Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 1, С. 5–15

УДК 517.9
DOI 10.23671/VNC.2019.1.27645

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ ОБРАТИМОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КУСОЧНО-ЛЯПУНОВСКОМ КОНТУРЕ

А. В. Абрамян[1], **В. С. Пилиди**[1]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: annaabr@yandex.ru, pilidi@sfedu.ru

Аннотация. Работа продолжает исследования в области критериев применимости к полным сингулярным интегральным операторам приближенных методов по семействам сильно аппроксимирующих их операторов с «вырезанной» особенностью ядра Коши. Рассматривается случай полного сингулярного интегрального оператора с непрерывными коэффициентами, действующего в L_p-пространстве на замкнутом контуре. Предполагается, что контур является кусочно-ляпуновским и не имеет точек возврата. Задача сводится к получению критерия обратимости элемента некоторой банаховой алгебры. Исследование проводится с помощью локального принципа Гохберга — Крупника. Основной акцент сделан на локальном анализе в угловых точках. Для этого используется аналог предложенного И. Б. Симоненко метода квазиэквивалентных операторов. Критерий формулируется в терминах обратимости некоторых интегральных операторов, сопоставляемых угловым точкам и действующих в L_p-пространстве на вещественной оси, и условиях сильной эллиптичности в точках контура, в которых выполняется условие Ляпунова.

Ключевые слова: условие Ляпунова, кусочно-ляпуновский контур, полный сингулярный интегральный оператор, сходимость приближенного метода, равномерная обратимость, локальный принцип.

Mathematical Subject Classification (2010): 45P05, 45E05, 45L05, 47G10.

Образец цитирования: *Абрамян А. В., Пилиди В. С.* Критерий равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов на кусочно-ляпуновском контуре // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 5–15. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27645.

1. Введение

Вопросам применимости к операторам типа сингулярных и операторам близких к ним классов приближенных методов посвящены многочисленные исследования. Упомянем здесь, например, работы [1, 2] и монографию [3].

Настоящее исследование продолжает цикл работ [4–8], посвященных обоснованию метода вырезания особенности для операторов типа сингулярных в пространствах суммируемых функций. Рассматривается вопрос о применимости к полному сингулярному интегральному оператору с непрерывными коэффициентами на кусочно-ляпуновском контуре приближенного метода по семейству операторов с «вырезанной» особенностью ядра Коши.

2. Предварительные сведения

Пусть $\{A_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ — семейство линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве X, A — линейный непрерывный оператор, действующий в этом пространстве. Запись $s\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon = A$ означает, что при $\varepsilon \to +0$ операторы A_ε сходятся к оператору A в сильной операторной топологии. Если подобное соотношение связывает, кроме того, и сопряженные операторы, будем отмечать это записью $s^*\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon = A$. Указанное выше семейство называется *равномерно обратимым,* если все эти операторы обратимы и $\sup\{\|A_\varepsilon^{-1}\| : \varepsilon > 0\} < \infty$. Будем говорить, что семейство операторов $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *асимптотически равномерно обратимо,* если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что семейство операторов $\{A_\varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}$ равномерно обратимо.

Предположим, что $s\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon = A$ и оператор A обратим. Будем говорить, что *к оператору A применим приближенный метод по семейству $\{A_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to +0$*, если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что все операторы семейства обратимы при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $s\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon^{-1} = A^{-1}$.

Приведенное определение аналогично определению сходимости проекционного метода [9, с. 90].

Справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом известного факта теории проекционных методов [9, с. 91, теорема 2.1].

Предложение 1. *Предположим, что $s\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon = A$ и оператор A обратим. К оператору A применим приближенный метод по семейству $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ при $\varepsilon \to +0$ в том и только том случае, когда это семейство асимптотически равномерно обратимо.*

Приведенное утверждение позволяет использовать методы теории банаховых алгебр к решению задачи о сходимости приближенных методов рассматриваемого вида.

Перейдем к рассмотрению класса анализируемых операторов. Пусть Γ — простая замкнутая ориентированная кусочно-ляпуновская кривая. Более точно, предполагается, что существует такое конечное множество точек $Z_\Gamma \subset \Gamma$, что каждая дуга, лежащая на кривой Γ, имеющая концами две точки из Z_Γ и не содержащая других точек этого множества, удовлетворяет условию Ляпунова, включая свои концы.

Будем предполагать, что для каждой точки множества Z_Γ лучи, являющиеся односторонними касательными в этой точке, не совпадают (т. е. считаем, что кривая не содержит точек возврата). Отметим, что в рассматриваемом случае точка, в которой нарушается условие Ляпунова, обязательно является угловой. Действительно, предположим, что лучи, являющиеся односторонними касательными в некоторой точке $t_0 \in \Gamma$, лежат на одной прямой и направлены в разные стороны. Справедливо следующее утверждение [10, с. 21]. Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и для некоторой точки $c \in (a,b)$ сужения этой функции на отрезки $[a,c]$ и $[c,b]$ удовлетворяют условию Гёльдера, то функция f удовлетворяет условию Гёльдера на всем отрезке $[a,b]$. Применяя это утверждение к функции $\theta(t)$, углу наклона касательной в точке $t \in \Gamma$, получаем, что она удовлетворяет условию Гёльдера в некоторой окрестности рассматриваемой точки t_0.

Рассмотрим действующий в пространстве $L_p(\Gamma)$ (здесь и всюду ниже, если не оговорено противное, предполагается, что $1 < p < \infty$) оператор сингулярного интегрирования

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Оператор S ограничен в пространстве $L_p(\Gamma)$ [11].

Для $\varepsilon > 0$ и $t \in \Gamma$ обозначим $\Gamma_\varepsilon(t) = \{\tau \in \Gamma : |t-\tau| \geqslant \varepsilon\}$. Введем семейство действующих в пространстве $L_p(\Gamma)$ интегральных операторов с ограниченными ядрами

$$(S_\varepsilon f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon(t)} \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad t \in \Gamma,\ \varepsilon > 0.$$

Операторы S_ε ограничены и имеет место равенство $s^*\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} S_\varepsilon = S$.

Как обычно, через $C(\Gamma)$ обозначим алгебру всех определенных и непрерывных на Γ комплекснозначных функций. Через $\mathscr{K}_p(\Gamma)$ будем обозначать множество всех компактных операторов, действующих в пространстве $L_p(\Gamma)$. Аналогичное обозначение будем использовать для L_p-пространств на других множествах.

Введем действующий в пространстве $L_p(\Gamma)$ полный сингулярный интегральный оператор с непрерывными коэффициентами $A = aI + bS + T$, где $a, b \in C(\Gamma)$, I — единичный оператор, $T \in \mathscr{K}_p(\Gamma)$.

Рассмотрим семейство операторов $A_\varepsilon = aI + bS_\varepsilon + T$, $\varepsilon > 0$. Имеет место равенство $s^*\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon = A$.

Основным результатом работы является критерий асимптотической равномерной обратимости семейства $\{A_\varepsilon\}$. Формулируемый ниже критерий обобщает полученный ранее результат для случая контура типа Ляпунова [6].

Приведем некоторые вспомогательные построения.

Выберем произвольное α, $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \pi/2$. Рассмотрим в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ лучи

$$\gamma_1 = \bigl\{e^{i\alpha}x : x \geqslant 0\bigr\}, \quad \gamma_2 = \bigl\{e^{-i\alpha}x : x \geqslant 0\bigr\}.$$

На луче γ_1 (γ_2) выберем ориентацию, соответствующую возрастанию (убыванию) параметра x. Обозначим: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Рассмотрим оператор B, действующий в пространстве $L_p(\gamma)$ по формуле

$$(Bf)(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\substack{y\in\gamma,\\ |y-x|\geqslant 1}} \frac{f(y)}{y-x}\, dy, \quad x \in \gamma. \tag{1}$$

Оператор B ограничен в пространстве $L_p(\gamma)$. Зависимость операторов B и контуров γ, γ_1, γ_2 от α мы для краткости записи не отмечаем, оговаривая в дальнейшем, какое значение α имеется ввиду.

Как обычно, через $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$) обозначаем вещественную ось (соответственно положительную, отрицательную полуоси).

Введем изоморфизм $U : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\gamma)$, действующий по формуле

$$U : f \mapsto \begin{cases} f(e^{-i\alpha}x), & x \in \gamma_1, \\ f(-e^{i\alpha}x), & x \in \gamma_2. \end{cases}$$

Обозначим $S^{(\alpha)} := U^{-1}BU$. Оператор $S^{(\alpha)}$ действует в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ по формуле

$$\bigl(S^{(\alpha)}f\bigr)(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_\alpha(x,y) f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где ядро k_α определяется на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ условиями

$$k_\alpha(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y-x}, & (x,y)\in(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)\cup(\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_-),\ |y-x|\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{y+e^{2i\alpha}x}, & x\in\mathbb{R}_+,\ y\in\mathbb{R}_-,\ |y+e^{2i\alpha}x|\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{y+e^{-2i\alpha}x}, & x\in\mathbb{R}_-,\ y\in\mathbb{R}_+,\ |y+e^{-2i\alpha}x|\geqslant 1,\\ 0, & \text{для остальных точек множества } \mathbb{R}\times\mathbb{R}.\end{cases}$$

В дальнейших построениях используются приводимые ниже оценки для нормы интегрального оператора.

Пусть $u\subset\mathbb{R}$ — измеримое множество ненулевой меры, k — определенная на $u\times u$ измеримая функция. Обозначим

$$c_1=\sup_{y\in u}\operatorname{ess}\int_u|k(x,y)|\,dx,\quad c_\infty=\sup_{x\in u}\operatorname{ess}\int_u|k(x,y)|\,dy.$$

Если $c_1<\infty$, $c_\infty<\infty$, то [12, с. 903, теорема 9.5.1] интегральный оператор

$$(Kf)(x)=\int_u k(x,y)f(y)\,dy,\quad x\in u,$$

ограничен во всех пространствах $L_p(u)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и имеет место оценка

$$\|K\|_p\leqslant c_1^{\frac{1}{p}}\cdot c_\infty^{1-\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Приведем теперь основные положения локального принципа Гохберга — Крупника [11, гл. 12].

Пусть $\mathfrak{A}$ — банахова алгебра с единицей. Непустое множество $M\subset\mathfrak{A}$ называется *локализующим классом,* если оно не содержит нулевого элемента и для любых $a_1,a_2\in M$ существует такой элемент $a\in M$, что $a_1a=aa_1=a$, $a_2a=aa_2=a$. Пусть M — локализующий класс. Элементы $x,y\in\mathfrak{A}$ называются *M-эквивалентными*, если

$$\inf_{a\in M}\|a(x-y)\|=0,\quad \inf_{a\in M}\|(x-y)a\|=0.$$

Элемент $x\in\mathfrak{A}$ называется *M-обратимым слева* (*справа*), если существуют такие элементы $y\in\mathfrak{A}$, $a\in M$, что $yxa=a$ ($axy=a$). Элемент $x\in\mathfrak{A}$ называется *M-обратимым*, если он M-обратим слева и справа. Система $\{M_\tau\}_{\tau\in\mathrm{T}}$ локализующих классов называется покрывающей, если из любого множества элементов $a_\tau\in M_\tau$, $\tau\in\mathrm{T}$, можно выбрать конечное подмножество, сумма элементов которого является обратимым элементом алгебры $\mathfrak{A}$.

Основное утверждение локального принципа формулируется так [11, с. 355, теорема 1.1].

Предложение 2. *Пусть $\{M_\tau\}_{\tau\in\mathrm{T}}$ — покрывающая система локализующих классов в банаховой алгебре $\mathfrak{A}$, $x\in\mathfrak{A}$ — элемент, коммутирующий со всеми элементами этих локализующих классов, и для каждого $\tau\in\mathrm{T}$ элемент x M_τ-эквивалентен некоторому элементу $y_\tau\in\mathfrak{A}$. Тогда элемент x обратим в алгебре $\mathfrak{A}$ в том и только том случае, когда для каждого $\tau\in\mathrm{T}$ M_τ-обратим элемент y_τ.*

3. Доказательство основного результата

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех ограниченных по норме семейств $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ линейных непрерывных операторов, действующих в пространстве $L_p(\Gamma)$, для которых существуют пределы $s^*\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon$. Множество $\mathfrak{A}$ с «покоординатными» операциями сложения, умножения, умножения на (комплексный) скаляр и нормой $\|\{A_\varepsilon\}\| = \sup_{\varepsilon>0}\|A_\varepsilon\|$ является банаховой алгеброй. Обозначим через $\mathfrak{J}$ подмножество множества $\mathfrak{A}$, состоящее из всех семейств $\{T+\Delta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, где $T\in\mathscr{K}_p(\Gamma)$, $\{\Delta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — семейство операторов, удовлетворяющее условию

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\|\Delta_\varepsilon\| = 0.$$

Множество $\mathfrak{J}$ является собственным замкнутым двусторонним идеалом в алгебре $\mathfrak{A}$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 3 [6]. *Предположим, что оператор A обратим. Семейство $\{A_\varepsilon\}$ асимптотически равномерно обратимо в том и только случае, когда смежный класс $\{A_\varepsilon\}+\mathfrak{J}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ обратим.*

Для точки $t\in\Gamma$ обозначим через $\mathfrak{M}_t$ множество всех функций $\varphi\in C(\Gamma)$, удовлетворяющих условиям: $0\leqslant\varphi(\tau)\leqslant 1$ для всех $\tau\in\Gamma$ и множество $\varphi^{-1}(1)\subset\Gamma$ является некоторой окрестностью точки t. Через M_t обозначим множество всех смежных классов $\{\varphi I\}_{\varepsilon>0}+\mathfrak{J}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$, где $\varphi\in\mathfrak{M}_t$. Очевидно, что семейство $\{M_t\}_{t\in\Gamma}$ является покрывающей системой локализующих классов в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$. Смежный класс $\{A_\varepsilon\}+\mathfrak{J}$ коммутирует со всеми элементами этих локализующих классов. Это вытекает из компактности коммутатора $\varphi S - S\varphi I$ для любой функции $\varphi\in C(\Gamma)$.

Для $t_0\in\Gamma$ рассмотрим семейство операторов $\{a(t_0)I+b(t_0)S_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Смежные классы $\{A_\varepsilon\}+\mathfrak{J}$ и $\{a(t_0)I+b(t_0)S_\varepsilon\}+\mathfrak{J}$ являются M_{t_0}-эквивалентными. Это вытекает из коммутирования этих операторов с элементами смежного класса M_{t_0} и очевидного равенства

$$\inf\left\{\|\varphi(h-h(t_0))\|_{C(\Gamma)} : \varphi\in\mathfrak{M}_{t_0}\right\}=0,$$

выполняющегося для любой функции $h\in C(\Gamma)$.

В силу предложения 2, для получения критерия обратимости смежного класса $\{A_\varepsilon\}+\mathfrak{J}$ нам остается получить критерий M_{t_0}-обратимости смежного класса $\{A_\varepsilon^{(t_0)}\}+\mathfrak{J}$ для произвольной точки $t_0\in\Gamma$. Отметим, что в приводимом ниже анализе мы используем подход, предложенный в [13], позволяющий сравнивать локальные характеристики операторов, действующих в разных пространствах. Само определение из [13] мы не приводим, поскольку здесь используются другие классы банаховых алгебр.

Зафиксируем точку $t_0\in Z_\Gamma$. Рассмотрим замкнутую дугу $u\subset\Gamma$, содержащую точку t_0 внутри и не содержащую других точек множества Z_Γ. Точка t_0 делит дугу на две замкнутые дуги u_1 и u_2, содержащие точку t_0 и соответственно точки, следующие за t_0 и предшествующие t_0. Пусть T_+ и T_- — лучи с вершинами в точке t_0, являющиеся односторонними касательными в точке t_0+0 (со стороны точек, следующих за t_0) и в точке t_0-0. Сдвигая и поворачивая контур Γ, совместим точку t_0 с точкой $z=0$ комплексной плоскости, а лучи T_+ и T_- — соответственно с введенными выше лучами γ_1 и γ_2 при подходящем значении $\alpha=\alpha(t_0)$. Пусть φ — преобразование, разворачивающее дугу u на ломаную $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$. Точнее, для $t\in u_1$ ($t\in u_2$) полагаем $\varphi(t)=e^{i\alpha}s$ ($\varphi(t)=e^{-i\alpha}s$), где s — длина дуги, соединяющей точки t_0 и t, лежащей в u_1 (соответственно в u_2). Из условия Ляпунова следует, что функция φ определена и удовлетворяет условию Гёльдера на каждом из множеств u_1 и u_2. Кроме того, $\lim_{\varepsilon\to+0}\varphi'(t)=1$. Следовательно [10, с. 21], функция φ удовлетворяет условию Гёльдера на всей дуге u.

Обозначим: $v = \varphi(u)$. Рассмотрим линейный оператор $W : L_p(v) \to L_p(u)$, действующий по формуле $(Wf)(t) = f(\varphi(t))$, $t \in u$. Оператор W является ограниченным и обратимым. Введем действующие в пространстве $L_p(u)$ операторы

$$\big(S_\varepsilon^{(u)} f\big)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\substack{t \in u, \\ |t-\tau| \geqslant \varepsilon}} \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad t \in u,\ \varepsilon > 0.$$

Аналогичные операторы в пространстве $L_p(v)$ обозначим через $S_\varepsilon^{(v)}$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$W S_\varepsilon^{(v)} W^{-1} - S_\varepsilon^{(u)} = T + \Delta_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

где $T \in \mathscr{K}_p(u)$, $\{\Delta_\varepsilon\}$ — *семейство линейных непрерывных операторов в пространстве* $L_p(u)$, *удовлетворяющее условию* $\lim_{\varepsilon \to 0} \|\Delta_\varepsilon\| = 0$.

$\lhd$ Обозначим:

$$R_\varepsilon = W S_\varepsilon^{(v)} W^{-1} - S_\varepsilon^{(u)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда

$$(R_\varepsilon f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\substack{\tau \in u, \\ |\varphi(\tau)-\varphi(t)| \geqslant \varepsilon}} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau) - \varphi(t)} f(\tau)\, d\tau - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\substack{\tau \in u, \\ |\tau - t| \geqslant \varepsilon}} \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau.$$

Рассмотрим действующий в пространстве $L_p(u)$ оператор

$$(Tf)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_u \left(\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau) - \varphi(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right) f(\tau)\, d\tau, \quad t \in u.$$

Это интегральный оператор, ядро которого имеет слабую особенность. Следовательно, он является компактным. Обозначим $\Delta_\varepsilon = R_\varepsilon - T$, $\varepsilon > 0$, и покажем, что имеет место равенство $\lim_{\varepsilon \to +0} \|\Delta_\varepsilon\| = 0$. Оператор Δ_ε представим в следующем виде:

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_\varepsilon^{(1)} + \Delta_\varepsilon^{(2)} + \Delta_\varepsilon^{(3)},$$

где $\Delta_\varepsilon^{(i)}$ — интегральные операторы, действующие про формулам

$$(\Delta_\varepsilon^{(i)} f)(t) = \int\limits_u \delta_\varepsilon^{(i)}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad t \in u,$$

а ядра $\delta_\varepsilon^{(i)}(t,\tau)$ определены на $u \times u$, равны приводимым ниже выражениям на указанных подмножествах множества $u \times u$ и равны нулю на оставшихся его частях:

$$\delta_\varepsilon^{(1)}(t,\tau) = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau) - \varphi(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right), \qquad |\varphi(t) - \varphi(\tau)| < \varepsilon,\ |\tau - t| < \varepsilon;$$

$$\delta_\varepsilon^{(2)}(t,\tau) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{\tau - t}, \qquad |\varphi(t) - \varphi(\tau)| \geqslant \varepsilon,\ |\tau - t| < \varepsilon;$$

$$\delta_\varepsilon^{(3)}(t,\tau) = \frac{1}{\pi i} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau) - \varphi(t)}, \qquad |\varphi(t) - \varphi(\tau)| < \varepsilon,\ |\tau - t| \geqslant \varepsilon.$$

Покажем, что $\lim_{\varepsilon\to+0}\left\|\Delta_\varepsilon^{(i)}\right\| = 0$, $i = 1,2,3$.

Ядро $\delta_\varepsilon^{(1)}(t,\tau)$ допускает оценку

$$\left|\delta_\varepsilon^{(1)}(t,\tau)\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\tau - t|^\lambda}$$

при некотором λ, $0 < \lambda < 1$. Отсюда и из оценок (3) следует, что $\lim_{\varepsilon\to+0}\left\|\Delta_\varepsilon^{(1)}\right\| = 0$.

Оцениваем сверху нормы интегральных операторов $\Delta_\varepsilon^{(2)}$. Соответствующие константы из (3) оцениваются сверху величиной

$$\sup_{t\in u}\int\frac{|d\tau|}{|\tau - t|} \leqslant \frac{1}{\pi}\,\sup_{t\in u}\operatorname{ess}\operatorname{mes} E_\varepsilon(t),$$

где при фиксированном $t \in u$ интеграл берется по множеству

$$E_\varepsilon(t) = \bigl\{\tau \in u : \, |\varphi(\tau) - \varphi(t)| \geqslant \varepsilon, \, |\tau - t| < \varepsilon\bigr\},$$

$\operatorname{mes} E_\varepsilon(t)$ — линейная лебегова мера множества $E_\varepsilon(t)$. Можно получить оценку $\operatorname{mes} E_\varepsilon(t) \leqslant h(\varepsilon)\varepsilon$, $t \in u$, где функция $h(\varepsilon)$ определена при $\varepsilon > 0$ и $\lim_{\varepsilon\to+0} h(\varepsilon) = 0$. Отсюда следует, что $\lim_{\varepsilon\to+0}\left\|\Delta_\varepsilon^{(2)}\right\| = 0$.

По той же схеме анализируется последовательность $\bigl\{\Delta_\varepsilon^{(3)}\bigr\}$. $\vartriangleright$

Обозначим через $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{J}'$ банахову алгебру и ее идеал, состоящие из семейств линейных операторов, действующих в пространстве $L_p(\gamma)$, определяемые по аналогии с рассмотренными выше алгеброй $\mathfrak{A}$ и идеалом $\mathfrak{J}$. Обозначим через $\mathfrak{M}'$ множество всех функций $\psi \in C(\gamma)$, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$, $x \in \gamma$, $\psi^{-1}(1)$, которая является некоторой окрестностью точки $0 \in \gamma$. Пусть $M' \subset \mathfrak{A}'/\mathfrak{J}'$ — множество элементов вида $\{\psi I' : \varepsilon > 0\} + \mathfrak{J}'$, где I' — единичный оператор в пространстве $L_p(\gamma)$. Множество M' является локализующим классом в алгебре $\mathfrak{A}'/\mathfrak{J}'$. Введем действующий в пространстве $L_p(\gamma)$ оператор

$$(S'_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\substack{y\in\gamma,\\ |y-x|\geqslant\varepsilon}}\frac{f(y)}{y - x}\,dy, \quad x \in \gamma, \ \varepsilon > 0.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Смежный класс*

$$\bigl\{a(t_0)I + b(t_0)S_\varepsilon : \, \varepsilon > 0\bigr\} + \mathfrak{J} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{J} \tag{4}$$

M_{t_0}-обратим в том и только том случае, когда смежный класс

$$\bigl\{a(t_0)I' + b(t_0)S'_\varepsilon : \, \varepsilon > 0\bigr\} + \mathfrak{J}' \in \mathfrak{A}'/\mathfrak{J}' \tag{5}$$

M'-обратим.

$\vartriangleleft$ Воспользуемся введенными выше дугами u и v. Обозначим через P (P') оператор умножения на характеристическую функцию множества u (множества v), действующий в пространстве $L_p(\Gamma)$ ($L_p(\gamma)$). Смежный класс (4) M_{t_0}-обратим в том и только том случае, когда этим свойством обладает смежный класс

$$\bigl\{P_u(a(t_0)I + b(t_0)S_\varepsilon)P_u : \, \varepsilon > 0\bigr\} + \mathfrak{J} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{J}. \tag{6}$$

Для доказательства достаточно взять в соответствующем соотношении функцию ψ, носитель которой содержится в множестве u. Из подобных соображений следует, что смежные классы (5) и

$$\{P_v(a(t_0)I' + b(t_0)S'_\varepsilon)P_v : \varepsilon > 0\} + \mathfrak{J}' \in \mathfrak{A}'/\mathfrak{J}' \tag{7}$$

M'-обратимы одновременно. Остается заметить, что из леммы 1 вытекает, что смежный класс (6) M_{t_0}-обратим одновременно со смежным классом (7). $\rhd$

Лемма 3. *Смежный класс*

$$\{a(t_0)I' + b(t_0)S'_\varepsilon : \varepsilon > 0\} + \mathfrak{J}' \in \mathfrak{A}'/\mathfrak{J}'$$

M'-обратим в том и только том случае, когда обратим оператор $a(t_0)I' + b(t_0)S'_1$.

$\lhd$ Рассмотрим операторы V_λ, $\lambda > 0$, действующие в пространстве $L_p(\gamma)$ по формуле

$$(V_\lambda f)(x) = \lambda^{1/p} f(\lambda x), \quad x \in \gamma.$$

Операторы V_λ являются изометрическими и обратимыми, $V_\lambda^{-1} = V_{1/\lambda}$. Отметим также, что $V_\lambda S_\varepsilon V_{1/\lambda} = S_{\varepsilon/\lambda}$.

Если $h \in C(\gamma)$, то $V_\lambda h V_{1/\lambda} = h^{(\lambda)} I'$, где $h^{(\lambda)}(x) = h(\lambda x)$.

При $\lambda \to \infty$ операторы V_λ сходятся к нулевому оператору в слабой операторной топологии. Отсюда следует, что для любого оператора $T \in \mathscr{K}_p(\gamma)$ выполняется соотношение $s^*\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} V_\varepsilon T V_{1/\varepsilon} = 0$. Обозначим через $B_\varepsilon = a(t_0)I' + b(t_0)S'_\varepsilon$. Предположим, что смежный класс $\{B_\varepsilon : \varepsilon > 0\} + \mathfrak{J}' \in \mathfrak{A}'/\mathfrak{J}'$ M'-обратим. Запишем условие M'-обратимости слева:

$$C_\varepsilon B_\varepsilon \psi I' = \psi I' + T + \Delta_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{8}$$

где $\{C_\varepsilon\}, \{\Delta_\varepsilon\} \in \mathfrak{A}'$, $\lim_{\varepsilon\to+0} \|\Delta_\varepsilon\| = 0$, функции $\psi \in \mathfrak{M}'$, $T \in \mathscr{K}_p(\gamma)$.

Покажем, что оператор B_1 ограничен снизу, т. е.

$$\inf\{\|B_1 f\| : f \in L_p(\gamma), \|f\| = 1\} > 0.$$

Предположим противное.

Умножая обе части (8) слева на операторы V_ε, справа — на $V_{1/\varepsilon}$, получаем

$$V_\varepsilon C_\varepsilon V_{1/\varepsilon} B_1 \psi^{(\varepsilon)} I' = \psi^{(\varepsilon)} I' + V_\varepsilon T V_{1/\varepsilon} + V_\varepsilon \Delta_\varepsilon V_{1/\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Обозначим через $K = \sup_{\varepsilon>0} \|C_\varepsilon\|$. В силу предположения о неограниченности снизу оператора B_1 найдется такая финитная функция $f \in L_p(\gamma)$, что $\|f\| = 1$, $\|B_1 f\| < 1/2K$. Тогда для всех достаточно малых ε получаем соотношения $\psi^{(\varepsilon)} f = f$,

$$\|(V_\varepsilon C_\varepsilon V_{1/\varepsilon} B_1 \psi^{(\varepsilon)} I') f\| < \frac{1}{2}.$$

Остается заметить, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|(\psi^{(\varepsilon)} I' + V_\varepsilon T V_{1/\varepsilon} + V_\varepsilon \Delta_\varepsilon V_{1/\varepsilon}) f\| = 1.$$

Мы получили противоречие, оператор B_1 ограничен снизу.

Аналогично из M'-обратимости рассматриваемого смежного класса справа, переходя к сопряженным операторам, выводим ограниченность снизу оператора B_1^*. Следовательно, оператор B_1 обратим.

Если оператор B_1 обратим, то из равенства $B_\varepsilon = V_{1/\varepsilon} B_1 V_\varepsilon$ выводим обратимость семейства $\{B_\varepsilon\}$ в алгебре $\mathfrak{A}'$, а, следовательно, и M'-обратимость рассматриваемого смежного класса. $\triangleright$

Введем действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ оператор $\widehat{A}^{(t_0)} = a(t_0)I + b(t_0)S^{(\alpha)}$, где значение $\alpha = \alpha(t_0)$ определено выше, оператор $S^{(\alpha)}$ определяется формулой (2). Оператор B_1, введенный в доказательстве леммы 3, подобен оператору $\widehat{A}^{(t_0)}$. Следовательно, эти операторы обратимы или нет одновременно.

Мы завершили анализ точек $t_0 \in Z_\Gamma$.

Для точки $t_0 \in \Gamma \setminus Z_\Gamma$ обозначим через $\widehat{A}^{(t_0)}$ оператор, действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ по формуле

$$\big(\widehat{A}^{(t_0)} f\big)(x) = a(t_0)f(x) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int\limits_{\substack{y\in\mathbb{R},\\ |y-x|\geqslant 1}} \frac{f(y)}{y-x}\,dy, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

По аналогии с приведенным выше анализом M_{t_0}-обратимости смежного класса $\big\{A_\varepsilon^{(t_0)}\big\} + \mathfrak{J}$ в угловой точке доказывается, что M_{t_0}-обратимость в этом случае равносильна обратимости оператора $\widehat{A}^{(t_0)}$. В статье [6] доказано, что оператор (9) обратим тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$a(t_0) + \lambda b(t_0) \neq 0 \quad (\forall\, \lambda \in [-1, 1]).$$

Из приведенных построений вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $A = aI + bS + T$ $(a, b \in C(\Gamma)$, $T \in \mathscr{K}_p(\Gamma)$ — действующий в пространстве $L_p(\Gamma)$ обратимый оператор. К оператору A применим приближенный метод по семейству операторов $A_\varepsilon = aI + bS_\varepsilon + T$ при $\varepsilon \to +0$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $t_0 \in \Gamma$ обратим действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ оператор $\widehat{A}^{(t_0)}$.*

Литература

1. *Prößdorf, S. and Schmidt, G.* A finite element collocation method for singular integral equations // Math. Nachr.—1981.—Vol. 100.—P. 33–60.
2. *Silbermann, B.* Lokale Theorie des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren // Math. Nachr.—1981.—Vol. 104.—P. 137–146.
3. *Hagen, R., Roch, S. and Silbermann, B.* C^*-algebras and numerical analysis.—N. Y.: Marcel Dekker, 2001.—376 p.
4. *Пилиди В. С.* О равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами // Докл. АН СССР.—1989.—Т. 307, № 2.—С. 280–283.
5. *Пилиди В. С.* О методе вырезания особенности для бисингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами // Функц. анализ и его прил.—1989.—Т. 23, № 1.—С. 82–83.
6. *Пилиди В. С.* Критерии равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1990.—Т. 54, № 6.—С. 1270–1294.
7. *Пилиди В. С.* О равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов в пространствах функций, суммируемых с переменной степенью // Изв. высш. уч. заведений. Сев.-Кавк. регион.—2011.—№ 1.—С. 12–17.
8. *Абрамян А. В., Пилиди В. С.* О равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами в пространствах функций, суммируемых с переменной степенью // Изв. высш. уч. заведений. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2013.—№ 5.—С. 5–10.
9. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—432 с.

10. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд.—М., Наука, 1968.—513 с.
11. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: «Штиинца», 1973.—426 с.
12. *Эдвардс Р. Е.* Функциональный анализ: теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
13. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных интегральных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I // Изв. АН СССР. Сер. Мат.—1965.—Т. 29, № 3.—С. 567–586.

Статья поступила 15 ноября 2018 г.

Абрамян Анна Владимировна
Южный федеральный университет,
доцент кафедры информатики и вычислительного эксперимента
РОССИЯ, 344090, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: annaabr@yandex.ru

Пилиди Владимир Ставрович
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой информатики и вычислительного эксперимента
РОССИЯ, 344090, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: pilidi@sfedu.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 1, P. 5–15

CRITERION OF UNIFORM INVERTIBILITY OF REGULAR APPROXIMATIONS OF ONE-DIMENSIONAL SINGULAR INTEGRAL OPERATORS ON A PIECEWISE-LYAPUNOV CONTOUR

Abramyan, A. V.[1] and Pilidi, V. S.[1]

[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: annaabr@yandex.ru, pilidi@sfedu.ru

Abstract. The paper continues research of the criteria of applicability to complete singular integral operators of approximate methods using families of strongly approximating them operators with the “cut out” singularity of the Cauchy kernel. The case of a complete singular integral operator with continuous coefficients acting on L_p-space on a closed contour is considered. It is assumed that the contour is piecewise Lyapunov and has no cusps. The task is reduced to a criterion of invertibility of an element in some Banach algebra. The study is performed using the local principle of Gokhberg and Krupnik. The focus is on the local analysis at the corner points. For this purpose, an analogue of the method of quasi-equivalent operators proposed by I. B. Simonenko is used. The criterion is formulated in terms of invertibility of some integral operators associated with the corner points acting on L_p-space on the real axis, and strong ellipticity conditions at the contour points with the Lyapunov condition.

Key words: Lyapunov condition, piecewise-Lyapunov contour, complete singular integral operator, convergence of approximation method, uniform invertibility, local principle.

Mathematical Subject Classification (2010): 45P05, 45E05, 45L05, 47G10.

For citation: *Abramyan, A. V. and Pilidi, V. S.* Criterion of Uniform Invertibility of Regular Approximations of One-Dimensional Singular Integral Operators on a Piecewise-Lyapunov Contour, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 5–15 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27645.

References

1. *Prößdorf, S. and Schmidt G.* A finite Element Collocation Method for Singular Integral Equations, *Math. Nachr.*, 1981, vol. 100, pp. 33–60.
2. *Silbermann, B.* Lokale Theorie des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren, *Math. Nachr.*, 1981, vol. 104, pp. 137–146.
3. *Hagen, R., Roch, S. and Silbermann, B.* *C^*-Algebras and Numerical Analysis*, New York, Marcel Dekker, 2001, 376 p.
4. *Pilidi, V. S.* On Uniform Invertibility of Regular Approximations of One-Dimensional Singular Integral Operators with Piecewise Continuous Coefficients, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1989, vol. 307, no. 2, pp. 280–283 (in Russian).
5. *Pilidi, V. S.* A Method for Excision of Singularity for Bisingular Integral Operators with Continuous Coefficients, *Funct. Anal. Appl.*, 1989, vol. 23, no. 1, pp. 82–83 (in Russian).
6. *Pilidi, V. S.* A Criterion for Uniform Invertibility of Regular Approximations of One-Dimensional Singular Integral Operators with Piecewise Continuous Coefficients, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.,* 1990, vol. 54, no. 6, pp. 1270–1294 (in Russian).
7. *Pilidi, V. S.* On Uniform Invertibility of Regular Approximations of One-Dimensional Singular Integral Operators in Variable Exponent Spaces, *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Natural Science*, 2011, no. 1, pp. 12–17 (in Russian).
8. *Abramyan, A. V. and Pilidi, V. S.* On Uniform Invertibility of Regular Approximations of One-Dimensional Singular Integral Operators with Piecewise Continuous Coefficients in Variable Exponent Spaces, *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Natural Science*, 2013, no. 5, pp. 5–10 (in Russian).
9. *Gokhberg, I. Ts. and Fel'dman, I. A.* *Convolution Equations and Projection Methods for Their Solution*, Moskow, Nauka, 1971, 432 p. (in Russian).
10. *Muskhelishvili, N. I.* *Singular Integral Equations. 3rd ed.*, Moskow, Nauka, 1968, 513 p. (in Russian).
11. *Gokhberg, I. Ts. and Krupnik, N. Y.* *Introduction to the Theory of One-Dimensional Singular Integral Operators*, Kishinev, SHtiintsa, 1973, 426 p. (in Russian).
12. *Edvards, R. E.* *Functional Analysis*, Moskow, Mir, 1969, 1072 p. (in Russian).
13. *Simonenko, I. B.* A New General Method of Investigating Linear Operator Equations of Singular Integral Equation Type. I, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1965, vol. 29, no. 3, pp. 567–586 (in Russian).

Received November 15, 2018

Anna V. Abramyan
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia,
Associate Professor of the Department of Informatics and Computational Experiment
E-mail: `annaabr@yandex.ru`

Vladimir S. Pilidi
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia,
Head of the Department of Informatics and Computational Experiment
E-mail: `pilidi@sfedu.ru`