Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 1, С. 27–36

УДК 517.5
DOI 10.23671/VNC.2019.1.27732

О НАИЛУЧШЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

М. Р. Лангаршоев[1]

[1] Таджикский национальный университет,
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17

E-mail: `mukhtor77@mail.ru`

Аннотация. Задача нахождения точной оценки величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, через усредненную величину модуля непрерывности и модуля гладкости самой функции и ее соответствующих производных является одной из интересных задач теории приближений. В свое время Н. П. Корнейчук рассмотрел эту задачу для класса 2π-периодических функций $f(x)$ с выпуклым модулем непрерывности $\omega(f', t)$ в метрике пространства непрерывных функций $C[0, 2\pi]$. Аналогичную задачу без предположения выпуклости модуля непрерывности граничных значений аналитических в круге функций в пространстве Харди H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассмотрел Л. В. Тайков. Продолжая исследование указанных авторов, в пространствах Харди H_p, $p \geqslant 1$, М. Ш. Шабозов и М. М. Миркалонова доказали новые точные неравенства, в которых наилучшее полиномиальное приближение аналитических функций оценивается через суммы усредненных значений модулей непрерывности самой функции и некоторой ее производной. В настоящей работе получены точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями аналитических в единичном круге функций алгебраическими комплексными полиномами и модулями непрерывности и гладкости самой функции и ее второй производной в весовом пространстве Бергмана. Вычислены точные значения бернштейновских и колмогоровских n-поперечников классов функций, задаваемых в весовом пространстве Бергмана. Полученные в последней теоремы результаты являются обобщением результата Л. В. Тайкова, полученного для классов дифференцируемых периодических функций, на случай аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль непрерывности, модуль гладкости, полином, n-поперечник.

Mathematical Subject Classification (2010): 30E10.

Образец цитирования: *Лангаршоев М. Р.* О наилучшем полиномиальном приближении функций в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 27–36. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27732.

1. Введение

В настоящее время достигнут значительный прогресс в решении задач нахождения точных значений наилучших полиномиальных приближений аналитических в единичном круге функций и вычисления точных значений n-поперечников классов аналитических функций в различных функциональных пространствах (см., например, [1–12] и приведенную там литературу). Представленные в настоящей работе результаты продолжают и развивают исследования в указанном направлении.

© 2019 Лангаршоев М. Р.

Пусть $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел и $\mathbb{Z}_+$ — множество целых положительных чисел.

Известно, что аналитическая в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = \rho e^{it},\ 0 \leqslant \rho < 1,$$

принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, с конечной нормой [8]

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(U)} \gamma(|z|)|f(z)|^q\, d\sigma\right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{1}$$

где $\gamma(|z|)$ — положительная интегрируемая весовая функция, $d\sigma$ — элемент площади, и интеграл понимается в смысле Лебега.

Очевидно, что норму (1) можно записать в виде

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho)\left|f\left(\rho e^{it}\right)\right|^q d\rho\, dt\right)^{1/q} < \infty.$$

Через $f_a^{(r)}(z) = \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r$ обозначим производную r-го порядка функции $f(z) = f(\rho e^{it})$ по аргументу t. При этом

$$f_a'(z) = f'(z) \cdot zi, \quad f_a^{(r)}(z) = \left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a', \quad r \geqslant 2.$$

Величины

$$\omega\big(f_a^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} = \sup_{|h|\leqslant t} \left\|f_a^{(r)}(\cdot + h) - f_a^{(r)}(\cdot)\right\|_{B_{q,\gamma}},$$

$$\omega_2\big(f_a^{(r)}, 2t\big)_{B_{q,\gamma}} = \sup_{|h|\leqslant t} \left\|f_a^{(r)}(\cdot + h) - 2f_a^{(r)}(\cdot) + f_a^{(r)}(\cdot - h)\right\|_{B_{q,\gamma}}$$

соответственно назовем *интегральным модулем непрерывности* и *интегральным модулем гладкости* функции $f_a^{(r)}(z)$ в пространстве $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, поскольку функции $\omega\big(f_a^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}}$ и $\omega_2\big(f_a^{(r)}, 2t\big)_{B_{q,\gamma}}$ обладают всеми свойствами модуля непрерывности и модуля гладкости (см., например, [13]).

Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, символом

$$\mathscr{P}_n = \left\{p_n(z) :\ p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right\}$$

обозначим множество алгебраических комплексных полиномов степени не выше n.

Величину

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} :\ p_{n-1}(z) \in \mathscr{P}_{n-1}\right\}$$

назовем *наилучшим приближением* функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, множеством $\mathscr{P}_{n-1}$.

Через $B_{q,\gamma,R}$ ($1 \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < R \leqslant 1$) обозначим пространство Бергмана $B_{q,\gamma}$ аналитических в круге $|z| \leqslant R$ функций $f(z)$, для которых

$$\|f(\cdot)\|_{B_{q,\gamma,R}} \stackrel{\text{def}}{=} \|f(R\cdot)\|_{B_{q,\gamma}} < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 0 < R \leqslant 1.$$

В работе [11] доказано, что для произвольной функции $f(z) \in B_{q,\gamma,R}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < R \leqslant 1$, у которой производная $f_a^{(r)}(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, при любых $r, n \in \mathbb{N}$ имеют место точные неравенства

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leqslant R^n n^{-r} E_n\big(f_a^{(r)}\big)_{B_{q,\gamma}}, \tag{2}$$

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leqslant \frac{R^n}{4n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/n} \omega\big(f_a^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} dt. \tag{3}$$

В настоящей работе, исходя из неравенства (2) и (3), мы получим точные оценки величины наилучшего приближения функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, через усредненные значения модуля непрерывности и модуля гладкости самой функции и ее второй производной $f_a''(t)$, а также вычислим точные значения некоторых n-поперечников классов аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана. Отметим, что неравенство (3) является распространением результата Н. П. Корнейчука [14] на случай аналитических в единичном круге функций принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Приведем необходимые для дальнейшего определения и обозначения. Пусть X — банахово пространство; S — единичный шар в X; $\mathfrak{M}$ — некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X; $\Lambda_n \subset X$ — n-мерное подпространство X. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma}) = \sup\big\{ \sup\{\varepsilon > 0 :\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} :\ \Lambda_{n+1} \subset B_{q,\gamma}\big\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma}) = \inf\big\{ \sup\{\inf\{\|f - g\|_{B_{q,\gamma}} :\ g \in \Lambda_n\} :\ f \in \mathfrak{M}\} :\ \Lambda_n \subset B_{q,\gamma}\big\}$$

называются соответственно *бернштейновским* и *колмогоровским n-поперечниками*. Указанные поперечники удовлетворяют неравенству (см. [16])

$$b_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma}) \leqslant d_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma}). \tag{4}$$

Пусть $\Phi(u)$ — положительная неубывающая функция, определенная для $u \geqslant 0$ и удовлетворяющая условию

$$\lim\{\Phi(u) :\ u \to 0+\} = \Phi(0) = 0.$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций, принадлежащий пространству $B_{q,\gamma}$, то через

$$E_n(\mathfrak{M})_{B_{q,\gamma}} := \sup\big\{E_n(f)_{B_{q,\gamma}} :\ f \in \mathfrak{M}\big\}$$

обозначим отклонение множества $\mathfrak{M} \subset B_{q,\gamma}$ от множества $\mathscr{P}_n$.

Положим также

$$(\sin t)_* = \begin{cases} \sin t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}; \\ 1, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Для любых $r \in \mathbb{Z}_+$ и $n \in \mathbb{N}$ определим классы функций

$$W_a^{(r)}(\Phi) = \left\{ f(z) \in B_{q,\gamma} :\ \int\limits_0^{\pi/n} \omega\big(f_a^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} dt \leqslant \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}.$$

2. Основной результат

Теорема 1. *Для произвольной функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, и любого заданного $h \in (0, \pi/(2n)]$ имеет место точное неравенство*

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{2n}\left\{\int\limits_0^h \omega\left(f_a'', 2\tau\right)_{B_{q,\gamma}} \left(1 - \sin\frac{\pi}{2h}\tau\right) d\tau \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 \int\limits_0^h \omega(f, 2\tau)_{B_{q,\gamma}} \sin\frac{\pi}{2h}\tau \; d\tau\right\} \qquad (5)$$

и знак равенства в неравенстве (5) реализует функция $f_0(z) = z^n \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

$\lhd$ Введем в рассмотрение оператор

$$\mathscr{F}(f_a', t) = \frac{\pi}{4h}\int\limits_0^h \left(f_a'(t+\tau) + f_a'(t-\tau)\right) \cos\frac{\pi}{2h}\tau \, d\tau.$$

Используя неравенство (2) при $R = r = 1$, запишем оценку

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{n} E_n(f_a')_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{n}\left(E_n\left(f_a' - \mathscr{F}\left(f_a'\right)\right)_{B_{q,\gamma}} + E_n\left(\mathscr{F}\left(f_a'\right)\right)_{B_{q,\gamma}}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\left(\left\|f_a' - \mathscr{F}(f_a')\right\|_{B_{q,\gamma}} + \left\|\mathscr{F}(f_a')\right\|_{B_{q,\gamma}}\right). \qquad (6)$$

Так как

$$f_a'(t) - \mathscr{F}(f_a', t) = \frac{\pi}{4h}\int\limits_0^h \left(-f_a'(t+\tau) + 2f_a'(t) - f_a'(t-\tau)\right) \cos\frac{\pi}{2h}\tau \, d\tau, \qquad (7)$$

то, интегрируя правую часть равенства (7) по частям и применяя обобщенное неравенство Минковского (см., например, [15])

$$\left\|\int\limits_a^b f(\cdot, t)\, dt\right\|_p \leqslant \int\limits_a^b \|f(\cdot, t)\|_p \, dt, \quad 1 \leqslant p < \infty, \qquad (8)$$

будем иметь

$$\left\|f_a'(\cdot) - \mathscr{F}(f_a', \cdot)\right\|_{B_{q,\gamma}} = \frac{1}{2}\left\|\int\limits_0^h \left(f_a''(t+\tau) - f_a''(t-\tau)\right)\left(1 - \sin\frac{\pi}{2h}\tau\right) d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}}$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^h \left\|f_a''(\cdot+\tau) - f_a''(\cdot-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}} \left(1 - \sin\frac{\pi}{2h}\tau\right) d\tau. \qquad (9)$$

Аналогичным образом методом интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{F}(f_a')\right\|_{B_{q,\gamma}} &= \left\|\frac{\pi}{2h}\int\limits_0^h \big(f_a'(t+\tau)-f_a'(t-\tau)\big)\cos\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}}\\ &= \left\|\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \big(f(t+\tau)-f(t-\tau)\big)\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \|f(t+\tau)-f(t-\tau)\|_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau.\end{aligned} \tag{10}$$

Из неравенства (6) с учетом неравенств (9) и (10) и определения модуля непрерывности следует, что

$$\begin{aligned}E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{2n}\Bigg\{&\int\limits_0^h \left\|f_a''(\cdot+\tau)-f_a''(\cdot-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}}\Big(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\Big)\,d\tau\\ &+\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \|f(\cdot+\tau)-f(\cdot-\tau)\|_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\Bigg\}\\ \leqslant \frac{1}{2n}\Bigg\{&\int\limits_0^h \omega\left(f_a'';2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\Big(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\Big)\,d\tau+\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \omega\left(f;2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\Bigg\},\end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1. Знак равенства для функции $f_0(z)=z^n$ в соотношении (5) проверяется непосредственным вычислением. $\rhd$

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *справедливо неравенство*

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{2n}\Bigg\{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a'';2\tau)_{B_{q,\gamma}}\,(1-\sin n\tau)\,d\tau+n^2\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(f;2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\sin n\tau\,d\tau\Bigg\}.$$

Теорема 2. *Для произвольной* $f(z)\in B_{q,\gamma}$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, *и любого* $h\in(0,\pi/(2n))$, $n\in\mathbb{N}$, *справедливо точное неравенство*

$$\begin{aligned}E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{\pi}{2hn^2}\cdot\frac{1}{\pi-2}\Bigg\{&\int\limits_0^h \omega_2\left(f_a'';2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\Big(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\Big)\,d\tau\\ &+\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \omega_2\left(f;2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\Bigg\}\end{aligned} \tag{11}$$

и знак равенства в (11) *реализует функция* $f_0(z)=z^n$.

$\lhd$ Введем в рассмотрение оператор

$$\mathscr{F}(f_a'',t)=\frac{\pi}{2h}\cdot\frac{1}{\pi-2}\int\limits_0^h \big(f_a''(t+\tau)+f_a''(t-\tau)\big)\Big(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\Big)\,d\tau.$$

Из неравенства (2) при $R=1$ и $r=2$ запишем следующее соотношение:

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{n^2}\left\|f''_a\right\|_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{n^2}\left(\left\|f''_a - \mathscr{F}(f''_a)\right\|_{B_{q,\gamma}} + \left\|\mathscr{F}(f''_a)\right\|_{B_{q,\gamma}}\right). \tag{12}$$

Используя вышеприведенное рассуждение, оценим каждое слагаемое в правой части (12). С этой целью разность $f''_a(t) - \mathscr{F}(f''_a, t)$ представим в следующем виде:

$$f''_a - \mathscr{F}(f''_a) = -\frac{\pi}{2h(\pi-2)}\int\limits_0^h \left(f''_a(t+\tau) - 2f''_a(t) + f''_a(t-\tau)\right)\left(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau. \tag{13}$$

Оценим равенство (13) по норме

$$\left\|f''_a - \mathscr{F}(f''_a)\right\|_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{\pi}{2h(\pi-2)}\int\limits_0^h \left\|f''_a(t+\tau) - 2f''_a(t) + f''_a(t-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}}\left(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau. \tag{14}$$

Переходим к оценке второго слагаемого в неравенстве (12). Дважды выполняя интегрирование по частям и используя неравенство (8), получаем

$$\begin{aligned}
\left\|\mathscr{F}(f''_a)\right\|_{B_{q,\gamma}} &= \frac{\pi}{2h}\cdot\frac{1}{\pi-2}\left\|\int\limits_0^h \left(f''_a(\cdot+\tau) - 2f''_a(\cdot) + f''_a(\cdot-\tau)\right)\left(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}}\\
&= \left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\cdot\frac{1}{\pi-2}\left\|\int\limits_0^h \left(f'_a(\cdot+\tau) - f'_a(\cdot-\tau)\right)\cos\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}}\\
&= \left(\frac{\pi}{2h}\right)^3\cdot\frac{1}{\pi-2}\left\|\int\limits_0^h \left(f(\cdot+\tau) - 2f(\cdot) + f(\cdot-\tau)\right)\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}}\\
&\leqslant \left(\frac{\pi}{2h}\right)^3\cdot\frac{1}{\pi-2}\int\limits_0^h \left\|f(\cdot+\tau) - 2f(\cdot) + f(\cdot-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau.
\end{aligned} \tag{15}$$

Складывая неравенства (14) и (15), с учетом (12) и определения модуля гладкости функции, получаем

$$\begin{aligned}
E_n(f)_{B_{q,\gamma}} &\leqslant \frac{1}{n^2}\left\|f''_a\right\|_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{\pi}{2hn^2}\cdot\frac{1}{\pi-2}\left\{\int\limits_0^h \left\|f''_a(\cdot+\tau) - 2f''_a(\cdot) + f''_a(\cdot-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}}\right.\\
&\left.\times\left(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau + \left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \left\|f(\cdot+\tau) - 2f(\cdot) + f(\cdot-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\right\}\\
&\leqslant \frac{\pi}{2hn^2}\cdot\frac{1}{\pi-2}\left\{\int\limits_0^h \omega_2\left(f''_a; 2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\left(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau + \left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \omega_2\left(f; 2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\right\}.
\end{aligned}$$

Непосредственным вычислением можно показать, что для функции $f_0(z) = z^n \in B_{q,\gamma}$ неравенство (11) обращается в равенство. $\rhd$

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 справедливо неравенство*

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{(\pi-2)n}\left\{ \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2\left(f''_a; 2\tau\right)_{B_{q,\gamma}} (1-\sin n\tau)\, d\tau \right.$$
$$\left. + n^2 \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2\left(f; 2\tau\right)_{B_{q,\gamma}} \sin n\tau \, d\tau \right\},$$

в котором равенство достигается на функции $f_0(z) = z^n \in B_{q,\gamma}$.

Теорема 3. *Пусть функция $\Phi(u)$ для любых $\lambda \in [0,1]$, $x \in [0,\pi]$ удовлетворяет неравенству*

$$2\sin^2\frac{\pi}{4}\lambda \leqslant \frac{\Phi(\lambda x)}{\Phi(x)} \leqslant \frac{\lambda}{\pi/2 - (\pi/2-1)\lambda}. \tag{16}$$

Тогда справедливы равенства

$$b_n\bigl(W_a^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma,R}\bigr) = d_n\bigl(W_a^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma,R}\bigr) = \frac{R^n}{4n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{17}$$

◁ Соотношение (17) достаточно доказать для случая $R = 1$. В силу неравенства

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leqslant R^n E_n(f)_{B_{q,\gamma}}$$

и определения класса $W_a^{(r)}(\Phi)$, имеем

$$d_n\bigl(W_n^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma}\bigr) \leqslant E_n\bigl(W_n^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma}\bigr) \leqslant \frac{1}{4n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{18}$$

и оценка сверху для колмогоровского n-поперечника получена. Для получения оценки снизу используем рассуждения работы Л. В. Тайкова [2].

Введем в рассмотрение $(n+1)$-мерную сферу полиномов

$$S_{n+1} = \left\{ p_n(z) : \ \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{4n^{r-1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и докажем, что $S_{n+1} \subset W_a^{(r)}(\Phi)$. Если $m \leqslant n$, то из неравенства

$$\omega\bigl(p_{n,a}^{(r)}, t\bigr)_{B_{q,\gamma}} dt \leqslant 2n^r \left(\sin\frac{nt}{2}\right)_* \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \tag{19}$$

получаем

$$\int\limits_0^{\pi/m} \omega\bigl(p_{n,a}^{(r)}, t\bigr)_{B_{q,\gamma}} dt \leqslant 2n^r \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \int\limits_0^{\pi/m} \sin\frac{nt}{2}\, dt$$
$$= 4n^{r-1}\|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \left(1 - \cos\frac{\pi n}{2m}\right) = 2\sin^2\frac{\pi n}{4m}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{20}$$

Полагая $\pi/m = \lambda x$, $\pi/n = x$, из (20), согласно левой части неравенства (16), будем иметь

$$\int\limits_0^{\pi/m} \omega\bigl(p_{n,a}^{(r)}, t\bigr)_{B_{q,\gamma}} dt \leqslant 2\sin^2\frac{\pi n}{4m} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\sin^2\frac{\pi\lambda}{4}\Phi(x) \leqslant \Phi(\lambda x) = \Phi\left(\frac{\pi}{m}\right). \tag{21}$$

Пусть теперь $m > n$. Тогда, вновь используя неравенство (19), получаем

$$\int\limits_0^{\pi/m} \omega\big(p_{n,a}^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} dt = \int\limits_0^{\pi/n} \omega\big(p_{n,a}^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} dt + \int\limits_{\pi/n}^{\pi/m} \omega\big(p_{n,a}^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} dt$$
$$\leqslant 4n^{r-1}\|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \cdot \Big(1 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{m} - 1\right)\Big) \leqslant \Big(1 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{m} - 1\right)\Big) \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant \Phi\left(\frac{\pi}{m}\right). \tag{22}$$

Из неравенств (21) и (22) следует, что $S_{n+1} \subset W_n^{(r)}(\Phi)$. Поэтому, согласно известной теореме В. М. Тихомирова [15], получаем

$$b_n\big(W_a^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma}\big) \geqslant b_n\left(S_{n+1}, B_{q,\gamma}\right) \geqslant \frac{1}{4n^{r-1}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{23}$$

Сравнивая неравенства (18) и (23), с учетом соотношения (4) приходим к равенству (17), чем и завершаем доказательство теоремы 3. ▷

Замечание. В [2] доказано, что условию (16) удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(u) = u^{\pi/2}$.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные советы и замечания, использованные в работе.

Литература

1. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, № 3.—С. 81–120.
2. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки.—1977.—Т. 22, № 2.—С. 285–294.
3. *Двейрин М. З.* Задачи наилучшего приближения классов функций, аналитических в единичном круге // Теория приближения функций. Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций (Калуга, 24–28 июля 1975 г.).—М: Наука, 1977.—С. 129–131.
4. *Айнуллоев Н., Тайков Л. В.* Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Мат. заметки.—1986.—Т. 40, № 3.—С. 341–351.
5. *Фарков Ю. А.* Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успех. мат. наук.—1990.—Т. 45, № 5.—С. 197–198.
6. *Fisher S. D., Stessin M. I.* The n-width of the unit ball of H^q // J. Approx. Theory.—1991.—Vol. 67, № 3.—P. 347–356. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90009-y.
7. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Укр. мат. журн.—2004.—Т. 56.—Вып. 9.—С. 1155–1171.
8. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Докл. РАН.—2007.—Т. 412, № 4.—С. 466–469.
9. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* О наилучших линейных методах приближения функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant 1$ // Мат. заметки.—2009.—Т. 85, № 3.—С. 323–329. DOI: 10.4213/mzm6633.
10. *Шабозов М. Ш., Миркалонова М. М.* Наилучшее полиномиальные приближение функций в пространстве Харди H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ // Изв. АН Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук.—2009.—№ 2(135).—С. 19–31.
11. *Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р.* Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук.—2009.—№ 3 (136).—С. 7–23.
12. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Мат. сб.—2010.—Т. 201, № 8.—С. 3–22. DOI: 10.4213/sm7505.
13. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.—М: Наука, 1977.—511 с.

14. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций // Докл. АН СССР.—1961.—Т. 141, № 2.—С. 304–307.
15. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.—М: Наука, 1976.—320 с.
16. *Pinkus A.* n-Width in Approximation Theory.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—292 p.

Статья поступила 14 июля 2017 г.

Лангаршоев Мухтор Рамазонович
Таджикский национальный университет,
доцент кафедры мат. анализа и теории функций
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: mukhtor77@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 1, P. 27–36

ON THE BEST POLYNOMIAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN THE WEIGHT BERGMAN SPACE

Langarshoev, M. R.[1]

[1] Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan
E-mail: mukhtor77@mail.ru

Abstract. The problem of finding an accurate estimate of the best approximation value $E_{n-1}(f)_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, using the average value of the modulus of continuity and the modulus of smoothness of the function and its corresponding derivatives is one of the important and interesting problems in the approximation theory. N. P. Korneychuk considered this problem for classes of 2π periodic functions with a convex modulus of continuity in the metric space of continuous functions $C[0, 2\pi]$. A similar problem without assuming convexity of the modulus of continuity was considered L. V. Taikov in the Hardy space H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Continuing this study of the Hardy spaces H_p, $p \geqslant 1$, M. Sh. Shabozov and M. M. Mirkalonova proved new sharp inequalities in which the best approximation of analytic functions is estimated by the sums of averaged values of the modules of continuity of the function and some of its derivatives. In this paper, we give some sharp inequalities between the best polynomial approximations of analytic in the unit disk functions by algebraic complex polynomials and moduli of continuity and smoothness of a function itself and its second derivative in weighted Bergman spaces. The exact values of Bernstein and Kolmogorov n-widths of classes of functions in weighted Bergman spaces are calculated. The last theorem of this work generalizes a result by L. V. Taikov obtained for classes of differentiable periodic functions, to the case of functions analytic in the unit circle belonging to the space $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Key words: best approximation, modulus of continuity, modulus of smoothness, polynomial, n-widths.

Mathematical Subject Classification (2000): 30E10.

For citation: *Langarshoev, M. R.* On the Best Polynomial Approximation of Functions in the Weight Bergman Space, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 27–36 (in Russian).
DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27732.

References

1. *Tikhomirov, V. M.* Diameters of Sets in Function Spaces and the Theory of Best Approximations, *Russian Math. Surveys*, 1960, vol. 15, no. 3, pp. 75–111. DOI: 10.1070/rm1960v015n03abeh004093.
2. *Taikov, L. V.* Diameters of Certain Classes of Analytic Functions, *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 650–656. DOI: 10.1007/bf01780976.

3. *Dvejrin, M. Z.* Problems of the Best Approximation of Classes of Functions Analytic in the Unit Circle, *Teoriya priblizheniya funkcij. Tr. Mezhdunar. konf. po teorii priblizheniya funktsij (Kaluga, 1975)* [Approximation Theory Functions], Moscow, Nauka, 1977, pp. 129–132 (in Russian).
4. *Ainulloev, N. and Taikov, L. V.* Best Approximation in the Sense of Kolmogorov of Classes of Functions Analytic in the Unit Disc, *Math. Notes*, 1986, vol. 40, no. 3, pp. 699–705. DOI: 10.1007/bf01142473.
5. *Farkov, Yu. A.* Widths of Hardy Classes and Bergman Classes on the Ball in $\mathbb{C}^n$, *Russian Math. Surveys*, 1990, vol. 45, no. 5, pp. 229–231. DOI: 10.1070/rm1990v045n05abeh002677.
6. *Fisher, S. D. and Stessin, M. I.* The n-Width of the Unit Ball of H^q, *J. Approx. Theory*, 1991, vol. 67, no. 3, pp. 347–356. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90009-y.
7. *Vakarchuk, S. B.* On some Extremal Problems of Approximation Theory in the Complex Plane, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2004, vol. 56, no. 9, pp. 1371–1390. DOI: 10.1007/s11253-005-0122-x.
8. *Shabozov, M. Sh. and Shabozov, O. Sh.* About the Best Approximation of Some Classes of Analytic Functions in Weighted Bergman Spaces $B_{2,\gamma}$, *Doklady Akademii Nauk* [Dokl. Akad. Nauk], 2007, vol. 412, no. 4, pp. 466–469 (in Russian).
9. *Vakarchuk, S. B. and Zabutnaya, V. I.* Best Linear Approximation Methods for Functions of Taikov Classes in the Hardy Spaces $H_{q,\rho}$, $q \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant 1$, *Math. Notes*, 2009, vol. 85, no. 3–4, pp. 322–327. DOI: 10.1134/s000143460903002x.
10. *Shabozov, M. Sh. and Mirkalonova, M. M.* The best polynomial approximation of functions in the space of Hardy H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *Izvestiya Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan. Otdelenie fiz.-mat., him., geol. i tekh. nauk* [Proceedings of the Akademii of Sciences Republik of Tajikistan. Department of Phys. Math. Chemical., Geol. and Tech. of Science], 2009, no. 2(135), pp. 19–31 (in Russian).
11. *Shabozov, M. Sh. and Langarshoev, M. R.* The Best Approximation Some Classes of Functions in the Weighted Bergman space, *Izvestiya Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan. Otdelenie fiz.-mat., him., geol. i tekh. nauk* [Proceedings of the Academy of Sciences Republic of Tajikistan. Department of Phys. Math. Chemical., Geol. and Tech. of Science], 2009, no. 3 (136), pp. 7–23 (in Russian).
12. *Vakarchuk, S. B. and Shabozov, M. Sh.* The Widths of Classes of Analytic Functions in a Disc, *Sbornik: Mathematics*, 2010, vol. 201, no. 8, pp. 1091–1110. DOI: 10.1070/sm2010v201n08abeh004104.
13. *Dzyadyk, V. K. Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funkcij polinomami* [Introduction into the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials], Moscow, Nauka, 1977, 511 p. (in Russian).
14. *Korneichuk N. P.* Best Uniform Approximation of Differentiable Functions, *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Dokl. Akad. Nauk SSSR], 1961, vol. 141, no. 2, 304–307 (in Russian).
15. *Korneychuk, N. P. Ekstremalnye zadachi teorii priblizheniya* [Extremum Problems of Approximation Theory], Moscow, Nauka, 1976, 320 p. (in Russian).
16. *Pinkus A. n-Width in Approximation Theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1985, 292 p.

Received Jule 14, 2017

Mukhtor R. Langarshoev
Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan,
Associate Professor of the Department of Math. Analysis and Theory of Functions
E-mail: mukhtor77@mail.ru