Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 3, С. 27–44

УДК 519.63
DOI 10.46698/a6614-5398-1568-d

МЕТОД СЕТОК ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ[#]

М. Х. Бештоков[1], **З. В. Бештокова**[1]

[1] Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru, zarabaeva@yandex.ru

Посвящается 80-летию профессора
Стефана Григорьевича Самко

Аннотация. В прямоугольной области исследуются начально-краевые задачи для одномерных по пространству обобщенных уравнений конвекции-диффузии с оператором Бесселя и дробными производными в смысле Римана — Лиувилля и Капуто порядка α ($0<\alpha<1$) и с граничные условия первого и третьего рода. Уравнение конвекции-диффузии дробного порядка с оператором Бесселя возникает при переходе от трехмерного уравнения конвекции-диффузии дробного порядка к цилиндрическим (сферическим) координатам, в случае, когда решение $u = u(r)$ не зависит ни от z, ни от φ. Для численного решения рассматриваемых задач строятся монотонные разностные схемы второго порядка точности по параметрам сетки, аппроксимирующие эти задачи на равномерных сетках. С помощью метода энергетических неравенств для решения начально-краевых задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках при предположении существования регулярного решения исходной дифференциальной задачи. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также в силу линейности разностных задач сходимость решения соответствующей разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

Ключевые слова: обобщенное уравнение, уравнение конвекции-диффузии, уравнение дробного порядка, дробная производная в смысле Римана — Лиувилля, дробная производная в смысле Капуто, устойчивость и сходимость, краевые задачи, априорная оценка.

Mathematical Subject Classification (2010): 65N06, 65N12.

Образец цитирования: *Бештоков М. Х., Бештокова З. В.* Метод сеток приближенного решения начально-краевых задач для обобщенных уравнений конвекции-диффузии // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 3.—С. 28–44. DOI: 10.46698/a6614-5398-1568-d.

1. Введение

В последние годы наблюдается интенсивное развитие дробного анализа и его приложений в различных областях знаний. Многие явления в механике жидкости, вязкоупругости, химии, физике, процессы тепло-массопереноса в средах с фрактальной структурой и памятью приводят к необходимости изучения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка. Существует большое количество книг, посвященных дробным дифференциальным уравнениям и их применениям. К пер-

[#]Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного фонда естественных наук Китая в рамках научного проекта № 20-51-53007.

вым работам по теории дифференциальных уравнений дробного порядка следует отнести работы [1, 2]. В работах [3–5] получен ряд результатов, аналогичных теоремам из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Монография [6] посвящена качественно новым свойствам операторов дробного интегро-дифференцирования и их применению к дифференциальным уравнениям дробного порядка.

Использование приближенных методов для решения подобных задач определяется тем, что решать аналитически такие уравнения удается лишь в упрощенных случаях. Приближенным методам решения краевых задач для различных уравнений дробного порядка посвящены работы [7–12]. В работе [7] рассмотрены метод Фурье, явная и частично неявная разностные схемы первого порядка аппроксимации. Приведены простейшие методы идентификации параметров дробной диффузии. В [8] исследованы вычислительные алгоритмы для решения прямой задачи дробной диффузии в одномерном случае. Рассмотренная модель представляет собой линейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -v\,\frac{\partial C}{\partial x} + (1+\beta)\,\frac{D}{2}\,\frac{\partial^\alpha C}{\partial x^\alpha} + (1-\beta)\,\frac{D}{2}\,\frac{\partial^\alpha C}{\partial(-x^\alpha)},$$

где $C(x,t)$ — концентрация переносимой субстанции, v — скорость конвективного переноса, D — коэффициент дисперсии, α — дробная степень оператора дифференцирования ($\alpha \in [1;2]$), β — коэффициент его кососимметричности ($\beta \in [-1;1]$). Дробная диффузия существенно отличается от классической поведением концентрации переносимой субстанции на больших расстояниях от носителя начальных данных. Дан обзор основных определений дробных производных, на основе которых построены разностные методы первого и второго порядков аппроксимации по пространству. Приведены как явные, так и частично неявные безусловно устойчивые схемы, а также метод, основанный на преобразовании Фурье.

В [9] рассматриваются разностные схемы для дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными второго порядка с дробной производной по времени. Отдельно изучены стационарные и нестационарные задачи для уравнения диффузии в одномерной и многомерной областях. Доказаны устойчивость и сходимость разностных схем для рассматриваемых уравнений.

В [11] методом энергетических неравенств получены априорные оценки решения краевых задач для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Капуто.

В работе [12] построен новый разностный аналог (называемая формулой L2-1), обеспечивающий порядок аппроксимации дробной производной Капуто $O(\tau^{3-\alpha})$. Доказаны устойчивость предлагаемых схем, а также их сходимость в L_2-норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

В [13, 14] методом априорных оценок исследуются краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с дробной производной по времени. Доказаны устойчивость и сходимость разностных схем для рассматриваемых дифференциальных уравнений.

Численным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя посвящены работы [15–17].

В данной работе исследуются начально-краевые задачи для одномерных по пространству обобщенных уравнений конвекции-диффузии с оператором Бесселя и дробными производными в смысле Римана — Лиувилля и Капуто. Граничные условия первого и третьего рода. Для численного решения рассматриваемых задач строятся монотонные разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи на равномерных сетках. С помощью метода энергетических неравенств для решения краевых задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, из которых следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также в силу линейности разностной задачи сходимость со скоростью $O(h^2+\tau^2)$.

2. Постановка задачи для обобщенного уравнения конвекции-диффузии с дробной производной Римана — Лиувилля

В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую краевую задачу для обобщенного уравнения конвекции-диффузии с дробной производной Римана — Лиувилля порядка α и оператором Бесселя:

$$D_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t), \quad 0<x<l,\ 0<t\leqslant T, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2}$$

$$u(l,t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(x,0) = u_0(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{4}$$

где $D_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,d\tau$ — дробная производная в смысле Римана — Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$, $\partial_{0t}^{\alpha}u = D_{0t}^{\alpha}u - \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}}$,

$$\begin{gathered} 0 < c_0 \leqslant k(x,t), \quad q(x,t), r_x(x,t) \leqslant c_1, \quad |r(x,t)| \leqslant c_2, \\ r(0,t)\leqslant 0, \quad r(l,t)\geqslant 0, \quad k_t, q_t \leqslant 0, \\ D_{0t}^{\alpha-1}u(x,\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,d\tau, \quad 1\leqslant m\leqslant 2. \end{gathered} \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (5)*. Тогда для решения дифференциальной задачи* (1)–(4) *справедлива априорная оценка*

$$\|x^{\frac{m}{2}}\upsilon\|_0^2 + \int_0^t \left(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\right)d\tau \leqslant M\left(\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2\,d\tau + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\right), \tag{6}$$

где $M=\mathrm{const}>0$*, зависящая только от входных данных задачи* (1)–(4)*,* $\upsilon = D_{0t}^{\alpha-1}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$.

$\lhd$ Для получения априорной оценки решения дифференциальной задачи (1)–(4) умножим уравнение (1) скалярно на $x^m\overline{u} = x^m u + x^m\upsilon$:

$$\left(D_{0t}^{\alpha}u, x^m\overline{u}\right) = \left(\left(x^m k u_x\right)_x, \overline{u}\right) + \left(r u_x, x^m\overline{u}\right) - \left(qu, x^m\overline{u}\right) + \left(f, x^m\overline{u}\right), \tag{7}$$

где скалярное произведение и норма вводятся в следующем виде: $(u,v)=\int_0^l uv dx$, $(u,u) = \|u\|_0^2$, где u, v — заданные на $[0,l]$ функции.

Преобразуем теперь слагаемые, входящие в (7):

$$\left(D_{0t}^{\alpha}u, x^m\overline{u}\right) = \left(D_{0t}^{\alpha}u, x^m u\right) + \left(\frac{d}{dt}\left(x^{\frac{m}{2}}\upsilon\right), x^{\frac{m}{2}}\upsilon\right) = \left(D_{0t}^{\alpha}\left(x^{\frac{m}{2}}u\right), x^{\frac{m}{2}}u\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x^{\frac{m}{2}}\upsilon\|_0^2, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\big((x^m k u_x)_x, \overline{u}\big) = \big((x^m k u_x)_x, u\big) + \big((x^m k u_x)_x, \upsilon\big)\\ &= x^m k u_x u\,\big|_0^l - \big(k, (x^{\frac{m}{2}} u_x)^2\big) + x^m k u_x \upsilon\,\big|_0^l - \big(x^m k u_x, \upsilon_x\big),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\big(r u_x, x^m \overline{u}\big) = \big(r u_x, x^m u\big) + \big(r u_x, x^m \upsilon\big)\\ &\leqslant \frac{1}{2}\, x^m r u^2\,\Big|_0^l - \frac{1}{2}\,\big((x^m r)_x, u^2\big) + \varepsilon\,\big\|x^{\frac{m}{2}} u_x\big\|_0^2 + M_1(\varepsilon)\,\big\|x^{\frac{m}{2}}\upsilon\big\|_0^2,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\big(q u, x^m \overline{u}\big) = \big(q u, x^m u\big) + \big(q u, x^m \upsilon\big) = \big(q, (x^{\frac{m}{2}} u)^2\big) + \big(q u, x^m \upsilon\big), \tag{11}$$

$$\big(f, x^m \overline{u}\big) = \big(f, x^m u\big) + \big(f, x^m \upsilon\big) \leqslant \varepsilon_1 \big\|x^{\frac{m}{2}} u\big\|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}} \upsilon\big\|_0^2 + M_2(\varepsilon_1)\,\big\|x^{\frac{m}{2}} f\big\|_0^2. \tag{12}$$

Учитывая преобразования (8)–(12), из (7) находим

$$\begin{aligned}&\big(D_{0t}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}} u), x^{\frac{m}{2}} u\big) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\big\|x^{\frac{m}{2}} \upsilon\big\|_0^2 + c_0 \big\|x^{\frac{m}{2}} u_x\big\|_0^2 + \big(x^m k u_x, \upsilon_x\big)\\ &+ \frac{1}{2}\,\big((x^m r)_x, u^2\big) + \big(q, (x^{\frac{m}{2}} u)^2\big) + \big(q u, x^m \upsilon\big) \leqslant u k(x,t)\big|_0^l + \upsilon k(x,t)\big|_0^l\\ &+ \frac{1}{2}\, x^m r u^2\,\Big|_0^l + \varepsilon\,\big\|x^{\frac{m}{2}} u_x\big\|_0^2 + \varepsilon_1 \big\|x^{\frac{m}{2}} u\big\|_0^2 + M_3\,\big\|x^{\frac{m}{2}} \upsilon\big\|_0^2 + M_2(\varepsilon_1)\,\big\|x^{\frac{m}{2}} f\big\|_0^2.\end{aligned} \tag{13}$$

Выбирая $\varepsilon = \varepsilon_1 = c_0/2$, из (13) с учетом (2), (3) находим

$$\begin{aligned}&\big(D_{0t}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}} u), x^{\frac{m}{2}} u\big) + \frac{d}{dt}\,\big\|x^{\frac{m}{2}} \upsilon\big\|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}} u\big\|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}} u_x\big\|_0^2\\ &+ \big(x^m k u_x, \upsilon_x\big) + \big(x^m q u, \upsilon\big) \leqslant M_4\,\big\|x^{\frac{m}{2}} \upsilon\big\|_0^2 + M_5\,\big\|x^{\frac{m}{2}} f\big\|_0^2.\end{aligned} \tag{14}$$

Проинтегрируем (14) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\begin{aligned}&\int_0^t \Big(D_{0t}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}} u), x^{\frac{m}{2}} u\Big)\, d\tau + \big\|x^{\frac{m}{2}} \upsilon\big\|_0^2 + \int_0^t \Big(\big\|x^{\frac{m}{2}} u\big\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2\Big)\, d\tau\\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l x^m dx \int_0^t k u_x\, d\tau \int_0^\tau \frac{u_x ds}{(\tau - s)^\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l x^m dx \int_0^t q u\, d\tau \int_0^\tau \frac{u\, ds}{(\tau - s)^\alpha}\\ &\leqslant M_6 \int_0^t \big\|x^{\frac{m}{2}} \upsilon\big\|_0^2\, d\tau + M_7 \Bigg(\int_0^t \big\|x^{\frac{m}{2}} f\big\|_0^2\, d\tau + \big\|x^{\frac{m}{2}} u_0(x)\big\|_0^2\Bigg).\end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим в (15) отдельно слагаемое $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l dx \int_0^t k u_x d\tau \int_0^\tau \frac{u_x ds}{(\tau-s)^\alpha}$. Докажем неотрицательность данного интеграла. Тогда, используя формулу для гамма-функции [18],

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} \cos kt\, dt = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}\, \cos\frac{\mu\pi}{2}, \quad k > 0,\ 0 < \mu < 1,$$

при $k = \tau - s$, $\mu = 1 - \alpha$, $t = \xi$, получим

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}} \int_0^\infty \xi^{-\alpha} \cos \xi(\tau - s)\, d\xi = \frac{1}{(\tau - s)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{16}$$

Учитывая (16), получаем

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^t ku_x\,d\tau\int\limits_0^\tau \frac{u_x ds}{(\tau-s)^\alpha}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l dx\int_0^t ku_x\,d\tau\int\limits_0^\tau \frac{u_x\,ds}{\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}\cos\xi(\tau-s)\,d\xi \tag{17}$$

$$=\frac{1}{(\Gamma(1-\alpha))^2\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^t ku_x\,d\tau\int\limits_0^\tau u_x\,ds\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}\cos\xi(\tau-s)\,d\xi.$$

Применяя формулу

$$\cos\xi(\tau-s)=\cos\xi\tau\cos\xi s+\sin\xi\tau\sin\xi s,$$

из (17) находим

$$\frac{1}{(\Gamma(1-\alpha))^2\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^t ku_x\,d\tau\int\limits_0^\tau u_x\,ds\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}\cos\xi(\tau-s)\,d\xi$$

$$=\frac{1}{(\Gamma(1-\alpha))^2\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}d\xi\int\limits_0^t ku_x\cos\xi\tau\,d\tau\int\limits_0^\tau u_x\cos\xi s\,ds$$

$$+\frac{1}{(\Gamma(1-\alpha))^2\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}d\xi\int\limits_0^t ku_x\sin\xi\tau\,d\tau\int\limits_0^\tau u_x\sin\xi s\,ds \tag{18}$$

$$=\int\limits_0^l dx\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}d\xi\int\limits_0^t \frac{k}{2}\left[\left(\int\limits_0^\tau u_x\cos\xi s\,ds\right)^2+\left(\int\limits_0^\tau u_x\sin\xi s\,ds\right)^2\right]_\tau d\tau$$

$$\times\frac{1}{(\Gamma(1-\alpha))^2\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}.$$

Учитывая

$$\int\limits_0^t k(x,\tau)\left[\left(\int\limits_0^\tau u_x\cos\xi s\,ds\right)^2\right]_\tau d\tau=k(x,t)\left(\int\limits_0^t u_x\cos\xi\,ds\right)^2-\int\limits_0^t k_\tau(x,\tau)\left(\int\limits_0^\tau u_x\cos\xi s\,ds\right)^2 d\tau,$$

из (18) получаем

$$\frac{1}{(\Gamma(1-\alpha))^2\cos\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}\left(\int\limits_0^l dx\int\limits_0^\infty \frac{\xi^{-\alpha}k}{2}\left[\left(\int\limits_0^t u_x\cos\xi s\,ds\right)^2+\left(\int\limits_0^t u_x\sin\xi s\,ds\right)^2\right]d\xi\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^l dx\int\limits_0^\infty \xi^{-\alpha}d\xi\int\limits_0^t \frac{k_\tau}{2}\left[\left(\int\limits_0^\tau u_x\cos\xi s\,ds\right)^2+\left(\int\limits_0^\tau u_x\sin\xi s\,ds\right)^2\right]d\tau\right). \tag{19}$$

Если потребовать, что $k_t\leqslant 0$, то выражение (19) является неотрицательным, т. е.

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^t ku_x\,d\tau\int\limits_0^\tau \frac{u_x ds}{(\tau-s)^\alpha}\geqslant 0.$$

Неотрицательность остальных интегралов, стоящих в левой части (15), доказываются с учетом [18] и преобразований (16)–(19), если потребовать, что $q_t \leqslant 0$. Поэтому из (15) находим

$$\begin{gathered}\left\|x^{\frac{m}{2}}\upsilon\right\|_0^2 + \int\limits_0^t \left(\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|_0^2 + \left\|x^{\frac{m}{2}}u_x\right\|_0^2\right)d\tau \\ \leqslant M_6 \int\limits_0^t \left\|x^{\frac{m}{2}}\upsilon\right\|_0^2 d\tau + M_7\left(\int\limits_0^t \left\|x^{\frac{m}{2}}f\right\|_0^2 d\tau + \left\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\right\|_0^2\right).\end{gathered} \tag{20}$$

На основании леммы Гронуолла (см. [19, с. 152]) из (20) находим априорную оценку (6). $\triangleright$

Из оценки (6) следуют единственность и устойчивость решения задачи (1)–(4) по начальным данным и по правой части в смысле нормы

$$\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|_1^2 = \left\|x^{\frac{m}{2}}\upsilon\right\|_0^2 + \int\limits_0^t \left(\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|_0^2 + \left\|x^{\frac{m}{2}}u_x\right\|_0^2\right)d\tau,$$

где $\upsilon = D_{0t}^{\alpha-1}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$.

3. Постановка задачи для обобщенного уравнения конвекции-диффузии с дробной производной Капуто и априорная оценка

В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \tag{21}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{22}$$

$$u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{23}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{24}$$

где

$$0 < c_0 \leqslant k(x,t) \leqslant c_1, \quad \left|r(x,t), r_x(x,t), k_x(x,t), q(x,t)\right| \leqslant c_2, \quad 0 \leqslant m \leqslant 2, \tag{25}$$

$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau$ — дробная производная в смысле Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, c_i, $i = 0,1,2,$ — положительные постоянные числа.

В работе [20] отмечается, что уравнение вида (1) является уравнением движения примеси в потоке однородной жидкости.

При $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (22), равносильному в свою очередь тождеству $k(0,t)u_x(0,t) = 0$ (см. [21, с. 173]), если функции $r(0,t)$, $k(0,t)$, $q(0,t)$, $f(0,t)$ конечны.

В дальнейшем будем предполагать, что решение задачи (21)–(24) существует и обладает нужными по ходу изложения производными, коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым условиям гладкости, обеспечивающим нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

В дальнейшем изложении будем также использовать $M_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

Справедливо следующее.

Лемма 1 [11]. *Для любой абсолютно непрерывной на $[0,T]$ функции $\upsilon(t)$ справедливо неравенство*

$$\upsilon(t)\partial_{0t}^{\alpha}\upsilon(t) \geqslant \frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\upsilon^2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Лемма 2 [11]. *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0,T]$ неравенству*

$$\partial_{0t}^{\alpha}y(t) \leqslant \bar{c}_1 y(t) + \bar{c}_2(t), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

где $\bar{c}_1 > 0$, $\bar{c}_2(t)$ — суммируемая на $[0,T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$y(t) \leqslant y(0)E_{\alpha}(\bar{c}_1 t^{\alpha}) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(\bar{c}_1 t^{\alpha})D_{0t}^{-\alpha}\bar{c}_2(t),$$

где $E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$, $E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}$ — функции Миттаг-Леффлера.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (25). *Тогда для решения $u(x,t)$ задачи* (21)–(24) *справедлива априорная оценка*

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2 \leqslant M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\big\|_0^2\Big), \tag{26}$$

где $M = \text{const} > 0$, зависящая только от входных данных задачи (21)–(24), $D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — *дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$.*

$\lhd$ Для получения априорной оценки решения задачи (21)–(24) в дифференциальной форме умножим уравнение (21) скалярно на $x^m u$:

$$\big(\partial_{0t}^{\alpha}u, x^m u\big) = \big(\big(x^m k u_x\big)_x, u\big) + \big(r u_x, x^m u\big) - \big(q u, x^m u\big) + \big(f, x^m u\big). \tag{27}$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (27), с помощью неравенства Коши с ε и леммы 1. Тогда после несложных преобразований из (27) получаем

$$\frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2 + M_1\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2 \leqslant x^m u k u_x\big|_0^l + \varepsilon\,\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2 + M_2^{\varepsilon}\,\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2. \tag{28}$$

Учитывая условия (22), (23), из (28) при $\varepsilon = 1/2$ находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2 \leqslant M_3\,\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2 + M_4\,\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2. \tag{29}$$

Тогда, применяя к обеим частям (29) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, на основании леммы 2 получаем априорную оценку (26). $\rhd$

Из априорной оценки (26) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

4. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (21)–(24) применим метод конечных разностей. Для этого на равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (21)–(24) поставим в соответствие разностную схему с порядком аппроксимации $O\left(\frac{h^2+\tau^2}{x}\right)$:

$$\begin{aligned}\overline{\varkappa}\,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y &= \frac{\varkappa}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}\,a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}\,a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)\\ &+ \frac{b^{+j}}{x_i^m}\left(x^m_{i+0.5}\,a^j_{i+1}\,y^{(\sigma)}_{x,i}\right) - d_i^j y^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\end{aligned} \tag{30}$$

$$\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{(x,0)} = \frac{0.5h}{m+1}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 + d_0 y_0^{(\sigma)}\right) - \mu, \quad t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=0, \tag{31}$$

$$y_N^{(\sigma)} = 0, \quad t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=l, \tag{32}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x\in\overline{\omega}_h,\ t=0, \tag{33}$$

где $\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}c^{(\alpha,\sigma)}_{j-s}y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α, $0<\alpha<1$ [12], обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$,

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{t_j = j\tau,\ j=0,1,\ldots,m,\ m\tau=T\right\}, \quad \overline{\omega}_h = \left\{x_i = ih,\ i=0,1,\ldots,N,\ Nh=l\right\},$$

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau = \left\{(x_i,t_j), \quad x\in\overline{\omega}_h, \quad t\in\overline{\omega}_\tau\right\},$$

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha}, \quad l\geqslant 1,\ \sigma = 1-\frac{\alpha}{2},$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\left[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\right] - \frac{1}{2}\left[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\right], \quad l\geqslant 1,$$

$$\text{при } j=0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j>0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, & s=0,\\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, & 1\leqslant s\leqslant j-1,\\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, & s=j,\end{cases}$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0, \quad a_i^j = k(x_{i-0.5},t_{j+\sigma}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{\overline{\varkappa}_i\, r_i^{\pm j+\sigma}}{k_i^{j+\sigma}},$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j,\ r = r^+ + r^-,\ r_0 = r(0,t_{j+\sigma}) = r_0^{j+\sigma}\leqslant 0,\ r_N = r(l,t_{j+\sigma}) = r_N^{j+\sigma}\geqslant 0,$$

$$\overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},\ i=1,\ldots,N-1, \quad r^+ = 0.5(r+|r|)\geqslant 0, \quad r^- = 0.5(r-|r|)\leqslant 0,$$

$$d_i^j = \begin{cases}\overline{\varkappa}_i q_i^{j+\sigma}, & i\neq 0,N,\\ q_i^{j+\sigma}, & i=0,N,\end{cases} \qquad \varphi_i^j = \begin{cases}\overline{\varkappa}_i f_i^{j+\sigma}, & i\neq 0,N,\\ f_i^{j+\sigma}, & i=0,N,\end{cases} \qquad \hbar = \begin{cases}0.5h, & i=N,\\ h, & i=1,\ldots,N-1,\end{cases}$$

$$\varkappa_i = \frac{1}{1+R_i}, \quad R_i^{j+\sigma} = \frac{0.5h|r_i|\overline{\varkappa}_i}{k^{j+\sigma}_{i-0.5}}, \quad k^{j+\sigma}_{i-0.5} = k(x_{i-0.5},t_{j+\sigma}), \quad \varkappa_0 = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{(m+1)a_1}}, \quad r_0\leqslant 0,$$

$$|r| = r^+ - r^-,\ \mu = \frac{0.5h}{m+1}\varphi_0, \quad y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y_t = \frac{y^{j+1}-y^j}{\tau},$$

$$y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad t^* = t_{j+\sigma}, \quad \varkappa_x = \frac{\varkappa_{i+1} - \varkappa_i}{h}.$$

Введем скалярные произведения и норму:

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (1, u^2) = \|u\|_0^2, \quad (1, u_{\bar{x}}^2] = \|u_{\bar{x}}\|_0^2, \quad (1, u^2] = \sum_{i=1}^{N} u_i^2\, \hbar.$$

Справедливо следующее.

Лемма 3 [12]. *Для любой функции* $y(t)$, *определенной на сетке* $\overline{\omega}_\tau$, *справедливо неравенство*

$$y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y \geqslant \frac{1}{2}\, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} (y^2).$$

Лемма 4 [22]. *Предположим, что неотрицательные последовательности* $\{y^j, \varphi^j, j = 0, 1, 2, \ldots\}$ *удовлетворяют неравенству*

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y^j \leqslant \lambda_1 y^{j+1} + \lambda_2 y^j + \varphi^j, \quad j \geqslant 1,$$

где $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$ *— константы. Тогда существует такое* τ_0, *что если* $\tau \leqslant \tau_0$, *то*

$$y^{j+1} \leqslant 2\Big(y^0 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leqslant j' \leqslant j} \varphi^{j'}\Big) E_\alpha\big(2\lambda t_j^\alpha\big), \quad 1 \leqslant j \leqslant j_0,$$

где $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$ *— функция Миттаг-Леффлера,* $\lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2+2^{1-\alpha}}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (25). *Тогда существуют такие* h_0, τ_0, *что если* $h \leqslant h_0$, $\tau \leqslant \tau_0$, *то для решения разностной задачи* (30)–(33) *справедлива априорная оценка*

$$\big\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\big\|_1^2 \leqslant M\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}} y^0\big\|_1^2 + \max_{0 \leqslant j' \leqslant j} \Big(\big\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^{j'}\big\|_0^2 + \mu^2\Big)\Big), \tag{34}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, *не зависящее от* h *и* τ.

$\lhd$ Найдем теперь априорную оценку, для этого умножим (30) скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$:

$$\begin{gathered}\Big(\overline{\varkappa}\, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y,\, x^m y^{(\sigma)}\Big) = \Big(\varkappa\big(x_{i-0.5}^m\, a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x,\, y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^{-j} x_{i-0.5}^m\, a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)},\, y^{(\sigma)}\Big) \\ + \Big(b^{+j} x_{i+0.5}^m\, a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)},\, y^{(\sigma)}\Big) - \Big(d_i^{(\sigma)} y_i^{(\sigma)},\, x^m y^{(\sigma)}\Big) + \Big(\varphi,\, x^m y^{(\sigma)}\Big).\end{gathered} \tag{35}$$

Оценим суммы, входящие в (35), с учетом леммы 3:

$$\Big(\overline{\varkappa}\, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y,\, x^m y^{(\sigma)}\Big) \geqslant \frac{M_1}{2}\, \Big(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\Big) \geqslant \frac{1}{4}\, \Big(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\Big), \tag{36}$$

$$\begin{gathered}\Big(\varkappa\, \big(x_{i-0.5}^m\, a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x,\, y^{(\sigma)}\Big) = \varkappa\, x_{i-0.5}^m\, a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big|_0^N - \Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)},\, \big(\varkappa y^{(\sigma)}\big)_{\bar{x}}\Big] \\ \leqslant \varkappa\, x_{i-0.5}^m\, a_i y^{(\sigma)} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big|_0^N - \Big(x_{i-0.5}^m a \varkappa_{\bar{x}},\, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big] - \frac{1}{1 + hM_2}\, \Big(x_{i-0.5}^m\, a\varkappa,\, \big(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)^2\Big],\end{gathered} \tag{37}$$

$$-\big(d_i^j y^{(\sigma)},\, x^m y^{(\sigma)}\big) = -\Big(d, \big(x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\big)^2\Big) \leqslant c_2 \big\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\big\|_0^2, \tag{38}$$

$$\big(\varphi, y^{(\sigma)}\big) \leqslant \frac{1}{2}\, \big\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\big\|_0^2 + \frac{1}{2}\, \big\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\big\|_0^2. \tag{39}$$

Учитывая преобразования (36)–(39), из (35) находим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\left(1, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(x^{\frac{m}{2}}y\right)^2\right) + \frac{1}{1+hM_2}\left(x^m_{i-0.5}\,a\varkappa, \left(y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)^2\right] \\ &\leqslant x^m_{i-0.5}\,y^{(\sigma)}\varkappa a_i\,y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\Big|_0^N - \left(x^m_{i-0.5}\,a\varkappa_{\bar{x}},\, y^{(\sigma)}_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\right] + \left(b^{-j}\left(x^m_{i-0.5}\,a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right),\, y^{(\sigma)}\right) \\ &+ \left(b^{+j}\left(x^m_{i+0.5}\,a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x}\right),\, y^{(\sigma)}\right) + \left(c_2+\frac{1}{2}\right)\left\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\right\|^2_0 + \frac{1}{2}\left\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\right\|^2_0. \end{aligned} \tag{40}$$

Преобразуем второе, третье и четвертое слагаемые в правой части (40). Тогда получим

$$\begin{aligned} &-\left(x^m_{i-0.5}\,a\varkappa_{\bar{x}},\, y^{(\sigma)}_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\right] + \left(b^{-j}\left(x^m_{i-0.5}\,a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right),\, y^{(\sigma)}\right) \\ &+ \left(b^{+j}\left(x^m_{i+0.5}\,a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x}\right),\, y^{(\sigma)}\right) \leqslant \varepsilon\left\|x^{\frac{m}{2}}_{i-0.5}\,y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right\|^2_0 + M^{\varepsilon}_3\left\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\right\|^2_0. \end{aligned} \tag{41}$$

Преобразуем первое выражение в правой части (40):

$$\begin{aligned} x^m_{i-0.5}\,y^{(\sigma)}\varkappa a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\Big|_0^N &= -x^m_{0.5}y^{(\sigma)}_0\left[\frac{0.5h}{m+1}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 + d_0 y^{(\sigma)}_0\right) - \mu\right] \\ &= -\frac{0.5h}{m+1}\,x^m_{0.5}y^{(\sigma)}_0\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 - \frac{0.5h}{m+1}\,x^m_{0.5}d_0\left(y^{(\sigma)}_0\right)^2 + x^m_{0.5}\mu y^{(\sigma)}_0 \\ &\leqslant -\frac{1}{2}\,\frac{0.5h}{m+1}\,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left(x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y_0\right)^2 + M_4\left(x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y^{(\sigma)}_0\right)^2 + \mu^2. \end{aligned} \tag{42}$$

Учитывая (41), (42), из (40) получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left\|x^{\frac{m}{2}}y\right\|^2_1 + \left\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right\|^2_0 \leqslant M_8\left\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\right\|^2_1 + M_9\left(\left\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\right\|^2_0 + \mu^2\right), \tag{43}$$

где $\left\|x^{\frac{m}{2}}y\right\|^2_1 = \left\|x^{\frac{m}{2}}y\right\|^2_0 + \left(x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y_0\right)^2$.

Перепишем (43) в другой форме:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\left\|x^{\frac{m}{2}}y\right\|^2_1 \leqslant M^{\sigma}_{10}\left\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\right\|^2_1 + M^{\sigma}_{11}\left\|x^{\frac{m}{2}}y^{j}\right\|^2_1 + M_9\left(\left\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\right\|^2_0 + \mu^2\right). \tag{44}$$

На основании леммы 4 из (44) получаем априорную оценку (34). $\triangleright$

Из априорной оценки (34) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (30)–(33) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (21)–(24), $y(x_i,t_j) = y^j_i$ — решение разностной задачи (30)–(33). Для оценки точности разностной схемы (30)–(33) рассмотрим разность $z^j_i = y^j_i - u^j_i$, где $u^j_i = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (30)–(33), получаем задачу для функции z:

$$\begin{aligned} \overline{\varkappa}\,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z &= \frac{\varkappa}{x^m_i}\left(x^m_{i-0.5}\,a^j_i z^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)_x + \frac{b^{-j}}{x^m_i}\left(x^m_{i-0.5}\,a^j_i z^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right) \\ &+ \frac{b^{+j}}{x^m_i}\left(x^m_{i+0.5}\,a^j_{i+1}z^{(\sigma)}_{x,i}\right) - d^j_i z^{(\sigma)} + \Psi^j_i, \quad (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \end{aligned} \tag{45}$$

$$\varkappa_0 a_1 z^{(\sigma)}_{(x,0)} = \frac{0.5h}{m+1}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_0 + d_0 z^{(\sigma)}_0\right) - \nu, \quad t\in\overline{\omega}_{\tau},\ x=0, \tag{46}$$

$$z^{(\sigma)}_N = 0, \quad t\in\overline{\omega}_{\tau},\ x=l, \tag{47}$$

$$z(x,0)=0, \quad x\in\overline{\omega}_h,\ t=0, \tag{48}$$

где $\Psi=O\big(\frac{h^2+\tau^2}{x}\big)$, $\nu=O(h^2+\tau^2)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (21)–(24) разностной схемой (30)–(33) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (21)–(24).

В силу того, что задача (45)–(48) линейна, применяя оценку (34) к задаче (45)–(48), получаем

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}z^{j+1}\big\|_1^2\leqslant M\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\Psi^{j'}\big\|_0^2+\nu^2\Big), \tag{49}$$

где $M=\mathrm{const}>0$, не зависящая от h и τ.

Из оценки (49) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (30)–(33) по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи (30)–(33) к решению (21)–(24) в сеточной норме $\big\|x^{\frac{m}{2}}z^{j+1}\big\|_1^2$ со скоростью $O(h^2+\tau^2)$ так, что если существуют такие h_0, τ_0, то при $h\leqslant h_0$, $\tau\leqslant\tau_0$ справедлива априорная оценка

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}\big(y^{j+1}-u^{j+1}\big)\big\|_1\leqslant M\big\|x^{\frac{m}{2}-1}\big\|_1\big(h^2+\tau^2\big)\leqslant\overline{M}\big(h^2+\tau^2\big),$$

где $\overline{M}=\mathrm{const}>0$, не зависящая от h и τ.

5. Постановка третьей краевой задачи и априорная оценка

Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения (21). Для этого заменим условие (23) условием вида

$$-k(l,t)u_x(l,t)=\beta(t)u(l,t)-\mu(t), \tag{50}$$

где $\beta(t)$, $\mu(t)$ — известные непрерывные функции, $|\beta|\leqslant c_2$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (25), (50). *Тогда для решения* $u(x,t)$ *задачи* (21), (22), (50), (24) *справедлива априорная оценка*

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2\leqslant M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu^2(t)\big)+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\big\|_0^2\Big), \tag{51}$$

где $M=\mathrm{const}>0$, *зависящее только от входных данных задачи* (21), (22), (50), (24).

$\lhd$ Для получения априорной оценки решения умножим (21) скалярно на $x^m u$. Тогда после несложных преобразований из (27) получим

$$\frac{1}{2}\,\partial_{0t}^{\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+M_1\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2\leqslant x^m uku_x\big|_0^l+\varepsilon\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+M_2^{\varepsilon}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\frac{1}{2}\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2. \tag{52}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (52):

$$\begin{gathered}x^m uk(x,t)u_x(x,t)\big|_0^l=l^m u(l,t)(\mu(t)-\beta(t)u(l,t))\\ =l^m\mu(t)u(l,t)-l^m\beta(t)u^2(l,t)\leqslant\varepsilon\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+M_3^{\varepsilon}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\mu^2(t).\end{gathered} \tag{53}$$

Учитывая (53), из (52) при $\varepsilon=M_1/2$ получим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2\leqslant M_3\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+M_4\big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu^2(t)\big). \tag{54}$$

Применяя к обеим частям (54) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, на основании леммы 2 получаем априорную оценку (51). $\rhd$

Из априорной оценки (51) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

6. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (21), (22), (50), (24) поставим в соответствие разностную схему с порядком аппроксимации $O\big(\frac{h^2+\tau^2}{x}\big)$:

$$\begin{aligned}\overline{\varkappa}\,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y = \frac{\varkappa}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}\,a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}\,a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)\\ + \frac{b^{+j}}{x_i^m}\left(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}\right) - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\end{aligned} \tag{55}$$

$$\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} = \beta_1 y_0^{(\sigma)} + \frac{0.5h}{m+1}\,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 - \mu_1, \quad t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=0, \tag{56}$$

$$-\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} = \beta_2 y_N^{(\sigma)} + 0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N - \mu_2, \quad t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=N, \tag{57}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x\in\overline{\omega}_h,\ t=0, \tag{58}$$

где

$$\beta_1 = \frac{0.5h}{m+1}\,d_0^j, \quad \beta_2 = \widetilde{\varkappa}\beta^{j+\sigma} + 0.5hd_N^j, \quad \mu_1 = \frac{0.5h}{m+1}\,\varphi_0^j, \quad \mu_2 = \widetilde{\varkappa}\mu^{j+\sigma} + 0.5h\varphi_N^j,$$

$$\widetilde{\varkappa} = 1 + \frac{0.5hm}{l} = \frac{1}{1-\frac{0.5hm}{l}},$$

$$\varkappa_0 = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{(m+1)k^{j+\sigma}_{0.5}}},\ r_0^{j+\sigma}\leqslant 0, \quad \varkappa_N = \frac{1}{1+0.5h\frac{|r_N^{j+\sigma}|}{k_{N-0.5}}},\ r_N^{j+\sigma}\geqslant 0.$$

Перепишем задачу (55)–(58) в операторной форме

$$\overline{\overline{\varkappa}}\,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y = \overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \overline{\Phi}, \quad y(x,0) = u_0(x), \tag{59}$$

где

$$\overline{\overline{\varkappa}} = \begin{cases}\overline{\varkappa}_i,\ x\in\omega_h,\\ 1,\quad x=0,l,\end{cases} \quad \overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad t^* = t^{j+\frac12}, \quad \overline{\Phi} = \begin{cases}\varphi=\varphi_i, & (x,t)\in\omega_{h\tau},\\ \varphi^- = \dfrac{(m+1)}{0.5h}\,\mu_1, & x=0,\\ \varphi^+ = \dfrac{1}{0.5h}\,\mu_2, & x=l.\end{cases}$$

$$\overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} = \begin{cases}\widetilde{\Lambda}(t^{j+\sigma})y_i^{(\sigma)} = \dfrac{\varkappa_i}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}\,a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)_x + \dfrac{b^{-j}}{x_{i^m}}\left(x^m_{i-0.5}\,a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)\\ \qquad + \dfrac{b^{+j}}{x_i^m}\left(x^m_{i+0.5}\,a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}\right) - d_i^j y_i^{(\sigma)},\\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \dfrac{(m+1)\big(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} - \beta_1 y_0^{(\sigma)}\big)}{0.5h}, & x=0,\\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = -\dfrac{\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \beta_2 y_N^{(\sigma)}}{0.5h}, & x=l.\end{cases}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (25), (50). *Тогда существуют такие* h_0, τ_0, *что если* $h \leqslant h_0$, $\tau \leqslant \tau_0$, *то для решения разностной задачи* (55)–(58) *справедлива априорная оценка*

$$\left\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\right\|_1^2 \leqslant M\Big(\left\|x^{\frac{m}{2}} y^0\right\|_1^2 + \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\left\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^{j'}\right\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\Big), \tag{60}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, *не зависящая от* h *и* τ.

$\lhd$ Введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$(u, v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \hbar, \quad \|u\|_0^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, & i = N, \\ h, & i \neq N. \end{cases}$$

Умножим (59) теперь скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$, тогда получим

$$\big(\overline{\overline{\varkappa}}\, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y,\, x^m y^{(\sigma)}\big] = \big(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)},\, x^m y^{(\sigma)}\big] + \big(\overline{\Phi},\, x^m y^{(\sigma)}\big]. \tag{61}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (61):

$$\big(\overline{\overline{\varkappa}}\, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y,\, x^m y^{(\sigma)}\big] \geqslant \Big(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2},\, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\Big], \tag{62}$$

$$\begin{gathered}\big(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)},\, x^m y^{(\sigma)}\big] = \big(\widetilde{\Lambda} y^{(\sigma)},\, x^m y^{(\sigma)}\big) + 0.5h\Lambda^+ y_N^{(\sigma)} x_N^m y_N^{(\sigma)} \\ = \big(\varkappa\big(x^m_{i-0.5}\, a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x,\, y^{(\sigma)}\big) + \big(b^{-j}\big(x^m_{i-0.5}\, a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big),\, y^{(\sigma)}\big) + \big(b^{+j}\big(x^m_{i+0.5}\, a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\big),\, y^{(\sigma)}\big) \\ - \big(d_i^j,\, x_i^m \big(y^{(\sigma)}\big)^2\big) - x_N^m y_N^{(\sigma)}\big(\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \beta_2 y_N^{(\sigma)}\big) = -\big(\bar{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)},\, \big(\varkappa y^{(\sigma)}\big)_{\bar{x}}\big] \\ + \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}\big(\bar{x}_N^m - x_N^m\big) - \varkappa_0 x^m_{0.5} a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} y_0^{(\sigma)} - x_N^m \beta_2 (y_N^{(\sigma)})^2 + \big(b^{-j}\bar{x}^m a_i, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\big) \\ + \big(b^{+j} x^m_{i+0.5} a_{i+1}^j, y_x^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\big) - \big(d, x_i^m \big(y^{(\sigma)}\big)^2\big).\end{gathered} \tag{63}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (63):

$$\begin{gathered}\Big(\bar{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)},\, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\Big] = \Big(\bar{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)},\, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\Big] + \Big(\bar{x}^m a_i \varkappa^{(-1)},\, \big(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)^2\Big] \\ \geqslant \Big(\bar{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)},\, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\Big] + \frac{1}{1 + hM_2}\Big(\bar{x}^m a_i \varkappa,\, \big(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)^2\Big],\end{gathered} \tag{64}$$

$$\begin{gathered}-\big(\bar{x}^m a y_{\bar{x}}^{(\sigma)},\, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\big] + \big(b^{-j}\bar{x}^m a_i, y^{(\sigma)} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big) + \big(b^{+j} x^m_{i+0.5} a_{i+1}^j,\, y_x^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\big) \\ \leqslant \varepsilon \left\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right\|_0^2 + M_3^{\varepsilon}\left\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\right\|_0^2.\end{gathered} \tag{65}$$

Учитывая (64), (65), из (62) находим

$$\begin{gathered}\Big(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)},\, x^m y^{(\sigma)}\Big] \leqslant -\frac{1}{1 + hM_2}\Big(\bar{x}^m a_i \varkappa,\, \big(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)^2\Big] - \Big(d,\, \big(x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\big)^2\Big) + \varepsilon \left\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right\|_0^2 \\ + M_3^{\varepsilon}\left\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\right\|_0^2 + \big(\bar{x}_N^m - x_N^m\big)\varkappa_N a_N y_N^{(\sigma)} y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \varkappa_0 x^m_{0.5} a_1 y_0^{(\sigma)} y_{x,0}^{(\sigma)} - x_N^m \beta_2 \big(y_N^{(\sigma)}\big)^2,\end{gathered} \tag{66}$$

$$\big(\Phi, x^m y^{(\sigma)}\big] = \big(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\big) + 0.5h\varphi^+ x_N^m y_N^{(\sigma)} = \big(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\big) + x_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)}. \tag{67}$$

Учитывая преобразования (61)–(67), из (60) получим

$$\begin{gathered}\Big(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2},\, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\Big] + \frac{1}{1 + hM_2}\Big(\bar{x}^m a_i \varkappa,\, \big(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)^2\Big] \\ \leqslant \varepsilon \left\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right\|_0^2 + M_3^{\varepsilon}\left\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\right\|_0^2 - \big(d, \big(x^m y^{(\sigma)}\big)^2\big) + \big(\bar{x}_N^m - x_N^m\big) y_N^{(\sigma)} \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} \\ - x^m_{0.5} y_0^{(\sigma)} \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \big(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\big) + y_N^{(\sigma)} x_N^m \big(\mu_2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)}\big).\end{gathered} \tag{68}$$

Преобразуем четвертое, пятое и седьмое слагаемые в правой части (68) с учетом (56), (57):

$$
\begin{aligned}
&\big(\bar{x}_N^m - x_N^m\big) y_N^{(\sigma)} \varkappa_N a_N y_{\bar{x}N}^{(\sigma)} - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + x_N^m y_N^{(\sigma)} \big(\mu_2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)}\big) \\
&= \big(\bar{x}_N^m - x_N^m\big) y_N^{(\sigma)} \big[\mu_2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)} - 0.5h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\big] + x_N^m y_N^{(\sigma)} \big[\mu_2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)}\big] \\
&- x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Big[\beta_1 y_0^{(\sigma)} + \frac{0.5h}{m+1} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 - \mu_1\Big] = y_N^{(\sigma)} \bar{x}_N^m \big[\mu_2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)}\big] \\
&- 0.5h y_N^{(\sigma)} \big(\bar{x}_N^m - x_N^m\big) \Delta_{0t_{j+\sigma}} y_N - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \big[\beta_1 y_0^{(\sigma)} - \mu_1\big] - \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 \\
&\leqslant \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} - \beta_2 \bar{x}_N^m \big(y_N^{(\sigma)}\big)^2 - \beta_1 x_{0.5}^m \big(y_0^{(\sigma)}\big)^2 + x_{0.5}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)} \\
&- \frac{h}{4} \big(\bar{x}_N^m - x_N^m\big) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N^2 - \frac{h}{4(m+1)} x_{0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0^2.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Учитывая (69), перепишем (68):

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\Big] + M_4 \Big(\bar{x}^m a_i \varkappa, \big(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)^2\Big] \\
&+ \frac{h}{4(m+1)} x_{0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0^2 + \frac{h}{4} \big(\bar{x}_N^m - x_N^m\big) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N^2 \leqslant \varepsilon \big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big\|_0^2 + M_3^{\varepsilon} \big\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\big\|_0^2 \\
&- \big(d, \big(x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\big)^2\big) - \beta_1 x_{0.5}^m \big(y_0^{(\sigma)}\big)^2 - \beta_2 \bar{x}_N^m \big(y_N^{(\sigma)}\big)^2 + \big(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\big) + \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} + x_{0.5}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)}.
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Учитывая, что $x_{N-0.5}^m \geqslant 1/6 x_N^m$, преобразуем некоторые слагаемые в (70):

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\Big] + \frac{h}{4} \big(\bar{x}_N^m - x_N^m\big) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N^2 \\
&\geqslant \Big(\frac{\overline{\varkappa}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\Big) + \frac{h}{4} x_{N-0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N^2 \geqslant \frac{M_5}{2} \big(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} (x^{\frac{m}{2}} y)^2\big) \\
&+ \frac{0.5h}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big(x_N^{\frac{m}{2}} y_N\big)^2 \geqslant \frac{1}{12} \big(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} (x^{\frac{m}{2}} y)^2\big) + \frac{0.5h}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big(x^{\frac{m}{2}} y_N\big)^2 \\
&\geqslant \frac{1}{12} \Big(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big(x^{\frac{m}{2}} y\big)^2\Big] \geqslant \frac{1}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big\|x^{\frac{m}{2}} y\big\|_0^2,
\end{aligned}
\tag{71}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\Big(d, \big(x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\big)^2\Big) - \beta_1 x_{0.5}^m \big(y_0^{(\sigma)}\big)^2 - \beta_2 \bar{x}_N^m \big(y_n^{(\sigma)}\big)^2 + \big(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\big) + \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} + x_{0.5}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)} \\
&\leqslant \varepsilon \big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big\|_0^2 + M_6^{\varepsilon} \Big(\big\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\big\|_0^2 + \big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)}\big)^2\Big) + M_7 \big(\big\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\big\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\big).
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Выбирая $\varepsilon = M_4/2$, перепишем (70) с учетом (71), (72):

$$
\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big\|x^{\frac{m}{2}} y\big\|_1^2 + \big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big\|_0^2 \leqslant M_8 \big\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\big\|_1^2 + M_9 \big(\big\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\big\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\big), \tag{73}
$$

где $\big\|x^{\frac{m}{2}} y\big\|_1^2 = \big\|x^{\frac{m}{2}} y\big\|_0^2 + \big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0\big)^2$.

Повторяя рассуждения (44)–(49, из (73) получаем априорную оценку (60). $\triangleright$

Из оценки (60) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (55)–(58) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (21), (22), (50), (24) $y(x_i, t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (55)–(58). Для оценки точности разностной схемы (55)–(58) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (55)–(58), получаем задачу для функции z:

$$\begin{gathered}\overline{\varkappa}\,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} z = \frac{\varkappa}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}\,a^j_i z^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}\,a^j_i z^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)\\ +\frac{b^{+j}}{x_i^m}\left(x^m_{i+0.5}\,a^j_{i+1} z^{(\sigma)}_{x,i}\right) - d^j_i z^{(\sigma)}_i + \Psi^j_i, \quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\end{gathered} \tag{74}$$

$$\varkappa_0 a_1 z^{(\sigma)}_{x,0} = \beta_1 z^{(\sigma)}_0 + \frac{0.5h}{m+1}\,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} z_0 - \nu_1, \quad t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=0, \tag{75}$$

$$-\varkappa_N a_N z^{(\sigma)}_{\bar{x},N} = \beta_2 z^{(\sigma)}_N + 0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} z_N - \nu_2, \quad t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=N, \tag{76}$$

$$z(x,0)=0, \quad x\in\overline{\omega}_h,\ t=0, \tag{77}$$

где $\Psi = O\big(\frac{h^2+\tau^2}{x}\big)$, $\nu_1 = O(h^2+\tau^2)$, $\nu_2 = O(h^2+\tau^2)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (21), (22), (50), (24) разностной схемой (55)–(58) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (21), (22), (50), (24).

В силу того, что задача (74)–(77) линейна, применяя оценку (60) к задаче (74)–(77), получаем

$$\big\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\big\|_1^2 \leqslant M \max_{0\leqslant j'\leqslant j}\big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\,\Psi^{j'}\big\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2\big). \tag{78}$$

где $M=\mathrm{const}>0$, не зависящая от h и τ.

Из оценки (78) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (55)–(58) по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи (55)–(58) к решению (21), (22), (50), (24) в сеточной норме $\big\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\big\|_1^2$ со скоростью $O(h^2+\tau^2)$ так, что если существуют такие h_0, τ_0, то при $h\leqslant h_0$, $\tau\leqslant\tau_0$ справедлива априорная оценка

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}\big(y^{j+1}-u^{j+1}\big)\big\|_1 \leqslant M\big\|x^{\frac{m}{2}-1}\big\|_1\big(h^2+\tau^2\big) \leqslant \overline{M}\big(h^2+\tau^2\big),$$

где $\overline{M}=\mathrm{const}>0$, не зависящая от h и τ.

Литература

1. *Mandelbrojt S.* Sulla generalizzazione del calcolo clelle variazione // Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend Cl. Sei., Fis. Mat. e Natur.—1925.—Vol. 6, № 1.—P. 151–156.
2. *O'Shaughnessy L., Post E. L.* Solutions of problems: Calculus: 433 // Amer. Math. Month.—1918.—Vol. 25, № 4.—P. 172–173. DOI: 10.2307/2973123.
3. *Al-Bassam M. A.* On fractional calculus and its applications to the theory of ordinary differential equations of generalized order // Nonlinear Analysis and Applications.—New York: Dekker, 1982.—Vol. 80.—P. 305–331.—(Lect. Notes Pure Appl. Math.).
4. *Al-Abedeen A. Z., Arora H. L.* A global existence and uniqueness theorem for ordinary differential equations of generalized order // Canad. Math. Bull.—1978.—Vol. 21, № 3.—P. 267–271. DOI: 10.4153/cmb-1978-047-1.
5. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
6. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение.—М.: Физматлит, 2003.—272 с.
7. *Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткин И. А., Юрков Ю. И.* Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии.—М.: ИБРАЭ РАН, 2002.—57 с.—(Препринт № IBRAE-2002-01).
8. *Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткин И. А.* Численные методы решения уравнения дробной диффузии с дробной производной по времени в одномерном случае.—М.: ИБРАЭ РАН, 2002.—35 с.—(Препринт № IBRAE-2002-10).

9. *Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2006.—Т. 4, № 10.—С. 1871–1881.
10. *Diethelm K., Walz G.* Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation // Numer. Algorithms.—1997.—Vol. 16, № 3–4.—P. 231–253. DOI: 10.1023/a:1019147432240.
11. *Алиханов А. А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Диф. уравнения.—2010.—Т. 46, № 5.—С. 658–664.
12. *Alikhanov A. A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys.—2015.—Vol. 280.—P. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
13. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений дробного порядка и разностные методы их решения // Изв. вузов. Математика.—2019.—№ 2.—С. 3–12. DOI: 10.26907/0021-3446-2019-2-3-12.
14. *Бештоков М. Х., Водахова В. А.* Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2019.—Т. 29, № 4.—С. 459–482. DOI: 10.20537/vm190401.
15. *Бештоков М. Х.* Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2016.—Т. 56, №. 10.—С. 1780–1794. DOI: 10.7868/S0044466916100045.
16. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений Соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // Диф. уравнения.—2018.—Т. 54, № 2.—С. 249–266. DOI: 10.1134/S0374064118020115.
17. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для уравнения влагопереноса с дробной производной Капуто и оператором Бесселя // Диф. уравнения.—2020.—Т. 56, № 3.—С. 353–365. DOI: 10.1134/S0374064120030073.
18. *Кумыкова С. К.* Об одной краевой задаче для уравнения $\operatorname{sign} y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Диф. уравнения.—1976.—Т. 12, № 1.—С. 79–88.
19. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—407 с.
20. *Мальшаков А. В.* Уравнения гидродинамики для пористых сред со структурой порового пространства, обладающей фрактальной геометрией // Инж.-физ. журн.—1992.—Т. 62, № 3.—С. 405–410.
21. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—617 с.
22. *Бештоков М. Х.* К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто // Изв. вузов. Математика.—2018.—№ 10.—С. 3–16.

Статья поступила 1 апреля 2021 г.

Бештоков Мурат Хамидбиевич
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов
РОССИЯ, 360000, Нальчик, Шортанова, 89 А
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Бештокова Зарьяна Владимировна
Институт прикладной математики и автоматизации — филиал КБНЦ РАН,
младший научный сотрудник отдела вычислительных методов
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: zarabaeva@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 3, P. 28–44

GRID METHOD FOR APPROXIMATE SOLUTION OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR GENERALIZED CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS

Beshtokov, M. Kh.[1] and Beshtokova, Z. V.[1]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik 360000, Russia

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru, zarabaeva@yandex.ru

Dedicated to the 80th anniversary
of Professor Stefan Grigorievich Samko

Abstract. In a rectangular domain, we study an initial-boundary value problems for one-dimensional generalized convection-diffusion equations with the Bessel operator and fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville and Caputo of order α $(0<\alpha<1)$ with boundary conditions of the first and third kind. The fractional-order convection-diffusion equation with the Bessel operator arises when passing from the three-dimensional fractional-order convection-diffusion equation to cylindrical (spherical) coordinates, in the case when the solution $u = u(r)$ does not depend on either z or φ. For the numerical solution of the problems under consideration, monotone difference schemes of the second order of accuracy with respect to the grid parameters are constructed, which approximate these problems on uniform grids. Using the method of energy inequalities for solving initial-boundary value problems, a priori estimates are obtained in differential and difference interpretations under the assumption of the existence of a regular solution to the original differential problem. The obtained a priori estimates imply the uniqueness and stability of the solution with respect to the right-hand side and the initial data, as well as, due to the linearity of the difference problems, the convergence of the solution of the corresponding difference problem to the solution of the original differential problem with the rate $O(h^2 + \tau^2)$.

Key words: generalized equation, convection-diffusion equation, fractional order equation, fractional derivative in the sense of Riemann–Liouville, fractional derivative in the sense of Caputo, stability and convergence, boundary value problems, a priori estimate.

Mathematical Subject Classification (2010): 65N06, 65N12.

For citation: *Beshtokova, Z. V. and Beshtokov, M. Kh.* Grid Method for Approximate Solution of Initial-Boundary Value Problems for Generalized Convection-Diffusion Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 28–44 (in Russian). DOI: 10.46698/a6614-5398-1568-d.

References

1. *Mandelbrojt, S.* Sulla Generalizzazione del Calcolo Clelle Variazione, *Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend Cl. Sei., Fis. Mat. e Natur.*, 1925, vol. 6, no. 1, pp. 151–156.
2. *O'Shaughnessy, L. and Post, E. L.* Solutions of Problems: Calculus: 433, *The American Mathematical Monthly*, 1918, vol. 25, no. 4, pp. 172–173. DOI: 10.2307/2973123.
3. *Al-Bassam, M. A.* On Fractional Calculus and its Applications to the Theory of Ordinary Differential Equations of Generalized Order, *Nonlinear Analysis and Applications. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, New York, Dekker, 1982, vol. 80, pp. 305–331.
4. *Al-Abedeen, A. Z. and Arora, H. L.* A global existence and uniqueness theorem for ordinary differential equations of generalized order, *Canadian Mathematical Bulletin*, 1978, vol. 21, no. 3, pp. 267—271. DOI: 10.4153/cmb-1978-047-1.
5. *Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives and Some of their Applications], Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 p. (in Russian).
6. *Nakhushev, A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and its Application], Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 p. (in Russian).

7. *Goloviznin, V. M., Kiselev, V. P., Korotkin, I. A. and Yurkov, Y. I. Nekotorye osobennosti vychislitel'nykh algoritmov dlya uravneniy drobnoy diffuzii. Preprint IBRAE-2002-01* [Some Features of Computing Algorithms for the Equations Fractional Diffusion. Preprint IBRAE-2002-01], Moscow, Nuclear Safety Institute RAS, 2002, 57 p. (in Russian).
8. *Goloviznin, V. M., Kiselev, V. P. and Korotkin, I. A. Chislennye metody resheniya uravneniya drobnoy diffuzii s drobnoy proizvodnoy po vremeni v odnomernom sluchae. Preprint IBRAE-2002-10* [Computational methods for one-dimensional fractional diffusion equations. Preprint IBRAE-2002-10], Moscow, Nuclear Safety Institute RAS, 2002, 35 p. (in Russian).
9. *Taukenova, F. I. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* Difference Methods for Solving Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 10, pp. 1785–1795. DOI: 10.1134/S0965542506100149.
10. *Diethelm, K. and Walz, G.* Numerical Solution of Fractional Order Differential Equations by Extrapolation, *Numerical Algorithms*, 1997, vol. 16, no. 3–4, pp. 231–253. DOI: 10.1023/a:1019147432240.
11. *Alikhanov, A. A.* A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 660–666. DOI: 10.1134/S00166110050058.
12. *Alikhanov, A. A.* A New Difference Scheme for the Time Fractional Diffusion Equation, *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 280, pp. 424–438. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
13. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary-Value Problems for Loaded Pseudoparabolic Equations of Fractional Order and Difference Methods of their Solving, *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, no. 2, pp. 1–10. DOI: 10.3103/S1066369X19020014.
14. *Beshtokov, M. Kh.* Nonlocal Boundary Value Problems for a Fractional-Order Convection-Diffusion Equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 459–482 (in Russian). DOI: 10.20537/vm190401.
15. *Beshtokov, M. Kh.* Difference Method for Solving a Nonlocal Boundary Value Problem for a Degenerating Third-Order Pseudo-Parabolic Equation with Variable Coefficients, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 10, pp. 1763–1777. DOI: 10.1134/S0965542516100043.
16. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary Value Problems For Degenerating And Non-Degenerating Sobolev-Type Equations with a Nonlocal Source in Differential and Difference Forms, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 250–267. DOI: 10.1134/S0012266118020118.
17. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary Value Problems for a Moisture Transfer Equation with the Caputo Fractional Derivative and the Bessel Operator, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no 3, pp. 340–353. DOI: 10.1134/S0012266120030076.
18. *Kumykova, S. K.* On a Boundary Value Problem for the Equation $\operatorname{sign} y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1976, vol. 12, no. 1, pp. 79–88 (in Russian).
19. *Ladyzhenskaya, O. A. Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [The Boundary Value Problems of Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 1973, 407 p. (in Russian).
20. *Mal'shakov, A. V.* Hydrodynamic Equations for Porous Media with The Structure of the Pore Space Having Fractal Geometry, *Inzhinerno-fizicheskiy zhurnal*, 1992, vol. 62, no. 3, pp. 405–410 (in Russian).
21. *Samarskiy, A. A. Teoriya raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1983, 616 p. (in Russian).
22. *Beshtokov, M. Kh.* To Boundary-Value Problems for Degenerating Pseudoparabolic Equations with Gerasimov–Caputo Fractional Derivative, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, pp. 1–14. DOI: 10.3103/S1066369X18100018.

Received April 1, 2021

Murat Kh. Beshtokov
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik 360000, Russia,
Leading Researcher Computational Methods Department
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Zaryana V. Beshtokova
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik 360000, Russia,
Junior Researcher Computational Methods Department
E-mail: zarabaeva@yandex.ru