Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 94–104

УДК 517.97
DOI 10.23671/VNC.2018.3.18033

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПО ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

С. А. Унучек[1]

[1] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: `svun@mail.ru`

Аннотация. В различных прикладных задачах часто нужно восстановить какую-либо характеристику объекта по некоторой информации (как правило, неполной или неточной) о других его характеристиках. Существуют различные подходы к решению аналогичных задач. В данной работе использовался подход, основанный на идеях Андрея Николаевича Колмогорова (в работах о n-поперечниках) о наилучших средствах приближения конечномерными подпространствами. Суть метода заключается в том, что ищется наилучшее средство аппроксимации на целом классе. Рассматривается задача одновременного восстановления операторов разделенных разностей всех порядков от 1 до $(n-1)$-го включительно на классе последовательностей с ограниченной n-ой разделенной разностью. При этом преобразование Фурье данной последовательности известно приближенно на некотором отрезке в среднеквадратичной норме. Построено семейство оптимальных методов восстановления. Среди найденных методов есть те, которые используют минимальную информацию о последовательности, предварительно «сглаживая» ее. Найдено точное значение оптимальной погрешности восстановления операторов разделенных разностей. Предельным переходом из полученных результатов вытекает непрерывный случай.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оператор разделенной разности, преобразование Фурье.

Mathematical Subject Classification (2000): 65K10.

1. Введение

Впервые задача оптимального восстановления функционалов была поставлена С. А. Смоляком в работе [1]. Он же доказал, что среди оптимальных методов восстановления на выпуклом множестве есть линейный. В общем случае метод оптимального восстановления линейных операторов по приближенной информации разработан Г. Г. Магарилом-Ильяевым и К. Ю. Осипенко в работе [2]. В данной работе рассматривается задача одновременного восстановления операторов разделенных разностей различных порядков в среднеквадратичной норме на классе последовательностей с ограниченной n-й разделенной разностью по неточно заданному преобразованию Фурье самой последовательности. Аналогичная задача восстановления производной какого-либо порядка (или самой функции) на соболевском классе рассматривалась в работе [3]. Предельным переходом из полученных результатов вытекает непрерывный случай, исследованный в работе [3]. Одновременное восстановление разделенных разностей по неточно заданной самой последовательности рассматривалось в работе [4]. В работе [5] изучалась задача оптимального восстановления некоторой фиксированной разделенной разности по неточно заданному преобразованию Фурье самой последовательности в равномерной метрике.

2. Основные понятия

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пусть $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$, — пространство последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty$, с нормой $\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \big(h\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2\big)^{1/2}$. Рассмотрим класс последовательностей

$$\mathscr{W}^n_{2,h} = \Big\{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) : \big\|\Delta^n_h x\big\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leqslant 1\Big\}.$$

Преобразованием Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_{2,h(\mathbb{Z})}$ является функция

$$(Fx)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j\, e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h]),$$

оператора разделенной разности первого порядка — функция

$$\big(F\Delta^1_h x\big)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{x_{j+1}-x_j}{h}\, e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega}-1}{h}\,(Fx)(\omega),$$

преобразованием Фурье оператора разделенной разности порядка m — функция

$$\big(F\Delta^m_h x\big)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega}-1)^m}{h^m}(Fx)(\omega).$$

Ставится задача одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей $(\Delta^1_h x, \Delta^2_h x, \ldots, \Delta^{n-1}_h x)$ последовательности $x \in \mathscr{W}^n_{2,h}$ при условии, что ее преобразование Фурье на отрезке $[-\sigma;\sigma]$, $0 < \sigma \leqslant \pi/h$, нам известно с точностью до $\delta : \|Fx(\omega) - y(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])} \leqslant \delta$, $\delta > 0$.

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_{n-1}(y))$, $\varphi_k(y) : L_2([-\sigma;\sigma]) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Обозначим $\overline{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1})$.

Погрешностью метода φ называется величина

$$e\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi\big) = \sup_{\substack{x\in\mathscr{W}^n_{2,h},\ y\in L_2([-\sigma;\sigma]),\\ \|Fx(\omega)-y(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])}\leqslant\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k\big\|\Delta^k_h x - \varphi_k(y)\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}.$$

Здесь $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$, $p_k \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, — весовые коэффициенты, одновременно не равные 0, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению оператора какой-либо разности.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta\big) = \inf_{\varphi:\, L_2([-\sigma;\sigma])\to(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n} e\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi\big).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, назовем *оптимальным методом.*

3. Основные результаты

Пусть x — положительный корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}} x.$$

Рассмотрим обе части уравнения. Функция $y = \sum_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}}$ вогнута, $\lim_{x\to 0} y' = 0$. Функция $y = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}} x$ — прямая с положительным угловым коэффициентом, проходящая через начало координат. Это означает, что при $x > 0$ графики этих функций имеют единственную точку пересечения, т. е. данное уравнение всегда имеет единственный корень.

Введем обозначения

$$\widehat{\sigma} = \begin{cases} \frac{2}{h} \arcsin \frac{hx^{\frac{1}{2n}}}{2}, & x^{\frac{1}{2n}} < \frac{2}{h}, \\ \frac{\pi}{h}, & x^{\frac{1}{2n}} \geqslant \frac{2}{h}, \end{cases} \qquad t(\omega) = \frac{4\sin^2 \frac{\omega h}{2}}{h^2}, \quad \omega_\sigma = t(\sigma).$$

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Тогда*

$$E\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta\big) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right)^{1/2}, & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n}\right)\right)^{1/2}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Все методы

$$\widehat{\varphi}_k(y) = \begin{cases} \Delta_h^k F^{-1}(\alpha_k(\omega) y(\omega)), & \omega \in (-\sigma;\sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma), \end{cases}$$

где

$$\alpha_k(\omega) = \begin{cases} \frac{\widehat{\lambda}_1 + \theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}, & \omega \in (-\sigma;\sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma), \end{cases} \tag{1}$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех $\omega \in (-\sigma;\sigma)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) |\theta_k(\omega)|^2 \leqslant \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) \left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) - \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega)\right), \tag{2}$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{k}{n}} \left(1 - \frac{k}{n}\right), & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(1 - \frac{k}{n}\right), & \sigma < \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

$$\widehat{\lambda_2} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^{k-n}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

являются оптимальными.

4. Доказательство

Докажем, что

$$E\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta\big) \geqslant \sup_{\substack{x\in\mathscr{W}^n_{2,h},\\ \|Fx(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])}\leqslant\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h x\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}. \tag{3}$$

Для любой последовательности $x \in \mathscr{W}^n_{2,h}$ такой, что $\|Fx(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])} \leqslant \delta$, и для любого метода φ имеем

$$\begin{aligned}\left(2\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h x\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h(x) - \Delta^k_h(-x) + \varphi(0) - \varphi(0)\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h(x) - \varphi(0)\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h(-x) - \varphi(0)\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(2\sum_{k=1}^{n-1} \sup_{\substack{x\in\mathscr{W}^n_{2,h},\\ \|Fx(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])}\leqslant\delta}} p_k \big\|\Delta^k_h x\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} - \varphi(0)\right)^{1/2} \leqslant \Big(2e^2\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi\big)\Big)^{1/2},\end{aligned}$$

т. е. для любого метода φ

$$e\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi\big) \geqslant \sup_{\substack{x\in\mathscr{W}^n_{2,h},\\ \|Fx(\omega)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])}\leqslant\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h x\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}.$$

Из данного неравенства следует неравенство (3).

Это означает, что квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\|\Delta^k_h x\big\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to \max, \quad \big\|\Delta^n_h x\big\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leqslant 1, \quad \big\|Fx(\omega)\big\|_{L_2([-\sigma;\sigma])} \leqslant \delta. \tag{4}$$

Перейдем к квадрату задачи и применим теорему Планшереля. Задача (4) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{|e^{ih\omega}-1|^{2k}}{h^{2k}} \big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega \to \max, \tag{5}$$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega \leqslant \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{|e^{ih\omega}-1|^{2n}}{h^{2n}} \big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega \leqslant 1.$$

Положим

$$\omega_0 = \begin{cases} \frac{2}{h}\arcsin\left(\frac{h}{2}\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}}\right), & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \frac{2}{h}\arcsin\left(\sin\frac{h\sigma}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}}\right), & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим случай $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$. Точка $x_0 = \frac{2\pi}{\delta^2}$ — точка касания прямой $y = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x$ и функции $\widetilde{y} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}}$ (см. рис. 1). При $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$ в силу монотонности функции $\widetilde{y}$ выполняется двойное неравенство $\omega_\sigma^n \geqslant \omega_{\widehat{\sigma}}^n > x_0$. Это означает, что аргумент функции арксинус в равенстве (6) не превышает 1 при $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$.

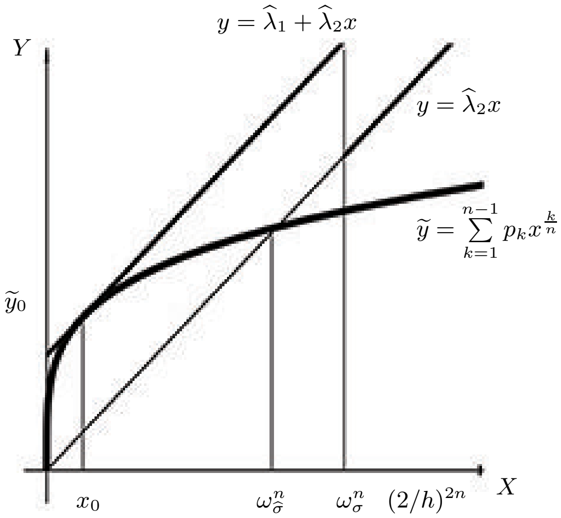

Рис. 1.

Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которых

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} D, & \omega \in \left[\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0\right], \\ 0, & \omega \notin \left[\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0\right]. \end{cases}$$

Положим $D = \delta\sqrt{m}$. Тогда

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \left\|Fx_m(\omega)\right\|^2_{L_2([-\sigma;\sigma])} d\omega = \int_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} D^2\, d\omega = \frac{D^2}{m} = \delta^2.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) \left\|Fx_m(\omega)\right\|^2_{L_2([-\pi;\pi])} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} t^n(\omega) D^2\, d\omega$$

$$= \frac{\delta^2 m}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \left(\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\omega}{2}\right)^n d\omega \leqslant \frac{\delta^2 2^{2n} \sin^{2n} \frac{h\omega_0}{2}}{2\pi h^{2n}} = 1.$$

Тем самым функции $x_m(\cdot)$ допустимы в задаче (5). Следовательно, при $D = \delta\sqrt{m}$ значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}t^k(\omega)\big\|Fx_m(\omega)\big\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}t^k(\omega)D^2\,d\omega$$

$$=\frac{\delta^2m}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}\frac{4^k}{h^{2k}}\sin^{2k}\frac{h\omega}{2}\,d\omega\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}p_k\frac{\delta^2 2^{2k}\sin^{2k}\frac{h\left(\omega_0-\frac{1}{m}\right)}{2}}{2\pi h^{2k}}.$$

Величина, стоящая в правой части этого неравенства при $m\to\infty$ стремится к величине $\sum_{k=1}^{n-1}p_k\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}$.

В случае $\sigma<\widehat{\sigma}$ очевидно, что $\omega_0<\sigma<\frac{\pi}{h}$. Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$ такую, что

$$(Fx_m)(\omega)=\begin{cases}D_1, & \omega\in\left[\omega_0-\frac{1}{m};\omega_0\right],\\ D_2, & \omega\in\left[\sigma;\sigma+\frac{1}{m}\right],\\ 0, & \omega\notin\left[\omega_0-\frac{1}{m};\omega_0\right]\cup\left[\sigma;\sigma+\frac{1}{m}\right].\end{cases}$$

Возьмем

$$D_1=\delta\sqrt{m}\,,\quad D_2=\left(\frac{2\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}}{h}\right)^{-n}\sqrt{m\left(2\pi-\delta^2{\omega_\sigma}^n\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}\right)}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\big\|Fx_m(\omega)\big\|^2_{L_2([-\sigma;\sigma])}\,d\omega=\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}}D_1^2\,d\omega=\delta^2.$$

Аналогично

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}t^n(\omega)\big\|Fx_m(\omega)\big\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}t^n(\omega)D_1^2\,d\omega+\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}}t^n(\omega)D_2^2\,d\omega\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\delta^2\left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\omega_0}{2}\right)^{2n}+\frac{D_2^2}{m}\left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}\right)^{2n}\right)=1.$$

Таким образом, функции $x_m(\cdot)$ также допустимы в задаче (5). Значит, при указанных выше значениях δ, D_1 и D_2, значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}t^k(\omega)\big\|Fx_m(\omega)\big\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}d\omega=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\left(\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}t^k(\omega)D_1^2d\omega+\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}}t^k(\omega)D_2^2d\omega\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\left[\delta^2\left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\left(\omega_0-\frac{1}{m}\right)}{2}\right)^{2k}+\left(\frac{2\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}}{h}\right)^{-2n}\left(2\pi-\delta^2{\omega_\sigma}^n\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}\right)\omega_\sigma^k\right].$$

Величина, стоящая в правой части этого неравенства при $m \to \infty$ стремится к

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n} \right).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$E\big(\mathscr{W}_{2,h}^n, F, \overline{\Delta}, \delta\big) \geqslant \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{n}} \right)^{1/2}, & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n} \right) \right)^{1/2}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Построим оптимальные методы. Оптимальные методы будем искать среди методов вида $\varphi_k(y) = \Lambda_k y$, где $\Lambda_k : L_2([-\sigma;\sigma]) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ — линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид

$$F(\Lambda_k y)(\omega) = \begin{cases} \frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k} \alpha_k(\omega) y(\omega), & \omega \in (-\sigma;\sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma), \end{cases}$$

где функция $\alpha_k(\omega) \in L_\infty((-\sigma;\sigma))$, $\alpha_k(\omega) = 0$, $\omega \notin (-\sigma;\sigma)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Для оценки погрешности таких методов рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \big\| \Delta_h^k x - \Lambda_k y \big\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2 \to \max,$$

$$\big\| Fx(\omega) - y(\omega) \big\|_{L_2([-\sigma;\sigma])} \leqslant \delta, \qquad x \in \mathscr{W}_{2,h}^n, \ \ y \in L_2([-\sigma;\sigma]).$$

Перепишем эту задачу в образах Фурье:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) \big| Fx(\omega) - \alpha_k(\omega) y(\omega) \big|^2 d\omega \to \max, \\ \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \big| Fx(\omega) - y(\omega) \big|^2 d\omega \leqslant \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) \big| Fx(\omega) \big|^2 d\omega \leqslant 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \big| Fx(\omega) - \alpha_k(\omega) y(\omega) \big|^2 &= \big| Fx(\omega)(1-\alpha_k(\omega)) + \alpha_k(\omega)(Fx(\omega) - y(\omega)) \big|^2 \\ &= \left| \frac{\alpha_k(\omega)\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}} \big(Fx(\omega) - y(\omega) \big) + \frac{1-\alpha_k(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2\, t^n(\omega)}} \sqrt{\widehat{\lambda}_2\, t^n(\omega)}\, Fx(\omega) \right|^2 \\ &\leqslant q_k(\omega) \left(\widehat{\lambda}_1 \big| Fx(\omega) - y(\omega) \big|^2 + \widehat{\lambda}_2\, t^n(\omega) \big| Fx(\omega) \big|^2 \right), \end{aligned}$$

где $q_k(\omega) = \frac{|\alpha_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1} + \frac{|1-\alpha_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}$.

Учитывая условия в задаче (7), имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k(\omega)\big|Fx(\omega)-\alpha_k(\omega)y(\omega)\big|^2\,d\omega \leqslant \|Q(\cdot)\|_{L_\infty((-\sigma;\sigma))}\big(\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2\big),$$

где $Q(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k(\omega)q_k(\omega)$.

Если $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty((-\sigma;\sigma))}\leqslant 1$, то значение задачи (7)

$$\widehat{\lambda}_1\frac{\delta^2}{2\pi}+\widehat{\lambda}_2=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma\geqslant\widehat{\sigma},\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\omega_\sigma^k\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\frac{n-k}{n}+\omega_\sigma^{-n}\right), & \sigma<\widehat{\sigma},\end{cases}$$

не превосходит $\widehat{\lambda}_1\frac{\delta^2}{2\pi}+\widehat{\lambda}_2\leqslant E^2(\mathscr{W}^n_{2,h},F,\overline{\Delta},\delta)$.

Из последнего неравенства следует оценка сверху погрешности оптимального восстановления. Тем самым методы, в которых $a_k(\cdot)$, $k=1,\dots,n-1$, выбраны так, что $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty((-\sigma;\sigma))}\leqslant 1$, будут оптимальными.

Покажем, что условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty((-\sigma;\sigma))}\leqslant 1$ эквивалентно выражению (2) в условии теоремы. Имеем

$$Q(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k(\omega)q_k(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k(\omega)\left(\frac{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}{\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\left|\alpha_k(\omega)-\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\right|^2+\frac{1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\right).$$

Пусть $\theta_k(\omega)=\alpha_k(\omega)\big(\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n\big)-\widehat{\lambda}_1$.

Тогда условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty((-\sigma;\sigma))}\leqslant 1$ эквивалентно условию (2).

Рассмотрим функцию

$$g(t)=-\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k+\lambda_1\chi_{[-\sigma,\sigma]}+\lambda_2t^n,\quad t\in\big[0,4/h^2\big].$$

В силу вогнутости функции $\widetilde{y}=\sum_{k=1}^{n-1}p_kx^{k/n}$ в случае $\sigma\geqslant\widehat{\sigma}$ будет выполняться неравенство $\widetilde{y}\leqslant\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2x$ для всех $x\in[0;\omega_\sigma^n]$ (см. рис. 1). Так как $\omega_\sigma^n\geqslant\omega_{\widehat{\sigma}}^n$, неравенство $\sum_{k=1}^{n-1}p_kx^{k/n}<\widehat{\lambda}_2x$ выполняется при $x\in(\omega_\sigma^n;(2/h)^{2n}]$. Это означает неотрицательность функции $g(t)$ при всех $t\in[0,4/h^2]$.

В случае $\sigma<\widehat{\sigma}$ прямая $y=\widehat{\lambda}_2x$ пересекает график функции $\widetilde{y}=\sum_{k=1}^{n-1}p_kx^{k/n}$ в точке ω_σ^n, прямая $y=\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2x$ касается данной функции в точке $x_0<\omega_\sigma^n$, т. е. и в этом случае функция $g(t)\geqslant 0$.

Таким образом, в силу неотрицательности функции $g(t)$ правая часть неравенства (2) неотрицательна.

Верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, что доказывает оптимальность метода.

Пусть $\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R})=\{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}):f^{(n-1)}\in LAC(\mathbb{R}),f^{(n)}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\}$ — соболевское пространство, где $LAC(\mathbb{R})$ — множество функций, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке. Рассмотрим класс функций

$$\mathbb{W}_2^n(\mathbb{R})=\Big\{f(\cdot)\in\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}):\ \big\|f^{(n)}(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant 1,\ (Ff)(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\Big\},$$

где $(Ff)(\cdot)$ — преобразование Фурье функции f. Будем считать, что дана функция $y(\cdot) \in L_2([-\sigma;\sigma])$ такая, что $\|(Ff)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2([-\sigma;\sigma])} \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ — заданная величина погрешности.

Заметим, что, в пределе при $h \to 0$ k-я разделенная разность последовательности $x \in \mathscr{W}^n_{2,h}$ переходит в производную k-го порядка функции $f(\cdot) \in \mathbb{W}^n_2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h\to 0} t(\omega) = \omega^2, \quad \lim_{h\to 0} \omega_\sigma = \sigma^2, \quad \lim_{h\to 0} \widehat{\sigma} = \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}.$$

Не обосновывая строго предельный переход, приведем результат, который получается с помощью такого перехода (этот результат может быть получен и непосредственно, используя ту же схему рассуждений): погрешность одновременного оптимального восстановления производных всех порядков $(D^1 f(\cdot),\ D^2 f(\cdot),\ \ldots,\ D^{n-1} f(\cdot))$ функции $f(\cdot) \in \mathbb{W}^n_2(\mathbb{R})$ равна

$$E\big(\mathbb{W}^n_2(\mathbb{R}), F, \overline{D}, \delta\big) = \lim_{h\to 0} E\big(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta\big)$$

$$= \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right)^{1/2}, & \sigma \geqslant \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \sigma^{2k} \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n} + \sigma^{-2n}\right)\right)^{1/2}, & \sigma < \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \end{cases}$$

где $\overline{D} = (D^1, D^2, \ldots, D^{n-1})$.

Все методы

$$\widehat{\varphi}_k(y) = \begin{cases} \big(F^{-1}(\alpha_k(\omega) y(\omega))\big)^{(k)}, & \omega \in (-\sigma;\sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma), \end{cases}$$

где

$$\alpha_k(\omega) = \begin{cases} \frac{\widehat{\lambda}_1 + \theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \omega^n}, & \omega \in (-\sigma;\sigma), \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma), \end{cases}$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех $\omega \in (-\sigma;\sigma)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega^{2k} \big|\theta_k(\omega)\big|^2 \leqslant \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \omega^{2n} \left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \omega^{2n} - \sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega^{2k}\right),$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{k}{n}} \left(1 - \frac{k}{n}\right), & \sigma \geqslant \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \sigma^{2k} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(1 - \frac{k}{n}\right), & \sigma < \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma \geqslant \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \sigma^{2(k-n)}, & \sigma < \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}, \end{cases}$$

являются оптимальными, и при

$$p_k = \begin{cases} 1, & k = r, \\ 0, & k \neq r \end{cases}$$

мы получаем результат, аналогичный результату, полученному при восстановлении производной функции порядка r в работе [3].

Замечание 1. Если преобразование Фурье последовательности с ограниченной n-й разделенной разностью на отрезке $[-\sigma;\sigma]$ известно приближенно, то с увеличением полудлины отрезка σ погрешность оптимального восстановления уменьшается, но лишь до определенного предела: при $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$ эта погрешность постоянна, т. е. за пределами отрезка $[-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}\,]$ информация о преобразовании Фурье последовательности из данного класса не нужна.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. ...к.ф.-м.н.—М.: МГУ, 1965.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функцион. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64. DOI: 10.4213/faa157.
3. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление линейных операторов по неточной информации // Мат. форум. Т. 2. Исследования по выпуклому анализу / отв. ред. В. М. Тихомиров.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2009.—С. 158–192.—(Итоги науки. ЮФО).
4. *Унучек С. А.* Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности // Диф. уравнения.—2015.—Т. 51, № 7.—С. 951–957. DOI: 10.1134/S0374064115070122.
5. *Унучек С. А.* О восстановлении оператора разделенной разности по неточно заданному преобразованию Фурье // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 3.—С. 84–92. DOI: 10.23671/VNC.2017.3.7268.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Мат. заметки.—2012.—Т. 92, № 1.—С. 59–67. DOI: 10.4213/mzm9042.

Статья поступила 11 августа 2017 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 94–104

OPTIMAL RECOVERY OF THE OPERATORS OF THE DIVIDED DIFFERENCE OF THE INACCURATELY GIVEN SEQUENCE BY THE FOURIER TRANSFORM

Unuchek S. A.[1]

[1] Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russia,
E-mail: svun@mail.ru

Abstract. In various applications, it is often necessary to reconstruct some characteristic of an object from some information (usually incomplete or inaccurate) about its other characteristics. There are various approaches to solving similar problems. In this paper, we used an approach based on the ideas of Andrei Nikolaevich Kolmogorov concerning the best means of approximation by finite-dimensional subspaces. The essence of the method lies in the fact that the best means of approximation on the whole class is sought. We consider the problem of simultaneous recovery of operators of divided differences of a sequence of all orders from 1 to $(n-1)$th inclusive, in a class of sequences with bounded nth divided difference. The Fourier transform of this sequence is known inaccurately at a certain interval sequence in the mean square norm. A family of optimal recovery methods is constructed. Among the methods found are those that use minimal sequence information, pre-smoothing it. The exact value of the optimal error of recovering divided-difference operators is found. The passage to the limit from the obtained results implies a continuous case.

Key words: optimal recovery, operator of a divided difference, Fourier transform.

Mathematical Subject Classification (2000): 65K10.

References

1. *Smolyak S. A. On Optimal Recovery of Fuctions and Functionals of them, Candidate dissertation*, Moscow State University, 1965 (in Russian).
2. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Y.* Optimal Recovery of Functions and Their Derivatives from Inaccurate Information about the Spectrum and Inequalities for Derivatives, *Functional Analysis and Its Applications*, 2003, vol. 37, no. 3, pp. 203–214. DOI: 10.1023/A:1026084617039
3. *Magaril-Il'yaev G. G, Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Operators from Inaccurate Information, *Matematicheskij forum. T. 2. Issledovanija po vypuklomu analizu. Itogi nauki. Juzhnyj federal'nyj okrug* [Mathematical Forum, vol. 2, Studies on the Convex Analysis. Review of Science: Southern Federal District], 2009, vol. 2, pp. 158–192 (in Russian).
4. *Unuchek S. A.* Optimal Reconstruction of Divided Differences from an Inaccurate Sequence, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 948–954. DOI: 10.1134/S0012266115070125.
5. *Unuchek S. A.* On Optimal Recovery of the Operator of k-th Divided Difference from its Inaccurately Given Fourier Transfor, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2015, vol. 17, no. 3, pp. 84–92 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2017.3.7268.
6. *Magaril-Il'yaev G. G, Osipenko K. Yu.* How Best to Recover a Function from its Inaccurately Given Spectrum? *Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, no. 1, pp. 51–58. DOI: 10.1134/S0001434612070061.

Received August 11, 2017