем $\lim_{k\to\infty} h_k(y) = 0$ при почти всех $y \in [c,d]$. Следовательно, для последовательности чисел $\lambda_k \in \sigma(T_1)$, $k \in \mathbb{N}$, имеем $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Из предложение 3 и в силу замкнутости спектра $\sigma(T_1)$ вытекает, что $0 \in \sigma(T_1)$. Предложение 6 доказано. $\rhd$

Предложение 7. *Если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{essran}(h_k))$, то оператор $T_1 - \lambda E$ обратим в $L_2([a,b]\times[c,d])$, а оператор $(T_1-\lambda E)^{-1}$ ограничен в $L_2([a,b]\times[c,d])$, более того,*

$$(T_1-\lambda E)^{-1} f(x,y) = -\frac{1}{\lambda}\left(f(x,y) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(y)}{h_k(y)-\lambda} P_k f(x,y)\right).$$

$\lhd$ Сначала докажем ограниченность оператора $(T_1-\lambda E)^{-1}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{essran}(h_k))$. Рассмотрим линейный оператор B:

$$Bf(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{h_k(y)-\lambda} P_k f(x,y) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(y)+\lambda-h_k(y)}{h_k(y)-\lambda} P_k f(x,y)$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left[-\sum_{k=1}^{\infty} P_k f(x,y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(y)}{h_k(y)-\lambda} P_k f(x,y)\right] = -\frac{1}{\lambda}\left[f(x,y) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(y)}{h_k(y)-\lambda} P_k f(x,y)\right].$$

Определим в $L_2([a,b]\times[c,d])$ линейный оператор A:

$$Af(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{T}_k^{(2)} f(x,y),$$

где

$$\widehat{T}_k^{(2)} f(x,y) = \int_a^b \frac{h_k(y)}{h_k(y)-\lambda}\, \varphi_k(x)\, \overline{\varphi_k(s)}\, f(s,y)\, ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $f \in L_2([a,b]\times[c,d])$ — произвольная функция. Тогда для интегральных операторов $\widehat{T}_k^{(2)}$, $k \in \mathbb{N}$, используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\left|\widehat{T}_k^{(2)} f(x,y)\right|^2 \leqslant \left|\frac{h_k(y)}{h_k(y)-\lambda}\right|^2 |\varphi_k(x)|^2 \int_a^b |f(s,y)|^2 ds.$$

Так как $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{essran}(h_k))$, то существует число $c > 0$ такое, что $|h_k(y) - \lambda| \geqslant c$ при почти всех $y \in [c, d]$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда имеем

$$\left\|\widehat{T}_k^{(2)}\right\|^2 = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \left|\widehat{T}_k^{(2)} f(x,y)\right|^2 dxdy$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \left|\varphi_k(x)\right|^2 dx \int\limits_a^b \int\limits_c^d \left|\frac{h_k(y)}{h_k(y)-\lambda}\right|^2 \left|f(s,y)\right|^2 dsdy \leqslant \frac{M_k^2}{c^2}\,\|f\|^2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\|Af\| \leqslant \frac{M}{c}\|f\|$. Последнее означает, что оператор A ограничен. Таким образом, оператор B является линейным ограниченным оператором в пространстве $L_2([a,b] \times [c,d])$.

Проверим равенство $(T_1 - \lambda E)B = E$. Имеем

$$Bf(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{h_k(y)-\lambda}\, P_k f(x,y).$$

Положим $g(x,y) = Bf(x,y)$. Тогда

$$(T_1 - \lambda E)Bf(x,y) = (T_1 - \lambda E)g(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} (h_k(y)-\lambda) P_k g(x,y)$$

$$= (h_1(y)-\lambda)P_1\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_j f(x,y)}{h_j(y)-\lambda}\right] + \ldots + (h_n(y)-\lambda)P_n\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_j f(x,y)}{h_j(y)-\lambda}\right] + \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_k^2 f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k f(x,y) = f(x,y).$$

Следовательно, $(T_1 - \lambda E)B = E$.

Аналогично легко показать, что $B(T_1 - \lambda E) = E$. Таким образом, оператор B является обратным оператором для оператора $T_1 - \lambda E$, т. е. $(T_1 - \lambda E)^{-1} = B$. Предложение 7 доказано. $\rhd$

В силу предложений 3, 5, 6 и 7 справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для спектра $\sigma(T_1)$ ЧИО T_1 с невырожденным ядром k_1* (2) *справедлива формула*

$$\sigma(T_1) = \sigma_{ess}(T_1) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{essran}(h_k)\right).$$

Для ЧИО T_1 с вырожденными ядрами аналоги теоремы 1 доказаны в работе [21].

Пусть T_2 — линейный интегральный оператор в пространстве $L_2([a,b] \times [c,d])$, заданный по формуле

$$(T_2 f)(x,y) = \int\limits_c^d q(x,t,y) f(x,t)\, dt. \tag{4}$$

Здесь $q(x,t,y)$ — измеримая функция в смысле Лебега на $[a,b] \times [c,d]^2$ и интеграл понимается в смысле Лебега на $[c,d]$.

Ядро $q(x,t,y)$ интегрального оператора T_2 обычно удовлетворяет условию

$$\int\limits_c^d q(x,t,y)f(x,t)\,dt \in L_2([a,b]\times[c,d]), \quad \forall\, f\in L_2([a,b]\times[c,d]).$$

Следовательно, оператор T_2 является линейным ограниченным оператором на $L_2([a,b]\times[c,d])$. Если, кроме того, ядро $q(x,s,y)$ удовлетворяет условию

$$q(x,t,y)=\overline{q(x,y,t)} \text{ для почти всех } x\in[a,b] \text{ и } y,t\in[c,d],$$

тогда оператор T_2 является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$.

Пусть $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система функций из $L_2[c,d]$ и пусть $\{p_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ — система существенно ограниченных измеримых вещественных функций на $[a,b]$. Определим измеримую функцию $k_2(x,t,y)$ на $[a,b]\times[c,d]^2$ с помощью следующего правила:

$$k_2(x,t,y)=\sum_{j=1}^{\infty} p_j(x)\,\psi_j(y)\,\overline{\psi_j(t)}, \tag{5}$$

где $|p_j(x)|\leqslant N_j$, $j\in\mathbb{N}$ и $\sum_{j=1}^{\infty}N_j=N<\infty$. Тогда ЧИО T_2 с невырожденным ядром $k_2(x,t,y)$:

$$(T_2f)(x,y)=\int\limits_c^d k_2(x,t,y)f(x,t)\,d\mu_2(t), \tag{6}$$

есть линейный ограниченный самосопряженный оператор в $L_2([a,b]\times[c,d])$.

Аналогичным образом теорема 1 формулируется для ЧИО T_2.

Теорема 2. *Для спектра $\sigma(T_2)$ ЧИО T_2 (6) с невырожденным ядром $k_2(x,t,y)$ (5) справедлива формула*

$$\sigma(T_2)=\sigma_{\rm ess}(T_2)=\{0\}\cup\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\operatorname{essran}(p_j)\right).$$

4. О спектре частично интегрального оператора T_1+T_2

В этом параграфе мы коротко изложим доказательство теоремы о существенном спектре ЧИО T_1+T_2. Надо подчеркнуть, что спектры оператора T_1+T_2 с непрерывным ядром исследованы в работе [18], а с вырожденным ядром исследованы в [21].

Предложение 8. *Ноль принадлежит существенному спектру оператора T_1+T_2.*

$\lhd$ Пусть $x_0\in[a,b]$ и $y_0\in[c,d]$ — фиксированные точки. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ определим подмножества $\mathfrak{J}_{\mathfrak{n}}^{(1)}\subset[a,b]$ и $\mathfrak{J}_{\mathfrak{n}}^{(2)}\subset[c,d]$:

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{n}}^{(1)}=\left\{x\in[a,b]:\ \frac{1}{n+1}<|x-x_0|<\frac{1}{n}\right\},$$

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{n}}^{(2)}=\left\{y\in[c,d]:\ \frac{1}{n+1}<|y-y_0|<\frac{1}{n}\right\}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Тогда $\mu_1(\mathfrak{J}_n^{(1)}) > 0$ и $\mu_2(\mathfrak{J}_n^{(2)}) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и имеем $\lim_{n\to\infty} \mu_1(\mathfrak{J}_n^{(1)}) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu_2(\mathfrak{J}_n^{(2)}) = 0$. Мы определим следующую последовательность ортонормированных функций $\chi_n^{(1)}(x) \in L_2[a,b]$ и $\chi_n^{(2)}(y) \in L_2[c,d]$:

$$\chi_n^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu_1(\mathfrak{J}_n^{(1)})}}, & x \in \mathfrak{J}_n^{(1)}, \\ 0, & x \notin \mathfrak{J}_n^{(1)}, \end{cases} \qquad \chi_n^{(2)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu_2(\mathfrak{J}_n^{(2)})}}, & y \in \mathfrak{J}_n^{(2)}, \\ 0, & y \notin \mathfrak{J}_n^{(2)}. \end{cases}$$

Определим через $f_n(x,y) \in L_2([a,b]\times[c,d])$, $n \in \mathbb{N}$, ортонормированную систему функций $f_n(x,y) = \chi_n^{(1)}(x)\chi_n^{(2)}(y)$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\|(T_1+T_2)f_n\| \leqslant \|T_1 f_n\| + \|T_2 f_n\|$.

Сначала покажем, что $\lim_{n\to\infty} \|T_1 f_n\| = 0$.

Пусть T_1^0 — ЧИО с ядром $k_1(x,s,y_0)$ (см. (2)), заданный по формуле

$$T_1^0 f(x,y) = \int_a^b k_1(x,s,y_0) f(s,y)\, ds.$$

Тогда

$$T_1^0 f_n(x,y) = \int_a^b k_1(x,s,y_0)\,\chi_n^{(1)}(s)\,\chi_n^{(2)}(y)\,ds = \big(K_{y_0}^{(1)}\chi_n^{(1)}\big)(x)\,\chi_n^{(2)}(y),$$

где $K_{y_0}^{(1)}$ — компактный интегральный оператор, действующий в $L_2[a,b]$ по равенству

$$K_{y_0}^{(1)}\varphi(x) = \int_a^b k_1(x,s,y_0)\,\varphi(s)\,ds.$$

Следовательно,

$$\big\|T_1^0 f_n\big\|^2 = \int\limits_{\mathfrak{J}_n^{(2)}} \big\|K_{y_0}^{(1)}\chi_n^{(1)}\big\|^2 \big|\chi_n^{(2)}(y)\big|^2 dy = \big\|K_{y_0}^{(1)}\chi_n^{(1)}\big\|^2_{L_2[a,b]} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

С другой стороны, получим

$$\big(T_1 - T_1^0\big) f_n(x,y) = \int_a^b \big(k_1(x,s,y) - k_1(x,s,y_0)\big)\, f_n(s,y)\,ds$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \big(h_k(y) - h_k(y_0)\big)\,\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}\, f_n(s,y)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{T}_k^{(3)} f_n(x,y).$$

где

$$\widehat{T}_k^{(3)} f_n(x,y) = \int_a^b \big(h_k(y) - h_k(y_0)\big)\,\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(s)}\, f_n(s,y)\,ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\big|\widehat{T}_k^{(3)} f_n(x,y)\big| \leqslant \big|h_k(y) - h_k(y_0)\big|\,\big|\varphi_k(x)\big|\,\big|\chi_n^{(2)}(y)\big| \sqrt{\int\limits_{\mathfrak{J}_n^{(1)}} \big|\,\overline{\varphi_k(s)}\,\big|^2\, ds}\,.$$

Следовательно,

$$\left|\widehat{T}_k^{(3)} f_n(x,y)\right|^2 \leqslant \left|h_k(y)-h_k(y_0)\right|^2 \left|\varphi_k(x)\right|^2 \left|\chi_n^{(2)}(y)\right|^2 \int\limits_{\mathfrak{I}_n^{(1)}} \left|\, \overline{\varphi_k(s)}\,\right|^2 ds, \quad n,k\in\mathbb{N}.$$

Надо отметить, что для каждого $k\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство $|h_k(y)-h_k(y_0)|\leqslant 2M_k$, при п. в. $y\in\mathfrak{I}_n^{(2)}$, так как $|h_k(y)|\leqslant M_k$, $k\in\mathbb{N}$ (см. (2)). Таким образом, имеем

$$\left\|\widehat{T}_k^{(3)} f_n\right\|^2 = \int\limits_a^b\int\limits_c^d \left|\widehat{T}_k^{(3)} f_n(x,y)\right|^2 dxdy$$

$$\leqslant \int\limits_a^b\int\limits_c^d \left[(2M_k)^2 \left|\varphi_k(x)\right|^2 \left|\chi_n^{(2)}(y)\right|^2 \int\limits_{\mathfrak{I}_n^{(1)}} \left|\, \overline{\varphi_k(s)}\,\right|^2 ds\right] dxdy = (2M_k)^2 \int\limits_{\mathfrak{I}_n^{(1)}} \left|\, \overline{\varphi_k(s)}\,\right|^2 ds, \quad n,k\in\mathbb{N},$$

т. е.

$$\left\|\widehat{T}_k^{(3)} f_n\right\| \leqslant 2M_k \sqrt{\int\limits_{\mathfrak{I}_n^{(1)}} \left|\, \overline{\varphi_k(s)}\,\right|^2 ds}, \quad k,n\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$\left\|\left(T_1-T_1^0\right) f_n\right\| \leqslant 2M \sqrt{\int\limits_{\mathfrak{I}_n^{(1)}} \left|\, \overline{\varphi_k(s)}\,\right|^2 ds}.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, имеем $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathfrak{I}_n^{(1)}} |\,\overline{\varphi_k(s)}\,|^2 ds = 0$ для всех $k\in\mathbb{N}$, т. е. существует достаточно большое $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что $\int_{\mathfrak{I}_n^{(1)}} |\,\overline{\varphi_k(s)}\,|^2 ds < \frac{\varepsilon^2}{(2M_k n)^2 k^4}$ при каждом $n\geqslant n_0$, где ε — достаточно малое положительное число. Следовательно,

$$\left\|\left(T_1-T_1^0\right) f_n\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{k^2\, n} = \frac{\varepsilon}{n}\, C_0 \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

где $C_0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Отсюда имеем $\lim_{n\to\infty}\|(T_1-T_1^0)f_n\|=0$.

Таким образом, из $\|T_1 f_n\|\leqslant\|(T_1-T_1^0)f_n\|+\|T_1^0 f_n\|$ получим, что $\lim_{n\to\infty}\|T_1 f_n\|=0$. Аналогично докажем, что $\lim_{n\to\infty}\|T_2 f_n\|=0$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\|(T_1+T_2)f_n\|=0$. Из определения существенного спектра [22, 23] вытекает $0\in\sigma_{\rm ess}(T_1+T_2)$. Предложение 8 доказано. $\rhd$

Предложение 9. *Имеет место соотношение*

$$\sigma(T_1)\cup\sigma(T_2)\subset\sigma_{\rm ess}(T_1+T_2).$$

$\lhd$ Мы покажем, что $\sigma(T_1)\subset\sigma_{\rm ess}(T_1+T_2)$. Пусть $\lambda_0\in\operatorname{essran}(h_{j_0})$, $\lambda_0\neq0$ и y_0 — произвольная точка из подмножества $h_{j_0}^{-1}(\{\lambda_0\})$. Определим через $g_n(x,y)\in L_2([a,b]\times[c,d])$ ортонормированную систему функций: $g_n(x,y)=\varphi_{j_0}(x)\chi_n^{(2)}(y)$, $n\in\mathbb{N}$. Доказательство равенства

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(T_1-\lambda_0 E)g_n\right\|=0 \tag{7}$$

аналогично доказательству теоремы 2.3 из [21].

Для оператора T_2 имеем

$$T_2 g_n(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_c^d p_j(x)\psi_j(y)\overline{\psi_j(t)} g_n(x,t)\,dt = \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{T}_j^{(4)} g_n(x,y),$$

где

$$\widehat{T}_j^{(4)} g_n(x,y) = \int_c^d p_j(x)\psi_j(y)\overline{\psi_j(t)} g_n(x,t)\,dt, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\|T_2 g_n\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|\widehat{T}_j^{(4)} g_n\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} N_j \sqrt{\int_{\mathfrak{I}_n^{(2)}} |\,\overline{\psi_j(t)}\,|^2 dt}\,. \tag{8}$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, существует достаточно большое $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\int_{\mathfrak{I}_n^{(2)}} |\,\overline{\psi_j(t)}\,|^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{j^4 n^2 N_j^2}$ при всех $n \geqslant n_0$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое. Тогда из (8) получим $\lim_{n\to\infty} \|T_2 g_n\| = 0$. Отсюда и из (7) вытекает $\lim_{n\to\infty} \|(T_1 + T_2 - \lambda_0 E) g_n\| = 0$, т. е. по определению существенного спектра $\lambda_0 \in \sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$.

Аналогично получим, что $\sigma(T_2) \setminus \{0\} \subset \sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$. В силу предложения 8 имеем $0 \in \sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$. Предложение 9 доказано. $\rhd$

Пользуясь предложением 4 и применяя универсальную технику, изложенную в доказательствах утверждений из [21] о спектре ЧИО $T_1 + T_2$ с вырожденными ядрами, получим описание существенного спектра самосопряженного ЧИО $T_1 + T_2$ с невырожденными ядрами (см. также теоремы 4.2 и 5.4 из [18]). Не повторяя громоздкой процедуры, изложенной в [21], мы сформулируем следующие теоремы.

Теорема 3. *Для существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$ ЧИО $T_1 + T_2$ с невырожденным ядром верна формула*

$$\sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{essran}(h_k) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{essran}(p_j) \right).$$

Теорема 4. *Пусть выполняются следующие условия для функций $h_j(y)$, $j \in \mathbb{N}$ и $p_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ в ядрах (2) и (5):*

$$h_j(y) \geqslant h_{j+1}(y) > 0,\ j \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad p_k(x) \geqslant p_{k+1}(x) > 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

Пусть существуют убывающие последовательности из положительных чисел $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ и $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такие, что

(i) $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$;

(ii) $\max\{\mathrm{esssup(h_1), esssup(p_1)}\} = \max\{\mathrm{a_1, b_1}\}$;

(iii) $h_j(y) \geqslant a_j$ *при п. в.* $y \in [c,d]$, $j \in \mathbb{N}$ *и* $p_k(x) \geqslant b_k$ *при п. в.* $x \in [a,b]$, $k \in \mathbb{N}$.

Тогда ЧИО $T_1 + T_2$ имеет счетное число собственных значений, лежащих выше верхнего края $E_{\max}(T_1 + T_2)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$.

$\lhd$ Пусть V_1, V_2 — самосопряженные частично интегральные операторы в пространстве $L_2([a,b] \times [c,d])$ с невырожденным ядром, заданные по формуле

$$V_1 f(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b a_j \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(s)} f(s,y)\,ds, \quad V_2 f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_c^d b_k \psi_k(y)\overline{\psi_k(t)} f(x,t)\,dt.$$

Для существенного и дискретного спектра самосопряженного ЧИО $V_1 + V_2$ верны следующие равенства [12]:

$$\begin{gathered}\sigma_{\text{ess}}(V_1+V_2)=\{0\}\cup\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}\cup\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}},\\ \sigma_{\text{disc}}(V_1+V_2)=\big\{\omega:\,\omega=a_j+b_k\notin\sigma_{\text{ess}}(V_1+V_2),\,j,k\in\mathbb{N}\big\}.\end{gathered}\tag{9}$$

Следовательно, ЧИО $V_1 + V_2$ имеет счетное число собственных значений, лежащих выше верхнего края $E_{\max}(V_1 + V_2)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(V_1 + V_2)$, т. е. множество $\sigma_{\text{disc}}(V_1 + V_2) \cap (E_{\max}(V_1 + V_2), \infty)$ является счетным множеством.

В силу условий (ii) и (iii) теоремы 4 следует, что $E_{\max}(T_1 + T_2) = E_{\max}(V_1 + V_2)$ и $V_1 \leqslant T_1$, $V_2 \leqslant T_2$. Тогда из неравенства $V_1 + V_2 \leqslant T_1 + T_2$ и леммы 2.2 из [25] ЧИО $T_1 + T_2$ имеет счетное число собственных значений, лежащих выше верхнего края $E_{\max}(T_1 + T_2)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$. Теорема 4 доказана. $\rhd$

Пример 1. Пусть $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$ и для ядер операторов T_1 и T_2 имеют место следующие равенства:

$$h_1(y)\equiv 2,\ h_j(y)=\frac{1}{j^2}+e^{-jy},\ j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\quad\text{и}\quad p_1(x)\equiv 1,\ p_k(x)=\frac{1+\sin\frac{\pi x}{2}}{2k^2},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Рассмотрим убывающие последовательности из положительных чисел $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ и $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$a_1=2,\ a_j=\frac{1}{j^2}+\frac{1}{e^j},\ j\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\quad b_1=1,\ b_k=\frac{1}{2k^2},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Тогда в силу теорем 1, 2 и 3 для существенных спектров операторов T_1, T_2 и $T_1 + T_2$ справедливы следующие равенства:

$$\sigma_{\text{ess}}(T_1)=\{0,2\}\cup\left(\bigcup_{j=2}^{\infty}\left[\frac{1}{j^2}+\frac{1}{e^j};\frac{1}{j^2}+1\right]\right)=\left[0,\frac{5}{4}\right]\cup\{2\},$$

$$\sigma_{\text{ess}}(T_2)=\{0,1\}\cup\left(\bigcup_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2k^2};\frac{1}{k^2}\right]\right)=\left[0,\frac{1}{4}\right]\cup\{1\},$$

$$\sigma_{\text{ess}}(T_1+T_2)=\sigma_{\text{ess}}(T_1)\cup\sigma_{\text{ess}}(T_2)=\left[0,\frac{5}{4}\right]\cup\{2\}.$$

Из (9) вытекает $\sigma_{\text{ess}}(V_1+V_2)=\{0,1,2\}\cup\big\{\frac{1}{j^2}+\frac{1}{e^j}\big\}_{j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}\cup\big\{\frac{1}{2k^2}\big\}_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$. Здесь верно равенство $E_{\max}(T_1 + T_2) = E_{\max}(V_1 + V_2) = 2$.

Таким образом, в данном примере для ЧИО $T_1 + T_2$ выполняются все условия теоремы 4. Следовательно, ЧИО $T_1 + T_2$ имеет счетное число положительных собственных значений, лежащих выше верхнего края $E_{\max}(T_1 + T_2)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$.

Литература

1. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений.—М.: Наука, 1948.—296 с.
2. *Aleksandrov V. M., Kovalenko E. V.* On a class of integral equations in mixed problems of continuum mechanics // Soviet Phys. Dokl.—1980.—Vol. 25, № 2.—P. 354–356.
3. *Aleksandrov V. M., Kovalenko E. V.* Contact interaction of bodies with coatings in the presense of abrasion // Soviet Phys. Dokl.—1984.—Vol. 29, № 4.—P. 340–342.
4. *Manzhirov A. V.* On a method for solving two-dimensional integral equation for exially symmetric contact problem for bodies with complex layer rheology // J. Appl. Math. Mech.—1985.—T. 49, № 6.—P. 777–782. DOI: 10.1016/0021-8928(85)90016-4.

5. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3, ч. 2.—М.–Л., 1934.—318 с.
6. *Мюнтц Г.* Интегральные уравнения. Т. 1.—Л.–М., 1934.—330 с.
7. *Эшкабилов Ю. Х.* Об одном дискретном «трехчастичном» операторе Шредингера в модели Хаббарда // Теорет. и мат. физ.—2006.—Т. 149, № 2.—С. 228–243. DOI: 10.4213/tmf4229.
8. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices // Russ. J. Math. Phys.—2007.—Vol. 14, № 4.—P. 377–387. DOI: 10.1134/S1061920807040024.
9. *Расулов Т. Х.* Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Теорет. и мат. физ.—2010.—Т. 163, № 1.—С. 34–44. DOI: 10.4213/tmf6485.
10. *Appell J. M, Kalitvin A. S., Nashed M. Z.* On some partial integral equations arising in the mechanics of solids // Z. Angew. Math. Mech.—1999.—Vol. 79, № 10.—P. 703–713.
11. *Калитвин А. С.* Линейные операторы с частными интегралами.—Воронеж: ЦЧКИ, 2000.—252 с.
12. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.—N. Y., 2000.—578 p. DOI: 10.1201/9781482270402.
13. *Калитвин А. С.* О спектре линейных операторов с частными интегралами и положительными ядрами // Операторы и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр.—Ленинград, 1988.—С. 43–50.
14. *Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* On the theory of partial integral operators // J. Integral Equ. Appl.—1991.—Vol. 3, № 3.–P. 351–382. DOI: 10.1216/jiea/1181075630.
15. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Линейные операторы и уравнения с частными интегралами // Соврем. матем. Фундам. напрвления.—2019.—Т. 65, № 3.—С. 390–433. DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
16. *Эшкабилов Ю. Х.* О спектре тензорной суммы компактных операторов // Узбек. мат. журн.—2005.—№ 3.—С. 104–112.
17. *Эшкабилов Ю. Х.* Частично интегральный оператор с ограниченным ядром // Мат. тр.—2008.—Т. 11, № 1.—С. 192–207.
18. *Эшкабилов Ю. Х.* Существенный и дискретный спектры частично интегральных операторов // Мат. тр.—2008.—Т. 11, № 2.—С. 187–203.
19. *Эшкабилов Ю. Х.* О дискретном спектре частично интегральных операторов // Мат. тр.—2012.—Т. 15, № 2.—С. 194–203.
20. *Арзикулов Г. П., Эшкабилов Ю. Х.* О существенном и дискретном спектрах одного частично интегрального оператора типа Фредгольма // Мат. тр.—2014.—Т. 17, № 2.—С. 23–40.
21. *Arzikulov G. P., Eshkabilov Yu. Kh.* On the spectra of partial integral operators // Uzbek Math. J.—2015.—№ 2.—P. 148–159.
22. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1977.—412 с.
23. *Pankrashkin K.* Introduction to the Spectral Theory.—Orsay, 2014.
24. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—750 с.
25. *Эшкабилов Ю. Х.* О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса // Мат. тр.—2011.—Т. 14, № 1.—С. 195–211.

Статья поступила 19 октября 2021 г.

Култураев Даврон Жураевич
Каршинский государственный униврeтитет,
базовый докторант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений
Узбекистан, 180100, Карши, ул. Кучабаг, 17
E-mail: davron_2189@mail.ru

Эшкабилов Юсуп Халбаевич
Каршинский государственный униврeтитет,
профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений
УЗБЕКИСТАН, 180100, Карши, ул. Кучабаг, 17,
E-mail: yusup62@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 4, P. 91–104

SPECTRAL PROPERTIES OF SELF-ADJOINT PARTIALLY INTEGRAL OPERATORS WITH NON-DEGENERATE KERNELS

Kulturayev, D. J.[1] and Eshkabilov, Yu. Kh.[1]

[1] Karshi State University, 17 Kuchabag St., Karshi 180100, Uzbekistan

E-mail: davron_2189@mail.ru, yusup62@mail.ru

Abstract. In this paper, we consider linear bounded self-adjoint integral operators T_1 and T_2 in the Hilbert space $L_2([a,b]\times[c,d])$, the so-called partially integral operators. The partially integral operator T_1 acts on the functions $f(x,y)$ with respect to the first argument and performs a certain integration with respect to the argument x, and the partially integral operator T_2 acts on the functions $f(x,y)$ with respect to the second argument and performs some integration over the argument y. Both operators are bounded, however both are not compact operators. However, the operator T_1T_2 is compact and $T_1T_2 = T_2T_1$. Partially integral operators arise in various areas of mechanics, the theory of integro-differential equations, and the theory of Schrodinger operators. In this paper, the spectral properties of linear bounded self-adjoint partially integral operators T_1, T_2 and $T_1 + T_2$ with nondegenerate kernels are investigated. A formula is obtained for describing the essential spectra of the partially integral operators T_1 and T_2. It is shown that the operators T_1 and T_2 have no discrete spectrum. A theorem on the structure of the essential spectrum of the partially integral operator $T_1 + T_2$ is proved. The problem of the existence of a countable number of eigenvalues in the discrete spectrum of the partially integral operator $T_1 + T_2$ is studied.

Key words: partially integral operator, spectra, essential spectrum, discrete spectrum, non-degenerate kernel.

AMS Subject Classification: 47A10, 47A11, 47B38, 47G10.

For citation: *Kulturayev, D. J. and Eshkabilov, Yu. Kh.* Spectral Properties of Self-Adjoint Partially Integral Operators with Non-Degenerate Kernels, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 4, pp. 91–104 (in Russian). DOI: 10.46698/y9559-5148-4454-e.

References

1. *Vekua, I. N. Novye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* [New Methods for Solving Elliptic Equations], Moscow, Nauka, 1948, 296 p. (in Russian).
2. *Aleksandrov, V. M. and Kovalenko, E. V.* On a Class of Integral Equations in Mixed Problems of Continum Mechanics, *Soviet Physics. Doklady*, 1980, vol. 25, no. 2, pp. 354–356.
3. *Aleksandrov, V. M. and Kovalenko, E. V.* Contact Interaction of Bodies with Coatings in the Presense of Abrasion, *Soviet Physics. Doklady*, 1984, vol. 29, no. 4, pp. 340–342.
4. *Manzhirov, A. V.* On a Method for Solving Two-Dimensional Integral Equation for Exially Symmetric Contact Problem for Bodies with Complex Layer Rheology, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1985, vol. 49, no. 6, pp. 777–782. DOI: 10.1016/0021-8928(85)90016-4.
5. *Gursa, E. Kurs matematicheskogo analiza. T. 3, ch. 2* [A Course of Mathematical Analysis. Vol. 3, part 2], Moscow, Leningrad, 1934, 318 p. (in Russian).
6. *Muntz, G. Integral'nye uravneniya. T. 1* [Integral Equations. Vol. 1], Leningrad, Moscow, 1934, 330 p. (in Russian).
7. *Eshkabilov, Yu. Kh.* A Discrete "Three-Particle" Operator Schrodinger in the Hubbard Model, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2006, vol. 149, no. 2, pp. 1497–1511. DOI: 10.1007/s11232-006-0133-2.
8. *Albeverio, S., Lakaev, S. N. and Muminov, Z. I.* On the Number of Eigenvalues of a Model Operator Associated to a System of Three-Particles on Lattices, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2007, vol. 14, no. 4, pp. 377–387. DOI: 10.1134/S1061920807040024.
9. *Rasulov, T. Kh.* Asymptotics of the Discrete Spectrum of One Model Operator Associated with a System of Three Particles on Lattice, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2010, vol. 163, no. 1, pp. 429–437. DOI: 10.1007/s11232-010-0033-3.

10. *Appell, J. M, Kalitvin, A. S. and Nashed, M. Z.* On Some Partial Integral Equations Arising in the Mechanics of Solids, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, vol. 79, no. 10, pp. 703–713. DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199910)79:10<703::AID-ZAMM703>3.0.CO;2-W.
11. *Kalitvin, A. S. Lineynye operatory s chastnymi integralami* [Linear Operators with Partial Integrals], Voronezh, Central Black Earth Book Publishing House, 2000, 252 p. (in Russian).
12. *Appell, J. M., Kalitvin, A. S. and Zabrejko, P. P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, New York, 2000, 578 p. DOI: 10.1201/9781482270402.
13. *Kalitvin, A. S.* On the Spectrum of Linear Operators with Partial Integrals and Positive Kernels, *Operatory i ikh prilozheniya: Mezhvuzovskiy sbornik nauchnukh trudov* [Operators and their Applications: Interuniversity Compilation of Scientific Works], Leningrad, 1988, pp. 43–50 (in Russian).
14. *Kalitvin, A. S. and Zabrejko, P. P.* On the Theory of Partial Integral Operators, *Journal of Integral Equations and Applications*, 1991, vol. 3, no. 3, pp. 351–382. DOI: 10.1216/jiea/1181075630.
15. *Kalitvin, A. S. and Kalitvin, V. A.* Linear Operators and Equations with Partial Integrals, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2019, vol. 65, no. 3, pp. 390–433 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
16. *Eshkabilov, Yu. Kh.* On the Spectrum of the Tensor Sum of Compact Operators, *Uzbek Mathematical Journal*, 2005, no. 3, pp. 104–112 (in Russian).
17. *Eshkabilov, Yu. Kh.* Partial Integral Operator with Bounded Kernels, *Siberian Advances in Mathematics*, 2008, vol. 19, no. 3, pp. 151–161. DOI: 10.3103/S1055134409030018.
18. *Eshkabilov, Yu. Kh.* Essential and Discrete Spectra of Partially Integral Operators, *Siberian Advances in Mathematics*, 2008, vol. 19, no. 4, pp. 233–244. DOI: 10.3103/S1055134409040026.
19. *Eshkabilov, Yu. Kh.* On the Discrete Spectrum of Partially Integral Operators, *Siberian Advances in Mathematics*, 2012, vol. 23, no. 4, pp. 227–233. DOI: 10.3103/S1055134413040019.
20. *Arzikulov, G. P. and Eshkabilov, Yu. Kh.* On the Essential and the Discrete Spectra of a Fredholm Type Partial Integral Operator, *Siberian Advances in Mathematics*, 2014, vol. 25, no. 4, pp. 231–242. DOI: 10.3103/S105513441504001X.
21. *Arzikulov, G. P. and Eshkabilov, Yu. Kh.* On the Spectra of Partial Integral Operators, *Uzbek Mathematical Journal*, 2015, no. 2, pp. 148–159.
22. *Reed, M. and Simon, B. Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki. T. 1. Funktsional'nyy analiz* [Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional Analysis], Moscow, Mir, 1977, 412 p. (in Russian).
23. *Pankrashkin, K. Introduction to the Spectral Theory*, Orsay, 2014.
24. *Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1984, 750 p. (in Russian).
25. *Eshkabilov, Yu. Kh.* On Infinity of the Discrete Spectrum Operators in the Friedrichs Model, *Siberian Advances in Mathematics*, 2012, vol. 22, no. 1, pp. 1–12. DOI: 10.3103/S1055134412010014.

Received October 19, 2021

Kulturayev Davron Zhuraevich
Karshi State University,
17 Kuchabag St., Karshi 180100, Uzbekistan,
Ph. D Student of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations
E-mail: `davron_2189@mail.ru`

Eshkabilov Yusup Khalbaevich
Karshi State University,
17 Kuchabag St., Karshi 180100, Uzbekistan,
Professor of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations
E-mail: `yusup62@mail.ru`