Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 2, С. 117–123

УДК 519.17
DOI 10.46698/y5199-5569-8011-v

О Q-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГРАФАХ ШИЛЛА С $b = 6$[#]

А. А. Махнев[1], Чжиган Ван[2]

[1] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
[2] Школа науки, Хайнаньский университет, Китай, 570228, Хайкоу, Хайнань

E-mail: makhnev@imm.uran.ru, wzhigang@hainanu.edu.cn

Аннотация. Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение θ_1, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. И. Н. Белоусов и А. А. Махнев нашли допустимые массивы пересечений Q-полиномиальных графов Шилла с $b = 6$: $\{42t, 5(7t+1), 3(t+3); 1, 3(t+3), 35t\}$, где $t \in \{7, 12, 17, 27, 57\}$, $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$, $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$, $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ или $\{5694, 4750, 600; 1, 300, 4745\}$. В работе доказано, что графы с массивами пересечений $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$ и $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ не существуют.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, Q-полиномиальный граф, тройные числа пересечений.

AMS Subject Classification: 20B05.

Образец цитирования: *Махнев А. А., Чжиган Ван.* О Q-полиномиальных графах Шилла с $b = 6$ // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 2.—С. 117–123. DOI 10.46698/y5199-5569-8011-v.

1. Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u,w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ

[#]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного фонда естественных наук Китая, проект № 20-51-53013, и Естественно научного фонда Китая провинции Хайнань, проект № 120RC453.

для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ (см. [1]).

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение θ_1, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$ (см. [2]). И. Н. Белоусов и А. А. Махнев нашли допустимые массивы пересечений Q-полиномиальных графов Шилла с $b = 6$ [3].

Предложение 1. *Q-полиномиальный граф Шилла с $b = 6$ имеет массив пересечений:*

(1) $\{42t, 5(7t+1), 3(t+3); 1, 3(t+3), 35t\}$, *где* $t \in \{7, 12, 17, 27, 57\}$;

(2) $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$ *или* $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$;

(3) $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$, $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ *или* $\{5694, 4750, 600; 1, 300, 4745\}$.

Следующие теоремы являются основными результатами работы.

Теорема 1. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$ *и* $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$ *не существуют.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ *не существует.*

2. Тройные числа пересечений

В доказательстве теоремы используются тройные числа пересечений [4].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то через $\left\{ {u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right\}$ обозначим множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, а через $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right]$ — число вершин в $\left\{ {u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right\}$. Числа $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right]$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1 r_2 r_3]$ нет общих формул. Однако в [4] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u, v)$, $U = d(v, w)$, $V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей:

$$\sum_{l=1}^{d} [ljh] = p^U_{jh} - [0jh], \quad \sum_{l=1}^{d} [ilh] = p^V_{ih} - [i0h], \quad \sum_{l=1}^{d} [ijl] = p^W_{ij} - [ij0]. \qquad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p^W_{ij} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \ldots, d\}$.

Положим $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \left[{uvw \atop rst} \right]$. Если параметр Крейна $q^h_{ij} = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \left\{\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix}\right\}$, $[ijh] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ihj \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^* = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ jih \end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^\sim = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ hji \end{smallmatrix}\right]$. В случаях $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$ или $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 3$ вычисление чисел $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ihj \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^* = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ jih \end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^\sim = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ hji \end{smallmatrix}\right]$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

3. Графы с массивом пересечений $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$ и $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, u — вершина графа Γ и $\Sigma = [u]$. Тогда многочлен Тервиллигера (см. [5]) графа Γ равен $-15(2x-19)(x+6)(x+1)(x-44)$, поэтому собственные значения локального подграфа Σ содержатся в множестве $[-6,-1] \cup (19/2, 44]$. С другой стороны, по предложению 4.4.3 из [1] собственные значения локального подграфа содержатся в $[-6, 19/2)$. Отсюда локальный подграф является объединением изолированных (a_1+1)-клик, противоречие с тем, что $a_1 + 1 = 57$ не делит $k = 372$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$. Тогда многочлен Тервиллигера графа Γ равен $-5(6x-119)(x+6)(x+1)(x-94)$. Отсюда собственные значения локального подграфа содержатся в $[-6,-1] \cup (119/6, 94]$. С другой стороны, по предложению 4.4.3 из [1] собственные значения локального подграфа содержатся в $[-6, 119/6)$. Отсюда локальный подграф является объединением изолированных (a_1+1)-клик, противоречие с тем что $a_1 + 1 = 119$ не делит $k = 744$.

Теорема 1 доказана.

4. Граф с массивом пересечений $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{294, 250, 30; 1, 30, 245\}$. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$. Так как многочлен Тервиллигера (см. [5]) равен $-5(x^2 - 153x + 1346)(x+6)(x-59)$, то неглавные собственные значения локального подграфа лежат в $[-6, -5/2\sqrt{721} + 153/2] \cup \{59\} \cup \{293\}$.

Далее, Γ имеет $1 + 1794 + 26910 + 3600 = 32305$ вершин, спектр 1794^1, 299^{426}, 19^{15548}, -26^{16330} и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 426 & 15548 & 16330 \\ 1 & 71 & \dfrac{494}{3} & -\dfrac{710}{3} \\ 1 & 0 & -\dfrac{364}{9} & \dfrac{355}{9} \\ 1 & -\dfrac{71}{2} & \dfrac{3887}{18} & -\dfrac{1633}{9} \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Для чисел пересечений графа Γ выполняются равенства:*

(1) $p^1_{11} = 293$, $p^1_{21} = 1500$, $p^1_{32} = 3000$, $p^1_{22} = 22410$, $p^1_{33} = 600$;

(2) $p^2_{11} = 100$, $p^2_{12} = 1494$, $p^2_{13} = 200$, $p^2_{22} = 22415$, $p^2_{23} = 3000$, $p^2_{33} = 400$;

(3) $p^3_{12} = 1495$, $p^3_{13} = 299$, $p^3_{22} = 22425$, $p^3_{23} = 2990$, $p^3_{33} = 310$.

$\lhd$ Прямые вычисления. $\rhd$

Пусть $u \in \Gamma$, $\Delta = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени 22415 на 26910 вершинах.

Лемма 2. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = 2, d(v,w) = 1$. Тогда выполняются равенства:*

$$[111] = r_3,\ [112] = [121] = -r_3 + 100,\ [122] = (23r_3 + 4r_4 + 3082)/3,$$
$$[123] = [132] = (-20r_3 - 4r_4 + 1100)/3,\ [133] = (20r_3 + 4r_4 - 500)/3;$$
$$[211] = (7r_3 + 2r_4 + 479)/3,\ [212] = [221] = (-7r_3 - 2r_4 + 4000)/3,$$
$$[222] = (-13r_3 - 5r_4 + 56545)/3,$$
$$[223] = [232] = (20r_3 + 7r_4 + 6700)/3,\ [233] = (-20r_3 - 7r_4 + 2300)/3;$$
$$[311] = (-10r_3 - 2r_4 + 400)/3,\ [312] = [321] = (10r_3 + 2r_4 + 200)/3,$$
$$[322] = (-10r_3 + r_4 + 7600)/3,\ [323] = [332] = -r_4 + 400,\ [333] = r_4,$$

где $r_3 \in \{0,1,\ldots,40\}$, $r_4 \in \{0,1,\ldots,200\}$, $5r_3+r_4 \leqslant 200$ и число $-r_3+r_4+1$ делится на 3.

$\lhd$ Упрощение формул (+) с учетом равенств $S_{113}(u,v,w) = S_{131}(u,v,w) = S_{311}(u,v,w) = 0$.

Так как $[122] = (23r_3 + 4r_4 + 3082)/3$, то $2r_3 + r_4 + 1$ делится на 3.

По лемме 2 имеем $18342 \leqslant [222] = (-13r_3 - 5r_4 + 56545)/3 \leqslant 18848$. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = 2$, $d(v,w) = 3$. Тогда выполняются равенства:*

$$[112] = -r_{12}/6 + 2r_{13}/3 - 2r_{14}/9 + 320/9,\ [113] = r_{12}/6 - 2r_{13}/3 + 2r_{14}/9 + 580/9,$$
$$[121] = 7r_{12}/12 + r_{13}/6 + r_{14}/9 + 65/9,\ [122] = -7r_{12}/12 - 7r_{13}/6 - r_{14}/9 + 13381/9,$$
$$[123] = r_{13},\ [131] = -7r_{12}/12 - r_{13}/6 - r_{14}/9 + 835/9,$$
$$[132] = 3r_{12}/4 + r_{13}/2 + r_{14}/3 - 85/3,\ [133] = -r_{12}/6 - r_{13}/3 - 2r_{14}/9 + 1220/9;$$
$$[212] = 7r_{12}/6 - 2r_{13}/3 + 2r_{14}/9 + 11335/9,\ [213] = -7r_{12}/6 + 2r_{13}/3 - 2r_{14}/9 + 2111/9,$$
$$[221] = -13r_{12}/12 + 5r_{13}/6 - 7r_{14}/9 + 12100/9,\ [222] = -r_{12}/12 - r_{13}/6 + 14r_{14}/9 + 164755/9,$$
$$[223] = 7r_{12}/6 - 2r_{13}/3 - 7r_{14}/9 + 24880/9,\ [231] = 13r_{12}/12 - 5r_{13}/6 + 7r_{14}/9 + 1346/9,$$
$$[232] = -13r_{12}/12 + 5r_{13}/6 - 16r_{14}/9 + 25645/9,\ [233] = r_{14};$$
$$[312] = -r_{12} + 200,\ [313] = r_{12},\ [321] = r_{12}/2 - r_{13} + 2r_{14}/3 + 430/3,$$
$$[322] = 2r_{12}/3 + 4r_{13}/3 - 13r_{14}/9 + 23680/9,\ [323] = -7r_{12}/6 - r_{13}/3 + 7r_{14}/9 + 2030/9,$$
$$[331] = -r_{12}/2 + r_{13} - 2r_{14}/3 + 170/3,\ [332] = r_{12}/3 - 4r_{13}/3 + 13r_{14}/9 + 1520/9,$$
$$[333] = r_{12}/6 + r_{13}/3 - 7r_{14}/9 + 1570/9,$$

где $r_{12} \in \{0,2,\ldots,152\}$, $r_{13} \in \{0,1,\ldots,200\}$, $r_{14} \in \{1,4,\ldots,310\}$, числа r_{12} и $3r_{12}/2 + r_{13}$ четны, а число $r_{14} - 1$ делится на 3.

$\lhd$ Упрощение формул (+) с учетом равенств $S_{113}(u,v,w) = S_{131}(u,v,w) = S_{311}(u,v,w) = 0$.

Так как $[112] = -r_{12}/6 + 2r_{13}/3 - 2r_{14}/9 + 320/9$, то r_{12} четно. Далее, $[132] = 3r_{12}/4 + r_{13}/2 + r_{14}/3 - 85/3$, поэтому $3r_{12}/2 + r_{13}$ четно. Аналогично $3[323] = -7r_{12}/2 - r_{13} + 7r_{14}/3 + 2030/3$ и $r_{14} - 1$ делится на 3.

Симметризация. $[233] = r_{14} = r'_{14}$, $[132] = 3r_{12}/4 + r_{13}/2 + r_{14}/3 - 85/3 = [123]' = r'_{13}$, поэтому $9r_{12} + 6r_{13} + 4r_{14} - 12r'_{13} = 340$, $[331] = -r_{12}/2 + r_{13} - 2r_{14}/3 + 170/3 = [313]' = r'_{12}$ и $3r_{12} - 6r_{13} + 4r_{14} + 6r'_{12} = 340$. Отсюда $r_{12} + 2r_{13} = 2r'_{13} + r'_{12}$.

По лемме 3 имеем

$$18261 \leqslant [222] = -r_{12}/12 - r_{13}/6 + 14r_{14}/9 + 164755/9 \leqslant 14 \cdot 310/9 + 164755/9 = 18788.$$

Напомним, что $p^2_{12} = 1494$, $p^2_{22} = 22415$, $p^2_{23} = 3000$, поэтому число d ребер между $\Lambda(w)$ и $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$ удовлетворяет неравенствам

$$82185948 = 1494 \cdot 18342 + 3000 \cdot 18261 \leqslant d \leqslant 1494 \cdot 18848 + 3000 \cdot 18788 = 84522912.$$

С другой стороны, $d = 22415(22414 - \lambda)$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$. Поэтому $3666.56 \leqslant 22414 - \lambda \leqslant 3770.82$ и $18643.18 \leqslant \lambda \leqslant 18747.44$. $\rhd$

Лемма 4. *Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда выполняются равенства:*

$$[111] = -r_{10}/5 + 3r_{11}/20 + r_7/2 + 2r_8/5 - 3r_9/10,$$
$$[112] = r_{10}/5 - 3r_{11}/20 - r_7/2 - 2r_8/5 - 7r_9/10 + 100,\ [113] = r_9,$$
$$[121] = r_{10}/5 + 7r_{11}/20 - 3r_7/2 - 9r_8/10 + 3r_9/10 + 100,$$
$$[122] = -r_{10}/5 - 7r_{11}/20 + 3r_7/2 + 19r_8/10 + 7r_9/10 + 1194,\ [123] = -r_8 - r_9 + 200,$$
$$[131] = -r_{11}/2 + r_7 + r_8/2,\ [132] = r_{11}/2 - r_7 - 3r_8/2 + 200,\ [133] = r_8;$$
$$[211] = r_{10}/5 - 3r_{11}/20 - 3r_7/2 - 2r_8/5 + 3r_9/10 + 100,$$
$$[212] = -r_{10}/5 + 23r_{11}/20 + 3r_7/2 + 2r_8/5 + 7r_9/10 + 1194,\ [213] = -r_{11} - r_9 + 200,$$
$$[221] = -r_{10}/5 - 7r_{11}/20 + 9r_7/2 + 19r_8/10 - 23r_9/10 + 1194,$$
$$[222] = -4r_{10}/5 - 13r_{11}/20 - 9r_7/2 - 29r_8/10 + 13r_9/10 + 18820,$$
$$[223] = r_{10} + r_{11} + r_8 + r_9 + 2400,\ [231] = r_{11}/2 - 3r_7 - 3r_8/2 + 2r_9 + 200,$$
$$[232] = -r_{11}/2 + 3r_7 + 5r_8/2 - 2r_9 + 2400,\ [233] = -r_{10} - r_8 + 400;\ [311] = r_7,$$
$$[312] = -r_{11} - r_7 + 200,\ [313] = r_{11},\ [321] = -3r_7 - r_8 + 2r_9 + 200,$$
$$[322] = r_{10} + r_{11} + 3r_7 + r_8 - 2r_9 + 2400,\ [323] = -r_{10} - r_{11} + 400,$$
$$[331] = 2r_7 + r_8 - 2r_9,\ [332] = -r_{10} - 2r_7 - r_8 + 2r_9 + 400,\ [333] = r_{10},$$

где $r_7, r_9 \in \{0, 1, \ldots, 100\}$, $r_{10} \in \{0, 1, \ldots, 320\}$, $r_8, r_{11} \in \{0, 1, \ldots, 200\}$ и $r_8 - r_{11}$ четно.

$\lhd$ Упрощение формул (+) с учетом равенств $S_{113}(u, v, w) = S_{131}(u, v, w) = S_{311}(u, v, w) = 0$ дает требуемые равенства.

Далее, $[132] = r_{11}/2 - r_7 - 3r_8/2 + 200$, поэтому $r_8 - r_{11}$ четно.

Симметризация. $[113] = r_9 = r^*_9$, $[133] = r_8 = r'_8$, $[311] = r_7 = r'_7$, $[313] = r_{11} = r^{\sim}_{11}$, $[333] = r_{10} = r'_{10} = r^*_{10} = r^{\sim}_{10}$.

Далее, $[131] = -r_{11}/2 + r_7 + r_8/2 = [113]' = r'_9$, поэтому $2r_7 + r_8 = 2r'_9 + r_{11}$, $[133] = r_8 = [313] = r^*_{11}$, $[113] = r_9 = [311] = r^{\sim}_7$.

По лемме 12 имеем

$$13117 \leqslant [222] = -109r_{10}/6 + 109r_{11}/30 - 36r_7 - 13r_8/6 + 109r_9/30 + 16198 \leqslant 17288.$$

Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(v)$ содержит $39298 - [222]$ вершин, то $15118 \leqslant [222]$.

Противоречие с тем, что $18643.18 \leqslant \lambda \leqslant 18747.44$. $\rhd$

Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag.—1989.
2. *Koolen J. H., Park J.* Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb.—2010.—Vol. 31, № 8.—P. 2064–2073. DOI: 10.1016/j.ejc.2010.05.012.
3. *Belousov I. N., Makhnev A. A.* Shilla graphs with $b = 5$ and $b = 6$ // Ural Math. J.—2021.—Vol. 7, № 2.—P. 51–58. DOI: 10.15826/umj.2021.2.004.

4. *Coolsaet K., Jurishich A.* Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory. Ser. A.—2008.—Vol. 115, № 6.—P. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
5. *Gavrilyuk A. L., Koolen J. H.* A characterization of the graphs of bilinear $(d \times d)$-forms over $\mathbb{F}_2$ // Combinatorica.—2010.—Vol. 39, № 2.—P. 289–321. DOI: 10.1007/s00493-017-3573-4.

Статья поступила 30 марта 2021 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Чжиган Ван
Школа науки, Хайнаньский университет,
директор
КИТАЙ, 570228, Хайкоу, Хайнань
E-mail: wzhigang@hainanu.edu.cn

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 2, P. 117–123

ON Q-POLYNOMIAL SHILLA GRAPHS WITH $b = 6$

Makhnev, A. A.[1] and Zhigang Van[2]
[1] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia;
[2] School of Science, Hainan University,
Haikou 570228, Hainan, P. R. China
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, wzhigang@hainanu.edu.cn

Abstract. Distance-regular graph Γ of diameter 3, having the second eigenvalue $\theta_1 = a_3$ is called Shilla graph. For such graph $a = a_3$ devides k and we set $b = b(\Gamma) = k/a$. Further $a_1 = a - b$ and Γ has intersection array $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. I. N. Belousov and A. A. Makhnev found feasible arrays of Q-polynomial Shilla graphs with $b = 6$: $\{42t, 5(7t+1), 3(t+3); 1, 3(t+3), 35t\}$, where $t \in \{7, 12, 17, 27, 57\}$, $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$, $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$, $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ or $\{5694, 4750, 600; 1, 300, 4745\}$. It is proved in the paper that graphs with intersection arrays $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$ and $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ do not exist.

Key words: distance-regular graph, Shilla graph, triple intersection numbers.

AMS Subject Classification: 20D05.

For citation: *Makhnev, A. A. and Zhigang Van.* On Q-Polynomial Shilla Graphs with $b = 6$, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 2, pp. 117–123 (in Russian). DOI: 10.46698/y5199-5569-8011-v.

References

1. *Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. Distance-Regular Graphs*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1989.
2. *Koolen, J. H. and Park, J.* Shilla Distance-Regular Graphs, *European Journal of Combinatorics*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 2064–2073. DOI: 10.1016/j.ejc.2010.05.012.

3. *Belousov, I. N. and Makhnev, A. A.* Shilla Graphs with $b = 5$ and $b = 6$, *Ural Mathematical Journal*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 51–58. DOI: 10.15826/umj.2021.2.004.
4. *Coolsaet, K. and Jurishich, A.* Using Equality in the Krein Conditions to Prove Nonexistence of Certain Distance-Regular Graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2008, vol. 115, no. 6, pp. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
5. *Gavrilyuk A. L., Koolen J. H.* A Characterization of the Graphs of Bilinear $(d \times d)$-Forms over $\mathbb{F}_2$, *Combinatorica*, 2010, vol. 39, no. 2, pp. 289–321. DOI: 10.1007/s00493-017-3573-4.

Received March 30, 2021

Alexander A. Makhnev
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia,
Chief Researcher
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Zhigang Van
School of Science, Hainan University,
Haikou 570228, Hainan, P. R. China,
Dean of the School of Science
E-mail: `wzhigang@hainanu.edu.cn`