

УДК 539.3

DOI 10.46698/v8145-3776-3524-q

МАСШТАБНО-ЗАВИСИМАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

А. О. Ватульян¹, С. А. Нестеров¹

¹ Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: aovatulyan@srfedu.ru, 1079@list.ru

Аннотация. Рассмотрена задача деформирования слоистого прямоугольника, нижняя сторона которого жестко закреплена, на верхней стороне действует распределенная нормальная нагрузка, а боковые стороны находятся в условиях скользящей заделки. Для учета масштабных эффектов применяется однопараметрическая градиентная теория упругости. Граничные условия на боковых гранях допускают применение метода разделения переменных. Перемещения и механическая нагрузка были разложены в ряды Фурье. Для нахождения гармоник перемещений имеем систему двух дифференциальных уравнений четвертого порядка. Решение системы дифференциальных уравнений основано на введении упругого потенциала перемещений. Незвестные константы интегрирования находят путем удовлетворения граничных условий и условий сопряжения, записанных для гармоник перемещений. На конкретных примерах проведены вычисления горизонтального и вертикального распределения перемещений, моментных и полных напряжений слоистого прямоугольника. Показано отличие распределений перемещений и напряжений, найденных на основе решений задачи в классической постановке и в градиентной постановке. Выяснено, что полные напряжения испытывают небольшой скачок на линии сопряжения, обусловленный тем, что согласно градиентной теории упругости на линии сопряжения должны быть непрерывны не полные напряжения, а компоненты векторов нагрузки. Выявлено значительное влияние увеличения масштабного параметра на изменения значений перемещений, полных и моментных напряжений.

Ключевые слова: градиентная теория упругости, масштабные эффекты, слоистый прямоугольник, деформация, моментные напряжения, полные напряжения.

AMS Subject Classification (2010): 74B05.

Образец цитирования: Ватульян А. О., Нестеров С. А. Масштабно-зависимая модель деформирования слоистого прямоугольника // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 24, вып. 4.—С. 48–57. DOI: 10.46698/v8145-3776-3524-q.

1. Введение

В последние годы в связи с развитием микроэлектроники и микро-электромеханических систем, большое внимание ученых привлечено к исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) составных тел малых размеров. В таких структурах размеры исследуемых элементов могут становиться соизмеримыми с характерными размерами микроструктуры материала и согласно экспериментальным данным [1] могут проявляться масштабные эффекты, т. е. зависимость НДС от характерных размерных параметров исследуемой модели. Для описания масштабных эффектов используется градиентная теория упругости, в определяющие уравнения которой входят градиентные параметры размерности длины.

Градиентная теория упругости (ГТУ) получила свое развитие в 60-е годы прошлого века в работах Тупина [2] и Миндлина [3]. В модели Тупина — Миндлина плотность энергии деформации зависит не только от деформации, но и от ее градиента. Модель Тупина — Миндлина содержит в определяющих уравнениях 5 градиентных параметров, что затрудняет нахождение аналитического решения. Для преодоления этой трудности Айфантис в [4] предложил однопараметрическую модель ГТУ. За последние 20 лет в рамках модели Айфантиса выполнено немало аналитических исследований НДС однородных тел, как в одномерной постановке задачи, так и в двумерной. В частности в [5, 6] были построены точные аналитические решения плоской задачи ГТУ для прямоугольника. В работе [7] на основе метода коллокаций Треффтца получено приближенное аналитическое решение задачи ГТУ для прямоугольника.

Исследованию задач ГТУ для слоистых тел посвящено небольшое количество работ [8–14]. При этом исследования обычно ограничиваются одномерной постановкой задачи. Так, в [9] решается задача изгиба слоистой микро-балки с частичным покрытием. В [11] решена задача о термоупругом деформировании составного стержня. Для нахождения напряжений Коши применялся асимптотический метод Вишика — Люстерника, учитывающий наличие погранслоистых решений в окрестности границ и точки сопряжения стержней. В [12, 13] на основе вариационного принципа Лагранжа получены уравнения равновесия и граничные условия для составного цилиндра. После нахождения радиального распределения температуры решение для радиальных перемещений представлено в виде суммы решений задачи в классической постановке и дополнительных погранслоистых слагаемых.

В случае двумерной постановки решена плоская задача ГТУ о равновесии полосы с покрытием, на верхней границе которого действует локализованная на небольшом отрезке нормальная нагрузка [10, 14]. Решение проводилось с использованием интегрального преобразования Фурье и его численного обращения. Проведен сравнительный анализ НДС тел, рассчитанный в рамках классической постановки и градиентной постановки, оценены масштабные эффекты. Однако плоская задача ГТУ для составных прямоугольных областей остается неисследованной.

В настоящей работе в рамках градиентной модели Айфантиса исследуется НДС слоистого прямоугольника с граничными условиями на боковых гранях, допускающими применение метода разделения переменных.

2. Постановка задачи

В случае линейного изотропного материала выражение для плотности энергии деформации для модели Айфантиса имеет вид [4]:

$$w = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + l^2 \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii,k} \varepsilon_{jj,k} + \mu \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{ij,k} \right). \quad (1)$$

Здесь λ и μ — параметры Ламе, ε_{ij} — компоненты тензора малых деформаций, l — градиентный параметр, имеющий размерность длины.

Вводятся определяющие соотношения для компонент тензора напряжений Коши $\tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$, тензора моментных напряжений $m_{ijk} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = l^2 \tau_{ij,k}$, тензора полных напряжений $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk,k}$. Математическая постановка задачи градиентной теории упругости состоит из уравнений равновесия, записанных в полных напряжениях

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2)$$

естественных статических граничных условий

$$m_{ijk,k}n_jn_k = r_i, \quad \tau_{ij}n_j - m_{ijk,k}n_j - (m_{ijk,k}n_k)_{,j} + (m_{ijk,k}n_jn_k)_{,s}n_s = t_i, \quad (3)$$

кинематических граничных условий

$$u_i = \bar{u}_i, \quad u_{i,l}n_l = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n}. \quad (4)$$

Здесь t_i, r_i — компоненты векторов заданных сил на поверхности тела, n_i — компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке.

В рамках плоской деформации ($u_1 = u_1(x_1, x_3)$, $u_2 = 0$, $u_3 = u_3(x_1, x_3)$) рассмотрим равновесие двухслойного прямоугольника $S = [-L, L] \times [0, h]$, имеющего линию сопряжения $x_3 = h_1$. Нижняя граница прямоугольника $x_3 = 0$ жестко закреплена, а на верхней границе $x_3 = h$ действует нормальная механическая нагрузка $p_0g(x_1)$, $x_1 \in [-L, L]$. Боковые стороны прямоугольника $x_1 = \pm L$ находятся в условиях скользящей заделки.

В декартовой системе координат (x_1, x_3) выражения для ненулевых компонент тензоров напряжений Коши, моментных и полных напряжений имеют вид [5]: $\tau_{11} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$, $\tau_{13} = \mu(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1})$, $\tau_{33} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, $m_{111} = l^2\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}$, $m_{311} = m_{131} = l^2\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1}$, $m_{113} = l^2\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_3}$, $m_{133} = m_{313} = l^2\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}$, $m_{331} = l^2\frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_1}$, $m_{333} = l^2\frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}$, $\sigma_{11} = \tau_{11} - \frac{\partial m_{111}}{\partial x_1} - \frac{\partial m_{133}}{\partial x_3}$, $\sigma_{13} = \tau_{13} - \frac{\partial m_{131}}{\partial x_1} - \frac{\partial m_{133}}{\partial x_3}$, $\sigma_{33} = \tau_{33} - \frac{\partial m_{331}}{\partial x_1} - \frac{\partial m_{333}}{\partial x_3}$.

Поскольку уравнения равновесия в градиентной теории упругости имеют повышенный порядок дифференциальных уравнений по сравнению с классической теорией, то, применяя вариационный принцип Лагранжа, были получены дополнительные граничные условия и условия сопряжения. В качестве дополнительных условий имеем:

- 1) $\frac{\partial u_3}{\partial x_1}(\pm L, x_3) = 0$, $r_1(\pm L, x_3) = m_{111}(\pm L, x_3) = 0$;
- 2) $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, 0) = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, 0)$, $r_1(x_1, h) = m_{133}(x_1, h) = 0$, $r_3(x_1, h) = m_{333}(x_1, h) = 0$;
- 3) непрерывность градиентов перемещений и компонент векторов напряжений $r_1 = m_{133}$, $r_3 = m_{333}$, $t_1 = \tau_{13} - m_{131,1} - m_{133,3} - m_{113,1}$, $t_3 = \tau_{33} - m_{331,1} - m_{333,3} - m_{313,1}$ на линии сопряжения $x_3 = h_1$.

Для упрощения расчетов примем градиентный параметр одинаковым для слоев прямоугольника, т. е. $l_1 = l_2 = l$. Тогда постановка краевой задачи о деформировании слоистого прямоугольника примет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0, \quad x_1 \in [-L, L], \quad x_3 \in [0, h], \quad (5)$$

$$u_1(\pm L, x_3) = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(\pm L, x_3) = 0, \quad (6)$$

$$\{\tau_{31} - m_{311,1} - m_{313,3} - m_{331,3}\}(\pm L, x_3) = m_{111}(\pm L, x_3) = 0, \quad x_3 \in [0, h], \quad (7)$$

$$u_1^{(1)}(x_1, 0) = u_3^{(1)}(x_1, 0) = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3}(x_1, 0) = \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_3}(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in [-L, L], \quad (8)$$

$$t_1^{(2)}(x_1, h) = 0, \quad t_3^{(2)}(x_1, h) = p_0g(x_1), \quad r_1^{(2)}(x_1, h) = r_3^{(2)}(x_1, h) = 0, \quad (9)$$

$$u_1^{(1)}(x_1, h_1) = u_1^{(2)}(x_1, h_1), \quad u_3^{(1)}(x_1, h_1) = u_3^{(2)}(x_1, h_1),$$

$$\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3}(x_1, h_1) = \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_3}(x_1, h_1), \quad \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_3}(x_1, h_1) = \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_3}(x_1, h_1), \quad (10)$$

$$t_1^{(1)}(x_1, h_1) = t_1^{(2)}(x_1, h_1), \quad t_3^{(1)}(x_1, h_1) = t_3^{(2)}(x_1, h_1),$$

$$r_1^{(1)}(x_1, h_1) = r_1^{(2)}(x_1, h_1), \quad r_3^{(1)}(x_1, h_1) = r_3^{(2)}(x_1, h_1), \quad x_1 \in [-L, L].$$

Обезразмерим задачу (5)–(10) согласно формулам: $\xi_1 = \frac{x_1}{h}$, $\xi_3 = \frac{x_3}{h}$, $U_i = \frac{u_i}{h}$, $\bar{t}_i = \frac{t_i}{\mu_0}$, $\bar{r}_i = \frac{r_i}{\mu_0 h}$, $\Omega_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu_0}$, $S_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\mu_0}$, $M_{ijk} = \frac{m_{ijk}}{\mu_0 h}$, $P = \frac{t_3}{\mu_0}$, $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu_0}$, $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$, $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_0}$, $\bar{h}_1 = \frac{h_1}{h}$, $\alpha = \frac{l}{h}$, $\eta = \frac{l}{h}$, $\mu_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} \mu(x_3)$.

Тогда постановка обезразмеренной задачи (5)–(10) примет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Omega_{13}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{31}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Omega_{33}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi_1 \in [-\eta, \eta], \quad \xi_3 \in [0, 1], \quad (11)$$

$$U_1(\pm\eta, \xi_3) = \frac{\partial U_3}{\partial \xi_1}(\pm\eta, \xi_3) = 0, \quad (12)$$

$$\{S_{31} - M_{311,1} - M_{313,3} - M_{331,3}\}(\pm\eta, \xi_3) = M_{111}(\pm\eta, \xi_3) = 0, \quad \xi_3 \in [0, 1], \quad (13)$$

$$U_1^{(1)}(\xi_1, 0) = U_3^{(1)}(\xi_1, 0) = \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, 0) = \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, 0) = 0, \quad \xi_1 \in [-\eta, \eta], \quad (14)$$

$$\bar{t}_1^{(2)}(\xi_1, 1) = 0, \quad \bar{t}_3^{(2)}(\xi_1, 1) = P(\xi_1), \quad \xi_1 \in [-\eta, \eta], \quad (15)$$

$$U_1^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = U_1^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad U_3^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = U_3^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1),$$

$$\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, \bar{h}_1) = \frac{\partial U_1^{(2)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, \bar{h}_1) = \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad (16)$$

$$\bar{t}_1^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = \bar{t}_1^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad \bar{t}_3^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = \bar{t}_3^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1),$$

$$\bar{r}_1^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = \bar{r}_1^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad \bar{r}_3^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = \bar{r}_3^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad \xi_1 \in [-\eta, \eta].$$

3. Решение задачи

Решения задачи (11)–(16) основано на методе разделения переменных. Разложим перемещения в ряды по формулам:

$$U_1 = \sum_{n=0}^{\infty} w_{1n}(\xi_3) \sin(\nu_n \xi_1), \quad U_3 = \sum_{n=0}^{\infty} w_{3n}(\xi_3) \cos(\nu_n \xi_1).$$

Тогда граничные условия на боковых сторонах прямоугольника выполняются тождественно. Будем предполагать, что нагрузка $P(\xi_1)$ — четная функция, которая допускает представление в виде

$$P(\xi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos(\nu_n \xi_1), \quad \text{где } g_n = \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} P(\xi_1) \cos(\nu_n \xi_1) d\xi_1$$

— коэффициенты разложения.

Гармоники перемещений w_{1n} , w_{3n} находят из решения следующих дифференциальных уравнений:

$$-\alpha^2 \bar{\mu} w_{1n}^{IV} + (\bar{\mu}(1 + \alpha^2 \nu_n^2) + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\alpha^2 \nu_n^2) w_{1n}'' - \nu_n^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})(1 + \alpha^2 \nu_n^2) w_{1n} - \nu_n (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) ((1 + \alpha^2 \nu_n^2) w_{3n}' - \alpha^2 w_{3n}''') = 0, \quad \xi_3 \in [0, 1], \quad (17)$$

$$-\nu_n (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) ((1 + \alpha^2 \nu_n^2) w_{1n}' - \alpha^2 w_{1n}''') + \alpha^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) w_{3n}^{IV} - ((\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})(1 + \alpha^2 \nu_n^2) + \bar{\mu} \alpha^2 \nu_n^2) w_{3n}'' + \bar{\mu} \nu_n^2 (1 + \alpha^2 \nu_n^2) w_{3n} = 0, \quad \xi_3 \in [0, 1]. \quad (18)$$

Приведем систему (17), (18) к виду, аналогичному [10] по формулам:

$$R_{11} w_{1n} + R_{12} w_{3n} = 0, \quad R_{21} w_{1n} + R_{22} w_{3n} = 0, \quad (19)$$

где

$$R_{11} = -\alpha^2 \bar{\mu} \frac{d^4}{d\xi_3^4} + (\bar{\mu} (1 + \alpha^2 \nu_n^2) + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \alpha^2 \nu_n^2) \frac{d^2}{d\xi_3^2} - \nu_n^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) (1 + \alpha^2 \nu_n^2),$$

$$R_{12} = R_{21} = -\nu_n (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \frac{d}{d\xi_3} \left((1 + \alpha^2 \nu_n^2) - \alpha^2 \frac{d^2}{d\xi_3^2} \right),$$

$$R_{22} = \alpha^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{d^4}{d\xi_3^4} - ((\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})(1 + \alpha^2 \nu_n^2) + \bar{\mu} \alpha^2 \nu_n^2) \frac{d^2}{d\xi_3^2} + \bar{\mu} \nu_n^2 (1 + \alpha^2 \nu_n^2).$$

Введем упругий потенциал перемещений $\phi_n(\xi_3)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, такой, что

$$w_{1n} = R_{12} \phi_n, \quad w_{3n} = -R_{11} \phi_n. \quad (20)$$

Тогда первое уравнение системы (20) удовлетворяется автоматически, а второе уравнение (20) сводится к уравнению восьмого порядка относительно введенного потенциала, характеристическое уравнение которого содержит корни второй кратности:

- 1) $\pm \nu_n$, соответствующие задачи в классической постановке при $\alpha = 0$;
- 2) $\pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \nu_n^2}$, отвечающие за градиентные эффекты.

Тогда представим потенциалы для каждого слоя в виде:

$$\begin{aligned} \phi_{1n} = & C_1 e^{\nu_n \xi_3} + C_2 \xi_3 e^{\nu_n \xi_3} + C_3 e^{-\nu_n \xi_3} + C_4 \xi_3 e^{-\nu_n \xi_3} + C_5 e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \nu_n^2} \xi_3} \\ & + C_6 \xi_3 e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \nu_n^2} \xi_3} + C_7 e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \nu_n^2} \xi_3} + C_8 \xi_3 e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \nu_n^2} \xi_3}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2n} = & G_1 e^{\nu_n \xi_3} + G_2 \xi_3 e^{\nu_n \xi_3} + G_3 e^{-\nu_n \xi_3} + G_4 \xi_3 e^{-\nu_n \xi_3} + G_5 e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \nu_n^2} \xi_3} \\ & + G_6 \xi_3 e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \nu_n^2} \xi_3} + G_7 e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \nu_n^2} \xi_3} + G_8 \xi_3 e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \nu_n^2} \xi_3}. \end{aligned} \quad (22)$$

Неизвестные константы интегрирования находят путем удовлетворения граничных условий и условий сопряжения, записанных для гармоник перемещений:

$$w_{1n}^{(1)}(0) = w_{3n}^{(1)}(0) = w'_{1n}{}^{(1)}(0) = w'_{3n}{}^{(1)}(0) = 0, \quad (23)$$

$$w''_{1n}{}^{(2)}(1) - \nu_n w'_{3n}{}^{(2)}(1) = (\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2) w''_{3n}{}^{(2)}(1) + \bar{\lambda}_2 \nu_n w'_{1n}{}^{(2)}(1) = 0, \quad (24)$$

$$w_{1n}^{(1)}(\bar{h}_1) = w_{1n}^{(2)}(\bar{h}_1), \quad w_{3n}^{(1)}(\bar{h}_1) = w_{3n}^{(2)}(\bar{h}_1), \quad (25)$$

$$w'_{1n}{}^{(1)}(\bar{h}_1) = w'_{1n}{}^{(2)}(\bar{h}_1), \quad w'_{3n}{}^{(1)}(\bar{h}_1) = w'_{3n}{}^{(2)}(\bar{h}_1), \quad (26)$$

$$\bar{\mu}_1 (w''_{1n}{}^{(1)}(\bar{h}_1) - \nu_n w'_{3n}{}^{(1)}(\bar{h}_1)) = \bar{\mu}_2 (w''_{1n}{}^{(2)}(\bar{h}_1) - \nu_n w'_{3n}{}^{(2)}(\bar{h}_1)), \quad (27)$$

$$(\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1) w''_{3n}{}^{(1)}(\bar{h}_1) + \bar{\lambda}_1 \nu_n w'_{1n}{}^{(1)}(\bar{h}_1) = (\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2) w''_{3n}{}^{(2)}(\bar{h}_1) + \bar{\lambda}_2 \nu_n w'_{1n}{}^{(2)}(\bar{h}_1), \quad (28)$$

$$\bar{t}_{1n}^{(2)}(1) = 0, \quad \bar{t}_{3n}^{(2)}(1) = g_n, \quad (29)$$

$$\bar{t}_{1n}^{(1)}(\bar{h}_1) = \bar{t}_{1n}^{(2)}(\bar{h}_1), \quad \bar{t}_{3n}^{(1)}(\bar{h}_1) = \bar{t}_{3n}^{(2)}(\bar{h}_1). \quad (30)$$

Здесь знак «штрих» обозначает производную по координате ξ_3 ,

$$\begin{aligned} \bar{t}_{1n} = & -\alpha^2 \bar{\mu} w'''_{1n} + (\bar{\mu} (1 + \alpha^2 \nu_n^2) + \alpha^2 \nu_n^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})) w'_{1n} \\ & + \alpha^2 \nu_n (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) w''_{3n} - \bar{\mu} \nu_n (1 + \alpha^2 \nu_n^2) w_{3n}, \end{aligned}$$

$$\bar{t}_{3n} = -\alpha^2(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})w'''_{3n} + ((\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})(1 + \alpha^2\nu_n^2) + \alpha^2\nu_n^2\bar{\mu})w'_{3n} - \alpha^2\nu_n(\bar{\lambda} + \bar{\mu})w''_{1n} + \bar{\lambda}\nu_n(1 + \alpha^2\nu_n^2)w_{1n}.$$

4. Результаты вычислений

Рассмотрим результаты вычисления распределений по координатам ξ_1 и ξ_3 безразмерных перемещений и полных напряжений двухслойного прямоугольника. В расчетах принято:

$$\bar{h}_1 = 0.6, \quad \bar{\lambda}_1 = 0.25, \quad \bar{\mu}_1 = 0.2, \quad \eta = 2, \quad \bar{\lambda}_2 = 1, \quad \bar{\mu}_2 = 0.8,$$

$$g(\xi_1) = \begin{cases} 1 - \frac{4\xi_1^2}{\eta^2}, & \xi_1 \in [-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}], \\ 0, & \xi_1 \in [-\eta, -\frac{\eta}{2}) \cup (\frac{\eta}{2}, \eta]. \end{cases}$$

На рисунках ниже сплошной линией изображено решение задачи на основе классической постановки при $\alpha = 0$, точками — решение задачи в градиентной постановке при $\alpha = 0.05$.

На рис. 1–3 представлены распределения безразмерных функций: горизонтального перемещения U_1 (рис. 1), вертикального перемещения U_3 (рис. 2), нормального напряжения Ω_{11} (рис. 3) по горизонтальной координате ξ_1 (при $\xi_3 = 0.8$) и вертикальной координате ξ_3 (при $\xi_1 = 1$).

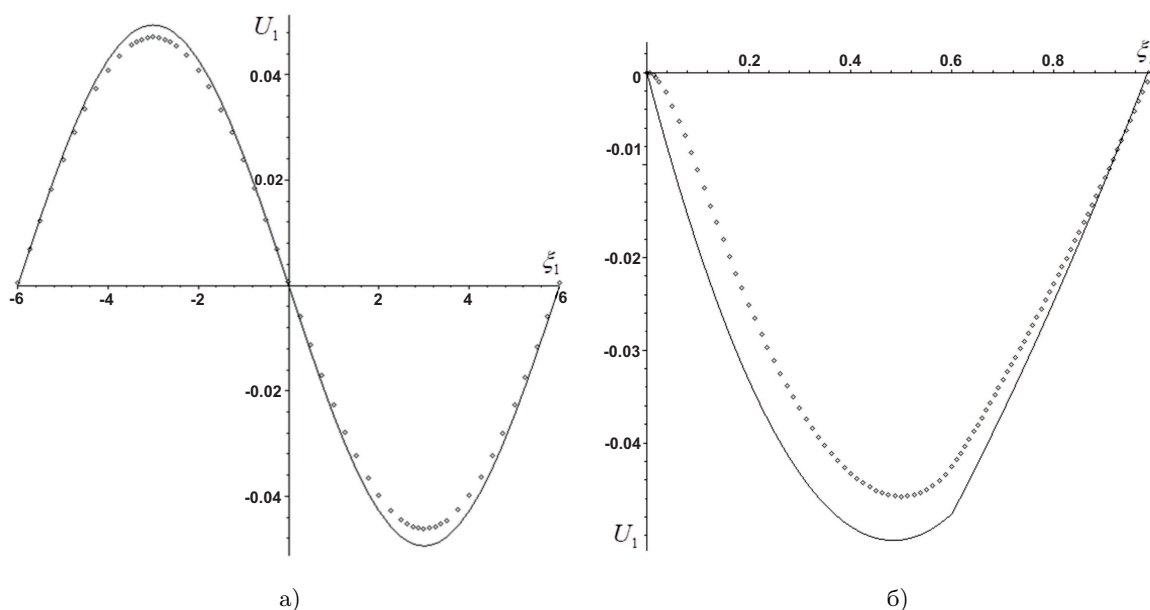


Рис. 1. График распределения безразмерного перемещения U_1 по координатам: а) ξ_1 ; б) ξ_3 .

На рис. 4 представлены распределения безразмерных полных напряжений: Ω_{33} (рис. 4а) и Ω_{13} (рис. 4б) по вертикальной координате ξ_3 при $\xi_1 = 1$.

Из рис. 1–4 следует, что: 1) полные напряжения испытывают небольшой скачок на линии сопряжения, обусловленный тем, что согласно градиентной теории упругости на линии сопряжения должны быть непрерывны не полные напряжения, а компоненты векторов \bar{t}_1, \bar{t}_3 ; 2) увеличения масштабного параметра оказывает значительное влияние на изменения значений перемещений, полных и моментных напряжений.

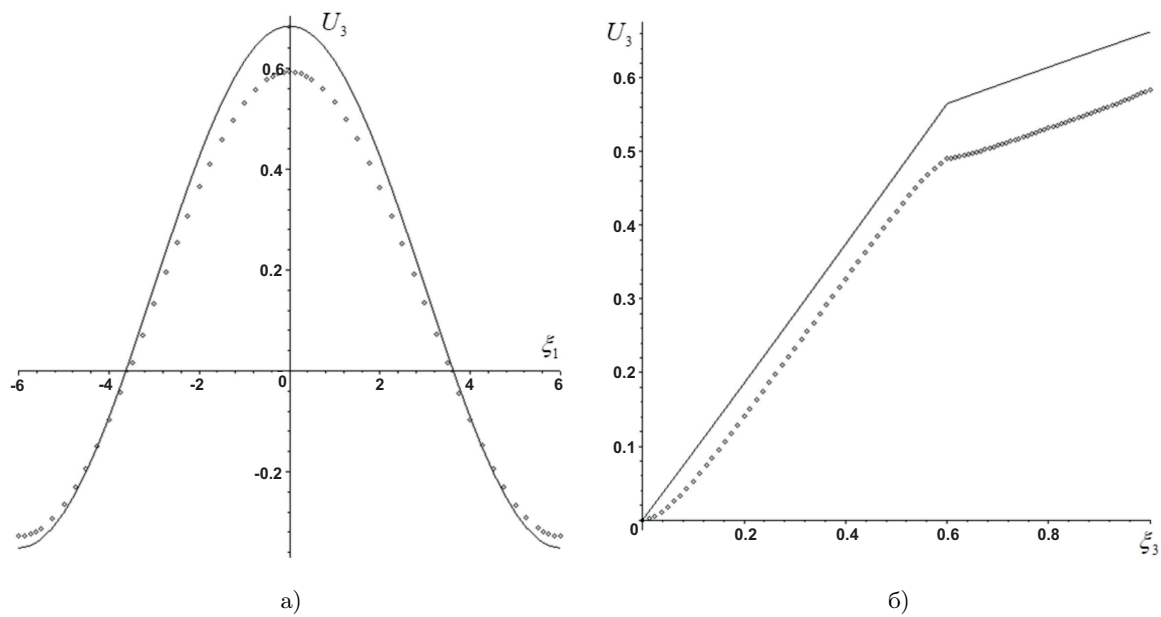


Рис. 2. График распределения безразмерного перемещения U_3 по координатам: а) ξ_1 ; б) ξ_3 .

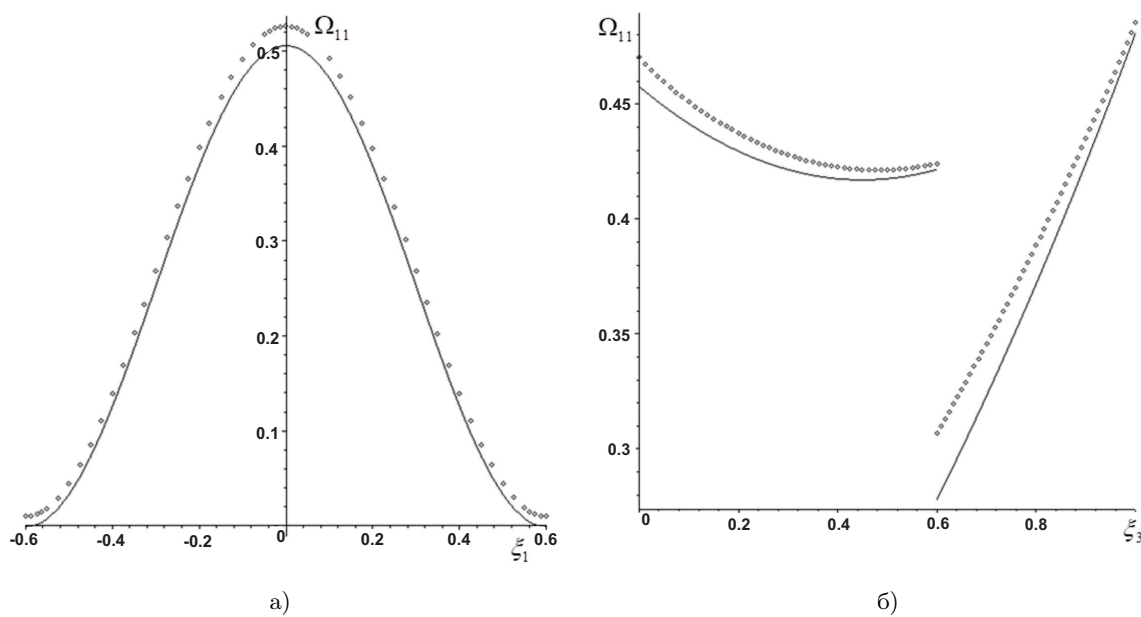


Рис. 3. График распределения безразмерного перемещения Ω_{11} по координатам: а) ξ_1 ; б) ξ_3 .

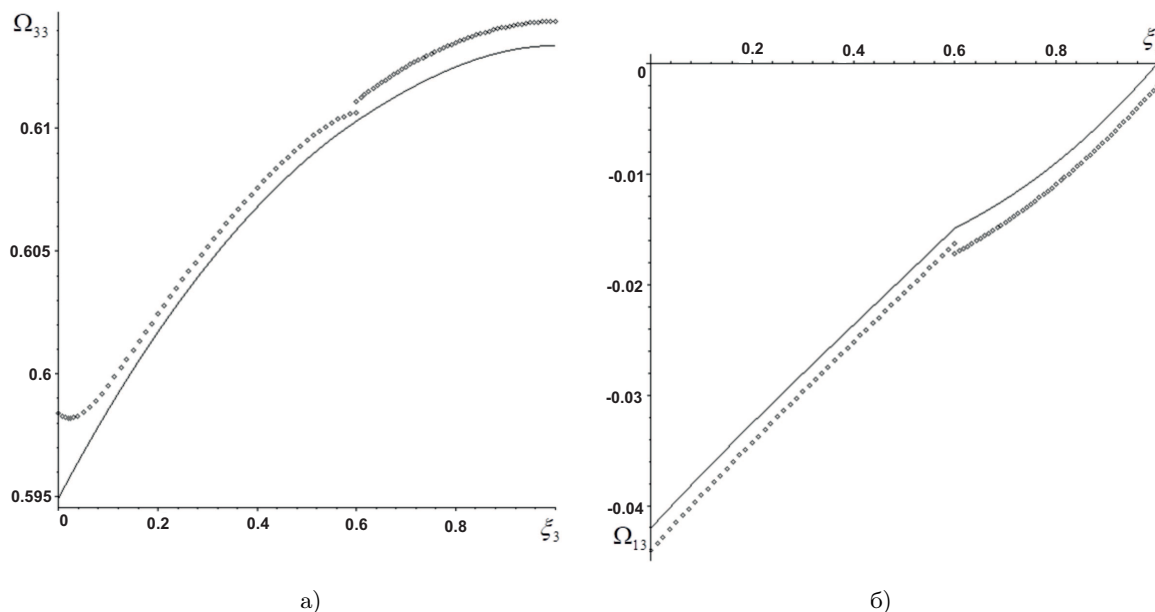


Рис. 4. График распределения безразмерных полных напряжения по координате ξ_3 : а) Ω_{33} , б) Ω_{13} .

Литература

1. Aifantis E. C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales // J. Mech. Behav. Mater.—1994.—№ 5.—P. 335–353. DOI: 10.1515/JMBM.1994.5.3.355.
2. Toupin R. A. Elastic materials with couple stresses // Arch. Rational Mech. Anal.—1962.—Vol. 11.—P. 385–414. DOI: 10.1007/BF00253945.
3. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal.—1964.—Vol. 16.—P. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490.
4. Ru C. Q., Aifantis E. C. A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity // Acta Mech.—1993.—Vol. 101.—P. 59–68.
5. Papargyri-Beskou S., Tsinopoulos S. Lamé's strain potential method for plane gradient elasticity problems // Arch. Appl. Mech.—2015.—Vol. 85, № 9–10.—P. 1399–1419. DOI: 10.1007/s00419-014-0964-5.
6. Charalambopoulos A., Tsinopoulos S. V., Polyzos D. Plane strain gradient elastic rectangle in bending // Arch. Appl. Mech.—2020. DOI: 10.1007/s00419-019-01649-3.
7. Solyaev Y. O., Lurie S. A. Trefftz collocation method for two-dimensional strain gradient elasticity // International Journal for Numerical Methods in Engineering.—2020. DOI: 10.1002/nme.6563.
8. Li A., Zhou S., Wang B. A. Size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory // Compos. Struct.—2014.—Vol. 108.—P. 259–266. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.09.020.
9. Guangyang F., Shenjuie Z., Lu Q. The size-dependent static bending of a partially covered laminated microbeam // Int. J. Mech. Sci.—2019.—Vol. 152.—P. 411–419. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037.
10. Lurie S. A., Solyaev Yu. O., Rabinsky L. N., Kondratova Yu. N., Volov M. I. Simulation of the stress-strain state of thin composite coating based on solutions of the plane problem of strain-gradient elasticity for layer // Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin.—2013.—№ 1.—P. 161–181.
11. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity // Materials Physics Mechanics.—2020.—Vol. 46.—P. 27–41. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.3.21.
12. Ватульян А. О., Нестеров С. А., Юров В. О. Решение задачи градиентной термоупругости для цилиндра с термозащитным покрытием // Вычислительная механика сплошных сред.—2021.—Т. 14, № 3.—С. 253–264. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.3.21.

13. Ватульян А. О., Нестеров С. А., Юров В. О. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с покрытием на основе градиентной модели термоупругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.—2021.—Т. 163, кн. 2.—С. 181–196. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196.
14. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2021.—№ 4.—С. 60–70. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.07.

Статья поступила 29 октября 2021 г.

ВАТУЛЬЯН АЛЕКСАНДР ОВАНЕСОВИЧ
Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
заведующий отделом дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, Ватутина, 53
E-mail: aovatulyan@sfedu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

НЕСТЕРОВ СЕРГЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ
Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, Ватутина, 53
E-mail: 1079@list.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 4, P. 48–57

SCALE-DEPENDENT DEFORMATION MODEL OF A LAYERED RECTANGLE

Vatulyan, A. O.¹ and Nesterov, S. A.¹

¹Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: aovatulyan@sfedu.ru, 1079@list.ru

Abstract. We consider the problem of deformation of a layered rectangle, the lower side of which is rigidly clamped, a distributed normal load acts on the upper side, and the sides are in conditions of sliding termination. One-parameter gradient theory of elasticity is used to take into account the scale effects. The boundary conditions on the side faces allow the use of the method of separation of variables. The displacements and mechanical loads were decomposed into Fourier series. To find the harmonics of displacements, we have a system of two differential equations of the fourth order. The solution of the system of differential equations is based on the introduction of the elastic potential of displacements. The unknown integration constants are found by satisfying the boundary conditions and the conjugation conditions written in the displacement harmonics. Based on specific examples, the calculations of the horizontal and vertical distribution of displacements, couple and total stresses of a layered rectangle are carried out. The difference between the distributions of displacements and stresses found on the basis of solutions to the problem in the classical formulation and in the gradient formulation is shown. It was found that the total stresses experience a small jump on the conjugation line, due to the fact that, according to the gradient theory of elasticity, not the total stresses, but the components of the load vectors, should be continuous on the conjugation line. A significant influence of an increase in the scale parameter on changes in the values of displacements, total and couple stresses was revealed.

Key words: gradient theory of elasticity, scale effects, layered rectangle, deformation, couple stresses, total stresses.

AMS Subject Classification: 74B05.

For citation: *Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. Scale-Dependent Deformation Model of a Layered Rectangle, Vladikavkaz Math. J., 2022, vol. 24, no. 4, pp. 48–57 (in Russian). DOI: 10.46698/v8145-3776-3524-q.*

References

1. Aifantis, E. C. Gradient Effects at the Macro, Micro and Nano Scales, *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 1994, no. 5, p. 335–353. DOI: 10.1515/JMBM.1994.5.3.355.
2. Toupin, R. A. Elastic Materials with Couple Stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, vol. 11, p. 385–414. DOI: 10.1007/BF00253945.
3. Mindlin, R. D. Micro-Structure in Linear Elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 16, p. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490.
4. Ru, C. Q. and Aifantis, E. C. A Simple Approach to Solve Boundary Value Problems in Gradient Elasticity, *Acta Mechanica*, 1993, vol. 101, p. 59–68.
5. Papargyri-Beskou, S. and Tsinopoulos, S. Lamé's Strain Potential Method for Plane Gradient Elasticity Problems, *Archive of Applied Mechanics*, 2015, vol. 85, no. 9–10, p. 1399–1419. DOI: 10.1007/s00419-014-0964-5.
6. Charalambopoulos, A., Tsinopoulos, S. V. and Polyzos, D. Plane Strain Gradient Elastic Rectangle in Bending, *Archive of Applied Mechanics*, 2020. DOI: 10.1007/s00419-019-01649-3.
7. Solyaev, Y. O. and Lurie, S. A. Trefftz Collocation Method for Two-Dimensional Strain Gradient Elasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020. DOI: 10.1002/nme.6563.
8. Li, A., Zhou, S. and Wang, B. A Size-Dependent Bilayered Microbeam Model Based on Strain Gradient Elasticity Theory, *Composite Structures*, 2014, vol. 108, p. 259–266. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.09.020.
9. Guangyang, F., Shenjuie, Z., Lu, Q. The Size-Dependent Static Bending of a Partially Covered Laminated Microbeam, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, vol. 152, p. 411–419. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037.
10. Lurie, S. A., Solyaev, Yu. O., Rabinsky, L. N., Kondratova, Yu. N. and Volov, M. I. Simulation of the Stress-Strain State of thin Composite Coating Based on Solutions of the Plane Problem of Strain-Gradient Elasticity for Layer, *Vestnik PNIPU. Mekhanika — PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 1, p. 161–181.
11. Vatulyan A. O. and Nesterov S. A. On the Deformation of a Composite Rod in the Framework of Gradient Thermoelasticity, *Materials Physics Mechanics*, 2020, vol. 46, p. 27–41.
12. Vatulyan, A. O., Nesterov, S. A. and Yurov, V. O. Solution of the Gradient Thermoelasticity Problem for a Cylinder with a Heat-Protected Coating, *Computational Continuum Mechanics*, 2021, vol. 14, no. 3, p. 253–264. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.3.21.
13. Vatulyan, A. O., Nesterov, S. A. and Yurov, V. O. Investigation of the Stress-Strain State of a Hollow Cylinder with a Coating Based on the Gradient Model of Thermoelasticity, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 4, p. 60–70. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.07.
14. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. Solution of the Problem of Gradient Thermoelasticity for a Coated Strip, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 2, p. 181–196. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196.

Received October 29, 2021

ALEXANDER O. VATULYAN
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Head of the Department of Differential Equations
E-mail: aovatulyan@sfedu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

SERGEY A. NESTEROV
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Senior Researcher of the Department of Differential Equations
E-mail: 1079@list.ru