Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 2, С. 35–50

УДК 517.91
DOI 10.46698/g4784-3971-1105-g

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[#]

Дж. Т. Ахмедов[1], Э. М. Мухамадиев[2], И. Дж. Нуров[1]

[1] Научно-исследовательский институт Таджикского национального университета,
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17;
[2] Вологодский государственный университет,
Россия, 160000, Вологда, ул. Ленина, 15

E-mail: emuhamadiev@rambler.ru, jovidon-a.90@mail.ru, nid1@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются вопросы о существовании периодических или ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка вида $y'' + g(y, y') = f(t, y, y')$. Здесь функция $g(y, z)$ — непрерывная и положительно однородная первого порядка, а $f(t, y, z)$ — непрерывная функция, определенная при всех значениях t, y, z и удовлетворяющая условию малости по отношению $|y| + |z|$ на бесконечности. Для данного уравнения вопросы существования априорной оценки, периодических решений в случае периодической по t функции $f(t, y, z)$, и ограниченных решений в случае лишь ограниченности по t функции $f(t, y, z)$, тесно связаны с качественным поведением решения однородного уравнения $y'' + g(y, y') = 0$. Поэтому, на первом этапе представляется важным исследование характера поведения траектории эквивалентной однородному уравнению системы. Перейдя к полярным координатам, получим формулы представления решения системы, которые позволяют описать полную классификацию всевозможных фазовых портретов решения системы в терминах свойства функции $g(y, y')$. В частности, получены условия отсутствия ненулевых периодических или ограниченных на всей оси решений. Задача существования периодических решений исходного уравнения эквивалентна существованию решений интегрального уравнения в пространстве $C[0, T]$-непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций. В свою очередь, интегральное уравнение порождает вполне непрерывное векторное поле в пространстве $C[0, T]$, нули которого определяют решение интегрального уравнения. Получены формулы для вычисления вращения векторного поля на сферах достаточно большого радиуса пространства $C[0, T]$. На основе полученных результатов найдены условия существования периодических и ограниченных решений неоднородного уравнения. Отметим, что полученные результаты доведены до расчетных формул.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое и ограниченное решение, однородное уравнение, гомотопия, вполне непрерывные векторные поля, фазовые портреты.

AMS Subject Classification: 34A34, 34C25.

Образец цитирования: *Ахмедов Дж. Т., Мухамадиев Э. М., Нуров И. Дж.* Периодические и ограниченные решения уравнения второго порядка // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 2.—С. 35–50. DOI: 10.46698/g4784-3971-1105-g.

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию периодических и ограниченных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Периодические и ограниченные решения играют важную роль как в качественной теории

[#] Работа выполнена при финансовой поддержке Республики Таджикистан, проект № 0117TJ00807.

дифференциальных уравнений, так и во многих других научных областях и прикладных задачах. Существуют разделы физики и техники, которые полностью базируются на колебательных явлениях. Задачи анализа периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений также возникают в химии [1], при изучении биологических систем [2] и при моделировании экономических процессов [3, 4]. Такое широкое разнообразие применения теории периодических и ограниченных решений вызывает дополнительный интерес к более глубокому исследованию проблем существования периодических и ограниченных решений систем дифференциальных уравнений. Существуют целый ряд работ [5–10], в которых, используя различные методы, найдены условия существования периодических и ограниченных решений линейных и нелинейных систем. В частности, в этих работах предметом изучения является система дифференциальных уравнений вида

$$y' = P(y) + F(t,y), \quad y \in R^n, \tag{1}$$

где вектор-функция $P(y)$ непрерывна и положительно-однородна порядка $m > 0$ ($P(\lambda y) = \lambda^m P(y),\ \lambda \geqslant 0$), а вектор-функция $F(t,y)$ непрерывна по совокупности переменных и по переменной t либо $F(t+T,y) \equiv F(t,y)$, либо $\sup_t |F(t,y)| < \infty$. При этом $F(t,y)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|y|\to\infty} \sup_t \frac{|F(t,y)|}{|y|^m} = 0,$$

здесь через $|\cdot|$ обозначается евклидова норма в R^n.

В случае $n = 2$ большое число работ посвящено исследованию вопросов о существовании периодических или ограниченных решений системы (1). Р. Е. Гомори [11] исследовал существование периодических решений систем (1). Теоремы Р. Е. Гомори были усилены Н. А. Бобылевым на основе направляющих потенциалов [7]. Система (1) в случае, когда вектор-функция P зависит от времени, исследована в работе [8]. А также в этой работе изучена данная система, когда свойства однородности вектор-функции $P(y)$ различны для разных ее компонентов. Случай $n = 2$ и $m_1 \neq m_2$ изучен в работе Х. Абдуваитова [12]. Случай $n = 3$ изучен Р. Азизовым [13]. Целью данной работы является более углубленное исследование скалярного дифференциального уравнения вида

$$y'' + g(y,y') = f(t,y,y'), \tag{2}$$

где функция $g(y,z)$ непрерывна и положительно однородна порядка $m = 1:$

$$g(\lambda y, \lambda z) = \lambda g(y,z), \quad \lambda > 0,$$

а $f(t,y,z)$ — непрерывная функция, определенная при всех значениях t, y, z и удовлетворяющая условию

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sup_{t,|y|+|z|\leqslant r} |f(t,y,z)| = 0. \tag{3}$$

2. Фазовый портрет однородного дифференциального уравнения

Для уравнения (2) исследование вопросов априорной оценки и существования периодических решений в случае периодической по t функции $f(t,y,z)$, и ограниченных решений в случае лишь ограниченности по t функции $f(t,y,z)$, тесно связаны с качественным поведением решения однородного уравнения [14]

$$y'' + g(y, y') = 0, \tag{4}$$

где функция $g(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных x, y, положительно однородна первого порядка: $g(\lambda x, \lambda y) = \lambda g(x,y)$ для всех $(x,y) \in R^2$, $\lambda \geqslant 0$.

Отметим, что функция $g(x,y)$ в силу непрерывности и однородности $g(x,y) = |x|g(\varepsilon, y/|x|)$, $\varepsilon = x/|x|$, $x \neq 0$, однозначно определяется по двум непрерывным функциям $g_+(s) = g(1,s)$ и $g_-(s) = g(-1,s)$, у которых существуют пределы отношений $g_+(s)/s$ и $g_-(s)/s$ при $s \to +\infty$ и $s \to -\infty$, причем имеет место

$$\lim_{s\to\pm\infty} g_+(s)/s = \lim_{s\to\pm\infty} g_-(s)/s.$$

Другое представление однородной функции — через ее значение на единичной окружности: $g(x,y) = \rho g_0(\varphi)$, где $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, а $g_0(\varphi)$ — непрерывная 2π-периодическая функция.

Полагая $x_1 = y$, $x_2 = y'$ в уравнении (4), получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -g(x_1, x_2). \end{cases} \tag{5}$$

В дальнейшем будем предполагать, что система (5) имеет единственную стационарную точку $(0,0)$, т. е. функция g удовлетворяет условию $g(\pm 1, 0) \neq 0$. Ниже нам понадобятся свойства существования или отсутствия ненулевых периодических или ограниченных на всей оси решений (эллиптические траектории) системы (5). При изучении этих свойств встает вопрос о получении критерия существования ненулевых периодических или ограниченных решений системы (5) в терминах поведения функции g.

Для исследования характера поведения траектории системы (5) приведем сначала формулу представления решения системы (5). С этой целью перейдем к полярным координатам ρ, φ заменой $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$

$$\varphi' = -\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g_0(\varphi), \quad \rho' = \rho[\cos\varphi \cdot \sin\varphi - \sin\varphi \cdot g_0(\varphi)],$$

или, предполагая, что $\rho \neq 0$, имеем систему

$$\varphi' = -\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g_0(\varphi), \quad \rho' = \rho\sin\varphi(\cos\varphi - g_0(\varphi)), \tag{6}$$

где $g_0(\varphi) = g(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Так как первое уравнение системы (6) является уравнением с разделяющимися переменными относительно искомой функции $\varphi = \varphi(t)$ и независимой переменной t, то его решения могут быть найдены в явной форме (см., например, [6]).

Пусть $\varphi_0 \in (\varphi_1, \varphi_2)$, где (φ_1, φ_2) — составляющий интервал множества $\{\varphi : \sin^2\varphi + g_0(\varphi)\cdot\cos\varphi \neq 0\}$ и $\varphi = \varphi(t)$, $\varphi(0) = \varphi_0$ — решение первого уравнения системы (6). На интервале (φ_1, φ_2) определим функцию

$$G(\varphi; \varphi_0) = -\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\tau}{\sin^2\tau + g_0(\tau)\cdot\cos\tau}.$$

Функция $G(\varphi) = G(\varphi; \varphi_0)$ на этом интервале строго монотонна, имеет обратную функцию и решение $\varphi = \varphi(t)$ определяется из уравнения $G(\varphi) = t : \varphi(t) = G^{-1}(t)$.

Теперь из второго уравнения системы (6) определим функцию

$$\rho(t) = \rho(0) \exp \int\limits_0^t \sin\varphi(s) \cdot [\cos\varphi(s) - g_0(\varphi(s))]\, ds, \quad \varphi(t) = G^{-1}(t), \tag{7}$$

где $\rho(0) = \rho_0 > 0$.

Из представления (7) следует важное свойство решений системы (5) с однородной функцией g: *для системы* (5) *задача Коши* $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$, *где* $x_1^0 = \rho_0 \cos\varphi_0$, $x_2^0 = \rho_0 \sin\varphi_0$ $(\rho_0 > 0,\ \sin^2\varphi_0 + g_0(\varphi_0)\cos\varphi_0 \neq 0)$, *имеет единственное решение.*

Если $\varphi = \varphi_1$ — решение уравнения

$$\sin^2\varphi + g_0(\varphi) \cdot \cos\varphi = 0, \tag{8}$$

то $\cos\varphi_1 \neq 0$ и правая часть второго уравнения системы (6) при $\varphi = \varphi_1$ примет вид $\rho(\cos\varphi_1 - g_0(\varphi_1))\sin\varphi_1 = \rho \operatorname{tg}\varphi_1$. Поэтому функции $\varphi(t) \equiv \varphi_1$, $\rho(t) = \rho(0)e^{\alpha t}$, $\rho(0) = \rho_1 > 0$, $\alpha = \operatorname{tg}\varphi_1$ являются решением системы (6). Этому решению соответствует решение системы (5): $x_1(t) = x_1(0)e^{\alpha t}$, $x_2(t) = x_2(0)e^{\alpha t}$, где $x_1(0) = \rho(0)\cos\varphi_1$, $x_2(0) = \rho(0)\sin\varphi_1$. В этом случае нельзя гарантировать единственность решения задачи Коши без дополнительных условий на функцию g.

Например, если

$$g(1,u) = -\begin{cases} 3u, & u \geqslant 2; \\ u^2 + u\sqrt{|1-u|}, & 1/2 < u < 2; \\ u/\sqrt{2} + 1/4, & u \leqslant 1/2, \end{cases}$$

и

$$g(-1,u) = g(1,u), \quad u \in (-\infty, +\infty),$$

то $\varphi = \pi/4$ — решение уравнения (8) и функции $x_1 = e^t$, $x_2 = e^t$; $x_1 = e^{2th(t/2)}$, $x_2 = (1 - th^2(t/2))e^{2th(t/2)}$ при малых $t < 0$, $x_1 = e^{2tg(t/2)}$, $x_2 = (1 + tg^2(t/2))e^{2tg(t/2)}$ при малых $t > 0$ являются решениями системы (5), удовлетворяющими начальному условию $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

Если функция $g_0(\varphi) = g(\cos\varphi, \sin\varphi)$ в некоторой окрестности решения $\varphi = \varphi_1$ уравнения (8) удовлетворяет условию Липшица $|g_0(\varphi) - g_0(\varphi_1)| \leqslant L|\varphi - \varphi_1|$, то функции $x_1(t) = x_1(0)e^{\alpha t}$, $x_2(t) = x_2(0)e^{\alpha t}$, $\alpha = \operatorname{tg}\varphi_1$, являются единственным решением задачи Коши $x_1(0) = \rho(0)\cos\varphi_1$, $x_2(0) = \rho(0)\sin\varphi_1$, $\rho(0) > 0$. Более общие условия единственности решения можно получить в терминах поведения функции $G(\varphi; \varphi_0)$. Например, если $\varphi = \varphi_1$ — изолированное решение уравнения (8), то функция $G(\varphi; \varphi_0)$ определена как при $\varepsilon - \varphi_1 < \varphi_0$, $\varphi < \varphi_1$, так и при $\varphi_1 < \varphi_0$, $\varphi < \varphi_1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда необходимым и достаточным условием единственности решения $x_1(t) = x_1(0)e^{\alpha t}$, $x_2(t) = x_2(0)e^{\alpha t}$ является неограниченность функции $G(\varphi, \varphi_0)$ как при $\varepsilon - \varphi_1 < \varphi_0$, $\varphi < \varphi_1$, $\varphi \to \varphi_1 - 0$, так и при $\varepsilon + \varphi_1 > \varphi_0$, $\varphi > \varphi_1$, $\varphi \to \varphi_1 + 0$.

Перейдем к изучению расположения траекторий системы (5) в окрестности особой точки $(0,0)$, предполагая ее изолированность: $g(\pm 1, 0) \neq 0$. Поведение траекторий системы (5) определяется поведением 2π-периодической функции $\sin^2\varphi + g_0(\varphi) \cdot \cos\varphi$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Возможны следующие случаи:

1. Уравнение (8) не имеет решений. В частности, при $\varphi = \pi/2$ имеем $\sin^2\varphi + g_0(\varphi)\cdot\cos\varphi = 1$. Поэтому, в силу непрерывности функции $g_0(\varphi)$ имеет место $\sin^2\varphi + \cos\varphi\cdot g_0(\varphi) > 0$ при всех φ. Следовательно, функция $G(\varphi;0)$ определена при всех значениях $\varphi\in(-\infty,\infty)$, монотонно убывает и, в силу 2π-периодичности подынтегральной функции, имеет место $G(\varphi+2k\pi,0) = kG(2\pi,0)+G(\varphi,0)$. Обратная к $G(\varphi,0)$ функция $\varphi(t)$, т. е. $G(\varphi(t),0) = t$, является решением первого уравнения системы (6): $\varphi'(t) = -\sin^2\varphi - \cos\varphi\cdot g_0(\varphi)$.

Далее, из представления (7) решения системы (6), при помощи подстановки в определенных интегралах, найдем функцию

$$\rho(t) = \rho_0 \exp \int\limits_0^{\varphi(t)} \frac{(g_0(\theta)-\cos\theta)\sin\theta}{\sin^2\theta + g_0(\theta)\cos\theta}\,d\theta.$$

Обозначим $T_0 = G(-2\pi,0)$ и

$$\kappa(g_0) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(g_0(\theta)-\cos\theta)\sin\theta}{\sin^2\theta + g_0(\theta)\cos\theta}\,d\theta.$$

Тогда $\varphi(t+T_0) = \varphi(t)-2\pi$ и $\rho(t+T_0) = \rho(t)e^{-\kappa}$. Поэтому справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть уравнение* (8) *не имеет решений. Тогда траектории системы* (5) *замкнуты периода* T_0 *и нулевая особая точка является центром, если* $\kappa(g_0) = 0$*; совершают бесконечно много оборотов вокруг особой точки и особая точка является фокусом устойчивым, если* $\kappa(g_0) > 0$*, и неустойчивым, если* $\kappa(g_0) < 0$.

Отметим, что свойство существования ненулевого периодического решения системы (5) не является устойчивым относительно малого возмущения функции $g_0(\varphi)$. А именно, справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть уравнение* (8) *не имеет решений. Тогда* $\kappa(g_\varepsilon)\neq 0$ *при достаточно малых* $\varepsilon\neq 0$*, где* $g_\varepsilon(\varphi) = g_0(\varphi)+\varepsilon\sin 2\varphi$ *при* $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ *и* $g_\varepsilon(\varphi) = g_0(\varphi)$ *при* $\pi/2<\varphi\leqslant 2\pi$.

$\lhd$ В условиях леммы $\sin^2\theta + g_\varepsilon(\theta)\cos\theta > 0$ для любого $\theta\in[0,2\pi]$ при достаточно малых ε, и поэтому определено число

$$\kappa(g_\varepsilon) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(g_\varepsilon(\theta)-\cos\theta)\sin\theta}{\sin^2\theta + g_\varepsilon(\theta)\cos\theta}\,d\theta.$$

Пусть $\kappa(g_0)\neq 0$. Так как $\kappa(g_\varepsilon)\to\kappa(g_0)$ при $\varepsilon\to 0$, то $\kappa(g_\varepsilon)\neq 0$ при достаточно малых ε.

Пусть теперь $\kappa(g_0) = 0$. Тогда, согласно определению функции g_ε, имеет место равенство

$$\kappa(g_\varepsilon) = \int\limits_0^{\pi/2} \left\{ \frac{g_\varepsilon(\theta)-\cos\theta}{\sin^2\theta + g_\varepsilon(\theta)\cos\theta} - \frac{g_0(\theta)-\cos\theta}{\sin^2\theta + g_0(\theta)\cos\theta} \right\} \sin\theta\,d\theta.$$

Отсюда, в силу непосредственно проверяемого тождества

$$(g_\varepsilon(\theta)-\cos\theta)(\sin^2\theta + g_0(\theta)\cos\theta) - (g_0(\theta)-\cos\theta)(\sin^2\theta + g_\varepsilon(\theta)\cos\theta) = g_\varepsilon(\theta)-g_0(\theta)$$

и равенства $g_\varepsilon(\varphi)-g_0(\varphi) = \varepsilon\sin 2\varphi$ при $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, следует, что $\kappa(g_\varepsilon)\neq 0$ при достаточно малых $\varepsilon\neq 0$. $\rhd$

2. Теперь рассмотрим случай, когда уравнение (8) имеет решение, причем в некоторой окрестности каждого решения $\varphi = \varphi^*$ функция $g_0(\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица $|g_0(\varphi) - g_0(\varphi*)| \leqslant L|\varphi - \varphi^*|$. Предположим, что $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ такие корни уравнения (8), что $\varphi_1 < \varphi_2$ и интервал (φ_1, φ_2) принадлежит множеству $\{\varphi : \sin^2\varphi + g_0(\varphi) \neq 0\}$. Отметим, что числа φ_1, φ_2 не принадлежат множеству $\{k\pi/2 : k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$. Докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $\varphi_0 \in (\varphi_1, \varphi_2)$, где (φ_1, φ_2) — составляющий интервал множества $\{\varphi : \sin^2\varphi + g_0(\varphi)\cos\varphi \neq 0\}$. Тогда имеют место равенства*

$$\lim_{\substack{\varphi\to\varphi_i,\\ \varphi_1<\varphi<\varphi_2}} \frac{\ln(\rho(G(\varphi)))}{G(\varphi)} = \operatorname{tg}\varphi_i, \quad i = 1, 2.$$

$\lhd$ Так как

$$\frac{\frac{d}{d\varphi}\ln(\rho(G(\varphi)))}{\frac{d}{d\varphi}G(\varphi)} = \frac{\rho'(G(\varphi))G'(\varphi)}{\rho(G(\varphi))G'(\varphi)} = \frac{\rho'(G(\varphi))}{\rho(G(\varphi))} = (\cos\varphi - g_0(\varphi))\sin\varphi,$$

то в силу тождества

$$\sin\varphi\cdot\cos\varphi - \sin\varphi\cdot g_0(\varphi) = (1 - \sin^2\varphi - \cos\varphi\cdot g_0(\varphi))\operatorname{tg}\varphi$$

имеем

$$\frac{\frac{d}{d\varphi}\ln(\rho(G(\varphi)))}{\frac{d}{d\varphi}G(\varphi)} = (1 - \sin^2\varphi - \cos\varphi\cdot g_0(\varphi))\operatorname{tg}\varphi. \tag{9}$$

Переходя в равенстве (9) к пределу при $\varphi \to \varphi_i$, согласно правилу Лопиталя, получим

$$\lim_{\substack{\varphi\to\varphi_i,\\ \varphi_1<\varphi<\varphi_2}} \frac{\ln(\rho(G(\varphi)))}{G(\varphi)} = \lim_{\substack{\varphi\to\varphi_i,\\ \varphi_1<\varphi<\varphi_2}} (1 - \sin^2\varphi - g_0(\varphi)\cos\varphi)\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_i, \quad i = 1, 2. \ \rhd$$

Все траектории системы (6), которые могут наблюдаться в фазовой плоскости, в случае, когда уравнение (8) имеет решение, в основном разделяются на следующие классы:

Параболические — когда $\rho(t) \to 0$ при $t \to -\infty(+\infty)$ и $\rho(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty(-\infty)$.

Гиперболические — когда $\rho(t) \to \infty$ при $t \to \pm\infty$.

Эллиптические — когда $\rho(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$.

Сектор $S(\varphi_1, \varphi_2) = \{(\rho, \varphi) : \rho > 0,\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$, где (φ_1, φ_2) — составляющий интервал множества $\{\varphi : \sin^2\varphi + \cos\varphi\cdot g_0(\varphi) \neq 0\}$, называют соответственно параболическим, гиперболическим и эллиптическим, если все траектории $(\rho(t), \varphi(t))$, где $(\rho(0), \varphi(0)) \in S(\varphi_1, \varphi_2)$ являются параболическими, гиперболическими и эллиптическими.

В силу изолированности нулевой особой точки системы (5) и 2π-периодичности функции $g(\cos\varphi, \sin\varphi) = g_0(\varphi)$, без ограничения общности можно предполагать, что составляющий интервал (φ_1, φ_2) множества $\{\varphi : \sin^2\varphi + \cos\varphi\cdot g_0(\varphi) \neq 0\}$ удовлетворяет условиям: $0 < \varphi_1 < 2\pi$, $\varphi_1 \in (k_1\pi/2, (k_1 + 1)\pi/2)$ для некоторого $k_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\varphi_2 \in (k_2\pi/2, (k_2 + 1)\pi/2)$ для некоторого $k_2 \in \{k_1, k_1 + 1, k_1 + 2, k_1 + 3, k_1 + 4\}$.

Отметим, что сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ однозначно определяет целые числа k_1, k_2.

Лемма 3. *Сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является параболическим тогда и только тогда, когда $k_1 + k_2$ — четное число.*

В случае, когда $k_1 + k_2$ нечетно, сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ может быть как гиперболическим, так и эллиптическим. При этом для некоторых значений (k_1, k_2) гиперболичность или эллиптичность сектора определяется знаком функции $g_0(\varphi)$ в интервале (φ_1, φ_2).

Лемма 4. *Пусть $k_1 + k_2$ нечетно и выполнено одно из условий:* 1) $(k_1, k_2) \notin \{(1,2),(3,4),(1,4),(3,6)\}$; 2) $(k_1, k_2) = (1,2)$ *и* $g_0(\pi) > 0$; 3) $(k_1, k_2) = (3,4)$ *и* $g_0(0) < 0$. *Тогда сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является гиперболическим. Обратно, если сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является гиперболическим, то выполнено одно из условий* 1)–3).

Лемма 5. *Пусть выполнено одно из условий:* 1) $(k_1, k_2) \in \{(1,4),(3,6)\}$; 2) $(k_1, k_2) = (1,2)$ *и* $g(-1,0) < 0$; 3) $(k_1, k_2) = (3,4)$ *и* $g_0(0) > 0$. *Тогда сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является эллиптическим. Обратно, если сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является эллиптическим, то выполнено одно из условий* 1)–3).

Доказательства лемм 3–5 следует из леммы 2.

Наконец, для полноты описания, рассмотрим случай, когда уравнение (8) на отрезке $[0, 2\pi]$ имеет единственное решение $\varphi = \varphi^*$. Полагая $\varphi_1 = \varphi^*$, $\varphi_2 = \varphi^* + 2\pi$, получим сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$, состоящий из всех точек плоскости, за исключением луча (ρ, φ^*), $\rho \geqslant 0$. В этом случае любое решение $(\rho(t), \varphi(t))$, $\rho(0) > 0$ системы (6), в силу леммы 2, удовлетворяет условиям $\rho(t) \to 0$ при $\varepsilon t \to -\infty$ и $\rho(t) \to +\infty$ при $\varepsilon t \to +\infty$, где $\varepsilon = \operatorname{tg} \varphi^*$. Следовательно, сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является параболическим.

Из теоремы 1 и леммы 4 следует следующий признак отсутствия ненулевых ограниченных решений однородного уравнения.

Теорема 2. *Система* (5) *не имеет ненулевых ограниченных на всей оси решений тогда и только тогда, когда функция $g_0(\varphi)$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

а) *уравнение* (8) *не имеет решений и* $\kappa(g_0) \neq 0$;

б) *уравнение* (8) *на полуинтервале* $[0, 2\pi)$ *имеет единственное решение*;

в) *если составляющий интервал (φ_1, φ_2) множества $\{\varphi : \sin^2 \varphi + g_0(\varphi) \cos \varphi \neq 0\}$ и $0 < \varphi_1 < 2\pi$, $\varphi_1 \in (k_1\pi/2, (k_1+1)\pi/2)$ для некоторого $k_1 \in \{0,1,2,3\}$, $\varphi_2 \in (k_2\pi/2, (k_2+1)\pi/2)$ для некоторого $k_2 \in \{k_1, k_1+1, k_1+2, k_1+3, k_1+4\}$, то (k_1, k_2) удовлетворяет условиям: $(k_1, k_2) \notin \{(1,4),(3,6)\}$, причем если $(k_1, k_2) = (1,2)$, то $g_0(\pi) > 0$, а если $(k_1, k_2) = (3,4)$, то $g_0(0) < 0$.*

3. Вычисление вращения вполне непрерывного векторного поля

Пусть $T > 0$ — фиксированное число. Задача о существования T-периодических решений системы (5) эквивалентна существованию решения системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(T) + \int\limits_0^t x_2(s)\, ds, \\ x_2(t) = x_2(T) - \int\limits_0^t g(x_1(s), x_2(s))\, ds \end{cases} \tag{10}$$

в пространстве $C[0,T]$ — непрерывных на отрезке $[0,T]$ вектор-функций $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

На границе $\dot{\Omega} = \partial\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset C[0,T]$ рассмотрим векторное поле $\Phi x(t) = x(t) - Ax(t)$, где $A : C[0,T] \mapsto C[0,T]$ — вполне непрерывный оператор, определенный равенством

$$Ax(t) = \left(x_1(T) + \int\limits_0^t x_2(s)\, ds,\ x_2(T) - \int\limits_0^t g(x_1(s), x_2(s))\, ds \right).$$

Если система (10) не имеет ненулевых решений и θ — нуль пространства $C[0,T]$, не принадлежит границе $\dot{\Omega}$, то (см. [5]) определено вращение $\gamma(\Phi,\dot{\Omega})$ вполне непрерывного векторного поля Φ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω.

Отметим, что в условиях единственности решения задачи Коши в каждой точке плоскости и изолированности нулевого стационарного решения системы (5), в силу теоремы 1, система интегральных уравнений (10) не имеет ненулевых решений, если функция $g_0(\varphi)$ удовлетворяет условию а) теоремы 2 или одному из следующих условий:

г) уравнение (8) имеет решение;

д) уравнение (8) не имеет решений, $\kappa(g_0) = 0$ и $T \neq kT_0$, $k = 1, 2, \ldots$, где $T_0 = G(-2\pi, 0)$.

Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть система* (10) *не имеет ненулевых решений и* θ *— нуль пространства* $C[0,T]$, *не принадлежит границе* $\dot{\Omega}$. *Тогда* $\gamma(\Phi,\dot{\Omega}) = 0$, *если* $\theta \notin \Omega$ *и* $\gamma(\Phi,\dot{\Omega}) = (\operatorname{sign} g_0(0) - \operatorname{sign} g_0(\pi))/2$, *если* $\theta \in \Omega$.

$\lhd$ Если $\theta \notin \overline{\Omega}$, то векторное поле в области не имеет нулей. Поэтому (см. [5]) вращение $\gamma(\Phi,\dot{\Omega}) = 0$.

Пусть $\theta \in \Omega$. Так как вращение $\gamma(\Phi,\dot{\Omega})$ не меняется при достаточно малом возмущении функции $g_0(\varphi)$, то согласно лемме 1, без ограничения общности можно предполагать, что система (5) не имеет ненулевых периодических решений. Поэтому, как нетрудно показать, в каждой точке x множества $\dot{\Omega}$ векторы $\lambda\Phi x + (1-\lambda)\Phi_0 x \neq \theta$ для любого $\lambda \in [0,1]$, где поле $\Phi_0 x(t) = x(t) - A_0 x(t)$, с оператором

$$A_0 x(t) = \left(x_1(T) + \int\limits_0^T x_2(s)ds,\ x_2(T) - \int\limits_0^T g(x_1(s), x_2(s))\, ds \right).$$

Следовательно, вращения $\gamma(\Phi,\dot{\Omega})$ и $\gamma(\Phi_0,\dot{\Omega})$ полей Φ и Φ_0 на $\dot{\Omega}$ равны $\gamma(\Phi,\dot{\Omega}) = \gamma(\Phi_0,\dot{\Omega})$.

Оператор A_0 действует из пространства $C[0,T]$ в двухмерное подпространство постоянных функций $E^2 \subset C[0,T]$. Следовательно, по определению (см. [5]), вращение $\gamma(\Phi_0,\dot{\Omega})$ поля Φ_0 равно вращению сужения этого поля на границе области $\Omega \cap E^2$ в двухмерном пространстве E^2. На подпространстве E^2 поле Φ_0 совпадает с векторным полем

$$\Psi x = \Big(-Tx_2,\ Tg(x_1, x_2) \Big), \quad x \in E^2,$$

которое имеет единственный нуль (особая точка) в нулевой точке, принадлежащей области $\Omega \cap E^2$. Как нетрудно видеть, для индекса нулевой особой точки поля Ψ, имеет место равенство

$$\operatorname{ind}(\Psi, 0) = (\operatorname{sign} g(1,0) - \operatorname{sign} g(-1,0))/2 = (\operatorname{sign} g_0(0) - \operatorname{sign} g_0(\pi))/2.$$

Таким образом, имеем $\gamma(\Phi,\dot{\Omega}) = \gamma(\Phi_0,\dot{\Omega}) = \operatorname{ind}(\Psi, 0)$. $\rhd$

4. Периодические и ограниченные решения неоднородного уравнения

Перейдем к изучению вопроса существования T-периодических решений уравнения (2), предполагая, что функция $f(t,y,z)$ определена при всех t, y, z, непрерывна по совокупности переменных, T-периодическая по переменной t и удовлетворяет условию (3).

Полагая $x_1 = y$, $x_2 = y'$ в уравнении (2), получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -g(x_1,x_2) + f(t,x_1,x_2). \end{cases} \tag{11}$$

Отыскание T-периодических решений системы (11) эквивалентно нахождению решений системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(T) + \int\limits_0^t x_2(s)\,ds, \\ x_2(t) = x_2(T) - \int\limits_0^t \big[g(x_1(s),x_2(s)) - f(s,x_1(s),x_2(s))\big]\,ds \end{cases} \tag{12}$$

в пространстве $C[0,T]$. В этом пространстве рассмотрим семейство вполне непрерывных векторных полей $\Phi(x,\lambda) = x(t) - A(x(t),\lambda)$, где

$$A(x(t),\lambda) = \left(x_1(T) + \int\limits_0^t x_2(s)\,ds,\ x_2(T) - \int\limits_0^t \big[g(x_1(s),x_2(s)) - \lambda f(s,x_1(s),x_2(s))\big]\,ds \right), \tag{13}$$

зависящее от параметра $\lambda \in [0,1]$. Нули поля $\Phi(x,1)$ совпадают с решением системы (12), а $\Phi(x,0) = x(t) - Ax(t)$, $Ax(t) = A(x(t),0)$.

Предположим, что система (10) не имеет ненулевых решений. Тогда в силу вполне непрерывности оператора A и однородности функции $g(x_1,x_2)$ для поля $\Phi(x,0) = x(t) - Ax(t)$ существует такое $m > 0$, что справедлива оценка

$$\|\Phi(x,0)\| = \|x(t) - Ax(t)\| \geqslant m\|x\|, \quad \|x\| = \max\{|x_1(t)| + |x_2(t)| : 0 \leqslant t \leqslant T\}. \tag{14}$$

В силу условия (3) для функции $f(t,y,z)$ существует $C > 0$ такое, что имеет место оценка

$$|f(t,y,z)| \leqslant \frac{m}{2T}(|y| + |z|) + C,$$

и, следовательно,

$$\max\big\{|f(t,x_1(t),x_2(t))| : 0 \leqslant t \leqslant T\big\} \leqslant \frac{m}{2T}\|x\| + C. \tag{15}$$

Из представления оператора (13) и оценок (14), (15) окончательно получим

$$\|\Phi(x,\lambda)\| \geqslant \|x(t) - Ax(t)\| - T\left[\frac{m}{2T}\|x\| + C\right] \geqslant m\|x\| - T\left[\frac{m}{2T}\|x\| + C\right] \geqslant \frac{m}{4}\|x\|, \tag{16}$$

если $m\|x\| \geqslant 4CT$, $\lambda \in [0,1]$.

Из оценки (16) следует, что векторные поля $\Phi(x,\lambda)$ на сфере $S(R) = \{x(t) : \|x\| = R\}$ достаточно большого радиуса R не имеют нулей и, следовательно (см. [5]), определено вращение $\gamma(\Phi(\cdot,\lambda), S(R))$, не зависящее от $\lambda \in [0,1]$.

Таким образом доказана

Лемма 6. *Пусть система* (10) *не имеет ненулевых решений. Тогда векторное поле* $\Phi(x,1)$, *соответствующее системе интегральных уравнений* (12), *не имеет нулей на сфере* $S(R)$ *достаточно большого радиуса* R, *и для его вращения* $\gamma(\Phi(\cdot,1),S(R))$ *справедливо равенство* $\gamma(\Phi(\cdot,1),S(R)) = \operatorname{ind}(\Psi,\theta)$.

Эта лемма означает, что вращение $\gamma(\Phi(\cdot,1),S(R))$ определено и равно индексу особой точки двухмерного поля Ψ, если функция $g_0(\varphi)$ удовлетворяет одному из условий а), г), д). Отметим, что только в условии д) участвует величина периода T.

Из общих топологических принципов существования нулей вполне непрерывного поля (см. [5]) и леммы 6 следует признак существования периодических решений уравнения (2).

Теорема 4. *Пусть* $g_0(0)\cdot g_0(\pi) < 0$ *и, кроме того, функция* $g_0(\varphi)$ *удовлетворяет одному из условий* а), г), д). *Тогда уравнение* (2) *имеет* T*-периодическое решение для любой функции* $f(t,y,z)$, *удовлетворяющей условию* (3).

Заметим, что, если $g_0(0)\cdot g_0(\pi) \neq 0$, то для существования T-периодических решений уравнения (2) при любой функции f, удовлетворяющей условию (3), условие $g_0(0)\cdot g_0(\pi) < 0$ необходимо. Действительно, если $g_0(0)\cdot g_0(\pi) > 0$, то для функции $f(t,y,z) \equiv -g_0(0)/(1+|y|)$, которая, очевидно, удовлетворяет условию (3), уравнение (2) не имеет периодических решений.

Если функция $g_0(\varphi)$ удовлетворяет условию $g_0(0)\cdot g_0(\pi) > 0$, то в множестве функций $f(t,y,z)$, удовлетворяющих условию (3), можно выделить подмножество, для которого существует ненулевое T-периодическое решение уравнения (2). Для простоты изложения ограничимся рассмотрением функции, удовлетворяющей условию (3), и при некоторых $a > 0$, $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{r\to 0}\max_{|y|,|z|\leqslant 1,t}\left|\frac{f(t,ry,r^{1-\sigma}z)}{r^{\alpha}} - ay|y|^{\alpha-1}\right| = 0, \quad \sigma = (1+\alpha)/2. \tag{17}$$

Систему (11) перепишем в виде

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = ax_1|x_1|^{\alpha-1} + f_1(t,x_1,x_2), \end{cases} \tag{18}$$

где функция

$$f_1(t,x_1,x_2) = f(t,x_1,x_2) - ax_1|x_1|^{\alpha-1} - g(x_1,x_2)$$

в силу (17) удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to 0}\max_{|y|,|z|\leqslant 1,t}\frac{\left|f_1(t,ry,r^{1-\sigma}z)\right|}{r^{\alpha}} = 0. \tag{19}$$

В пространстве $C[0,T]$ рассмотрим семейство вполне непрерывных векторных полей $\Phi_0(x,\lambda) = x(t) - B(x(t),\lambda)$ с оператором

$$B(x(t),\lambda) = \left(x_1(T) + \int\limits_0^t x_2(s)\,ds,\ x_2(T) + \int\limits_0^t \left[h(x_1(s)) + \lambda f_1(s,x_1(s),x_2(s))\right] ds\right),$$

зависящим от параметра $\lambda \in [0,1]$, где $h(u) = au|u|^{-1}$. Нули поля $\Phi_0(x,1)$ совпадают с T-периодическим решением системы (18), а нули поля $\Phi_0(x,0)$ — T-периодическими решениями системы

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = ax_1|x_1|^{\alpha-1}. \end{cases} \tag{20}$$

Как нетрудно видеть, функция $x_2^2 - 2a|x_1|^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ является интегралом системы (20) и поэтому эта система не имеет ненулевых ограниченных на всей оси решений и, следовательно, не имеет и ненулевых периодических решений. Поэтому векторное поле не имеет нулей на любой сфере $S(r)$, $r > 0$. Как при доказательстве теоремы 3, можно показать, что для вращения $\gamma(\Phi_0(\cdot,0), S(r))$ поля $\Phi_0(x,0)$ на сфере $S(r)$ справедлива формула $\gamma(\Phi_0(\cdot,0), S(r)) = \mathrm{ind}(\Psi_0, 0)$, где поле

$$\Psi_0 x = \big(-Tx_2, \, -Th(x_1) \big), \quad x \in E^2,$$

имеет единственный нуль (особая точка) в нулевой точке подпространства постоянных функций E^2. Очевидно, что $\mathrm{ind}(\Psi_0, 0) = -1$.

Справедлива следующая

Лемма 7. *Существует $r_0 > 0$ такое, что векторы $\Phi_0(x,\lambda) \neq \theta$, при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $x \in S(r)$, $0 < r < r_0$ и, следовательно, справедлива формула $\gamma(\Phi_0(\cdot,1), S(r)) = \gamma(\Phi_0(\cdot,0), S(r)) = \mathrm{ind}(\Psi_0, 0)$ при достаточно малых $r > 0$.*

$\lhd$ Для доказательства леммы достаточно показать существование такого $r_0 > 0$, что векторы $\Phi_0(x,\lambda) \neq \theta$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, и $x \in \dot{\Omega}_0(r)$, $0 < r < r_0$, где область $\Omega_0(r) = \{x(t) : |x_1(t)| < r, \, |x_2(t)| < r^{1-\sigma}, \, 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Если $\Phi_0(x,\lambda) = \theta$ для некоторых $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $x \in \dot{\Omega}_0(r)$, $r > 0$, то функция $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ является решением системы дифференциального уравнения

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = ax_1|x_1|^{\alpha-1} + \lambda f_1(t, x_1, x_2) \tag{21}$$

и удовлетворяет условиям $x(0) = x(T)$, $|x_1(t)| \leqslant r$, $|x_2(t)| \leqslant r^{1-\sigma}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, причем существует $\tau \in [0,T]$ такое, что $\max\{|x_1(\tau)|/r, \, |x_2(\tau)|/r^{1-\sigma}\} = 1$. В силу T-периодичности функции $f_1(t, x_1, x_2)$, T-периодическое продолжение $x(t)$ на всю числовую ось является решением системы (21). Непосредственно проверяется, что функция $y(t) = (y_1(t), y_2(t)) = (x_1(\tau + tr^\sigma)/r, x_2(\tau + tr^\sigma)/r^{1-\sigma})$, определенная при всех t, является решением системы

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = ay_1|y_1|^{\alpha-1} + \frac{\lambda}{r^\alpha} f_1\left(\tau + tr^\sigma, ry_1, r^{1-\sigma}y_2\right) \tag{22}$$

и удовлетворяет условиям $|y_1(t)| \leqslant 1$, $|y_2(t)| \leqslant 1$, $t \in R$, $\max\{|y_1(0)|, |y_2(0)|\} = 1$.

Предположим, что утверждение леммы не имеет место. Тогда существуют последовательности $\lambda_k \in [0,1]$, $0 < r_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $x^k(t) = (x_1^k(t), x_2^k(t)) \in \dot{\Omega}_0(r_k)$ такие, что $\Phi_0(x^k, \lambda_k) = \theta$. По выше описанному правилу по функциям $x^k(t)$ построим ограниченные на всей оси решения $y^k(t) = (y_1^k(t), y_2^k(t)) = (x_1(\tau_k + tr_k^\sigma)/r_k, x_2(\tau_k + tr_k^\sigma)/r_k^{1-\sigma})$ системы уравнений (22) при $\lambda = \lambda_k$, $r = r_k$, $\tau = \tau_k$. Отсюда следует, что последовательность $y^k(t)$ равностепенно непрерывна. Поэтому, в силу теоремы Арцела, без ограничения общности можно считать, что она сходится к некоторой функции $y^*(t)$ равномерно на каждом конечном отрезке. Функция $y^*(t)$ при $t = 0$ удовлетворяет условию $\max\{|y_1^*(0)|, |y_2^*(0)|\} = 1$ и, в силу условия (19), является решением системы (20):

$$y_1^{*'}(t) = y_2^*(t), \quad y_2^{*'}(t) = ay_1^*(t)|y_1^*(t)|^{\alpha-1}.$$

Как отметили выше, система (20) не имеет ненулевых ограниченных на всей оси решений. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы. $\rhd$

Из свойства вращения вполне непрерывных векторных полей и леммы 7 непосредственно следует следующая

Теорема 5. *Пусть функция $g_0(\varphi)$ удовлетворяет одному из условий* а), г), д) *и* $g_0(0)\cdot g_0(\pi) > 0$, *а функция $f(t,y,z)$ удовлетворяет условию* (3) *и при некоторых $a > 0$, $0 < \alpha < 1$ условию* (17). *Тогда уравнение* (2) *имеет по крайней мере одно ненулевое T-периодическое решение.*

Теперь перейдем к изучению вопроса существования ограниченных решений уравнения (2), предполагая, что функция $f(t,y,z)$ определена при всех t, y, z, непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию

$$|f(t,y,z)| \leqslant u(|y|+|z|), \tag{23}$$

где $u(r)$, $r \geqslant 0$, — неубывающая функция, удовлетворяющая условию $u(r)/r \to 0$ при $r \to \infty$. Ясно, что для каждой функции $f(t,y,z)$, удовлетворяющей условию (3), выполнено условие (23), если положить $u(r) = \sup\{|f(t,y,z)| : |y|+|z| \leqslant r, t\}$ и обратно, функция $f(t,y,z)$, удовлетворяющая условию (23), удовлетворяет и условию (3).

Лемма 8. *Пусть система* (5) *не имеет ненулевых ограниченных на всей оси решений и неубывающая функция $u(r)$, $r \geqslant 0$, удовлетворяет условию $u(r)/r \to 0$ при $r \to \infty$. Тогда:* 1) *существует $m_0 > 0$ такое, что для любой непрерывно дифференцируемой и равномерно ограниченной на всей оси вектор-функции $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ справедлива оценка*

$$\sup_t(|x_1'(t) - x_2(t)| + |x_2'(t) + g(x_1(t), x_2(t))|) \geqslant m_0 \sup_t(|x_1(t)| + |x_2(t)|);$$

2) *существует $R_0 > 0$ такое, что для любой функции $f(t,y,z)$, удовлетворяющей условию* (23), *и любой непрерывно дифференцируемой и равномерно ограниченной на всей оси вектор-функции $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, удовлетворяющей условию* $\sup_t(|x_1(t)| + |x_2(t)|) \geqslant R_0$, *справедлива оценка*

$$\sup_t(|x_1'(t) - x_2(t)| + |x_2'(t) + g(x_1(t), x_2(t)) - f(t, x_1(t), x_2(t))|) \geqslant \frac{m_0}{2} \sup_t(|x_1(t)| + |x_2(t)|).$$

$\lhd$ В силу положительной однородности функции $g(y,z)$ утверждение 1) леммы достаточно доказать на множестве функций $\{x(t) : \sup_t(|x_1(t)| + |x_2(t)|) = 1\}$. Если утверждение 1) леммы не имеет места, то существует последовательность функций $x^k(t) = (x_1^k(t), x_2^k(t))$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_t \left(|x_1^k(t)| + |x_2^k(t)|\right) = 1, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}x_1^k(t) - x_2^k(t) = \xi_1^k(t), \quad \frac{d}{dt}x_2^k(t) + g\left(x_1^k(t), x_2^k(t)\right) = \xi_2^k(t), \tag{25}$$

где

$$\sup_t \left(|\xi_1^k(t)| + |\xi_2^k(t)|\right) < \frac{1}{k}. \tag{26}$$

В силу условия (24), без ограничения общности можно считать, что $|x_1^k(0)| + |x_2^k(0)| \geqslant 1/2$ (в противном случае мы бы перешли от функции $x^k(t)$ к функции $x^k(t+\tau_k)$, где

$|x_1^k(\tau_k)| + |x_2^k(\tau_k)| \geqslant 1/2$). Из (25) и (26) следует, что последовательности функции $x^k(t)$ и $\frac{d}{dt}x^k(t)$ равномерно ограниченны и равностепенно непрерывны на всей числовой оси. Поэтому, в силу теоремы Арцела, без ограничения общности можно считать, что существует равномерный на каждом отрезке предел $x^*(t)$ последовательности $x^k(t)$ при $k \to \infty$, который непрерывно дифференцируемый на всей оси и является ограниченным решением системы (5). Это противоречит нашему предположению. Полученное противоречие доказывает утверждения 1).

Докажем утверждение 2). По числу $m_0 > 0$ выберем $R_0 > 0$ такое, что $u(r) < m_0 r/2$ при $r > R_0$. Согласно условию (23), если $r = \sup_t(|x_1(t)| + |x_2(t)|) > R_0$, то

$$|f(t, x_1(t), x_2(t))| \leqslant u\left(|x_1(t)| + |x_2(t)|\right) < m_0 r/2.$$

Поэтому в неравенстве

$$\begin{aligned}\big|x_1'(t) - x_2(t)\big| + \big|x_2'(t) + g(x_1(t), x_2(t)) - f(t, x_1(t), x_2(t))\big| \\ \geqslant |x_1'(t) - x_2(t)| + |x_2'(t) + g(x_1(t), x_2(t))| - m_0 r/2,\end{aligned}$$

переходя к верхней грани по t и затем используя утверждение 1) леммы, получим справедливость утверждения 2). $\rhd$

Теорема 6. *Пусть система* (5) *не имеет ненулевых ограниченных на всей оси решений и* $g_0(0) \cdot g_0(\pi) < 0$, *а функция* $f(t, y, z)$ *удовлетворяет условию* (23). *Тогда уравнение* (2) *имеет по крайне мере одно ограниченное на всей оси решение.*

$\lhd$ По функцию $f(t, y, z)$ определим последовательность функций

$$f_k(t, y, z) = \begin{cases} f(t, y, z), & -k \leqslant t \leqslant k - 1, \\ f(-k, y, z) + (k - t)\big[f(t, y, z) - f(-k, y, z)\big], & k - 1 < t \leqslant k, \end{cases}$$

где $k = 1, 2, \ldots$, которые соответственно определены и непрерывны на множестве $(t, y, z) \in [-k, k] \times R^2$. Каждую функцию $f_k(t, y, z)$ вне отрезка $[-k, k]$ продолжим сохранением $T = 2k$-периодичности по t: $f_k(t + mT, y, z) \equiv f_k(t, y, z)$, $t \in [-k, k]$, $m = 1, 2, \ldots$

Функции $f_k(t, y, z)$ удовлетворяют неравенству $|f_k(t, y, z)| \leqslant \sup_t |f(t, y, z)|$ и, следовательно, $|f_k(t, y, z)| \leqslant u(|y| + |z|)$. В силу теоремы 4 уравнение

$$y'' + g(y, y') = f_k(t, y, y') \tag{27}$$

имеет $T = 2k$-периодическое решение $y_k(t)$. Последовательность $y_k(t)$ удовлетворяет уравнению (2) на отрезке $[-k, k - 1]$ и, в силу леммы 8, равномерно ограничена вместе с производными первого порядка: $\sup_t(|y_k(t)| + |y_k'(t)|) \leqslant R_0$, $k = 1, 2, \ldots$ В силу уравнения (27), последовательность производных второго порядка $y_k''(t)$ ограничена и равностепенно непрерывна на каждом отрезке. В силу теоремы Арцела, без ограничения общности, можно считать, что последовательность $y_k(t)$ сходится к некоторой функции $y_*(t)$, вместе с производными первого и второго порядка, равномерно на каждом отрезке. Из свойства замкнутости операции дифференцирования следует, что функция $y_*(t)$ является решением уравнения (2) на числовой оси, причем $|y_*(t)| + |y_*'(t)| \leqslant R_0$, $t \in (-\infty, \infty)$. $\rhd$

Литература

1. Кафаров В. В., Глебов М. Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств.—М.: ЮНИТИ, 1991.—400 с.
2. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии.—М.: Ижевск, 2002.—232 с.
3. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории.—М.: Мир, 1999.—335 с.
4. Колемаев В. А. Математическая экономика.—М.: Высш. шк., 1998.—240 с.
5. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа.—М.: Наука, 1975.—512 с.
6. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: МГУ, 1984.—296 с.
7. Бобылев Н. А. О построении правильных направляющих функций // Докл. АН СССР.—1968.—Т. 183, № 2.—С. 265–266.
8. Мухамадиев Э. М. К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР.—1970.—Т. 194, № 3.—С. 510–513.
9. Мухамадиев Э. М. К теории ограниченных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Диф. уравнения.—1974.—Т. 10, № 5.—С. 635–646.
10. Ахмедов Дж. Т., Мухамадиев Э. М., Нуров И. Д. Периодические и ограниченные решения квазилинейных уравнения второго порядка // Вестн. Воронежского гос. ун-та.—2019.—№ 3.—С. 59–66.
11. Gomory R. E. Critical points at infinity and forced oscillation // Annals of Mathematics Studies.—1956.—Vol. 3, № 36.—P. 85–126.
12. Абдуваитов Х. Некоторые достаточные условия существования периодических и ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Диф. уравнения.—1985.—Т. 21, № 12.—С. 74–84.
13. Азизов Р. Э. Об априорных оценках для ограниченных решений системы трех дифференциальных уравнений с однородными главными членами // Докл. АН Тадж. ССР.—1988.—Т. 31, № 9.—С. 555–558.
14. Ахмедов Дж. Т. О периодическом и ограниченном решении нелинейного уравнения второго порядка с фазовыми портретами // Докл. НАН Таджикистана.—2020.—Т. 63, № 9–10.—С. 579–585.

Статья поступила 28 июля 2021 г.

Ахмедов Джовидон Толибович
Научно-исследовательский институт
Таджикского национального университета,
научный сотрудник
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, ул. Рудаки, 17
E-mail: `jovidon-a.90@mail.ru`

Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич
Вологодский государственный университет,
профессор кафедры математики и информатики
РОССИЯ, 160000, Вологда, ул. Ленина, 15
E-mail: `emuhamadiev@rambler.ru`

Нуров Исхокбой Джумаевич
Научно-исследовательский институт
Таджикского национального университета,
главный научный сотрудник
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, ул. Рудаки, 17
E-mail: `nid1@mail.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 2, P. 35–50

PERIODIC AND BOUNDED SOLUTIONS OF SECOND-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ahmedov, J. T.[1], Mukhamadiev, E. M.[2] and Nurov, I. J.[1]

[1] Research Institute of the Tajik National University
17 Rudaki St., Dushanbe 734025, Tajikistan;
[2] Vologda State University,
15 Lenina St., Vologda 160000, Russia,

E-mail: `emuhamadiev@rambler.ru`, `jovidon-a.90@mail.ru`, `nid1@mail.ru`

Abstract. The paper investigates questions about the existence of periodic or bounded solutions of nonlinear second-order differential equations of the form $y'' + g(y, y') = f(t, y, y')$. Here the function $g(y, z)$ is continuous and positively homogeneous of the first order, and $f(t, y, z)$ is continuous function defined for all values of t, y, z and satisfying the smallness condition with respect to $|y| + |z|$ at infinity. For this equation, the questions of the existence of a priori estimate, periodic solutions in the case of a function $f(t, y, z)$ periodic in t, and bounded solutions in the case only the boundedness in t of the function $f(t, y, z)$ are closely related to the qualitative behavior of the solution of the homogeneous equations $y''+g(y, y') = 0$. Therefore, at the first stage, it seems important to study the nature of the behavior of the trajectory equivalent to the homogeneous equation of the system. Passing to polar coordinates, we obtain the representations of the solution of the system, which allow one to describe the complete classification of all possible phase portraits of the solution of the system in terms of the property of the function $g(y, y')$. In particular, the conditions for the the absence of nonzero periodic solutions or solutions bounded on the entire axis were obtained. The challenge of existence periodic solutions to the original equation is equivalent to the existence of solutions to the integral equations in the space $C[0, T]$-functions continuous on the segment $[0, T]$. In turn, the integral equation generates a completely continuous vector field in the space $C[0, T]$, the zeros of which determine solution of an integral equation. Formulas for calculating the rotation of a vector field on spheres of sufficiently large radius of the space $C[0, T]$ are obtained. Based on the results obtained, conditions for the existence of periodic and bounded solutions of an inhomogeneous equation are found. Note that the results obtained have been brought up to calculation formulas.

Key words: differential equation, periodic solutions, boundedness, homogeneous equation, homotopy, completely continuous vector fields, phase portraits.

AMS Subject Classification: 34A34, 34C25.

For citation: *Ahmedov, J. T., Mukhamadiev, E. M. and Nurov, I. J.* Periodic and Bounded Solutions of Second-Order Nonlinear Differential Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 2, pp. 35–50 (in Russian). DOI: 10.46698/g4784-3971-1105-g.

References

1. *Kafarov, V. V. and Glebov, M. B. Matematicheskoe modelirovanie osnovnikh protsessov khimicheskikh proizvodstv* [Mathematical Modeling of the Main ProcessesChemical Industries], Moscow, UNITY, 1991, 400 p. (in Russian).
2. *Riznichenko, G. Yu. Leksii po matematicheskim modelyam v biologii* [Lectures on Mathematical Models in Biology], Moscow, Izhevsk, 2002, 232 p. (in Russian).
3. *Zang, V. B. Sinergeticheskaya ekonomika. Vremya i peremeni v nelineinoi ekonomicheskoi teorii* [Synergetic Economy. Time and Change in the Nonlinear Economic Theories], Moscow, World, 1999, 335 p. (in Russian).
4. *Kolemaev V. A. Matematicheskaya ekonomika* [Mathematical Economics], Moscow, Higher school, 1998, 240 p. (in Russian).
5. *Krasnoselsky, M. A. and Zabreik, P. P. Geomtricheskie metodi nelineinivi analiza* [Geometric Methods of Nonlinear Analysis], Moscow, Nauka, 1975, 512 p. (in Russian).

6. *Petrovsky, I. G. Leksii po teorii obiknovennikh differensialnikh uravnenii* [Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations], Moscow, Moscow State University, 1984, 296 p. (in Russian).
7. *Bobylev, N. A.* About Constructing Correct Guiding Functions, *Doklady Math. USSR*, 1968, vol. 183, no. 2, pp. 265–266 (in Russian).
8. *Muhamadiev, E. M.* On the Theory of Periodical Solutions of Systems of Ordinary Differential Equations, *Doklady Math. USSR*, 1970, vol. 194, no. 3, pp. 510–513 (in Russian).
9. *Muhamadiev, E. M.* On the Theory of Bounded Solutions of Ordinary Systems Differential Equations, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1974, vol. 10, no. 5, pp. 635–646 (in Russian).
10. *Ahmedov, J. T., Muhamadiev, E. M. and Nurov, I. D.* Periodic and Limited Solutions Second-Order Quasilinear Equations, *Vestnik Voronezh State University*, 2019, vol. 3, pp. 59–66 (in Russian).
11. *Gomory, R. E.* Critical Points at Infinity and Forced Oscillation, *Annals of Mathematics Studies*, 1956, vol. 3., no. 36, pp. 85–126.
12. *Abduvaitov, H.* Some Sufficient Conditions for the Existence of Periodic and Bounded Solutions of Second-Order Nonlinear Differential Equations, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1985, vol. 21, no. 12, pp. 74–84 (in Russian).
13. *Azizov, R. E.* A Priori Estimates for Bounded Solutions of a System of Three Differential Equations with Homogeneous Principal Terms, *Reports of the Academy of Sciences of the Tajik SSR*, 1988, vol. 31, no. 9, pp. 555–558 (in Russian).
14. *Ahmedov, J. T.* To Theory of Periodic and Bounded Solutions of Nonlinear Dynamic Second-Order Systems with Phase Portraits, *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2020, vol. 63, no. 9–10, pp. 579–585 (in Russian).

Received Jule 28, 2021

Jovidon T. Ahmedov
Research Institute of the Tajik National University,
17 Rudaki St., Dushanbe 734025, Tajikistan,
Researcher
E-mail: `jovidon-a.90@mail.ru`

Ergashboi M. Mukhamadiev
Vologda State University,
15 Lenina St., Vologda 160000, Russia,
Professor
E-mail: `emuhamadiev@rambler.ru`

Iskhokboi J. Nurov
Research Institute of the Tajik National University,
17 Rudaki St., Dushanbe 734025, Tajikistan,
Leading Researcher
E-mail: `nid1@mail.ru`