Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 3, С. 52–63

УДК 512.54
DOI 10.46698/l4033-4336-3582-u

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ДРЕВЕСНЫХ СТРУКТУРАХ ГРУПП АРТИНА[#]

И. В. Добрынина[1], **А. С. Угаров**[2]

[1] Академия гражданской защиты МЧС России,
Россия, 141435, Московская обл., г. о. Химки, ул. Соколовская, 5;
[2] Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого,
Россия, 300026, Тула, пр-т Ленина, 125
E-mail: dobrynirina@yandex.ru, ugarandrey@gmail.com

Посвящается профессору
Стефану Григорьевичу Самко
по случаю его 80-летнего юбилея

Аннотация. Основными алгоритмическими проблемами теории групп, сформулированными в начале прошлого века для конечно определенных групп, являются проблемы равенства, сопряженности слов и проблема изоморфизма групп. Исследование данных проблем привело к возникновению комбинаторной теории групп. Неразрешимость основных алгоритмических проблем в классе конечно определенных групп доказана П. С. Новиковым. Это привело к рассмотрению алгоритмических проблем в конкретных группах. К. Аппелем и П. Шуппом в 1983 г. определен класс групп Артина экстрабольшого типа, где ими решены проблемы равенства и сопряженности слов. Группы Артина с древесной структурой в 2003 г. введены В. Н. Безверхним. В графе, соответствующем группе Артина, всегда можно выделить максимальный подграф, соответствующий группе Артина с древесной структурой. В. Н. Безверхним и О. Ю. Платоновой решены основные алгоритмические проблемы в данном классе групп Артина. В статье рассматривается строение диаграмм над обобщенными древесными структурами групп Артина, представляющих собой древесные произведения групп Артина экстрабольшого типа и групп Артина с древесной структурой, объединенных по циклическим подгруппам, соответствующим образующим этих групп, и их применение к эффективному выписыванию образующих централизатора элемента и решению проблемы сопряженности слов в данном классе групп. В доказательстве основного результата данной статьи используется метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним.
Ключевые слова: группа Артина, алгоритмические проблемы, древесное произведение групп, диаграмма.

Mathematical Subject Classification (2010): 20F36.

Образец цитирования: *Добрынина И. В., Угаров А. С.* Об обобщенных древесных структурах групп Артина // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 3.—С. 52–63. DOI: 10.46698/l4033-4336-3582-u.

1. Введение

В начале прошлого века сформулированы фундаментальные алгоритмические проблемы теории групп: проблема равенства слов, проблема сопряженности слов (М. Ден [47]), проблема изоморфизма групп (Х. Титце [2]). Исследование этих проблем

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-41-710002 р_а.

в значительной мере способствовало развитию комбинаторной теории групп. На сегодняшний день основные достижения комбинаторной теории групп систематически изложены в ряде книг, среди которых особое место занимают монографии В. Магнуса, А. Карраса и Д. Солитера [3], Р. Линдона и П. Шуппа [4], А. Ю. Ольшанского [5].

Неразрешимость фундаментальных алгоритмических проблем в классе конечно определенных групп доказана П. С. Новиковым [6], что привело к рассмотрению алгоритмических проблем в конкретных группах.

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \big\langle a_1, \dots, a_n;\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}},\ i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j \big\rangle,$$

где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и a_j, $i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$. В случае $m_{ij} = \infty$, $i \neq j$, определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет.

К. Аппелем и П. Шуппом [7] определен класс групп Артина экстрабольшого типа и в нем решены проблемы равенства и сопряженности слов.

Группы Артина с древесной структурой введены В. Н. Безверхним [8]. В графе, соответствующем группе Артина, всегда можно выделить максимальный подграф, соответствующий группе Артина с древесной структурой. В данном классе групп В. Н. Безверхним и О. Ю. Платоновой (Карповой) решен ряд алгоритмических проблем, в том числе проблемы равенства и сопряженности слов [9].

В статье рассматривается строение диаграмм над обобщенными древесными структурами групп Артина, представляющими собой древесные произведения групп Артина экстрабольшого типа и групп Артина с древесной структурой, объединенных по циклическим подгруппам, соответствующим образующим этих групп и их применение к эффективному выписыванию образующих централизатора элемента и решению проблемы сопряженности слов в данном классе групп.

В доказательстве основных результатов используется метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним, а также методы работы [10].

2. Строение диаграмм над обобщенными древесными структурами групп Артина

Рассмотрим конечно порожденную группу Артина, заданную копредставлением

$$G = \big\langle a_1, \dots, a_n;\ \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}},\ i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j \big\rangle,$$

где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и a_j, $i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, при $m_{ij} = \infty$ определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет.

Если $m_{ij} > 3$, $i \neq j$, то G называется группой Артина экстрабольшого типа [7].

Построим для группы Артина G граф Γ такой, что образующим a_i поставим в соответствие вершины графа Γ, а каждому определяющему соотношению $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$, $m_{ij} \neq \infty$ — ребро, соединяющее a_i и a_j, $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф Γ, то группа G называется группой Артина с древесной структурой [9].

Группа Артина G с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам: от графа Γ группы Артина G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $\langle a_j \rangle$.

Далее в статье будем рассматривать группу Артина

$$G = \left\langle \prod_{s=1}^{t} *G_s;\, a_{i_m} = a_{j_l},\, i \neq j,\, i,j \in \{1, \dots, t\} \right\rangle,$$

представляющую собой древесное произведение групп Артина G_s, где G_s либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа, запись $a_{i_m} = a_{j_l}$ означает, что объединение групп Артина G_i и G_j ведется по бесконечным циклическим подгруппам $\langle a_{i_m} \rangle$, $\langle a_{j_l} \rangle$, где a_{i_m} — некоторый образующий группы G_i, a_{j_l} — некоторый образующий группы G_j. Такую группу Артина G будем называть обобщенной древесной структурой групп Артина и далее всюду под группой Артина G будем понимать такую группу, если нет специальных оговорок.

Данный класс групп относится к почти большим группам Артина и в нем алгоритмически разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов [11].

Пусть $F_i = \langle a_i \rangle$, $F = \prod_{i=1}^{n} *F_i$ — свободное произведение циклических групп F_i.

Обозначим через R_{ij} — множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произвдении $F_{ij} = F_i * F_j$ и равных 1 в группе G_{ij}. Группу Артина G_{ij} можно задать как $G_{ij} = \langle a_i, a_j; R_{ij} \rangle$.

В дальнейшем под R будем понимать $R = \bigcup_{i,j \in \{1,\dots,n\}} R_{ij}$ — симметризованное подмножество свободного произведения F. Пусть w — нетривиальное циклически приведенное в F слово, равное 1 в G, т. е. $w \in \langle R \rangle^F$, где $\langle R \rangle^F$ — нормальное замыкание симметризованного множества R в свободном произведении F [4]. Тогда из теоремы ван Кампена [4] следует, что существует R-диаграмма M с граничным циклом $\gamma = \partial M$, меткой которого является слово w, $\varphi(\gamma) = w$, и с метками областей $D \subset M$ из R_{ij}. Будем называть такую R-диаграмму M R-диаграммой M над G, а ее области — R_{ij}-диаграммами.

Обозначим через $|w|$ длину слова w, а через $\|w\|$ — слоговую длину слова w.

Подвергнем R-диаграмму M следующему преобразованию.

Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij}-диаграммами, пересекаются по ребру с меткой $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D. Допустим, что каждая из областей D_1, D_2 есть R_{ij}-диаграмма, D_1, D_2 пересекаются по вершине. Тогда объединяем D_1, D_2 в одну область D. Если в том или другом случае метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F, то, удалив эту область, склеиваем ее границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную в F односвязную R-диаграмму M, инвариантную относительного рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w, причем если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то слоговая длина метки этого ребра равна единице.

Аналогично рассматриваются кольцевые R-диаграммы над G.

Введем ряд определений, следуя работам [9, 12–14].

Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \varnothing$. Символами $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D, $d(D)$ — число ребер в граничном цикле D.

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e, в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D, называется $(s-i)$-областью.

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ — правильная часть M, если $\partial D \cap \partial M$ есть объединение последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \ldots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M [4].

Граничную область D R-диаграммы M назовем правильной, если $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть.

Определение 1. Правильная область D R-диаграммы M называется *деновской*, если $i(D) < d(D)/2$.

Определение 2. Удаление внешней границы деновской области R-диаграммы M называется деновским сокращением R-диаграммы M или R-сокращением

Определение 3. Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ образует полосу в R-приведенной R-диаграмме M с граничным циклом $\partial M = \gamma \cup \delta$, если

1) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, где e_i — ребро;

2) $\partial D_i \cap \gamma = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, n$, где γ_i — связный путь, причем $\|\gamma_i\| \geqslant 1$;

3) $\|\partial D_1 \cap \gamma\| = \|\partial D_1 \backslash (\partial D_1 \cap \gamma)\|$ и $\|\partial D_n \cap \gamma\| = \|\partial D_n \backslash (\partial D_n \cap \gamma)\|$;

4) $\|\partial D_j \cap \gamma\| + 2 = \|\partial D_j \backslash (\partial D_j \cap \gamma)\|$, $j = 2, \ldots, n-1$.

Определение 4. Пусть Π — полоса R-диаграммы M. Замену R-диаграммы M на R-диаграмму M_1, полученную из M удалением полосы Π, назовем *$\overline{R}$-сокращением.*

R-приведенное слово w группы G назовем $\overline{R}$-приводимым ($\overline{R}$-сократимым), если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \ldots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $1 \leqslant t \leqslant n$ $\|d_t\| = \|d_{t+1}\| = 1$, $\|s_t\| = \|b_t\| + 2$ и для t, $1 < t < n$, $\|b_t\| = \|s_t\|$.

Лемма 1. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Артина G выяснить, является ли w R-приведенным.*

Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Артина G выяснить, является ли w $\overline{R}$-приведенным.

Определение 5. Приведенную связную кольцевую R-диаграмму M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ будем называть *однослойной*, если

1) M состоит из областей $D_1, D_2, \ldots, D_m$, где $D_j \cap D_{j+1} = e_j$, $j = 1, \ldots, m-1$, $D_1 \cap D_m = e_m$, $D_j \cap \sigma \neq \varnothing$, $D_j \cap \tau \neq \varnothing$, $j = 1, \ldots, m$, e_j — ребро,
или

2) $M = \left(\bigcup_{i=1}^{p} N_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} \gamma_j\right)$, N_i — поддиаграммы (диски) в M с границами $\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i$, $\sigma_i \cap \tau_i = \{A_i, B_i\}$ — вершины, $i = 1, \ldots, p$, γ_i — простые пути с концами B_{i-1}, A_i, $i = 2, \ldots, p$, простой путь γ_1 имеет начало B_p, а конец — A_1, где каждое N_i состоит из областей $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_{m_i}}$, причем $D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} = e_{i_j}$, $j = 1, \ldots, m_i - 1$, $D_{i_j} \cap \sigma \neq \varnothing$, $D_{i_j} \cap \tau \neq \varnothing$, $j = 1, \ldots, m_i$, e_{i_j} — ребро.

Из данного определения имеем, что в случае 1) все области M граничные, каждая пара соседних областей, взятых в циклической последовательности, пересекается по ребру, каждая область пересекает и σ, и τ (пересечением может быть вершина, одно или несколько ребер). В случае 2) имеем простую кольцевую R-диаграмму, т. е. R-диаграмму, в которой $\sigma \cap \tau \neq \varnothing$. Пути γ_i, по которым пересекаются σ, τ, отделяют поддиаграммы (диски), причем заметим, что эти пути, в том числе, могут иметь нулевую длину (быть вершиной).

Аналогично определяются однослойные односвязные диаграммы:

Определение 6. Приведенную односвязную R-диаграмму M равенства слов u, v с границей $\partial M = \gamma \cup \delta$, $\varphi(\gamma) = u, \varphi(\delta) = v^{-1}$, будем называть *однослойной*, если

1) M состоит из областей $D_1, D_2, \dots, D_m$, где $D_j \cap D_{j+1} = e_j$, $j = 1, \dots, m-1$, $D_j \cap \gamma \neq \varnothing$, $D_j \cap \delta \neq \varnothing$, $j = 1, \dots, m$, e_j — ребро,

или

2) $M = \left(\bigcup_{i=1}^{p} N_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{p} \vartheta_j\right)$, N_i — поддиаграммы (диски) в M с границами $\partial N_i = \gamma_i \cup \delta_i$, $\gamma_i \cap \delta_i = \{A_i, B_i\}$ — вершины, $i = 1, \dots, p$, ϑ_i — простые пути с концами B_{i-1}, A_i, $i = 2, \dots, p$, где каждое N_i состоит из областей $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_{m_i}}$, причем $D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} = e_{i_j}$, $j = 1, \dots, m_i - 1$, $D_{i_j} \cap \gamma \neq \varnothing$, $D_{i_j} \cap \delta \neq \varnothing$, $j = 1, \dots, m_i$, e_{i_j} — ребро.

Далее будем рассматривать равенство и сопряженность слов w, v, заданных в нормальной форме [4], т. е. $w = w_1 w_2 \dots w_k$, $v = v_1 v_2 \dots v_k$, где $w_l, v_l \in G_{i_l}$, $l = 1, \dots, k$, G_{i_l} есть либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа из представления (1), причем слова w_l, w_{l+1}, а также v_l, v_{l+1} принадлежат разным группам из (1), w_l, v_l не являются элементами из объединяемых подгрупп. Заметим, что в случае равенства слов, количество слогов в словах w, v совпадает [4].

Теорема 1. *Пусть M — приведенная односвязная R-диаграмма равенства R и $\overline{R}$-несократимых слов $w, v \in G$ над группой Артина G. Тогда M является однослойной.*

Пусть M — приведенная связная кольцевая R-диаграмма сопряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$ над группой Артина G, не содержащая $(s-i)$-областей; σ, τ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M, слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ циклически R и $\overline{R}$-несократимы. Тогда M является однослойной.

$\lhd$ Пусть $w = v$ и $w = w_1 w_2 \dots w_k$, $v = v_1 v_2 \dots v_k$, где $w_l, v_l \in G_{i_l}$, $l = 1, \dots, k$, G_{i_l} есть либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа из представления (1), причем w_l, w_{l+1}, а также v_l, v_{l+1} принадлежат разным группам из (1) и не являются элементами из объединяемых подгрупп. По теореме ван Кампена [4] существует R-диаграмма M равенства слов $w = v$ над G такая, что $\partial M = \gamma \cup \delta$, $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v^{-1}$, $\varphi(\partial M) = \varphi(\gamma)\varphi(\delta) = wv^{-1}$. Имеем $w_1 w_2 \dots w_k = v_1 v_2 \dots v_k$.

Рассмотрим слова w_1, v_1. Пути с метками v_1 и w_1 выходят из одной точки, v_1, w_1 из G_{i_1}. Допустим, что концы этих путей не совпадают, тогда существует кратчайший путь с меткой u такой, что метка граничного цикла поддиаграммы в M имеет вид $u^{-1} v_1^{-1} w_1$, где $u^{-1} v_1^{-1} w_1 = 1$, т. е. $v_1^{-1} w_1 = u$, $u \in G_{i_1}$. Если $v = w$, то по теореме 2.6, а также лемме 2.3 из [4], единственно возможными случаями для равенства слов v и w в рассматриваемом классе групп являются случаи, когда u равно 1 или u равно $a_{i_1}^{\alpha_{i_1}}$, $\alpha_{i_1} \neq 0$, где $\langle a_{i_1} \rangle$ — объединяемая подгруппа для G_{i_1} и G_{i_2}. Получаем, что либо $w_1 = v_1$, либо $w_1 = v_1 a_{i_1}^{\alpha_{i_1}}$.

1. Допустим, что $w_1 = v_1$, где $w_1, v_1 \in G_{i_1}$, тогда поддиаграмма диаграммы M с граничной меткой $v_1^{-1} w_1$ $(v_1^{-1} w_1 = 1)$ является R_{i_1}-диаграммой M_1 равенства слов $w_1 = v_1$ над G_{i_1}, причем $R_{i_1} \subset R$ и является объединением R_{ij} из G_{i_1}; $\partial M_1 = \gamma_1 \cup \delta_1$, $\varphi(\gamma_1) = w_1$, $\varphi(\delta_1) = v_1^{-1}$, $\varphi(\partial M_1) = \varphi(\gamma_1)\varphi(\delta_1) = w_1 v_1^{-1}$. Из работ [9, 14] имеем, что данная диаграмма является однослойной.

2. Если $w_1 = v_1 a_{i_1}^{\alpha_{i_1}}$, где $\langle a_{i_1} \rangle$ — объединяемая подгруппа для G_{i_1} и G_{i_2}, то поддиаграмма диаграммы M с граничной меткой $a_{i_1}^{-\alpha_{i_1}} v_1^{-1} w_1$ $(a_{i_1}^{-\alpha_{i_1}} v_1^{-1} w_1 = 1)$ является R_{i_1}-диаграммой M_1 равенства слов $w_1 = v_1 a_{i_1}^{\alpha_{i_1}}$ в G_{i_1}, $\partial M_1 = \gamma_1 \cup \delta_1$, $\varphi(\gamma_1) = w_1$, $\varphi(\delta_1) = a_{i_1}^{-\alpha_{i_1}} v_1^{-1}$, $\varphi(\partial M_1) = \varphi(\gamma_1)\varphi(\delta_1) = w_1 a_{i_1}^{-\alpha_{i_1}} v_1^{-1}$. Из работ [9, 14] имеем, что M_1 является однослойной.

Далее для случая 1 в G имеем равенство слов $w_2 \dots w_k = v_2 \dots v_k$. Для w_2, v_2 также возможны два случая:

а) $w_2 = v_2$, где $w_2, v_2 \in G_{i_2}$. Тогда поддиаграмма диаграммы M с граничной меткой $v_2^{-1}w_2$ является R_{i_2}-диаграммой M_2 равенства слов $w_2 = v_2$ над G_{i_2}, M_2 однослойна, как следует из [9, 14], и связана вершиной с M_1. Далее рассматриваем равенство слов $w_3 \dots w_k = v_3 \dots v_k$.

б) $w_2 = v_2 a_{i_2}^{\alpha_{i_2}}$, где $\langle a_{i_2} \rangle$ — объединяемая подгруппа для G_{i_2} и G_{i_3}, тогда поддиаграмма диаграммы M с граничной меткой $a_{i_2}^{-\alpha_{i_2}} v_2^{-1} w_2$ есть R_{i_2}-диаграмма M_2 равенства слов $w_2 = v_2 a_{i_2}^{\alpha_{i_2}}$ над G_{i_2}, $\partial M_2 = \gamma_2 \cup \delta_2$, $\varphi(\gamma_2) = w_2$, $\varphi(\delta_2) = a_{i_2}^{-\alpha_{i_2}} v_2^{-1}$, причем $R_{i_2} \subset R$ и является объединением R_{ij} из G_{i_2}. Из работ [9, 14] имеем, что данная диаграмма является однослойной. M_2 связана вершиной с M_1. Далее рассматриваем равенство слов $w_3 \dots w_k = a_{i_2} v_3 \dots v_k$. И так далее.

В случае 2 рассмотрим равенство $w_2 \dots w_k = a_{i_1}^{-\alpha_{i_1}} v_2 \dots v_k$ и слова $w_2, a_{i_1}^{-\alpha_{i_1}} v_2$. Для них возможны два случая:

а) $w_2 = a_{i_1}^{-\alpha_{i_1}} v_2$. Тогда подддиаграмма диаграммы M с граничной меткой $v_2^{-1} a_{i_1}^{\alpha_{i_1}} w_2$ есть R_{i_2}-диаграмма M_2 равенства слов $w_2 = a_{i_1}^{-\alpha_{i_1}} v_2$ над G_{i_2}. Она является однослойной и будет иметь общее ребро с меткой $a_{i_2}^{\alpha_{i_1}}$ с M_1. Далее рассматриваем равенство слов $w_3 \dots w_k = v_3 \dots v_k$.

б) $w_2 = a_{i_1}^{-\alpha_{i_1}} v_2 a_{i_2}^{\alpha_{i_2}}$. Рассматриваем R_{i_2}-диаграмму M_2 равенства слов $w_2 = a_{i_1}^{-\alpha_{i_1}} v_2 a_{i_2}^{\alpha_{i_2}}$ над G_{i_2}. Она является однослойной и имеет общее ребро с меткой $a_{i_1}^{\alpha_{i_1}}$ с M_1. Далее рассматриваем равенство слов $w_3 \dots w_k = a_{i_2}^{-\alpha_{i_2}} v_3 \dots v_k$.

Продолжая рассуждения, аналогичные изложенным выше, получаем строение R-диаграммы M над G с граничным циклом $\partial M = \gamma \cup \delta$, $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v^{-1}$, $\varphi(\partial M) = \varphi(\gamma)\varphi(\delta) = wv^{-1}$, удовлетворяющей условиям леммы.

Таким образом, приведенная односвязная R-диаграмма M равенства R и $\overline{R}$-несократимых слов $w, v \in G$ над группой Артина G является однослойной.

Рассмотрим случай, когда M — приведенная связная кольцевая R-диаграмма сопряженности слов w, v, для которой выполнены условия теоремы. Пусть $z^{-1}wz = v$, $w = w_1 w_2 \dots w_k$, где $w_l, v_l \in G_{i_l}$, $l = 1, \dots, k$, G_{i_l} есть либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа из представления (1). На основании теоремы 2.8 из работы [4] получаем, что любое циклически приведенное слово, сопряженное w, является циклической перестановкой элементов $w_1, w_2, \dots, w_k$, и последующим сопряжением словом из объединяемой подгруппы. Тогда слово $v = v_1 v_2 \dots v_k$ должно быть равно слову $h^{-1} w_{t+1} \dots w_k w_1 \dots w_t h$, где $h = 1$, либо $h = a_{i_t}^{\alpha_{i_t}}$, $\alpha_{i_t} \neq 0$, где $a_{i_t}^{\alpha_{i_t}}$ принадлежит объединяемой подгруппе $\langle a_{i_t} \rangle$ для G_{i_t}, $G_{i_{t+1}}$. Поэтому равенство $z^{-1}wz = v$ должно сводится к равенству слов $h^{-1} w_{t+1} \dots w_k w_1 \dots w_t h = v_1 v_2 \dots v_k$. Диаграмма равенства слов $h^{-1} w_{t+1} \dots w_k w_1 \dots w_t h$ и $v_1 v_2 \dots v_k$ имеет такое же строение, как рассмотрено выше. Склеивая ее по ребру с меткой $h = a_{i_t}^{\alpha_{i_t}}$, либо по вершине, соответствующей $h = 1$, получаем диаграмму сопряженности слов w, v. В полученной диаграмме все вершины являются граничными, а любая область пересекает и σ, и τ, где $\varphi(\sigma) = w$, $\varphi(\tau) = v$. Поэтому приведенная связная кольцевая R-диаграмма M сопряженности слов, удовлетворяющая условию леммы, является однослойной. $\rhd$

Определение 7. Кольцевую связную приведенную однослойную R-диаграмму M с граничными циклами σ, τ над группой Артина G, метки которой $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ приведены в F, $\varphi(\sigma)$ — R-приведено и $\overline{R}$-приведено, назовем особо специальной R-диаграммой, если в M существует одна область D такая, что $\|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \sigma))\| + 2 = \|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \tau))\|$ ($\|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \sigma))\| = \|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \tau))\| + 2$), а для остальных областей D' $\|\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \cap \sigma))\| = \|\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \cap \tau))\|$.

Замену слова $\varphi(\sigma)(\varphi(\tau))$ на слово $\varphi(\tau)(\varphi(\sigma))$ назовем специальным кольцевым R-сокращением.

Определение 8. Будем говорить, что циклически несократимое слово w группы Артина G является тупиковым, если w циклически R-несократимо, циклически $\overline{R}$-несократимо и к нему неприменимо специальное кольцевое R-сокращение.

3. Централизатор элемента и сопряженность слов в обобщенных древесных структурах групп Артина

Теорема 2. *В обобщенной древесной структуре групп Артина G централизатор элемента конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного централизатора.*

Теорема 3. *В обобщенной древесной структуре групп Артина G разрешима проблема сопряженности слов.*

Лемма 2. *Пусть M — связная приведенная минимальная R-диаграмма над группой Артина G с граничными циклами σ, τ; $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются тупиковыми. Тогда если $\varphi(\sigma) = x^r$, то $\varphi(\tau) = y^r$, где $x, y \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — множество образующих группы G.*

Доказательство следует из работ [9] и [36], где также показано, что такие диаграммы состоят из $(s-i)$-областей.

Теорема 4 [12]**.** *Пусть $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ji}}\rangle$, $w \in G_{ij}$ циклически несократимо в свободной группе, имеет слоговую длину, равную $2m_{ij}$, и равно единице в G_{ij}. Тогда оно имеет вид:*

при $m_{ij} = 2k+1$ $a_i^m a_j a_i \ldots a_i a_j^{-m} a_i^{-1} a_j^{-1} \ldots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \ldots a_i^m a_j^{-1} a_i^{-1} a_j^{-1} \ldots a_j^{-m}$, либо им обратные,

при $m_{ij} = 2k$, $k > 1$, $a_i^m a_j a_i \ldots a_j a_i^{-m} a_j^{-1} a_i^{-1} \ldots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \ldots a_j^m a_i^{-1} a_j^{-1} a_i^{-1} \ldots a_j^{-m}$, либо им обратные,

при $m_{ji} = 2$ $a_i^m a_j^l a_i^{-m} a_j^{-l}$, либо им обратные, $m, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Из [12] также следует, что показатели степеней можно ограничить числом p, называемым параметром диаграммы: $p = |w| + |v|$.

Пусть M — кольцевая R-диаграмма, v — произвольная точка, принадлежащая некоторому замкнутому ребру $e \in M$, $e = e'e''$, $e' \cap e'' = v$. Тогда замкнутый путь $l \in M$ с начальной и конечной точкой v: $l = e'^{-1} e_1 \ldots e_n t$, где $t = e'$ либо $t = e''^{-1}$, либо $l = e'' e'_1 \ldots e'_n t'$, где $t' = e'$ либо $t' = e''^{-1}$, назовем циклическим в M, если l гомотопен τ, соответственно σ. Кратчайший из всех циклических путей кольцевой R-диаграммы M, проходящих через некоторую точку v, принадлежащую ребру e, $e \in M$, назовем циклическим геодезическим путем с началом и концом в v.

Пусть $u = x^r$, $x \in \{a_i^{\pm 1}\}$, $i = 1, \ldots, n$, тогда из леммы 2 следует, что $v = y^r$, $y \in \{a_i^{\pm 1}\}$, $i = 1, \ldots, n$, и диаграмма сопряженности этих слов состоит из $(s-i)$-областей.

Пусть $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k = \tau$ — граничные циклы R-диаграмм, полученных из $M = M_0$ последовательным удалением $(s-i)$-областей. Но тогда $\varphi(\sigma_i) = x_i^r$, $x_i \in \{a_j^{\pm 1}\}$, $i = 0, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$, и любые два элемента x_{i-1}^r, x_i^r, $i = 1, \ldots, n$, где $x^r = x_0^r$, $x_n^r = y^r$, сопряжены в $G_{x_{i-1}x_i}$ максимальным куском определяющего соотношения группы $G_{x_{i-1}x_i}$.

Пусть $m_0 = \max\{m_{ij} : m_{ij} < \infty\}$. Тогда длина любого циклического геодезического пути из M заключена в пределах $|u| \leqslant d \leqslant |u| + 2m_0$. Заметим, что для кольцевых R-диаграмм, состоящих из $(s-i)$-областей, в качестве параметра p можно взять любое число, в частности, $p = 0$.

Пусть слова u, v не являются степенями образующих в G. В этом случае u, v будут метками граничных циклов кольцевой R-диаграммы M как в теореме 1. Так как u сопряжено с v, u, v являются тупиковыми, то, как следует из [9, 14] и теоремы 1, $\|u\| = \|v\|$.

Укажем границы изменения длины циклического геодезического пути для диаграммы M. На основании теорем 1 и 4 длина d циклического геодезического пути заключена в пределах $|u| \leqslant d \leqslant |u| + |v| + 2p$.

Построим множество слов $s(u, v)$, длина d которых заключена в пределах $|u| \leqslant d \leqslant |u| + |v| + 2(p + m_0)$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям, проводимым в статьях [10, 12].

Рассмотрим базисные последовательности, соответствующие слову u:

$$u^{(0)},\ H_1,\ u^{(1)},\ H_2,\ \ldots,\ H_k,\ u^{(k)}, \tag{1}$$

где $\forall\, i,\ i = \overline{1,k}$, $u = u^{(0)}$, $u^{(i)} \in s(u, v)$, $H_i \in \left\{a_j^{\pm t}, 1 \leqslant t \leqslant p\right\}_{j=\overline{1,n}}$, $H_i^{-1} u^{(i-1)} H_i = u^{(i)}$, $\{a_j\}_{j=\overline{1,n}}$ — множество образующих группы G.

Базисную последовательность назовем фундаментальной, если $u^{(j)}$ не совпадает с $u^{(s)}$, $0 \leqslant j < s < k$, и существует целое v, $0 \leqslant v < k$, такое, что $u^{(v)} = u^{(k)}$.

Лемма 3. *Если последовательность* (1) *фундаментальная, то слово* $H_1 H_2 \ldots H_{v-1} H_v \ldots H_k H_v^{-1} \ldots H_2^{-1} H_1^{-1}$ *принадлежит централизатору элемента* u.

Доказательство очевидно.

Слово $H_1 \ldots H_k H_v^{-1} \ldots H_2^{-1} H_1^{-1}$, связанное с фундаментальной последовательностью, назовем базисным словом.

Лемма 4. *Если последовательность* (1) *фундаментальная, то* k *ограничено.*

Доказательство очевидно.

Лемма 5. *Число фундаментальных базисных последовательностей, относящихся к данному слову, конечно.*

Доказательство очевидно.

Базисная последовательность (1) называется особой, если она не содержит фундаментальную последовательность либо является пустой, т. е. все $H_i = 1$.

Слово $H_1 H_2 \ldots H_k$, соответствующее особой базисной последовательности, назовем особым базисным словом.

Если в базисной последовательности (1) $u^{(0)} = u$, $u^{(k)} = v$, то слова u и v сопряжены. Ясно, что число особых базисных последовательностей конечно, а k ограничено.

Лемма 6. *Пусть* $F^{-1} u F = v$, *тогда существует разбиение* F *в произведение* $H_1 H_2 \ldots H_m$, *где* $H_i \in \left\{a_i^{\pm t}, 1 \leqslant t \leqslant p\right\}_{i=\overline{1,n}}$ *и базисная последовательность, связанная с данным разбиением* F:

$$u^{(0)},\ H_1,\ u^{(1)},\ \ldots,\ H_m,\ u^{(m)}. \tag{2}$$

$\lhd$ Слова u, v являются тупиковыми и сопряжены в G с помощью F.

Если u, v не являются степенями образующих, то в силу теоремы 1 мы имеем кольцевую однослойную R-диаграмму M сопряженности слов u, v с граничными циклами σ, τ, метками которых являются соответственно слова u, v. Путь с меткой, равной F, соединяет σ и τ. Данный путь областями разбивается на ребра, причем ребро может лежать на граничных циклах σ, τ, либо соединять σ с τ. Метка каждого ребра есть степень образующего, метки σ, τ не превосходят максимальной длины геодезического. Таким образом, в качестве u_i надо взять либо метку σ, τ, либо их циклические перестановки.

Если u является степенью образующего, то v является степенью образующего по лемме 2 и R-диаграмма M сопряженности слов u, v с граничными циклами σ, τ, метками которых являются соответственно слова u, v, состоит из $(s-i)$-областей. Путь с меткой, равной F, соединяет σ и τ и разбивается на ребра, причем метка каждого ребра также есть степень образующего, и, следовательно, искомое разбиение и связанная с ним последовательность существуют. $\rhd$

Лемма 7. *Пусть $F = H_1 \dots H_m$ таково, что $F^{-1}uF = v$ и (2) — базисная последовательность, соответствующая данному разбиению F. Тогда из последовательности (2) можно выделить особую подпоследовательность такую, что соответствующее ей базисное слово таково, что с помощью него слова u и v сопряжены.*

$\lhd$ Если $u = v$, то в качестве особой базисной подпоследовательности возьмем пустую $F' \equiv 1$.

Если последовательность (2) не содержит фундаментальных подпоследовательностей, то она является особой и $F' = F$.

Если (2) не является особой и пустой, то существуют целые числа ν, k, $0 \leqslant v < k < m$, такие, что подпоследовательность

$$u^{(0)},\ H_1,\ \dots,\ H_\nu,\ u^{(\nu)},\ H_{\nu+1},\ \dots,\ H_k,\ u^{(k)}$$

является фундаментальной.

Вычеркнем из (2) подпоследовательность вида $H_{\nu+1}, u^{(\nu+1)}, H_{\nu+2}, \dots, H_k, u^{(k)}$.

Получим базисную последовательность

$$u^{(0)},\ H_1,\ \dots,\ H_\nu,\ u^{(\nu)},\ H_{k+1},\ u^{k+1},\ \dots,\ H_m,\ u^{(m)}$$

с базисным словом $H_1 H_2 \dots H_\nu H_{k+1} \dots H_m$, удовлетворяющую требованиям леммы. $\rhd$

Таким образом, мы доказали теоремы 2 и 3.

Заметим, что решение проблемы сопряженности слов для слов слоговой длины 1 может быть получено из леммы 2.

4. Заключение

Рассмотренный в статье класс групп важен для изучения алгоритмических проблем в группах Артина, которые могут либо быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Артина, образованные из групп Артина с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Артина большого или экстрабольшого типов, а также группами Артина с n-угольной структурой, либо непосредственно принадлежат к перечисленным классам, аналогично [3].

Результаты исследования докладывались на Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко [16].

В работе использовался метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним в части введения $\overline{R}$-сокращений и специальных кольцевых сокращений, а также метод построения фундаментальных последовательностей Г. С. Маканина [10].

Литература

1. *Dehn M.* Über Unendliche Diskontinuierliche Gruppen // Math. Ann.—1911.—Vol. 71.—P. 116–144. DOI: 10.1007/BF01456932.
2. *Tietze H.* Über die Topologischen Invarianten Mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten // Monatsh. Math. Phys.—1908.—Vol. 19.—P. 1–118. DOI: 10.1007/BF01736688.
3. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп.—М.: Наука, 1974.
4. *Линдон Р., Шуп П.* Комбинаторная теория групп.—М.: Мир, 1980.
5. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах.—М.: Наука, 1989.
6. *Новиков П. С.* Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества в теории групп // Тр. МИАН СССР.—1955.—Т. 44.—С. 3–143.
7. *Appel K., Schupp P.* Artins Groups and Infinite Coxter Groups // Ivent. Math.—1983.—Vol. 72, № 2.—P. 201–220. DOI: 10.1007/BF01389320.
8. *Безверхний В. Н.* О группах Артина, Кокстера с древесной структурой // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. V Междунар. конф.—Тула, 2003.—С. 33–34.
9. *Безверхний В. Н., Карпова О. Ю.* Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2006.—Т. 12, № 1.—С. 67–82.
10. *Маканин Г. С.* О нормализаторах группы кос // Мат. сб.—1971.—Т. 86 (128), № 2 (10).—С. 171–179.
11. *Holt D. F., Rees S.* Biautomatic Structures in Systolic Artin Groups // Internat. J. Algebra Comput.—2021.—Vol. 31, № 03.—P. 365–391. DOI: 10.1142/S0218196721500193.
12. *Безверхний В. Н.* Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундам. и прикл. математика.—1999.—Т. 5, № 1.—С. 1–38.
13. *Безверхний В. Н.* Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина большого типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп.—Тула: ТГПУ, 1986.—С. 26–61.
14. *Безверхний В. Н., Кузнецова А. Н.* Разрешимость проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа // Чебышевский сб.—2008.—Т. 9, № 1.—С. 50–69.
15. *Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Добрынина И. В., Инченко О. В., Устян А. Е.* Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера // Чебышевский сб.—2016.—Т. 17, № 4.—С. 23–50. DOI: 10.22405/2226-8383-2016-17-4-23-50.
16. *Добрынина И. В., Угаров А. С.* О централизаторе элемента в обобщенных древесных структурах групп Артина // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложени и проблемы истории: материалы XVII Междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко.—Тула: ТГПУ, 2019.—С. 42–44.

Статья поступила 22 августа 2020 г.

Добрынина Ирина Васильевна
Академия гражданской защиты МЧС России,
профессор кафедры высшей математики
РОССИЯ, 141435, Московская обл., г. о. Химки, ул. Соколовская, 5
E-mail: dobrynirina@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-6737-8353

Угаров Андрей Сергеевич
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого,
ассистент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии
РОССИЯ, 300026, Тула, пр-т Ленина, 125
E-mail: ugarandrey@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 3, P. 52–63

ON GENERALIZED TREE STRUCTURES OF ARTIN GROUPS

Dobrynina, I. V.[1] and Ugarov, A. S.[2]

[1] Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia,
5 Sokolovskaya St., Khimki, 141435 Moscow region, Russia;
[2] Tula State Lev Tolstoy University,
125 Lenin Ave., 300026 Tula, Russia

E-mail: dobrynirina@yandex.ru, ugarandrey@gmail.com

Dedicated to the 80-th anniversary of Professor Stefan Samko

Abstract. The main algorithmic problems in group theory formulated at the beginning of XX century, are the problem of words, the problem of the conjugation of words and the isomorphism problem for finitely presented groups. P. S. Novikov proved the unsolvability of the main algorithmic problems in the class of finitely presented groups. Therefore, algorithmic problems are studied in particular groups. In 1983, K. Appel and P. Schupp defined a class of Artin groups of extra-large type, in which they solved the problems of equality and conjugation of words. In 2003, V. N. Bezverkhniĭ introduced the class of Artin groups with a tree structure. In the graph corresponding to the Artin group, it is always possible to allocate the maximum subgraph corresponding to the Artin group with a tree structure. V. N. Bezverkhniĭ and O. Y. Platonova solved algorithmic problem in the class of Artin groups. The article examines the structure of diagrams over generalized tree structures of Artin groups, which are tree products of Artin groups of extra-large type and Artin groups with a tree structure, amalgamated by cyclic subgroups corresponding to the generators of these groups, and their application to the effective writing out generators of the centralizer of an element and solving the problem of conjugation of words in this class of groups. The proof of the main results uses the method of diagrams worked out by van Kampen, reopened by R. Lindon and refined by V. N. Bezverkhniĭ.

Key words: Artin group, algorithmic problems, tree product of groups, diagram.

Mathematical Subject Classification (2010): 20F36.

For citation: *Dobrynina, I. V. and Ugarov, A. S.* On Generalized Tree Structures of Artin Groups, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 52–63 (in Russian). DOI: 10.46698/l4033-4336-3582-u.

References

1. *Dehn, M.* Uber Unendliche Diskontinuierliche Gruppen, *Mathematische Annalen*, 1911, vol. 71, pp. 116–144. DOI: 10.1007/BF01456932.
2. *Tietze, H.* Uber die Topologischen Invarianten Mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1908, vol. 19, pp. 1–118.
3. *Magnus, W., Karras, A. and Solitar, D. Kombinatornaya teoriya grupp* [Combinatorial Group Theory], 1974, Moscow, Nauka (in Russian).
4. *Lyndon, R. and Schupp, P. Kombinatornaya teoriya grupp* [Combinatorial Group Theory], 1980, Moscow, Mir (in Russian).
5. *Ol'shanskiy, A. Yu. Geometriya opredelyayushchikh sootnosheniy v gruppakh* [Geometry of Defining Relationships in Groups], 1989, Moscow, Nauka (in Russian).
6. *Novikov, P. S.* On the Algorithmic Unsolvability of the Word Problem in Group Theory, *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova*, 1955, vol. 44, pp. 3–143 (in Russian).
7. *Appel, K. and Schupp, P.* Artins Groups and Infinite Coxter Groups, *Inventiones Mathematicae*, 1983, vol. 72, no. 2, pp. 201–220. DOI: 10.1007/bf01389320.
8. *Bezverkhniy, V. N.* On Artin Groups, Coxeter with a Tree Structure, *Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya: tezisy dokladov V Mezhdunarodnoy konferentsii* [Algebra and Number Theory: Modern Problems and Application], Tula, 2003, pp. 33–34 (in Russian).

9. *Bezverkhnii, V. N. and Karpova, O. Ju.* Power Conjugacy Problem for Words in Coxeter Groups with Tree Structure, *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Proceedings of the Tula State University. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics], 2006, vol. 12, no. 1, pp. 67–82 (in Russian).
10. *Makanin, G. S.* On Normalizers in the Braid Group, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1971, vol. 15, no. 2, pp. 167–175. DOI: 10.1070/SM1971v015n02ABEH001538.
11. *Holt, D. F. and Rees, S.* Biautomatic Structures in Systolic Artin Groups, *International Journal of Algebra and Computation*, 2021, vol. 31, no. 03, pp. 365–391. DOI: 10.1142/S0218196721500193.
12. *Bezverkhnii, V. N.* Decision of the Generalized Conjugacy Problem in Artin Groups of Large Type, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 1999, vol. 5, no. 1, pp. 1–38 (in Russian).
13. *Bezverkhnii, V. N.* Solution of the Problem of Conjugation of Words in Artin Groups of Large Type, *Algoritmicheskie problemy teorii grupp i polugrupp* [Algorithmic Problems of Theory of Groups and Semigroups], Tula, TSPU, 1986, pp. 26–61 (in Russian).
14. *Bezverkhnii, V. N. and Kuznetsova, A. N.* Solvability of the Problem of Power Conjugacy of Words in Artin Groups of Extra-Large Type, *Chebyshevskii Sbornik*, 2008, vol. 9, no. 1, pp. 50–69 (in Russian).
15. *Bezverkhnii, V. N., Bezverkhnyaya, N. B., Dobrynina, I. V., Inchenko, O. V. and Ustyan A. E.* On Algorithmic Problems in Coxeter Groups, *Chebyshevskii Sbornik*, 2016, vol. 17, no. 4, pp. 23–50 (in Russian). DOI: 10.22405/2226-8383-2016-17-4-23-50.
16. Dobrynina, I. V. and Ugarov, A. S. On the Centralizer of an Element in Generalized Tree Structures of Artin Groups, *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, prilozheniya i problemy istorii: materialy XVII Mezhdunarodnoy konferentsii, posvyashchennoy 100-letiyu so dnya rozhdeniya professora N. I. Fel'dmana i 90-letiyu so dnya rozhdeniya professorov A. I. Vinogradova, A. V. Malysheva i B. F. Skubenko*, Tula, TSPU, 2019, pp. 42–44 (in Russian).

Received August 22, 2020

IRINA V. DOBRYNINA
Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia,
5 Sokolovskaya St., Khimki, Moscow Region 141435, Russia,
Professor of the Department of Higher Mathematics
E-mail: `dobrynirina@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-6737-8353

ANDREY S. UGAROV
Tula State Lev Tolstoy University,
125 Lenin Ave., 300026 Tula, Russia,
Assistant of the Department of Algebra,
Mathematical Analysis and Geometry
E-mail: `ugarandrey@gmail.com`