*Владикавказский математический журнал*
*2020, Том 22, Выпуск 4, С. 119–134*

**УДК** 517.983
**DOI** 10.46698/t4957-0399-9092-y

# О ДРОБНОМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ АДАМАРА И ТИПА АДАМАРА ПО НАПРАВЛЕНИЮ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

**М. У. Яхшибоев**[1]

[1] Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 4
E-mail: `m.yakhshiboev@gmail.com`

*Посвящается 75-летию со дня рождения*
*профессора С. С. Кутателадзе*

**Аннотация.** В работе приводятся определения и различные вспомогательные свойства дробных интегралов Адамара и типа Адамара по направлению, дробных производных Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению. Введена модификация дробных интегралов Адамара и типа Адамара по направлению с ядром, улучшенным на бесконечности. В статье рассматриваются операторы «типа свертки», инвариантные относительно растяжения в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой. Доказана ограниченность и полугрупповые свойства дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара по направлению в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой. В работе рассмотрены композиции дробного интеграла по Адамару и типа Адамара и дробной производной Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению, также получено интегральное представление усеченных дробных производных Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению. Доказаны теоремы обращения дробных интегралов Адамара и типа Адамара по направлению на функциях из весовых пространств Лебега со смешанной нормой. Доказана теорема о связи между обыкновенными и усеченными дробными производными Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению.

**Ключевые слова:** дробный интеграл Адамара, дробная производная Адамара, пространство Лебега со смешанной нормой, оператор растяжения, дробная производная Маршо — Адамара по направлению, дробная производная типа Маршо — Адамара по направлению.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 26A33, 41A35, 46E30.

**Образец цитирования:** *Яхшибоев М. У.* О дробном интегродифференцировании Адамара и типа Адамара по направлению в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 119–134. DOI: 10.46698/t4957-0399-9092-y.

## 1. Введение

Ж. Адамаром (J. Hadamard [1]) была введена конструкция дробного интегродифференцирования, являющаяся дробной степенью $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}$, приспособленная к полуоси и инвариантная относительно растяжения.

В данной работе изучены качественные свойства дробных интегралов и производных Адамара, типа Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой.

Пространства Лебега со смешанной нормой были введены и изучены в работе [2]. Изучению ограниченности операторов в пространствах Лебега со смешанной нормой посвящены работы [3, 4]. Ряд свойств смешанных пространств Лебега можно найти в [5].

Частные и смешанные дробные производные Маршо в случае двух переменных содержатся уже в работе A. Marchaud [6]. Дробные интегралы и производные по направлению функций многих переменных впервые введены И. А. Киприяновым [7]. В работах [7, 8] изучены различные свойства дробных производных по направлению. В работе [9] изучены качественные свойства оператора дробного дифференцирования в смысле Киприянова.

В статьях [10–16] были рассмотрены операторы одномерного дробного интегродифференцирования Адамара и типа Адамара. Ряд свойств дробного интегрирования по Адамару можно найти в книге [17].

В данной работе изучены свойства операторов «типа свертки»: инвариантность относительно растяжения в весовых смешанных пространствах Лебега. Исследованы свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования Адамара и типа Адамара по направлению на $\mathbb{R}^n_+$. Даны условия ограниченности оператора дробного интегрирования Адамара и типа Адамара по направлению в весовом пространстве суммируемых функций на $\mathbb{R}^n_+$, рассмотрены композиции дробного интеграла типа Адамара и дробной производной типа Маршо — Адамара по направлению и получено интегральное представление усеченных дробных производных Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению. На оснавании интегральных представлений, доказаны теоремы обращения дробных интегралов Адамара и типа Адамара по направлению в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой. Кроме того, доказаны связи между обыкновенными и усеченными дробными производными типа Маршо — Адамара по направлению.

Теория дробного дифференцирования в смысле Адамара и Маршо — Адамара развивается также в приложениях к решению интегро-дифференциалных уравнений в обыкновенных и частных производных, интегро-дифферецальные операторы которых принимают нецелые вещественные и комплексные значения, зависят от времени или других аргументов (см., например, [18, 19]).

Рассмотрение ведется в рамках пространств $L_{\overline{p},\overline{\gamma}} = L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}^n_+,\, \frac{dx}{x}\right)$, определяемых смешанной нормой

$$\|f;\, L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| := \left\{ \int\limits_0^\infty \left[ \dots \left( \int\limits_0^\infty |f(x)|^{p_1}\, x_1^{-\gamma_1} \frac{dx_1}{x_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} x_n^{-\gamma_n} \frac{dx_n}{x_n} \right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

Работа имеет следующую структуру. В разделах 2 и 3 приводятся определения и различные вспомогательные свойства Адамара, типа Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению, а в разделе 4 — вспомогательные леммы для пространств $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$. В разделах 5, 6 и 7 содержатся доказательства основных результатов: в разделе 5 доказывается ограниченность дробного интегрирования Адамара и типа Адамара по направлению в пространствах со смешанными нормами; в разделе 6 получены интегральные представления усеченных дробных производных Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению в весовых смешанных пространствах Лебега, а в разделе 7 доказываются теоремы обращения дробных интегралов Адамара и типа Адамара по направлению от функций из $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

**Обозначения.** $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел; $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\dot{\mathbb{R}}^n$ — компактификация $\mathbb{R}^n$ с одной бесконечно удаленной точкой, $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in R^n; x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$; $E$ — единичный оператор; $(\Pi_\rho f)(x) = f(x \circ \rho)$, $x, \rho \in \mathbb{R}^n_+$, — оператор растяжения. Введем конечную разность с использованием оператора растяжения

$$\left(\tilde{\Delta}^l_\tau f\right)(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} f\left(x\tau^k\right) = (E - \Pi_\tau)^l f, \quad l \in \mathbb{N}, \ \tau \in \mathbb{R}^1_+, \tag{1}$$

$\binom{l}{k}$ — биномиальные коэффициенты. Условимся, что запись $1 \leqslant \overline{p} < \infty$ и $\overline{p} = \overline{\infty}$, где $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\overline{\infty} = (\infty, \ldots, \infty)$, означает, что $1 \leqslant p_i < \infty$, $p_i = \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Основные результаты данной работы не будут касаться смешанных пространств $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}^n_+, \frac{dx}{x}\right)$, когда одна часть $p_i$, $i = 1, \ldots, n$, конечна, а другая часть бесконечна, $\frac{dx}{x} = \frac{dx_1}{x_1} \ldots \frac{dx_n}{x_n}$.

$$C_{\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}^n_+\right) = \left\{f : \|f; C_{\overline{\gamma}}\| = \max_{x \in R^n_+} \left|x^{-\overline{\gamma}} f(x)\right| < \infty, \ \lim_{|x| \to 0} x^{-\overline{\gamma}} f(x) = \lim_{|x| \to \infty} x^{-\overline{\gamma}} f(x)\right\},$$

$\gamma_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$.

$$C\left(\dot{\mathbb{R}}^n_+\right) = \left\{f : f \in C\left(\mathbb{R}^n_+\right) \left(\exists\, f(\infty) = \lim_{|x| \to \infty} f(x), \ f(0) = f(\infty)\right)\right\}.$$

Пусть $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, тогда $\rho^\omega = (\rho_1^{\omega_1}, \ldots, \rho_n^{\omega_n})$, $x \circ \rho^\omega = (x_1\rho_1^{\omega_1}, \ldots, x_n\rho_n^{\omega_n})$, $x \circ t^\omega = (x_1 t^{\omega_1}, \ldots, x_n t^{\omega_n})$, $\rho_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

$$(u)^\alpha_+ = \begin{cases} u^\alpha, & u > 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

$$\gamma_i^* = \begin{cases} \frac{\gamma_i}{p_i}, & 1 \leqslant p_i < \infty, \\ \gamma_i, & p_i = \infty, \ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Будем использовать $\aleph(\alpha, l) = \int_0^\infty t^{-1-\alpha}\left(1 - e^{-t}\right)^l dt$ — нормировочные постоянные, известные в теории дробного дифференцирования; $C^\infty_{0,0}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ — класс бесконечно-дифференцируемых финитных функций с носителем вне начала координат; $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, $\alpha, x \in \mathbb{R}$, — неполная гамма-функция,

$$\lim_{x \to 0} \Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha), \quad \lim_{x \to \infty} \Gamma(\alpha, x) = 0. \tag{2}$$

## 2. Дробные интегралы Адамара и типа Адамара по направлению

Дробными интегралами Адамара и типа Адамара порядка $\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^1_+$, по направлению $\omega$, $\omega \in \mathbb{R}^n_+$, называем конструкции

$$\left(J^\alpha_\omega \varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \xi|^{\alpha-1} \varphi\left(x \circ \xi^{\ln \omega}\right) \frac{d\xi}{\xi}, \tag{3}$$

$$\left(J^\alpha_{\omega,\mu} \varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \xi^\mu |\ln \xi|^{\alpha-1} \varphi\left(x \circ \xi^{\ln \omega}\right) \frac{d\xi}{\xi}, \tag{4}$$

где $x \circ \xi^{\ln \omega} = \left(x_1 \xi^{\ln \omega_1}, \ldots, x_n \xi^{\ln \omega_n}\right)$ и вектор $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ подчинен условию $(\ln \omega_1)^2 + \cdots + (\ln \omega_n)^2 = 1$.

Операторы (3), (4) коммутируют с оператором растяжения $\Pi_\rho J_\omega^\alpha = J_\omega^\alpha \Pi_\rho$, $\Pi_\rho J_{\omega,\mu}^\alpha = J_{\omega,\mu}^\alpha \Pi_\rho$ и связаны с оператором Римана — Лиувилля $I_v^\alpha$ равенствами

$$\left(J_\omega^\alpha \varphi\right)(x) = \left(Q^{-1} I_v^\alpha Q\varphi\right)(x), \quad \left(J_{\omega,\mu}^\alpha \varphi\right)(x) = \left(M_{-\mu v} Q^{-1} I_v^\alpha Q M_{\mu v}\varphi\right)(x),$$

где $v = \ln\omega = (\ln\omega_1, \ldots, \ln\omega_n)$, $(Q\varphi)(x) = \varphi(e^x) = \varphi(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$, $\left(Q^{-1}\varphi\right)(x) = \varphi(\ln x) = \varphi(\ln x_1, \ldots, \ln x_n)$, $(M_{\mu v}\varphi)(x) = x_1^{\mu v_1} \ldots x_n^{\mu v_n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $(M_{-\mu v}\varphi)(x) = x_1^{-\mu v_1} \ldots x_n^{-\mu v_n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (см. [17, с. 251] и [10, с. 11]).

Операторы $J_{\omega,\mu}^\alpha$ и $J_\omega^\alpha$ обладают полугрупповым свойством:

$$J_{\omega,\mu}^\alpha J_{\omega,\mu}^\beta \varphi = J_{\omega,\mu}^{\alpha+\beta}\varphi \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0), \tag{5}$$

$$J_\omega^\alpha J_\omega^\beta \varphi = J_\omega^{\alpha+\beta}\varphi \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0). \tag{6}$$

Введем модификацию дробного интеграла типа Адамара по направлению с ядром, «улучшенным» на бесконечности. Модификация дробного интеграла типа Адамара по направлению $\omega$, $\omega \in \mathbb{R}_+^n$ имеет вид

$$\left(J_{\omega,\tau}^{\alpha,l}\varphi\right)(x) = \int_0^\infty \left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_\alpha^+\right)(t)\, \varphi\left(x \circ t^{\ln\omega}\right) \frac{dt}{t}, \tag{7}$$

$$\left(J_{\omega,\mu;\tau}^{\alpha,l}\varphi\right)(x) = \int_0^\infty \left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_{\mu,\alpha}^+\right)(t)\, \varphi\left(x \circ t^{\ln\omega}\right) \frac{dt}{t}, \tag{8}$$

где $\tau \in \mathbb{R}_+^1$, $\mu \geqslant 0$,

$$\left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_\alpha^+\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^l (-1)^k \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} \left(\ln\frac{\tau^k}{t}\right)_+^{\alpha-1}, \quad \left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_\alpha^+\right)(t) \in L_1\left(\mathbb{R}_+^1\right),$$

$$\left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_{\mu,\alpha}^+\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^l (-1)^k \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{t}{\tau^k}\right)^\mu \left(\ln\frac{\tau^k}{t}\right)_+^{\alpha-1}, \quad \left(\tilde{\Delta}_{\tau^{-1}}^l k_{\mu,\alpha}^+\right)(t) \in L_1\left(\mathbb{R}_+^1\right).$$

Очевидно, что

$$I_{\omega,\tau}^{\alpha,l}\varphi = \tilde{\Delta}_\tau^l I_\omega^\alpha \varphi, \quad I_{\omega,\mu;\tau}^{\alpha,l}\varphi = \tilde{\Delta}_\tau^l I_{\omega,\mu}^\alpha \varphi$$

на достаточно хороших функциях $\varphi(x)$, т. е. операторы (7)–(8) получаются применением определения в (1) разностных операторов $\tilde{\Delta}_\tau^l$ с «мультипликативным» шагом к операторам $J_\omega^\alpha\varphi$ и $J_{\omega,\mu}^\alpha\varphi$. Они имеют то преимущество по сравнению с $J_\omega^\alpha\varphi$, что при $l > \alpha > 0$ и $J_{\omega,\mu}^\alpha\varphi$, они ограничены в пространстве $L_{\bar{p},\bar{\gamma}}\left(\mathbb{R}_+^n, \frac{dx}{x}\right)$ при всех $1 \leqslant p_i < \infty$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ (т. е. включая случай $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$).

## 3. Дробное дифференцирование Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению

Дробной производной Маршо — Адамара порядка $\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+^1$) по направлению $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\omega \in \mathbb{R}_+^n$, назовем следующее выражение:

$$\left(D_\omega^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\aleph(\alpha, l)} \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1-\alpha} \left(\tilde{\Delta}_{t^{\ln\omega}}^l f\right)(x) \frac{dt}{t}, \quad l > \alpha > 0,$$

построенное с помощью конечной разности, взятой вдоль направления.

Дробные производные Маршо — Адамара $D_\omega^\alpha f$ связаны с дробным призводным Маршо $\mathbb{D}_v^\alpha f$ равенствам $D_\omega^\alpha f = Q^{-1}\mathbb{D}_v^\alpha Q f$, где $v = \ln\omega$.

Дробные производные типа Маршо — Адамара $D_{\omega,\mu}^\alpha f$ связаны с оператором Римана — Лиувилля $I_v^\alpha$ равенствам

$$\left(D_{\omega,\mu}^\alpha f\right)(x) = \left(M_{-\mu v} Q^{-1} I_v^{-\alpha} Q M_{\mu v} f\right)(x),$$

где $v = \ln\omega = (\ln\omega_1, \dots, \ln\omega_n)$, $(Qf)(x) = f(e^x) = f(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$, $\left(Q^{-1}f\right)(x) = f(\ln x) = f(\ln x_1, \dots, \ln x_n)$, $(M_{\mu v} f)(x) = x_1^{\mu v_1} \dots x_n^{\mu v_n} f(x_1, \dots, x_n)$ $(M_{-\mu v} f)(x) = x_1^{-\mu v_1} \dots x_n^{-\mu v_n} f(x_1, \dots, x_n)$, $0 < \alpha < 1$ (см. [17, с. 251] и [10, с. 11]).

«Усеченной» дробной производной Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара функцией $f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, по направлению $\omega$, $\omega \in \mathbb{R}_+^n$, назовем выражение

$$\left(D_{\omega;1-\rho}^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\aleph(\alpha, l)} \int\limits_0^\rho \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1-\alpha} \left(\tilde{\Delta}_{t^{\ln\omega}}^l f\right)(x)\,\frac{dt}{t}, \quad l > \alpha > 0,$$

$$\left(D_{\omega,\mu;1-\rho}^\alpha f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^\rho t^\mu \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1-\alpha} \left(\tilde{\Delta}_{t^{\ln\omega}}^1 f\right)(x)\,\frac{dt}{t} + \mu^\alpha f(x), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{9}$$

где $0 < \rho < 1$. «Усеченной» дробной производной Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению будем понимать предел по норме пространства $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$:

$$D_\omega^\alpha f = \lim_{\rho\to 1-0} D_{\omega;1-\rho}^\alpha f, \quad D_{\omega,\mu}^\alpha f = \lim_{\rho\to 1} D_{\omega,\mu;1-\rho}^\alpha f. \tag{10}$$

## 4. Вспомогательные леммы

**Лемма 1.** *Пространства* $C_{0,0}^\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *плотно в* $L_{\overline{p};\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}_+^n, \frac{dx}{x}\right)$, $1 \leqslant \overline{p} < \infty$, *и в* $C_{\overline{\gamma},0}\left(\dot{\mathbb{R}}_+^n\right)$,

$$C_{\overline{\gamma},0}\left(\dot{\mathbb{R}}_+^n\right) = \left\{ f : \ f(x) = x^{\overline{\gamma}} g(x), \ g(x) \in C\left(\dot{\mathbb{R}}_+^n\right), \ \lim_{|x|\to 0} g(x) = \lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0 \right\},$$

*для любых* $-\infty < \gamma_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$.

$\lhd$ Доказательство леммы осуществляется стандартными средствами. $\rhd$

**Лемма 2.** *Пусть* $\varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, $1 \leqslant \overline{p} \leqslant \infty$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, *то справедливо неравенство:*

$$\|\Pi_\rho \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| \leqslant \psi\big(\rho^{\overline{\gamma}^*}\big)\, \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|, \tag{11}$$

*где*

$$\psi\big(\rho^{\overline{\gamma}^*}\big) = \prod_{i=1}^n \psi_i\big(\rho_i^{\gamma_i^*}\big), \quad \psi_i\big(\rho_i^{\gamma_i^*}\big) = \begin{cases} \rho_i^{\frac{\gamma_i}{p_i}}, & 1 \leqslant p_i < \infty, \\ \rho_i^{\gamma_i}, & p_i = \infty, \ i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{12}$$

*Кроме того, оператор растяжения аппроксимирует единичный оператор в пространстве* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$*:*

$$\lim_{\rho\to 1-0} \|\Pi_\rho \varphi - \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| = 0. \tag{13}$$

◁ Равенство (11) устанавливается очевидными заменами переменных. Докажем утверждение (13). Имеем

$$\|\Pi_\rho\varphi-\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|=\left\|\left[1-\left(\psi\left(\rho^{\overline{\gamma}^*}\right)\right)^{-1}\right]\Pi_\rho\varphi+\left(\psi\left(\rho^{\overline{\gamma}^*}\right)\right)^{-1}\Pi_\rho\varphi-\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|,$$

где $\psi\left(\rho^{\overline{\gamma}^*}\right)$ — функция (12). Используя обобщенное неравенство Минковского (см. [5, с. 22]), получим

$$\|\Pi_\rho\varphi-\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|\leqslant\left\|\left[1-\left(\psi\left(\rho^{\overline{\gamma}^*}\right)\right)^{-1}\right]\Pi_\rho\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|+\left\|\left(\psi\left(\rho^{\overline{\gamma}^*}\right)\right)^{-1}\Pi_\rho\varphi-\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\|.$$

В силу (11) имеем

$$\|\Pi_\rho\varphi-\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|\leqslant\left|1-\psi\left(\rho^{\overline{\gamma}^*}\right)\right|\|\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|+\|\Pi_\rho g-g;L_{\overline{p}}\|,\tag{14}$$

где $g\,(x):=x^{-\overline{\gamma}\cdot\overline{p}}\varphi\,(x)$, $g\,(x)\in L_{\overline{p}}\left(\mathbb{R}^n_+,\frac{dx}{x}\right)$ при $1\leqslant\overline{p}<\infty$ и $g\,(x)\in C\left(\dot{\mathbb{R}}^n_+\right)$ при $\overline{p}=\overline{\infty}$. Утверждение (13) следует из неравенства (14). ▷

Следующие леммы относятся к операторам «типа свертки», инвариантным относительно растяжения в пространствах $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$. Именно, рассмотрим операторы вида

$$(B_\rho\varphi)\,(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}k\,(t)\,\varphi\left(x\circ\rho^t\right)dt,$$

$$(B_\omega\varphi)\,(x)=\int\limits_{0}^{\infty}a\,(t)\,\varphi\,(x\circ t^\omega)\,dt.\tag{15}$$

**Лемма 3.** *Пусть $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$. Если*

$$k(\rho):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|k(t)|\prod_{i=1}^{n}\left(\rho_i^{\gamma_i^*}\right)^t dt<\infty,$$

*то оператор $B_\rho$ ограничен в пространстве $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, и*

$$\|B_\rho\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|\leqslant k\,(\rho)\,\|\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|.\tag{16}$$

◁ Так как $(B_\rho\varphi)\,(x)=\int_{-\infty}^{\infty}k\,(t)\,(\Pi_{\rho^t}\varphi)\,(x)\,dt$, применив обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\|B_\rho\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|k\,(t)|\,\|(\Pi_{\rho^t}\varphi)\,(x)\,;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|\,dt.$$

В силу равенства (11) получаем (16). ▷

**Следствие 1.** *Пусть $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, $1\leqslant\overline{p}\leqslant\infty$, $\gamma_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$. Если $d\,(\omega):=\int_0^\infty|a\,(t)|\,t^{\overline{\gamma}^*\circ\omega}dt<\infty$, где $\overline{\gamma}^*\circ\omega=\sum_{i=1}^n\gamma_i^*\omega_i$, то оператор $B_\omega$ ограничен в пространстве $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, и*

$$\|B_\omega\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|\leqslant d\,(\omega)\,\|\varphi;L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|.$$

**Следствие 2.** *Пусть в (15) $a\,(t)\equiv0$ при $t\geqslant1$. Тогда оператор (15) ограничен в пространстве $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ при всех $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i\geqslant0$, $\omega_i\geqslant0$, $i=1,\ldots,n$, если $\int_0^1|a\,(t)|\,dt<+\infty$.*

**Лемма 4.** *Пусть* $k(t) \in L_1(\mathbb{R})$, $k_i(y_i) = 0$ *при* $t < 0$. *Тогда*

$$\|B_\rho \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| \leqslant \|k; L_1(\mathbb{R})\| \, \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|$$

*при* $0 < \rho_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство леммы 4 вытекает из леммы 3.

**Лемма 5.** *Пусть* $k(t) \in L_1(\mathbb{R})$, $k(t) = 0$ *при* $t < 0$ *и* $\int_0^\infty k(t)\, dt = 1$. *Тогда*

$$\lim_{\rho \to 1-0} \|B_\rho \varphi - \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| = 0 \tag{17}$$

*для всех* $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\gamma_i \geqslant 0$, $0 < \rho_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$.

$\lhd$ Прежде всего отметим, что $B_\rho \varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ для $\varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ при $0 < \rho_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, согласно лемме 4. Заметим, что, так как $\int_0^\infty k(t)\, dt = 1$, то

$$(B_\rho \varphi)(x) - \varphi(x) = \int_0^\infty k(t) \left[ (\Pi_{\rho^t} \varphi)(x) - \varphi(x) \right] dt.$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, получим оценку

$$\|B_\rho \varphi - \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| \leqslant \int_0^\infty |k(t)| \left\| (\Pi_{\rho^t} \varphi)(x) - \varphi(x); L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| dt. \tag{18}$$

Поскольку $0 < \rho_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, то в (18) возможен предельный переход под знаком интеграла на основании мажорантной теоремы Лебега. Применение последней обосновано утверждениями (11), (13) леммы 2. $\rhd$

## 5. Об ограниченности дробного интегрирования по Адамару и типа Адамара в пространстве $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$

**Теорема 1.** *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\alpha_i > 0$ *и* $\mu \in \mathbb{C}$. *Если* $\operatorname{Re} \mu + \sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i > 0$, *то оператор* $J^\alpha_{\omega,\mu}$ *ограничен в* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ *и*

$$\left\| J^\alpha_{\omega,\mu} \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant Q_\mu \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|, \tag{19}$$

*где* $Q_\mu = \left( \operatorname{Re} \mu + \sum\limits_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i \right)^{-\alpha}$.

$\lhd$ Сначала рассмотрим случай $1 \leqslant \overline{p} < \overline{\infty}$. С помощью обобщенного неравенства Минковского, получаем

$$\left\| J^\alpha_{\omega,\mu} \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \int_0^\infty \left| k^+_{\mu,\alpha}(y) \right| \left\| \varphi\left( x \circ y^{\ln \omega} \right); L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \frac{dy}{y}.$$

После подстановки $\tau_i = x_i y^{\ln \omega_i}$, $i = 1, \ldots, n$, имеем

$$\begin{gathered} \left\| J^\alpha_{\omega,\mu} \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 y^{\mu + \sum\limits_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{p_i} \ln \omega_i} |\ln y|^{\alpha - 1} \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| \frac{dy}{y} \\ \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\left( \mu + \sum\limits_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{p_i} \ln \omega_i \right) \xi} \xi^{\alpha - 1} d\xi \, \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| \leqslant \left( \mu + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{p_i} \ln \omega_i \right)^{-\alpha} \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|. \end{gathered} \tag{20}$$

В случае $\overline{p} = \overline{\infty}$ в (20) заменим $p_i$, $i = 1, \ldots, n$ на 1. Тогда получим (19). $\rhd$

**Теорема 2.** 1) *Пусть* $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Если* $\sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i > 0$, *то оператор* $J_\omega^\alpha$ *ограничен в* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ *и*

$$\|J_\omega^\alpha \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\| \leqslant Q_0 \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|,$$

*где* $Q_0 = \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i\right)^{-\alpha}$.

2) *Пусть* $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_i \leqslant \infty$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$. *Оператор* $J_\omega^\alpha \varphi$ *дробного интегрирования ограничен из* $L_{\overline{p}}\left(\mathbb{R}_+^n, \frac{dx}{x}\right)$ *в* $L_{\overline{q}}\left(\mathbb{R}_+^n, \frac{dx}{x}\right)$ *тогда и только тогда, когда* $1 < p_i < \frac{1}{\alpha_i}$, $q_i = \frac{p_i}{1-\alpha_i p_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

$\lhd$ Первое утверждение вытекает из теоремы 1. Далее, оператор $J_\omega^\alpha \varphi$ связан с оператором Римана — Лиувилля $I_v^\alpha \varphi$ равенством

$$J_\omega^\alpha \varphi = Q^{-1} I_v^\alpha Q \varphi, \tag{21}$$

где $(Q\varphi)(x) = \varphi(e^x) = \varphi(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$, $v = \ln \omega$. В силу (21) второе утверждение теоремы следует из известной теоремы Харди — Литтлвуда для обычного дробного интегрирования по $\mathbb{R}^n$ (см. [17, с. 345]). $\rhd$

**Теорема 3.** *Операторы* $J_{\omega,\mu,\tau}^{\alpha,l}$ *и* $J_{\omega,\tau}^{\alpha,l}$ *ограничены в пространстве* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ *при всех* $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\left\|J_{\omega,\mu,\tau}^{\alpha,l} \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\| \leqslant c(\tau,\mu) \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|,$$

*где* $0 < c(\tau,\mu) < 1$ *при* $\operatorname{Re}\mu + \sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i \geqslant 0$, $0 < \tau \leqslant 1$, $l > \alpha > 0$,

$$\left\|J_{\omega,\tau}^{\alpha,l} \varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right\| \leqslant c_1(\tau) \|\varphi; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|,$$

*где* $0 < c_1(\tau) < 1$ *при* $\sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i \geqslant 0$, $0 < \tau \leqslant 1$, $l > \alpha > 0$.

$\lhd$ Доказательство этой теоремы вытекает из следствия 2 леммы 3. $\rhd$

**Теорема 4.** *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *и* $\mu \in \mathbb{C}$.

1) *Если* $\operatorname{Re}\mu > -\sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i$, *то оператор* $J_{\omega,\mu}^\alpha$ *обладает полугрупповым свойством* (5) *в пространстве* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

2) *Если* $\sum_{i=1}^n \gamma_i^* \ln \omega_i > 0$, *то оператор* $J_\omega^\alpha$ *обладает полугрупповым свойством* (6) *в пространстве* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

$\lhd$ Сначала равенство (5) докажем для «достаточно хороших» функций $\varphi$. Поменяв порядок интегрирования по формуле Дирихле, придем к равенству

$$(J_{\omega,\mu}^\alpha J_{\omega,\mu}^\beta \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \xi^\mu |\ln \xi|^{\alpha-1} \frac{d\xi}{\xi} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \tau^\mu |\ln \tau|^{\beta-1} \varphi\left(x \circ (\xi\tau)^{\ln \omega}\right) \frac{d\tau}{\tau}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 u^\mu \varphi\left(x \circ u^{\ln \omega}\right) \frac{du}{u} \int_u^1 |\ln \xi|^{\alpha-1} \left|\ln \frac{u}{\xi}\right|^{\beta-1} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Внутренний интеграл легко вычисляется после замены $\ln \xi = \ln u \ln y$:

$$(J_{c,\mu}^\alpha J_{c,\mu}^\beta \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 u^\mu |\ln u|^{\alpha+\beta-1} \varphi\left(x \circ u^{\ln \omega}\right) \frac{du}{u} \int_1^e |\ln y|^{\alpha-1} (1 - \ln y)^{\beta-1} \frac{dy}{y}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 u^\mu |\ln u|^{\alpha+\beta-1} \varphi\left(x \circ u^{\ln \omega}\right) \frac{du}{u} = (J_{c,\mu}^{\alpha+\beta} \varphi)(x).$$

Отсюда получаем равенство (5) для «достаточно хороших» функций $\varphi$.

Если $\operatorname{Re}\mu > -\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^*\ln\omega_i$, то в силу теоремы 1 операторы $J_{\omega,\mu}^{\alpha}$, $J_{\omega,\mu}^{\beta}$ и $J_{\omega,\mu}^{\alpha+\beta}$ ограничены в $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, и равенство (5) верно для $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

Когда $\mu=0$, из теоремы 4 и теоремы 2 получаем полугрупповое свойство операторов дробного интегрирования Адамара (3). $\rhd$

## 6. Интегральное представление усеченных дробных производных Маршо — Адамара и типа Маршо — Адамара по направлению

Всюду ниже вектор $\overline{p}=(p_1,\ldots,p_n)$ либо имеет все конечные компоненты $p_i$ ($\overline{p}<\infty$), либо все бесконечные $\overline{p}=\overline{\infty}=(\infty,\ldots,\infty)$.

**Лемма 6.** *Пусть* $f(x)=\left(J_{\omega,\mu}^{\alpha}\varphi\right)(x)$, $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $0<\alpha<1$, $\mu\geqslant 0$, $1\leqslant p_i<\infty$, $\gamma_i,\ln\omega_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, $\mu+\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i>0$ *и* $0<\rho<1$. *Тогда усеченная дробная производная типа Маршо — Адамара* $D_{\omega,\mu;1-\rho}^{\alpha}f$ *по направлению* $\omega$, *имеет следующее интегральное представление:*

$$D_{\omega,\mu;1-\rho}^{\alpha}f=\int\limits_0^{\infty}K_{\alpha,\mu}^{+}(t,\rho)\,\varphi\left(x\circ\rho^{t\ln\omega}\right)dt, \tag{22}$$

*где*

$$K_{\alpha,\mu}^{+}(t,\rho)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\rho^{\mu t}}{t}\left[\left(\alpha\Gamma\left(-\alpha,\mu\ln\frac{1}{\rho}\right)+\Gamma(1-\alpha)\right)\left(\mu\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha}(t)_{+}^{\alpha}-(t-1)_{+}^{\alpha}\right]. \tag{23}$$

*При этом ядро* $K_{\alpha,\mu}^{+}(t,\rho)\in L_1\left(\mathbb{R}_{+}^{1}\right)$ *является усредняющим*

$$\int\limits_0^{\infty}K_{\alpha,\mu}^{+}(t,\rho)\,dt=1,\quad K_{\alpha,\mu}^{+}(t,\rho)>0, \tag{24}$$

*при* $t>0$.

$\lhd$ Из (8) при $0<t<1$, $l=1$ имеем

$$f(x)-f\left(x\circ t^{\ln\omega}\right)=\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int\limits_0^{\infty}t^{\mu y}y^{\alpha-1}\varphi\left(x\circ t^{y\ln\omega}\right)dy\right.$$
$$\left.-\int\limits_1^{\infty}t^{\mu(y-1)}(y-1)^{\alpha-1}\varphi\left(x\circ t^{y\ln\omega}\right)dy\right\}.$$

Поэтому

$$f(x)-f(xt)=\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\alpha}\int\limits_0^{\infty}k_{\alpha,\mu}^{+}(y,t)\varphi(x\circ t^{y\ln\omega})\,dy, \tag{25}$$

где $x\circ t^{y\ln\omega}=\left(x_1t^{y\ln\omega_1},\ldots,x_nt^{y\ln\omega_n}\right)$,

$$k_{\alpha,\mu}^{+}(y,t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}t^{\mu y}y^{\alpha-1}, & 0<y<1,\\ t^{\mu y}y^{\alpha-1}-t^{\mu(y-1)}(y-1)^{\alpha-1}, & y>1.\end{cases}$$

Известно, что $k^{+}_{\alpha,\mu}(y,t)\in L_1(\mathbb{R}^1_+)$ и $\int_0^\infty k^{+}_{\alpha,\mu}(y,t)dy=0$ (см. [12]). Из (25) получаем

$$D^{\alpha}_{\omega,\mu;1-\rho}f=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{\rho}\frac{1}{\ln\frac{1}{t}}\frac{dt}{t^{1-\mu}}\int\limits_0^{\infty}k^{+}_{\alpha,\mu}(y,t)\varphi(x\circ t^{y\ln\omega})\,dy+\mu^{\alpha}f(x).$$

Замены $\ln\frac{1}{t}=\xi$ и $y\xi=\tau$ дают

$$D^{\alpha}_{\omega,\mu;1-\rho}f=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\ln\frac{1}{\rho}}^{\infty}e^{-\mu\xi}\frac{d\xi}{\xi^2}\int\limits_0^{\infty}k^{+}_{\alpha,\mu}\left(\frac{\tau}{\xi},e^{-\xi}\right)\varphi(x\circ e^{-\tau\ln\omega})d\tau+\mu^{\alpha}f\,(x)\,. \tag{26}$$

Перестановка порядка интегрирования в правой части в (26) приводит к равенству

$$D^{\alpha}_{\omega,\mu;1-\rho}f=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{\infty}\varphi\Big(x\circ e^{-\tau\ln\omega}\Big)\frac{d\tau}{\tau}\int\limits_0^{\tau/\ln\frac{1}{p}}e^{-\frac{\mu}{s}\tau}k^{+}_{\alpha,\mu}\left(s,e^{-\frac{\tau}{s}}\right)ds+\mu^{\alpha}f\,(x)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left\{\int\limits_0^{\infty}\varphi\Big(x\circ\rho^{t\ln\omega}\Big)\left[\alpha\Gamma\left(-\alpha,\mu\ln\frac{1}{\rho}\right)+\Gamma(1-\alpha)\right]\right.$$

$$\left.\times\left(\mu\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha}\rho^{\mu t}t^{\alpha-1}dt-\int\limits_1^{\infty}\rho^{\mu t}\,(t-1)^{\alpha}\,\varphi(x\circ\rho^{t\ln\omega})\,\frac{dt}{t}\right\}, \tag{27}$$

что совпадает с (22).

Утверждения (23)–(24) для функции $K^{+}_{\alpha,\mu}\,(t,\rho)$ известны (см. [12]). Остается обосновать действия в (27). Для $\varphi\in C^{\infty}_{0,0}(\mathbb{R}^n_+)$ они очевидны и, следовательно, для таких функций тождество (22) доказано. В силу леммы 4 и теоремы 1 оператор $D^{\alpha}_{\omega,\mu;1-\rho}J^{\alpha}_{\omega,\mu}$, стоящий в левой части тождества (22), ограничен в $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ при $\mu+\sum_{i=1}^n\frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i>0$. Ограничен и оператор в правой части в силу той же леммы 4. Поэтому на основании леммы 1 тождество (22) распространяется с $C^{\infty}_{0,0}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ на все функции $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, $1\leqslant p_i<\infty$, $i=1,\dots,n$, $\mu+\sum_{i=1}^n\frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i>0$. $\rhd$

**Лемма 7.** *Пусть* $f(x)=(J^{\alpha}_{\omega}\varphi)(x)$, $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $\alpha>0$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i,\ln\omega_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, $\sum_{i=1}^n\gamma_i^*\ln\omega_i>0$ *или* $0<\alpha<1$, $1<p_i<\frac{1}{\alpha}$, $\gamma_i=0$, $i=1,\dots,n$, *и* $0<\rho<1$. *Тогда усеченная дробная производная Маршо — Адамара* $D^{\alpha}_{\omega,1-\rho}f$ *по направлению* $\omega$ *имеет следующее интегральное представление:*

$$\left(D^{\alpha}_{\omega,1-\rho}f\right)(x)=\int\limits_0^{\infty}K^{+}_{l,\alpha}(y)\varphi\Big(x\circ\rho^{y\ln\omega}\Big)\,dy, \tag{28}$$

*где*

$$K^{+}_{l,\alpha}(y)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^k\left(\begin{array}{c}l\\k\end{array}\right)(y-k)^{\alpha}_{+}}{\aleph\,(\alpha,l)\,\Gamma(1+\alpha)y}\in L_1\left(\mathbb{R}^1_+\right) \tag{29}$$

*и*

$$\int\limits_0^{\infty}K^{+}_{l,\alpha}(y)dy=1,\quad l>\alpha>0. \tag{30}$$

$\lhd$ Доказательство леммы 7 аналогично доказательству леммы 6. $\rhd$

Замечание. Можно показать, что утверждение леммы справедливо и при $\gamma_i = 0$, $p_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < \alpha < 1$, однако это потребует иного обоснования (см. доказательство леммы 8).

**Лемма 8.** *Пусть* $f \in L_{\overline{r},\overline{\lambda}}$, $1 \leqslant r_i \leqslant \infty$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, *такова, что ее разность* $(\tilde{\Delta}^l_\tau f)(x)$ *порядка* $l, l > \alpha$, *представима модифицированным адамаравским дробным интегралом* (7) *по направлению от функции из* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$:

$$(\tilde{\Delta}^l_\tau f)(x) = J^{\alpha,l}_{\omega,\tau}\varphi = \int\limits_0^\infty \left(\tilde{\Delta}^l_{\tau^{-1}} k^+_\alpha\right)(t)\,\varphi\left(x \circ t^{\ln\omega}\right)\frac{dt}{t}, \tag{31}$$

*где* $l > \alpha > 0$, $0 < \tau < 1$, $\varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $\gamma_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ *и* $0 < \rho < 1$. *Тогда усеченная дробная производная* $D^\alpha_{\omega,1-\rho} f$ *по направлению* $\omega$, *допускает интегральное представление* (28) *при всех* $1 \leqslant p_i < \infty$, $\gamma_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, *и интегральное представление*

$$\left(D^\alpha_{\omega,1-\rho} f\right)(x) = \int\limits_0^\infty K^+_{l,\alpha}(t)\,\varphi\left(x \circ \rho^{t\ln\omega}\right)dt - \varphi(0) \tag{32}$$

*при всех* $p_i = \infty$, $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

$\lhd$ Так как при $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, утверждения леммы 8 обоснованы при доказательстве леммы 6, то рассматриваем случай $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, но при любых $\alpha > 0$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Нужно обосновать следующее равенство:

$$\int\limits_{\ln\frac{1}{\rho}}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2}\int\limits_0^\infty k^+_{l,\alpha}\left(\frac{\tau}{\xi}\right)\varphi\Big(x \circ e^{-\tau\ln\omega}\Big)\,d\tau = \int\limits_0^\infty \varphi\Big(x \circ e^{-\tau\ln\omega}\Big)\,d\tau \int\limits_{\ln\frac{1}{\rho}}^\infty k^+_{l,\alpha}\left(\frac{\tau}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi^2}.$$

Оно несложно обосновывается теоремой Фубини при $1 \leqslant p_i < \infty$, $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Действительно, покажем, что при $1 \leqslant p_i < \infty$, $\gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ сходится (почти для всех $x$) повторный интеграл

$$\int\limits_0^\infty \Big|\varphi\Big(x \circ e^{-\tau\ln\omega}\Big)\Big|\,d\tau \int\limits_{\ln\frac{1}{\rho}}^\infty \left|k^+_{l,\alpha}\left(\frac{\tau}{\xi}\right)\right|\frac{d\xi}{\xi^2}$$

для всех $\varphi \in L_{\overline{p},0}$, $1 \leqslant \overline{p} < \infty$. Отсюда замены $\frac{\tau}{\xi} = s$ и $\tau = t\ln\frac{1}{\rho}$ приводят к необходимости доказать сходимость интеграла

$$J := \int\limits_0^\infty \Big|\varphi\Big(x \circ \rho^{-t\ln\omega}\Big)\Big| K^*(t)\,dt, \tag{33}$$

где $K^*(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \left|k^+_{l,\alpha}(s)\right| ds$. Так как $k^+_{l,\alpha}(s) \in L_1\left(\mathbb{R}^1_+\right)$, то $K^*(t) \leqslant \frac{c}{t}$ при $t \to +\infty$. Далее, очевидно, что $K^*(t) \leqslant ct^{\alpha-1}$при $t \to 0$ и что $K^*(t)$ непрерывна при $0 < t < \infty$. Тогда из (33) имеем

$$J \leqslant c\int\limits_0^1 \Big|\varphi\Big(x \circ \rho^{-t\ln\omega}\Big)\Big| t^{\alpha-1}\,dt + c\int\limits_1^\infty \Big|\varphi\Big(x \circ \rho^{-t\ln\omega}\Big)\Big|\frac{dt}{t}$$

и остается сослаться на теорему Юнга для пространств со смешанной нормой (см. [5, с. 25]).

Остается обосновать случай $p_i=\infty$, $i=1,\dots,n$, когда $\varphi\in C\left(\dot{\mathbb{R}}^n_+\right)$. В этом случае, чтобы преодолеть трудности, связанные со вторым слагаемым, т. е. $t>1$, рассмотрим «двустороннее» усечение дробной производной Маршо — Адамара по направлению $\omega$, т. е.

$$\left(D^{\alpha}_{\omega,1-\rho,\varepsilon}f\right)(x)=\frac{1}{\aleph(\alpha,l)}\int\limits_{\varepsilon}^{\rho}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1-\alpha}\left(\tilde{\Delta}^{l}_{t^{\ln\omega}}f\right)(x)\,\frac{dt}{t},\quad l>\alpha>0,\tag{34}$$

где $0<\varepsilon<\rho<1$, и затем устремим $\varepsilon\to0$. Согласно (31) и (34) имеем

$$\left(D^{\alpha}_{\omega,1-\rho,\varepsilon}f\right)(x)=\frac{1}{\aleph(\alpha,l)}\int\limits_{\varepsilon}^{\rho}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1}\frac{dt}{t}\int\limits_{0}^{\infty}k^{+}_{l,\alpha}(y)\,\varphi\left(x\circ t^{y\ln\omega}\right)dy.$$

Замены $\ln\frac{1}{\xi}=\xi$ и $y\xi=\tau$ дают

$$\left(D^{\alpha}_{\omega,1-\rho,\varepsilon}f\right)(x)=\frac{1}{\aleph(\alpha,l)}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi\left(x\circ e^{-\tau\ln\omega}\right)d\tau\int\limits_{\ln\frac{1}{\rho}}^{\ln\frac{1}{\varepsilon}}k^{+}_{l,\alpha}\left(\frac{\tau}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi^2}.\tag{35}$$

Здесь перестановка порядка интегрирования легко обосновывается за счет $\varepsilon>0$ (с учетом того, что $|\varphi(x)|<c$ и $\int_{\ln\frac{1}{\rho}}^{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\frac{d\xi}{\xi^2}\int_0^\infty\left|k^{+}_{l,\alpha}(\frac{\tau}{\xi})\right|d\tau<\infty$). Из (35) имеем

$$\left(D^{\alpha}_{\omega,1-\rho,\varepsilon}f\right)(x)=\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(x\circ e^{-\tau\ln\omega})\left[-\frac{1}{\ln\rho}K^{+}_{l,\alpha}\left(-\frac{\tau}{\ln\rho}\right)+\frac{1}{\ln\varepsilon}K^{+}_{l,\alpha}\left(-\frac{\tau}{\ln\varepsilon}\right)\right]d\tau.$$

Таким образом,

$$\left(D^{\alpha}_{\omega,1-\rho,\varepsilon}f\right)(x)=\int\limits_{0}^{\infty}K^{+}_{l,\alpha}(t)\,\varphi\left(x\circ\rho^{t\ln\omega}\right)dt-\int\limits_{0}^{\infty}K^{+}_{l,\alpha}(t)\,\varphi\left(x\circ\varepsilon^{t\ln\omega}\right)dt.\tag{36}$$

Так как $\varphi\in C\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ и $K^{+}_{l,\alpha}(t)\in L_1\left(\mathbb{R}^1_+\right)$, то во втором слагаемом возможен предельный переход при $\varepsilon\to0$ под знаком интеграла. В силу (30) и (36) получаем интегральное представление (32). $\rhd$

Рассмотрим функцию

$$A(\rho):=\int\limits_{0}^{\infty}\rho^{-ct}K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho)\,dt=\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$$
$$\times\left[\Gamma\Big(-\alpha,\mu\ln\frac{1}{\rho}\Big)\Big(\frac{\mu}{\mu-c}\Big)^{\alpha}-\Gamma\Big(-\alpha,(\mu-c)\ln\frac{1}{\rho}\Big)\right],\tag{37}$$

где $K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho)$ — функция (23), $0<\alpha<1$, $0<\rho<1$, $\mu\geqslant0$, $c:=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i$, $\gamma_i,\ln\omega_i\in\mathbb{R}$, $\mu>c$.

**Лемма 9.** *Пусть $0<\alpha<1$, $\mu\geqslant0$, $c\in R$, $\mu>c$ и $0<\rho<1$. Тогда $A(\rho)$-функция обладает следующими свойствами:*

1) *$A(\rho)$-функция монотонно убывает при $c<0$ и монотонно возрастает при $c>0$.*

2) *Справедливо равенство* $\lim_{\rho\to 1-0} A(\rho)=1$, $\lim_{\rho\to 0+0} A(\rho)=\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}$.

3) *Справедливо неравенство* $\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}<A(\rho)\leqslant 1$, *при* $c<0$, $1\leqslant A(\rho)<\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}$ *при* $0<c<\mu$.

◁ Найдем производную

$$A'(\rho)=\frac{\alpha\rho^{\mu}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{(\mu-c)^{-\alpha}}{\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha+1}}(\rho^{-c}-1).$$

Отсюда вытекает утверждение 1), т. е. $A'(\rho)<0$ при $c<0$, $A'(\rho)>0$ при $c>0$.

В силу свойства (2) неполной гамма-функции получим утверждение 2):

$$\lim_{\rho\to 1-0} A(\rho)=\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}+\frac{\alpha\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}-1\right]=1,\quad \lim_{\rho\to 0+0} A(\rho)=\left(\frac{\mu}{\mu-c}\right)^{\alpha}.$$

Утверждение 3) вытекает из утверждения 2) и в силу свойства (2) неполной гамма-функции. ▷

## 7. Обращение дробных интегралов по направлению от функций из $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$

**Теорема 5.** *Пусть* $f=J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi$, $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $0<\alpha<1$, $\mu\geqslant 0$, $1\leqslant p_i<\infty$, $\gamma_i,\ln\omega_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, $\mu+\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{p_i}\ln\omega_i>0$ *и* $0<\rho<1$. *Тогда*

$$\left(D^{\alpha}_{\omega,\mu}f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1-0}\left(D^{\alpha}_{\omega,\mu;1-\rho}f\right)(x)=\varphi(x),\tag{38}$$

*где предел понимается как в* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

◁ Сходимость по норме следует из леммы 6 и леммы 5. ▷

**Теорема 6.** *Пусть* $f=J^{\alpha}_{\omega}\varphi$, $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $\alpha>0$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i,\ln\omega_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{*}\ln\omega_i>0$ *или* $0<\alpha<1$, $1<p_i<\frac{1}{\alpha}$, $\gamma_i=0$, $i=1,\dots,n$, *и* $0<\rho<1$. *Тогда*

$$\left(D^{\alpha}_{\omega}f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1}\left(D^{\alpha}_{\omega,1-\rho}f\right)(x)=\varphi(x),$$

*где предел понимается как в* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *так и почти всюду.*

◁ Сходимость по норме следует из леммы 7 и леммы 5. Доказательство сходимости почти всюду получим из [20, теорема 2, с. 77–78]. При этом учитываем равенство (29) и свойство ядра $\left|K^{+}_{l,\alpha}(t)\right|\leqslant\frac{c}{(1+t)^{l+1-\alpha}}$ при $t>1$ (см. [17, с. 379]), так что ядро $K^{+}_{l,\alpha}(t)$ имеет монотонную суммируемую мажоранту. ▷

**Теорема 7.** *Пусть* $\left(\tilde{\Delta}^{l}_{\tau}f\right)(x)=J^{\alpha,l}_{\omega,\tau}\varphi$, $\varphi\in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $l>\alpha>0$, $0<\tau<1$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\gamma_i,\ln\omega_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{*}\ln\omega_i\geqslant 0$ *и* $0<\rho<1$. *Тогда*

$$\left(D^{\alpha}_{\omega}f\right)(x)=\lim_{\rho\to 1}\left(D^{\alpha}_{\omega,1-\rho}f\right)(x)=\varphi(x),$$

*где предел понимается как в* $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *так и почти всюду.*

◁ Доказательство теоремы сходимости по норме следует из леммы 8 и леммы 5. Доказательство сходимости почти всюду — как в теореме 6. ▷

Из леммы 6 теоремы 5 вытекает связь между нормами дробных производных по направлению $\omega$ (9) и (10) в пространств $L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

**Теорема 8.** *Пусть* $f(x) = \left(J^{\alpha}_{\omega,\mu}\varphi\right)(x)$, $\varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant \overline{p} < \infty$, $\mu \geqslant 0$, $c := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{p_i} \ln \omega_i$, $c \in \mathbb{R}$, $\mu > c$ *и* $0 < \rho < 1$. *Тогда*

$$\left\| \mathbb{D}^{\alpha}_{\omega,\mu,\ 1-\rho} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant M \left\| \mathbb{D}^{\alpha}_{\omega,\mu} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\|, \quad M = \begin{cases} 1, & c < 0, \\ \left(\frac{\mu}{\mu - c}\right)^{\alpha}, & c > 0. \end{cases} \tag{39}$$

◁ Используя (22), применяя обобщенное неравенство Минковского и учитывая (38), имеем

$$\left\| \mathbb{D}^{\alpha}_{\omega,1-\rho} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} \left| K^{+}_{\alpha,\mu}(t,\rho) \right| \left\| \varphi\left(x \circ \rho^{t \ln \omega}; L_{\overline{p},\overline{\gamma}}\right) \right\| dt \leqslant A(\rho) \left\| \mathbb{D}^{\alpha}_{\omega,\mu} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\|,$$

где $A(\rho)$ — функция (37). В силу леммы 9 вытекает (39). ▷

**Следствие 3.** *Пусть* $f(xt) = (J^{\alpha}_{\omega}\varphi)(x)$, $\varphi \in L_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant \overline{p} < \infty$, $c := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{p_i} \ln \omega_i$, $c \in \mathbb{R}$, $c < 0$ *и* $0 < \rho < 1$. *Тогда*

$$\left\| \mathbb{D}^{\alpha}_{\omega,\ 1-\rho} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\| \leqslant \left\| \mathbb{D}^{\alpha}_{\omega} f; L_{\overline{p},\overline{\gamma}} \right\|.$$

**Благодарность.** Автор выражает благодарность С. М. Умархаджиеву за полезное обсуждение результатов работы.

## Литература


1. *Hadamard J.* Essai sur l'etude des functions données par leur développment de Taylor // J. Math. Pures et Appl.—1892.—Vol. 8, № 4.—P. 101–186.
2. *Benedek A., Panzone R.* The space $L^p$, with mixed norm // Duke Math. J.—1961.—Vol. 28, № 3.—P. 301–324. DOI: 10.1215/s0012-7094-61-02828-9.
3. *Antonic N., Ivec I.* On the Hormander–Mihlin theorem for mixed-norm Lebesgue spaces // J. Math. Anal. Appl.—2016.—Vol. 433, № 1.—P. 176–199. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.07.002.
4. *Stefanov A., Torres R. H.* Calderon–Zygmund operators on mixed Lebesgue spaces and applications to null forms // J. London Math. Soc.—2004.—Vol. 70, № 2.—P. 447–462. DOI: 10.1112/S0024610704005502.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.—М.: Наука, 1975.—480 с.
6. *Marchaud A. P.* Sur les derivees et sur les differences des functions de variables reelles // J. Math. Pure et Appl.—1927.—Vol. 6.—P. 337–426.
7. *Киприянов И. А.* Оператор дробного дифференцирования и степени эллиптических операторов // Докл. АН СССР.—1960.—Т. 131, № 2.—С. 238–241.
8. *Киприянов И. А.* О пространствах дробно-дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1960.—Т. 24, № 6.—С. 865–882.
9. *Кукушкин М. В.* О некоторых качественных свойствах оператора дробного дифференцирования Киприянова // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.—2017.—№ 2.—С. 32–43.
10. *Butzer P. L., Kilbas A. A., Trujillo J. J.* Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals // J. Math. Anal. Appl.—2002.—Vol. 269, issue 1.—P. 1–27. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00049-5.
11. *Kilbas A. A.* Hadamard-type fractional calculus // J. Korean Math. Soc.—2001.—Vol. 38, issue 6.—P. 1191–1204.
12. *Килбас А. А., Титюра А. А.* Дробная производная типа Маршо — Адамара и обращение дробных интегралов типа Адамара // Докл. АН Беларуси.—2006.—Т. 50, № 4.—С. 10–15.
13. *Ma L., Li C.* On Hadamard fractional calculus // World Scientific, Fractals.—2017.—Vol. 25, № 3.—P. 1–13. DOI: 10.1142/S0218348X17500335.
14. *Samko S. G., Yakhshiboyev M. U.* A Chen-type modification Of Hadamard fractional integro-differentiation // Operator Theory: Advances and Applications.—2014.—Vol. 242.—P. 325–339.
15. *Wu Y., Yao K., Zhang X.* The Hadamard fractional calculus of a fractal function // World Scientific. Fractals.—2018.—Vol. 26, № 3.—P. 25–36. DOI: 10.1142/s0218348x18500251.

16. *Yakhshiboev M. U.* Hadamard-type fractional integrals and Marchaud-Hadamard-type fractional derivatives in the spaces with power weight // Uzbek Math. J.—2019.—№ 3.—P. 155–174. DOI: 10.29229/uzmj.2019-3-17.
17. *Самко С. Г., Килбас А. А., Марчиев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
18. *Бердышев А. С., Турметов Б. Х., Кадиркулов Б. Ж.* Некоторые свойства и применения интегродифференциальных операторов типа Адамара — Маршо в классе гармонических функций // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 4.—С. 752–764.
19. *Kilbas A. A., Titioura A. A.* Nonlinear differential equation with Marchaud-Hadamard-type fractional derivative in the weighted space of summable functions // Mathematical Modelling and Analysis.—2007.—Vol. 12, № 3.—P. 343–356. DOI: 10.3846/1392-6292.2007.12.343-356.
20. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.—М.: Мир, 1973.—342 с.

*Статья поступила 18 мая 2020 г.*

Яхшибоев Махмадиёр Умирович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, *доцент*
Узбекистан, 100174, Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 4
E-mail: m.yakhshiboev@gmail.com

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2020, Volume 22, Issue 4, P. 119–134*

# ON HADAMARD AND HADAMARD-TYPE DIRECTIONAL FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION IN WEIGHTED LEBESGUE SPACES WITH MIXED NORM

Yakhshiboev, M. U.[1]

[1] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4 University St., Student's campus, Tashkent 100174, Uzbekistan

E-mail: m.yakhshiboev@gmail.com

**Abstract.** The paper presents definitions and various auxiliary properties of Hadamard and Hadamard-type directional fractional integrals, Marchaud–Hadamard and Marchaud–Hadamard-type directional fractional derivatives. A relation is established between Hadamard and Hadamard-type directional fractional integrals and Marchaud–Hadamard and Marchaud–Hadamard-type directional fractional derivatives with the directional Riemann-Liouville operator. A modification of Hadamard and Hadamard-type directional fractional integrals with the kernel improved at infinity is introduced. The paper deals with a stretch invariant "convolution type" operators in weighted Lebesgue spaces with mixed norm. The boundedness and semigroup properties of Hadamard and Hadamard-type directional fractional integration in weighted Lebesgue spaces with mixed norm are proved. The compositions of Hadamard and Hadamard-type fractional integral and Marchaud–Hadamard and Marchaud–Hadamard-type directional fractional derivative are also considered and integral representation of Marchaud–Hadamard and Marchaud–Hadamard-type truncated directional fractional derivatives is obtained. Inversion theorems are proved for Hadamard and Hadamard-type directional fractional integrals on weighted Lebesgue spaces with mixed norm. A relationship between ordinary and truncated Marchaud–Hadamard and Marchaud–Hadamard-type directional fractional derivatives is also revealed.

**Key words:** Hadamard fractional integral, Hadamard fractional derivative, Lebesgue space with mixed norm, dilation operator, fractional derivative by direction of the Marshau–Hadamard, fractional derivative by direction of the Marshau–Hadamard type.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 26A33, 41A35, 46E30.

**For citation:** *Yakhshiboev, M. U.* On Hadamard and Hadamard-Type Directional Fractional Integro-Differentiation in Weighted Lebesgue Spaces with Mixed Norm, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 119–134 (in Russian). DOI: 10.46698/t4957-0399-9092-y.

## References


1. *Hadamard, J.* Essai sur l'Etude des Functions Données par Leur Développment de Taylor, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 1892, vol. 8, no. 4, pp. 101–186.
2. *Benedek, A. and Panzone, R.* The Space $L^p$, with Mixed Norm, *Duke Mathematical Journal*, 1961, vol. 28, no. 3, pp. 301–324. DOI: 10.1215/s0012-7094-61-02828-9.
3. *Antonic, N. and Ivec, I.* On the Hormander–Mihlin Theorem for Mixed-norm Lebesgue Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, vol. 433, no. 1, pp. 176–199. DOI: 10.1112/S0024610704005502.
4. *Stefanov, A. and Torres, R. H.* Calderon–Zygmund Operators on Mixed Lebesgue Spaces and Applications to Null Forms, *Journal of the London Mathematical Society*, 2004, vol. 70, no. 2, pp. 447–462. DOI.org/10.1112/S0024610704005502.
5. *Besov, O. V., Il'in, V. P. and Nikol'skii, S. M. Integral'nye predstavleniya funkcij i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions, and Embedding Theorems], Moscow, Nauka, 1975, 480 p. (in Russian).
6. *Marchaud A. P.* Sur les Derivees et sur les Differences des Functions de Variables Reelles, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 1927, vol. 6, pp. 337–426.
7. *Kipriyanov, I. A.* The Operator of Fractional Differentiation and the Powers of Elliptic Operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1960, vol. 131, no. 2, pp. 238–241 (in Russian).
8. *Kipriyanov, I. A.* On Spaces of Fractional-Differentiable Functions, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1960, vol. 24, no. 6, pp. 865–882 (in Russian).
9. *Kukushkin, M. V.* On some Qualitative Properties of the Operator of Fractional Differentiation in Kipriyanov Sense, *Vestnik SamU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2017, no. 2, pp. 32–43 (in Russian).
10. *Butzer, P. L., Kilbas, A. A. and Trujillo, J. J.* Fractional Calculus in the Mellin Setting and Hadamard-Type Fractional Integrals, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, vol. 269, no. 1, pp. 1–27. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00049-5.
11. *Kilbas, A. A.* Hadamard-type Fractional Calculus, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 2001, vol. 38, no. 6, pp. 1191–1204.
12. *Kilbas, A. A. and Titioura, A. A.* A Marchaud–Hadamard-Type Fractional Derivatives and Inversion of Hadamard-Type Fractional Integrals, *Report of the Academician of Sciences of Belarus*, 2006, vol. 50, no. 4, pp. 10–15 (in Russian).
13. *Ma, L. and Li, C.* On Hadamard Fractional Calculus, *World Scientific, Fractals*, 2017, vol. 25, no. 3, pp. 1–13. DOI: 10.1142/S0218348X17500335.
14. *Samko, S. G. and Yakhshiboyev, M. U.* A Chen-Type Modification of Hadamard Fractional Integro-Differentiation, *Operator Theory: Advances and Applications*, 2014, vol. 242, pp. 325–339.
15. *Wu, Y., Yao, K. and Zhang, X.* The Hadamard Fractional Calculus of a Fractal Function, *World Scientific, Fractals*, 2018, vol. 26, no. 3, pp. 25–36. DOI: 10.1142/s0218348x18500251.
16. *Yakhshiboev, M. U.* Hadamard-Type Fractional Integrals and Marchaud–Hadamard-Type Fractional Derivatives in the Spaces With Power Weight, *Uzbek Mathematical Journal*, 2019, no. 3, pp. 155–174. DOI: 10.29229/uzmj.2019-3-17.
17. *Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives and some of their Applications], Minsk, Nauka and Tekhnika, 1987, 688 p. (in Russian).
18. *Berdyshev, A. S., Turmetov, B. Kh. and Kadirkulov, B. J.* Some Properties and Applications of the Integrodifferential Operators of Hadamard–Marchaud Type in the Class of Harmonic Functions, *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 4, pp. 600–612. DOI: 10.1134/S0037446612040039.
19. *Kilbas, A. A. and Titioura, A. A.* Nonlinear Differential Equation with Marchaud–Hadamard-Type Fractional Derivative in the Weighted Space of Summable Functions, *Mathematical Modelling and Analysis*, 2007, vol. 12, no. 3, pp. 343–356. DOI: 10.3846/1392-6292.2007.12.343-356.
20. *Stein, E. M. Singulyarnye integraly i differencial'nye svojstva funkcij* [Singular Integrals and Differentialiability Properties of Functions], Moscow, Mir, 1973, 342 p. (in Russian).


*Received May 18, 2020*

Makhmadiyor U. Yakhshiboev
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4 University St., Student's campus, Tashkent 100174, Uzbekistan,
*Associate Professor*
E-mail: `m.yakhshiboev@gmail.com`