Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 16–22

УДК 517.98
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14714

МАКСИМАЛЬНЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ ИНВОЛЮТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ф. Н. Арзикулов

Посвящается 65-летнему юбилею
профессора Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. Работа посвящена инволютивным алгебрам ограниченных линейных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Изучается проблема описания всех подпространств векторного пространства всех бесконечномерных $n \times n$-матриц над полем комплексных чисел, для бесконечного кардинального числа n, являющихся инволютивными алгебрами. Существует много различных классов операторных алгебр в гильбертовом пространстве, включая классы ассоциативных алгебр неограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Большинство инволютивных алгебр неограниченных операторов, например, $\sharp$-алгебры, $\mathrm{EC}^\sharp$-алгебры и $\mathrm{EW}^\sharp$-алгебры, инволютивные алгебры измеримых операторов, присоединенных к конечной (или полуконечной) алгебре фон Неймана, мы можем представить как алгебры бесконечномерных матриц. Если мы сможем описать все максимальные инволютивные алгебры бесконечномерных матриц, то ряд проблем операторных алгебр, включая инволютивные алгебры неограниченных операторов можно свести к проблемам максимальных инволютивных алгебр бесконечномерных матриц. В данной работе дается описание всех максимальных коммутативных инволютивных подалгебр алгебры ограниченных операторов в гильбертовом пространстве как алгебра бесконечных матриц.

Ключевые слова: инволютивная алгебра, алгебра операторов, гильбертово пространство, бесконечномерная матрица, алгебра фон Неймана.

Работа посвящена инволютивным алгебрам ограниченных линейных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве. В [1] впервые было найдено достаточное условие построения инволютивной алгебры всех бесконечномерных ограниченных $n \times n$-матриц над полем комплексных чисел. Эту алгебру можно отождествить с алгеброй $B(l_2(\Xi))$ всех ограниченных линейных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$, где $|\Xi| = n$ для некоторого бесконечного кардинального числа n. В основе данной статьи лежит идея бесконечного разложения $B(l_2(\Xi))$ по одномерным компонентам, предложенная в [1] и [2]. Благодаря этому всякий линейный оператор в гильбертовом пространстве представляется в виде бесконечной матрицы. В работах [1] и [2] получены результаты, касающиеся нормы и положительности ограниченного линейного оператора. На языке матриц эти результаты можно сформулировать следующим образом: 1) норма бесконечной матрицы равна точной верхней грани норм всех конечномерных подматриц на ее основной диогонали; 2) ограниченная бесконечномерная матрица положительна тогда и только тогда когда все конечномерные подматрицы на ее основной диогонали положительны. Продолжая рассуждения в этом направлении можно рассматривать векторное пространство всех бесконечномерных $n \times n$-матриц над полем комплексных чисел и изучать проблему описания всех подпространств этого векторного пространства, являющихся инволютивными алгебрами.

Существует много различных классов операторных алгебр в гильбертовом пространстве, включая классы ассоциативных алгебр неограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Большинство инволютивных алгебр неограниченных операторов, например $\sharp$-алгебры, $EC^\sharp$-алгебры и $EW^\sharp$-алгебры [4], инволютивные алгебры измеримых операторов, присоединенных к конечной (или полуконечной) алгебре фон Неймана [5], мы можем представить как алгебры бесконечномерных матриц. Если мы сможем описать все максимальные инволютивные алгебры бесконечномерных матриц, то ряд проблем операторных алгебр, включая инволютивные алгебры неограниченных операторов можно свести к проблемам максимальных инволютивных алгебр бесконечномерных матриц. В частности, ряд проблем коммутативных операторных алгебр, включая коммутативные инволютивные алгебры неограниченных операторов можно свести к проблемам максимальных коммутативных инволютивных алгебр бесконечномерных матриц. В данной работе обсуждается проблема описания всех максимальных коммутативных инволютивных алгебр бесконечномерных матриц.

Всюду в данной работе n — произвольное бесконечное кардинальное число, Ξ — множество индексов мощности n. Далее, пусть $\{e_{i,j}\}$ — семейство матричных единиц такое, что $e_{i,j}$ — $n \times n$-мерная матрица, $e_{i,j} = (a^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Xi}$, (i,j)-ая компонента которой равна 1, а остальные компоненты равны нулю.

Пусть $\{m_\xi\}$ — семейство $n \times n$-мерных матриц и $m_\xi = (m_\xi^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Xi}$ для каждого индекса ξ. Тогда через $\sum_\xi m_\xi$ обозначим матрицу, компоненты которой являются суммой соответствующих компонент матриц из семейства $\{m_\xi\}$, т. е.

$$\sum_\xi m_\xi = \left(\sum_\xi m_\xi^{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta\in\Xi}.$$

Здесь подразумевается, в сумме $\sum_\xi m_\xi^{\alpha\beta}$ число ненулевых членов не более, чем счетно.

Обозначим через $M_n(\mathbb{C})$ множество $n \times n$-мерных матриц $(\lambda^{i,j})_{i,j\in\Xi}$ такое, что для каждой пары индексов i, j из Ξ, $\lambda^{i,j} \in \mathbb{C}$, и существует такое неотрицательное число $K \in \mathbb{R}$, что для всех $n \in N$ и $\{e_{i_k,i_l}\}_{k,l=1}^n \subseteq \{e_{i,j}\}$ имеет место

$$\left\| \sum_{k,l=1}^n \lambda^{i_k,i_l} e_{i_k,i_l} \right\| \leqslant K,$$

где $\| \sum_{k,l=1}^n \lambda^{i_k,i_l} e_{i_k,i_l} \|$ является нормой матрицы $\sum_{k,l=1}^n \lambda^{i_k,i_l} e_{i_k,i_l}$ в конечномерной C*-алгебре, порожденной системой матриц $\{e_{i_k,i_l}\}_{k,l=1}^n$. Легко видеть, что относительно сложения матриц и умножения матрицы на число множество $M_n(\mathbb{C})$ является векторным пространством над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

В векторном пространстве

$$\mathscr{M}_n = \left\{ (\lambda^{i,j})_{i,j\in\Xi} : \ \lambda^{i,j} \in \mathbb{C} \ \ (\forall\, i,j \in \Xi) \right\}$$

всех $n \times n$-мерных матриц над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ введем ассоциативное умножение следующим образом: для произвольных элементов $x = (\lambda^{i,j})_{i,j\in\Xi}$, $y = (\mu^{i,j})_{i,j\in\Xi}$ из $\mathscr{M}_n$ определим произведение x и y как

$$xy = \left(\sum_{\xi\in\Xi} \lambda^{i,\xi}\mu^{\xi,j}\right)_{i,j\in\Xi}.$$

Очевидно, что относительно этой операции векторное пространство $\mathscr{M}_n$ не является алгеброй. В то же время, его подпространство $M_n(\mathbb{C})$ становится ассоциативной алгеброй и $M_n(\mathbb{C}) \cong B(l_2(\Xi))$, где $l_2(\Xi)$ — комплексное гильбертово пространство квадратично суммируемых семейств $\{x_i\}_{i\in\Xi}$, $B(l_2(\Xi))$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$. Поэтому $M_n(\mathbb{C})$ является алгеброй фон Неймана всех (бесконечномерных) $n \times n$-мерных матриц над $\mathbb{C}$ [2].

Напомним, что гильбертово пространство H — это бесконечномерное евклидово пространство, являющееся полным метрическим пространством относительно метрики порожденной скалярным произведением данного евклидова пространства [3, §1.5].

Пусть $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ — множество всех векторных подпространств векторного пространства $\mathscr{M}_n$, являющихся коммутативными инволютивными алгебрами и $\leqslant$ — порядок в $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$, определенный следующим образом: для произвольных коммутативных инволютивных алгебр X, Y из $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ пишем $X \leqslant Y$, если X является подмножеством Y, т. е. $X \subseteq Y$. Этот порядок в $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ удовлетворяет условиям леммы Цорна. Поэтому, для каждого элемента $A \in \mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ существует максимальный относительно этого порядка элемент $\mathscr{A} \in \mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ такой, что $A \leqslant \mathscr{A}$.

Определение. Максимальный относительно порядка $\leqslant$ элемент $\mathscr{A}$ множества $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ будем называть *максимальной коммутативной инволютивной алгеброй в гильбертовом пространстве* $l_2(\Xi)$.

Пусть $\{e_i\}_{i\in\Xi}$ — максимальное ортогональное семейство минимальных проекторов алгебры $B(l_2(\Xi))$ и $\{e_{i,j}\}_{i,j\in\Xi}$ — система матричных единиц построенная по семейству $\{e_i\}_{i\in\Xi}$. Далее, пусть a — произвольный элемент из $\mathscr{M}_n$. Мы будем писать

$$a = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j} e_{i,j},$$

если $e_{i,i} a e_{j,j} = \lambda^{i,j} e_{i,j}$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ.

Теорема 1. *Множество всех ограниченных элементов максимальной коммутативной инволютивной алгебры в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$ является алгеброй фон Неймана.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{A}$ — максимальная коммутативная инволютивная алгебра в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$ и $\mathscr{A}_b$ — подалгебра всех ограниченных элементов алгебры $\mathscr{A}$. Тогда существует максимальная коммутативная инволютивная подалгебра $\mathscr{A}_o$ алгебры $B(l_2(\Xi))$, содержащая алгебру $\mathscr{A}_b$. Берем произвольную сеть (a_α) элементов $\mathscr{A}$, ультраслабо сходящуюся к элементу a из $B(l_2(\Xi))$. Тогда элемент a лежит в $\mathscr{A}_o$.

Предположим, что $\mathscr{A}_o$ содержит максимальное ортогональное семейство $\{e_{i,i}\}_{i\in\Xi}$ минимальных проекторов алгебры $B(l_2(\Xi))$. Тогда спектральное разложение элемента a имеет следующий вид:

$$a = \sum_{i\in\Xi} \lambda^{i,i} e_{i,i},$$

т. е. a является ультраслабым пределом сети $\{\lambda^{i,i} e_{i,i}\}_{i\in\Xi}$. Пусть для каждого α

$$a_\alpha = \sum_{i\in\Xi} \lambda_\alpha^{i,i} e_{i,i}.$$

Так как сеть (a_α) ультраслабо сходится к элементу a в $B(l_2(\Xi))$, то для каждого i сеть $\{\lambda_\alpha^{i,i}\}_{i\in\Xi}$ сходится к $\lambda^{i,i}$. Берем произвольный элемент b из $\mathscr{A}$. Имеем $a_\alpha b = b a_\alpha$ для каждого α. Докажем, что $ab = ba$. Пусть

$$b = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j} e_{i,j},$$

где $\{e_{i,j}\}_{i,j\in\Xi}$ — система матричных единиц построенная по семейству $\{e_i\}_{i\in\Xi}$. Имеем

$$a_\alpha b = \Big(\sum_{i\in\Xi} \lambda_\alpha^{i,i} e_{i,i}\Big)\Big(\sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j} e_{i,j}\Big) = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda_\alpha^{i,i}\lambda^{i,j} e_{i,j}$$

и

$$ba_\alpha = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j}\lambda_\alpha^{j,j} e_{i,j}.$$

Следовательно, для каждой пары i, j индексов из Ξ имеем

$$\lambda_\alpha^{i,i}\lambda^{i,j} = \lambda^{i,j}\lambda_\alpha^{j,j}.$$

Так как комплексное число $\lambda_{i,i}$ является пределом сети $(\lambda_\alpha^{i,i})_\alpha$, то отсюда получаем, что для каждой пары i, j индексов из Ξ имеем

$$\lambda^{i,i}\lambda^{i,j} = \lambda^{i,j}\lambda^{j,j}.$$

Следовательно,

$$ab = \Big(\sum_{i\in\Xi} \lambda^{i,i} e_{i,i}\Big)\Big(\sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j} e_{i,j}\Big) = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,i}\lambda^{i,j} e_{i,j} = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j}\lambda^{j,j} e_{i,j} = ba.$$

Поэтому элемент a лежит в $\mathscr{A}$, а значит a лежит и в $\mathscr{A}_b$. Следовательно, $\mathscr{A}_b$ является ультраслабо замкнутой, т. е. является алгеброй фон Неймана.

Теперь рассмотрим общий случай. Спектральное разложение элемента a имеет следующий вид: существует единственное ограниченное разложение единицы $\lambda \mapsto e_\lambda^a$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ во множестве всех проекторов алгебры $\mathscr{A}_o$ такое, что

$$a = \int_{-\|a\|}^{\|a\|} \lambda \, de_\lambda^a.$$

При этом для элемента $x \in B(l_2(\Xi))$ будет $a \leftrightarrow x$ в том и только в том случае, если $x \leftrightarrow e_\lambda^a$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть для каждого α

$$a_\alpha = \int_{-\|a_\alpha\|}^{\|a_\alpha\|} \lambda \, de_\lambda^\alpha.$$

Берем ортогональное семейство $\{e_{\beta,\beta}\}$ проекторов из $\mathscr{A}_o$ такое, что всякий проектор из семейства $\{e_\lambda^a\} \cup (\cup_\alpha\{e_\lambda^\alpha\})$ представляется как точная верхняя грань некоторого подсемейства семейства $\{e_{\beta,\beta}\}$. Далее рассуждаем также как и ранее. $\rhd$

Пусть $\{e_i\}_{i\in\Xi}$ — максимальное ортогональное семейство минимальных проекторов алгебры $B(l_2(\Xi))$. Через $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$ обозначим множество всех элементов a из $\mathscr{M}_n$ таких, что $e_i a e_j = 0$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ. Тогда множество $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$

является инволютивной алгеброй относительно введенной выше операции умножения и имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Алгебра $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$ является максимальной коммутативной инволютивной алгеброй в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$.*

$\lhd$ Пусть b — произвольный элемент из $\mathscr{M}_n$ такой, что $ab = ba$ для каждого элемента a из $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$. Тогда

$$e_i b = b e_i \quad (\forall\, i \in \Xi).$$

Отсюда $e_i b e_j = b e_i e_j = 0$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ. Поэтому элемент b лежит в $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$. Ввиду произвольности элемента b алгебра $\sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$ является максимальной коммутативной инволютивной алгеброй в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$. $\rhd$

Пусть $\mathscr{A}_o$ — максимальная коммутативная инволютивная подалгебра алгебры $B(l_2(\Xi))$, $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$ — множество всех проекторов из алгебры $\mathscr{A}_o$. Через $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ обозначим множество всех элементов a из $\mathscr{M}_n$ таких, что $eaf = 0$ для каждой пары e, f ортогональных проекторов из $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$. Тогда множество $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ является векторным пространством и имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *$\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ является максимальной коммутативной инволютивной алгеброй в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$.*

$\lhd$ Сперва докажем, что $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ является алгеброй. Пусть a, b — произвольные элементы из $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ и e, f — произвольная пара ортогональных проекторов из $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$. Тогда по определению

$$eaf = fae = 0, \quad ebf = fba = 0.$$

А также $1 - e - f \in \mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$ и по определению $ea(1 - e - f) = 0$. Отсюда

$$eabf = ea(e + f + (1 - e - f))bf = eaebf + eafbf + ea(1 - e - f)bf = ea0 + 0bf + 0bf = 0.$$

Следовательно, произведение ab лежит в $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$. Можно проверить непосредственно, что остальные аксиомы инволютивной алгебры также имеют место для $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$.

Теперь докажем, что инволютивная алгебра $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$ максимальна в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$. Пусть b — произвольный элемент из $\mathscr{M}_n$ такой, что $ab = ba$ для каждого элемента a из $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})$. Тогда

$$eb = be \quad (\forall\, e \in \mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}(\mathbb{C})).$$

Отсюда $ebf = bef = 0$ для каждой пары e, f различных проекторов из $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$. Поэтому элемент b лежит в $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$. Ввиду произвольности элемента b алгебра $\mathscr{P}_{\mathscr{A}_o}$ является максимальной коммутативной инволютивной алгеброй в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$. $\rhd$

Теорема 4. *Пусть $\{e_i\}_{i\in\Xi}$ — максимальное ортогональное семейство минимальных проекторов алгебры $B(l_2(\Xi))$ и $\mathscr{A}$ — максимальная коммутативная инволютивная алгебра в гильбертовом пространстве $l_2(\Xi)$, содержащая элемент a такой, что $e_i a e_i = \lambda^i$, $e_j a e_j = \lambda^j$, $\lambda^i \neq \lambda^j$ и $e_i a e_j = 0$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ. Тогда $\mathscr{A} = \sum_{i\in\Xi}^{\oplus} e_i\mathbb{C}$.*

$\lhd$ Берем произвольный элемент b из $\mathscr{A}$. Имеем $ab = ba$. Пусть

$$b = \sum_{i,j\in\Xi} \lambda^{i,j} e_{i,j},$$

где $\{e_{i,j}\}_{i,j\in\Xi}$ — система матричных единиц построенная по семейству $\{e_i\}_{i\in\Xi}$. Тогда

$$a=\sum_{i\in\Xi}\lambda^{i,i}e_{i,i},$$

что означает $e_iae_j=0\cdot e_{i,j}$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ. Имеем

$$ab=\Big(\sum_{i\in\Xi}\lambda^{i,i}e_{i,i}\Big)\Big(\sum_{i,j\in\Xi}\lambda^{i,j}e_{i,j}\Big)=\sum_{i,j\in\Xi}\lambda^{i,i}\lambda^{i,j}e_{i,j}$$

и

$$ba=\sum_{i,j\in\Xi}\lambda^{i,j}\lambda^{j,j}e_{i,j}.$$

Следовательно, для каждой пары i, j индексов из Ξ имеем

$$\lambda^{i,i}\lambda^{i,j}=\lambda^{i,j}\lambda^{j,j}.$$

Так как $\lambda^{i,i}\neq\lambda^{j,j}$, то $\lambda^{i,j}=0$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ. Следовательно, $e_ibe_j=0$ для каждой пары i, j различных индексов из Ξ, т. е. $b\in\sum_{i\in\Xi}^{\oplus}e_i\mathbb{C}$. Что и требовалось доказать. $\rhd$

Замечание 1. В силу теорем 1, 2 и 3 множество максимальных коммутативных инволютивных подалгебр алгебры $B(l_2(\Xi))$ инъективно вкладывается во множество $\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$. Действительно, пусть $\mathscr{M}(B(l_2(\Xi)))$ — множество всех максимальных коммутативных инволютивных подалгебр алгебры $B(l_2(\Xi))$. Рассмотрим отображение $\phi:\mathscr{M}(B(l_2(\Xi)))\to\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$, определенное как

$$\phi(\mathscr{A}_o)=\mathscr{A},\quad \mathscr{A}_o\in\mathscr{M}(B(l_2(\Xi))),\quad \mathscr{A}\in\mathscr{A}(\mathscr{M}_n),$$

если $\mathscr{A}_o\subset\mathscr{A}$. В силу теорем 2, 3 для каждой алгебры $\mathscr{A}_o\in\mathscr{M}(B(l_2(\Xi)))$ существует единственная алгебра $\mathscr{A}\in\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ содержащая $\mathscr{A}_o$. Поэтому отображение ϕ является инъективным, и вообще мы предполагаем, что ϕ является биективным отображением, т. е. для каждой алгебры $\mathscr{A}\in\mathscr{A}(\mathscr{M}_n)$ существует единственная алгебра $\mathscr{A}_o\in\mathscr{M}(B(l_2(\Xi)))$, содержащаяся в $\mathscr{A}$. Вопрос о том, верно это или нет, остается открытым.

Литература

1. *Arzikulov F. N.* Infinite order and norm decompositions of C^*-algebras // Int. J. of Math. Anal.—2008.—Vol. 2, № 5.—P. 255–262.
2. *Arzikulov F. N.* Infinite order decompositions of C^*-algebras // SpringerPlus.—2016.—Vol. 5, № 1.—P. 1–13. DOI: 10.1186/s40064-016-3468-7.
3. *Ахиезер И. Н., Глазман И. М.* Теория линейных операторов.—М.: Наука, 1966.—377 с.
4. *Inoue A.* On a class of unbounded operator algebras // Pacific J. Math.—1976.—Vol. 65, № 1.—P. 77–95.
5. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.—Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007.—390 с.—(Сер. «Праці Iн-ту математики НАН України». Т. 89).

Статья поступила 9 февраля 2018 г.

Арзикулов Фарходжон Нематжонович
Андижанский государственный университет,
Узбекистан, 170100, Андижан, ул. Университетская, 129
доцент кафедры математики
E-mail: arzikulovfn@rambler.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 16–22

MAXIMAL COMMUTATIVE INVOLUTIVE ALGEBRAS ON A HILBERT SPACE

Arzikulov F. N.[1]
[1] Andizhan State University

Abstract. This paper is devoted to involutive algebras of bounded linear operators on an infinite-dimensional Hilbert space. We study the problem of description of all subspaces of the vector space of all infinite-dimensional $n \times n$-matrices over the field of complex numbers for an infinite cardinal number n that are involutive algebras. There are many different classes of operator algebras on a Hilbert space, including classes of associative algebras of unbounded operators on a Hilbert space. Most involutive algebras of unbounded operators, for example, $\sharp$-algebras, $EC^\sharp$-algebras and $EW^\sharp$-algebras, involutive algebras of measurable operators affiliated with a finite (or semifinite) von Neumann algebra, we can represent as algebras of infinite-dimensional matrices. If we can describe all maximal involutive algebras of infinite-dimensional matrices, then a number of problems of operator algebras, including involutive algebras of unbounded operators, can be reduced to problems of maximal involutive algebras of infinite-dimensional matrices. In this work we give a description of maximal commutative involutive subalgebras of the algebra of bounded linear operators in a Hilbert space as the algebras of infinite matrices.

Key words: involutive algebra, algebra of operators, Hilbert space, infinite matrix, von Neumann algebra.

References

1. *Arzikulov F. N.* Infinite Order and Norm Decompositions of C^*-Algebras. *Int. J. of Math. Anal.*, 2008, vol. 2, no. 5, pp. 255–262.
2. *Arzikulov F. N.* Infinite Order Decompositions of C^*-algebras. *SpringerPlus*, 2016, vol. 5, no. 1, pp. 1–13. DOI: 10.1186/s40064-016-3468-7.
3. *Akhiezer N. I., Glazman I. M. Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, N. Y., Dover Publ., Inc., 1993.
4. *Inoue A.* On a Class of Unbounded Operator Algebras. *Pacific Journal of Mathematics*, 1976, vol. 65, no. 1, pp. 77–95.
5. *Muratov M. A., Chilin V. I. Algebras of Measurable and Locally Measurable Operators*, Ky'iv, Instytut Matematyky NAN Ukra'ny. Matematyky ta'i'i Zastosuvannya, 2007, vol. 69, 390 p.

Received February 9, 2018

Arzikulov Farhodjon Nematjonovich
Andizhan State University,
University Street, Andizhan 710020, Uzbekistan
E-mail: `arzikulovfn@rambler.ru`