Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 4, С. 13–26

УДК **519.635**

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

М. Х. Бештоков, В. З. Канчукоев, Ф. А. Эржибова

В работе исследуется псевдопараболическое уравнение в трехмерной области. Уравнение такого вида предполагает наличие цилиндрической или сферической симметрии, что сразу позволяет перейти от трехмерной задачи к одномерной задаче, но с вырождением. В этой связи проводится исследование разрешимости устойчивости решений краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка общего вида с переменными коэффициентами с условием третьего рода, а также разностных схем, аппроксимирующих эту задачу на равномерных сетках. Основной результат работы заключается в доказательстве априорных оценок, полученных методом энергетических неравенств, для решения задачи как в дифференциальном, так и в разностном виде. Полученные неравенства означают устойчивость решения относительно начальных данных и правой части. В силу линейности рассматриваемых задач эти неравенства позволяют утверждать, что приближенное решение сходится к точному решению рассматриваемой дифференциальной задачи в предположении существования самого решения в классе достаточно гладких функций. На тестовых примерах проведены численные эксперименты, подтверждающие теоретические результаты, полученные в работе.

Ключевые слова: уравнение с вырождением, краевая задача, условие третьего рода, априорная оценка, разностная схема, устойчивость и сходимость разностной схемы, уравнение влагопереноса, псевдопараболическое уравнение.

Введение

Исследованию уравнений псевдопараболического типа посвящено большое количество работ из-за того, что многие вопросы физики, механики, биологии сводятся к таким уравнениям. Например, вопросы фильтрации жидкости в пористых средах [1] передачи тепла в гетерогенной среде [2, 3], влагопереноса в почво-грунтах (см. [4], [5, с. 137]) приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются уравнениями в частных производных псевдопараболического типа.

В работе Г. И. Баренблатта, Ю. П. Желтова, И. Н. Кочиной [6] получено линейное псевдопараболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \big(k(x,t)u_x\big)_x + \big(\eta(x,t)u_x\big)_{xt},$$

описывающее нестационарный процесс фильтрации жидкости в трещиноватой пористой среде. Там же было получено рассматриваемое нами в данной работе вырождающееся псевдопараболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x}\big(xk(x,t)u_x\big)_x + \frac{1}{x}\big(x\eta(x,t)u_x\big)_{xt}.$$

В работах [7–10] предложены разностные методы решения локальных и нелокальных краевых задач для псевдопараболического уравнения.

В настоящей работе приводится исследование решения трехмерного псевдопараболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{$*$}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{3} L_\alpha u, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\eta_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u.$$

Переходя к цилиндрической системе координат (r, φ, z) в случае, когда решение $u = u(r)$ не зависит ни от z, ни от φ (имеет место осевая симметрия), $(*)$ принимает вид (обозначим $x = r$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x}\big(xk(x,t)u_x\big)_x + \frac{1}{x}\big(x\eta(x,t)u_x\big)_{xt} - q(x,t)u + f(x,t),$$

а в случае сферической симметрии уравнение $(*)$ примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\big(x^2k(x,t)u_x\big)_x + \frac{1}{x^2}\big(x^2\eta(x,t)u_x\big)_{xt} - q(x,t)u + f(x,t).$$

1. Постановка задачи

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1.1}$$

$$\lim_{x \to 0} x^m \Pi(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

$$-\Pi(l,t) = \beta(t)u(l,t) - \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.4}$$

где

$$Lu = \frac{1}{x^m}\Big(x^m k(x,t)u_x\Big)_x + \frac{1}{x^m}\Big(x^m \eta(x,t)u_x\Big)_{xt} - q(x,t)u.$$

Коэффициенты уравнения (1.1) и граничных условий (1.2)–(1.4) удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < c_0 \leqslant k(x,t), \quad \eta(x,t) \leqslant c_1, \quad |k_t(x,t), \eta_t(x,t), q(x,t), \beta(t)| \leqslant c_2. \tag{1.5}$$

Предполагается, что задача (1.1)–(1.4) имеет единственное решение, обладающее нужным по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения (1.1) и граничных условий (1.2)–(1.4) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающей нужный порядок аппроксимации разностной схемы. Заметим, что при построении разностных схем требуется более высокая, чем гладкость решения и коэффициентов уравнения:

$$u \in C^{4,3}(\overline{Q}_T), \quad \eta \in C^{3,3}(\overline{Q}_T), \quad k \in C^{3,2}(\overline{Q}_T), \quad q, f \in C^{2,2}(\overline{Q}_T),$$

$\beta(t)$, $\mu(t)$ — функции, непрерывные на $[0, T]$, $\Pi(x,t) = ku_x + (\eta u_x)_t$ — полный поток, $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$, c_0, c_1, c_2 — положительные числа, $0 \leqslant m \leqslant 2$.

По ходу изложения будем использовать положительные постоянные числа M_i, $i = 1, 2, \ldots$, зависящие только от входных данных задачи (1.1)–(1.4).

Заметим, что при $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (1.2), если коэффициенты уравнения $q(0,t)$, $f(0,t)$ — конечны, то условие (1.2) можно заменить требованием $\Pi(0,t) = 0$.

2. Априорная оценка в дифференциальной трактовке

Лемма 1 [12], [13, с. 73]. *Для любой функции $u(x) \in C^1[x_0, l]$, имеющей суммируемую с квадратом на $[0, l]$ производную с весом $x^{\frac{m}{2}} u_x$, справедливо неравенство*

$$\max_{x \in [x_0, l]} u^2(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{x_0^m} \big\| x^{\frac{m}{2}} u_x \big\|_0^2 + c_\varepsilon \big\| x^{\frac{m}{2}} u \big\|_0^2,$$

где $\varepsilon > 0$, $c_\varepsilon = \frac{1}{x_0^m}\Big(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l - x_0}\Big)$, $x_0 \geqslant \delta > 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.5). *Тогда для решения дифференциальной задачи* (1.1)–(1.4) *справедлива априорная оценка*

$$\big\| x^{\frac{m}{2}} u \big\|_0^2 + \big\| x^{\frac{m}{2}} u_x \big\|_0^2 + \big\| x^{\frac{m}{2}} u_x \big\|_{Q_t}^2 \leqslant M \left(\int\limits_0^t \Big(\big\| x^{\frac{m}{2}} f \big\|_0^2 + \mu^2(\tau) \Big)\, d\tau + \big\| x^{\frac{m}{2}} u_0 \big\|_0^2 + \big\| x^{\frac{m}{2}} u_0' \big\|_0^2 \right),$$

где M зависит только от входных данных задачи (1.1)–(1.4).

$\lhd$ В предположении существования решения дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) в цилиндре $\overline{Q}_T$ получим априорную оценку для ее решения. Для этого воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1.1) скалярно на $x^m u$:

$$\big(u_t, x^m u\big) = \big((x^m k u_x)_x, u\big) + \big((x^m \eta u_x)_{xt}, u\big) - \big(qu, x^m u\big) + \big(f, x^m u\big), \tag{2.1}$$

где

$$\big(u, v\big) = \int\limits_0^l uv\, dx, \quad \|u\|_0^2 = (u, u).$$

$$\big(u_t, x^m u\big) = \int\limits_0^l x^m u_t u\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^l x^m (u^2)_t\, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_0^l x^m u^2\, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \big\| x^{\frac{m}{2}} u \big\|_0^2. \tag{2.2}$$

$$\big((x^m k u_x)_x, u\big) = \int\limits_0^l (x^m k u_x)_x u\, dx = x^m k u_x u\big|_0^l - \int\limits_0^l x^m k u_x^2\, dx. \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\big((x^m\eta u_x)_{xt},u\big)&=\int\limits_0^l (x^m\eta u_x)_{xt}u\,dx=(x^m\eta u_x)_t u\big|_0^l-\int\limits_0^l (x^m\eta u_x)_t u_x\,dx\\&=(x^m\eta u_x)_t u\big|_0^l-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^l x^m\eta u_x^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^l x^m\eta_t u_x^2\,dx.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Учитывая преобразования (2.2)–(2.4), граничные условия (1.2)–(1.4) и пользуясь неравенством Коши с ε, из (2.1) получим

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^l x^m\eta u_x^2\,dx+c_0\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2\\&\qquad\leqslant l^m\Pi(l,t)u(l,t)+M_1\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\Big)+\frac{1}{2}\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2.\end{aligned}\tag{2.5}$$

С помощью леммы 1, неравенства Коши с ε и условия (1.3) оценим первое слагаемое в правой части неравенства (2.5) следующим образом:

$$\begin{aligned}&l^m\Pi(l,t)u(l,t)=l^m u(l,t)\big(\mu(t)-\beta(t)u(l,t)\big)\\&\quad\leqslant\frac{l^m}{2}\Big(\mu^2(t)+u^2(l,t)-\beta^2(t)u^2(l,t)\Big)\leqslant\frac{l^m}{2}\mu^2(t)+M_2\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2\Big).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Учитывая оценку (2.6), из (2.5) находим

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\frac{d}{dt}\int\limits_0^l x^m\eta u_x^2\,dx+2c_0\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2\\&\qquad\leqslant M_3\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2\Big)+M_4\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu^2(t)\Big).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Проинтегрировав (2.7) по τ от 0 до t, получаем

$$\begin{aligned}&\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_{Q_t}^2\leqslant M_5\int\limits_0^t\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2\Big)\,d\tau\\&\qquad+M_6\int\limits_0^t\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu^2(\tau)\Big)\,d\tau+M_7\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}u_0\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_0'\big\|_0^2\Big),\end{aligned}\tag{2.8}$$

где

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_{Q_t}^2=\int\limits_0^t\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2\,d\tau.$$

На основании леммы Гроноулла (см. [13, с. 152]) из (2.8) получим искомую априорную оценку

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_{Q_t}^2\leqslant M\Bigg(\int\limits_0^t\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu^2(\tau)\Big)d\tau+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_0\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_0'\big\|_0^2\Bigg),$$

где M — зависит только от входных данных задачи (1.1)–(1.4).

Из полученной априорной оценки следует единственность решения исходной задачи (1.1)–(1.4), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме $\|x^{\frac{m}{2}}u\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_{Q_t}^2$. $\rhd$

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1.1)–(1.4) применим метод конечных разностей. В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку [11]:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \big\{(x_i, t_j),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t \in \overline{\omega}_\tau\big\},$$

$$\overline{\omega}_h = \big\{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ Nh = l\big\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \big\{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, m_0,\ m_0\tau = T\big\}.$$

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h,\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$:

$$\overline{\varkappa} y_{t,i} = \Lambda(\overline{t}) y_i^{(\sigma)} + \Lambda^*(t) y_i + \varphi_i, \qquad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{3.1}$$

$$a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \big(\gamma_1 y_{x,0}\big)_t = \frac{0.5h}{m+1}\Big(y_{t,0} + d_0 y_0^{(\sigma)}\Big) - \widetilde{\mu}_1, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{3.2}$$

$$-\Big(a_N y_{\overline{x},N}^{(\sigma)} + \big(\gamma y_{\overline{x}}\big)_{t,N}\Big) = \widetilde{\varkappa}\overline{\beta} y_N^{(\sigma)} + 0.5h\widetilde{\varkappa} y_{t,N} - \widetilde{\mu}_2, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{3.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{3.4}$$

где

$$\Lambda(\overline{t}) y_i^{(\sigma)} = \frac{1}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)}\Big)_x - d_i^j y_i^{(\sigma)}, \quad \Lambda^*(t) y = \frac{1}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m \gamma_i^j y_{\overline{x},i}\Big)_{xt},$$

$$\overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad m_\sigma = \begin{cases} 2, & \sigma = 0.5, \\ 1, & \sigma \neq 0.5, \end{cases}$$

$y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-\sigma)y$, σ — параметр, от которого зависит точность разностной схемы по τ. В дальнейшем будем считать, что $\sigma = 0.5$, $y^{(0.5)} = 0.5(\hat{y} + y)$, $Y = \hat{y} + y$.

$$y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad \widetilde{\varkappa} = 1 + \frac{0.5hm}{l}, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad y = y^j, \quad y_{\overline{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h},$$

$$y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_t = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau}, \quad \overline{t} = t_{j+0.5} = t_j + 0.5\tau,$$

$$a_i = k(x_{i-0.5}, \overline{t}_j), \quad \gamma_i^j = \eta(x_{i-0.5}, t_j), \quad \overline{\beta} = \beta + 0.5hd_N,$$

$$d_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa} q(x_i, \overline{t}_j), & i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ q(x_i, \overline{t}_j), & i = 0, N, \end{cases} \qquad \varphi_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa} f(x_i, \overline{t}_j), & i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ f(x_i, \overline{t}_j), & i = 0, N, \end{cases}$$

$$\widetilde{\mu}_1 = \frac{0.5h}{m+1}\varphi_0^j, \quad \widetilde{\mu}_2 = \widetilde{\varkappa}\Big(\mu^{j+0.5} + 0.5h\varphi_N^j\Big), \quad x_{i-0.5} = x_i - 0.5h,$$

где h, τ — шаги сетки.

Априорную оценку решения разностной схемы (3.1)–(3.4) получим методом энергетических неравенств. Для этого перепишем схему при $\sigma = 0.5$:

$$\overline{\varkappa} y_t = \frac{1}{2}\Lambda(\overline{t})Y + \Lambda^*(t)y + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{2}a_1 Y_{x,0} + \left(\gamma_1 y_{x,0}\right)_t = \frac{0.5h}{m+1}\left(y_{t,0} + \frac{1}{2}d_0 Y_0\right) - \widetilde{\mu}_1, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{3.6}$$

$$-\left(\frac{1}{2}a_N Y_{\overline{x},N} + \left(\gamma y_{\overline{x}}\right)_{t,N}\right) = \frac{\widetilde{\varkappa}\overline{\beta}}{2}Y_N + 0.5h\widetilde{\varkappa} y_{t,N} - \widetilde{\mu}_2, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{3.7}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{3.8}$$

где

$$\Lambda(\overline{t})Y_i = \frac{1}{x_i^m}\left(x_{i-0.5}^m a_i Y_{\overline{x},i}\right)_x - dY_i, \quad \Lambda^*(t)y = \frac{1}{x_i^m}\left(x_{i-0.5}^m \gamma_i^j y_{\overline{x},i}\right)_{xt}.$$

Перепишем задачу (3.5)–(3.8) в операторной форме

$$\overline{\overline{\varkappa}} y_t = \overline{\Lambda}(\overline{t})y + \overline{\Lambda}^* y + \overline{\Phi}, \tag{3.9}$$

$$y(x,0) = 0, \tag{3.10}$$

где

$$\overline{\Lambda}(\overline{t})y = \begin{cases} \Lambda y = \frac{1}{2x_i^m}\left(x_{i-0.5}^m a_i(\hat{y}+y)_{\overline{x},i}\right)_x - \frac{d_i}{2}(\hat{y}+y)_i, & (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ \Lambda^- y = \frac{(m+1)\left(\frac{1}{2}a_1(\hat{y}+y)_{x,0} - \frac{0.5h}{2(m+1)}d_0(\hat{y}+y)_0\right)}{0.5h}, & x = 0, \\ \Lambda^+ y = \frac{-\frac{1}{2}a_N(\hat{y}+y)_{\overline{x},N} - \frac{\widetilde{\varkappa}\overline{\beta}}{2}(\hat{y}+y)_N}{0.5h\widetilde{\varkappa}}, & x = l, \end{cases}$$

$$\overline{\Lambda}^* y = \begin{cases} \Lambda^* y = \frac{1}{x_i^m}\left(x_{i-0.5}^m \gamma_i y_{\overline{x},i}\right)_{xt}, & (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ \Lambda^{*-} y = \frac{(m+1)\left(\gamma_1 y_{x,0}\right)_t}{0.5h}, & x = 0, \\ \Lambda^{*+} y = -\frac{\left(\gamma y_{\overline{x}}\right)_{t,N}}{0.5h\widetilde{\varkappa}}, & x = l, \end{cases} \qquad \overline{\Psi} = \begin{cases} \varphi_i, & (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ \varphi^- = \frac{(m+1)\widetilde{\mu}_1}{0.5h}, & x = 0, \\ \varphi^+ = \frac{\widetilde{\mu}_2}{0.5h\widetilde{\varkappa}}, & x = l, \end{cases}$$

$$\overline{\overline{\varkappa}} = \begin{cases} \overline{\varkappa}, & (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ 1, & x = 0, l. \end{cases}$$

Введем скалярное произведение и норму

$$\left(u, v\right] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, & i = N, \\ h, & i \neq N, \end{cases} \qquad \left\|u\right]\!\big|_0^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \hbar = \left(1, u^2\right].$$

Предположим, что

$$d_0 = q(0,t) \geqslant c_0 > 0. \tag{3.11}$$

Умножим разностное уравнение (3.9) скалярно на $x^m Y = x^m(\hat{y}+y)$:

$$\left(\overline{\overline{\varkappa}} y_t, x^m Y\right] = \left(\overline{\Lambda}(\overline{t})y, x^m Y\right] + \left(\overline{\Lambda}^* y, x^m Y\right] + \left(\overline{\Phi}, x^m Y\right]. \tag{3.12}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (3.12):

$$\Big(\overline{\overline{\varkappa}}y_t, x^mY\Big] = \bigg(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{\tau}(\hat{y}-y), x^m(\hat{y}+y)\bigg]$$
$$= \frac{\big(\overline{\overline{\varkappa}}x^m, \hat{y}^2\big] - \big(\overline{\overline{\varkappa}}x^m, y^2\big]}{\tau} = \Big(\overline{\overline{\varkappa}}x^m, y^2\Big]_t \geqslant M_1\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2\Big)_t, \tag{3.13}$$

$$M_1 = \begin{cases} 1, & m=0,\ m\geqslant 1,\\ \frac{1}{2}, & m\in(0,1),\ h\leqslant h_0 = \sqrt{\frac{12x^{2-m}}{m(1-m)}}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\big(\overline{\Lambda}(\overline{t})y, x^mY\big] &= \big(\Lambda y, x^mY\big) + 0.5h\Lambda^+y_Nx_N^mY_N\\
= \bigg(\frac{1}{2}\big(x^m_{i-0.5}aY_{\overline{x}}\big)_x, Y\bigg) &- \bigg(\frac{d}{2}x^m, Y^2\bigg) + 0.5h\Lambda^+y_Nx_N^mY_N\\
= -\frac{1}{2}\Big(x^m_{i-0.5}aY_{\overline{x}}, \big(\chi Y\big)_{\overline{x}}\Big] &+ \frac{1}{2}x^m_{N-0.5}a_N\chi_NY_{\overline{x},N}Y_N - \frac{1}{2}x^m_{0.5}a_1\chi_0Y_{x,0}Y_0\\
-\frac{1}{2}\frac{x_N^m}{\widetilde{\varkappa}}a_N\chi_NY_{\overline{x},N}Y_N &- \bigg(\frac{d}{2}x^m, Y^2\bigg) - \frac{1}{2}x_N^m\overline{\beta}Y_N^2;
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\big(\overline{\Lambda}^*y, x^mY\big] &= \big(\Lambda^*y, x^mY\big) + 0.5h\Lambda^{*+}yx_N^mY_N = \big((x^m_{i-0.5}\gamma y_{\overline{x}})_{xt}, Y\big) - \frac{x_N^m}{\widetilde{\varkappa}}\big(\gamma y_x\big)_{t,N}Y_N\\
&= -\big(x^m_{i-0.5}(\gamma y_{\overline{x}})_t, Y_{\overline{x}}\big] + \bigg(x^m_{N-0.5} - \frac{x_N^m}{\widetilde{\varkappa}}\bigg)\big(\gamma y_x\big)_{t,N}Y_N - x^m_{0.5}\big(\gamma_1y_{x,0}\big)_tY_0,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\big(\overline{\Phi}, x^mY\big] = \big(\varphi, x^mY\big) + 0.5h\varphi^+Y_N = \big(\varphi, x^mY\big) + \widetilde{\mu}_2\frac{x_N^m}{\widetilde{\varkappa}}Y_N. \tag{3.16}$$

Принимая во внимание преобразования (3.13)–(3.16), из (3.12) получаем

$$\begin{aligned}
M_1\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2\Big)_t &\leqslant -\frac{1}{2}\Big(x^m_{i-0.5}aY_{\overline{x}}, \big(\chi Y\big)_{\overline{x}}\Big] - \Big(x^m_{i-0.5}(\gamma y_{\overline{x}})_t, Y_{\overline{x}}\Big]\\
- x^m_{0.5}Y_0\bigg(\frac{1}{2}\,a_1\chi_0Y_{x,0} + \big(\gamma_1y_{x,0}\big)_t\bigg) &+ \bigg(x^m_{N-0.5} - \frac{x_N^m}{\widetilde{\varkappa}}\bigg)\bigg(\frac{1}{2}\,a_N\chi_NY_{\overline{x},N}Y_N + \big(\gamma y_{\overline{x}}\big)_{t,N}Y_N\bigg)\\
-\bigg(\frac{d}{2}x^m, Y^2\bigg) &- \frac{1}{2}\,x_N^m\overline{\beta}Y_N^2 - \big(\varphi, x^mY\big) + \widetilde{\mu}_2\frac{x_N^m}{\widetilde{\varkappa}}Y_N.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Учитывая (3.6), (3.7), из (3.17) находим

$$\begin{aligned}
M_1\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2\Big)_t &\leqslant -\frac{1}{2}\Big(x^m_{i-0.5}aY_{\overline{x}}, \big(\chi Y\big)_{\overline{x}}\Big] - \Big(x^m_{i-0.5}(\gamma y_{\overline{x}})_t, Y_{\overline{x}}\Big]\\
-\Big(\frac{d}{2}x^m, Y^2\Big) &+ \big(\varphi, x^mY\big) - \frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}y_{t,0}Y_0 - 0.5hx^m_{N-0.5}\widetilde{\varkappa}y_{t,N}Y_N\\
-\frac{1}{2}x^m_{N-0.5}\widetilde{\varkappa}\overline{\beta}Y_N^2 &- \frac{0.5h}{2(m+1)}x^m_{0.5}d_0Y_0^2 + x^m_{N-0.5}\widetilde{\mu}_2Y_N + \widetilde{\mu}_1x^m_{0.5}Y_0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Оценим суммы, входящие в (3.18):

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\Big(x^m_{i-0.5}aY_{\overline{x}}, \big(\chi Y\big)_{\overline{x}}\Big] &= -\frac{1}{2}\Big(x^m_{i-0.5}a\check{\chi}, Y^2_{\overline{x}}\Big] - \frac{1}{2}\Big(x^m_{i-0.5}a\chi_{\overline{x}}, Y_{\overline{x}}Y\Big]\\
-\frac{1}{2(1+c_3\tau)}\Big(x^m_{i-0.5}a\chi, Y^2_{\overline{x}}\Big] &- \frac{1}{2}\Big(x^m_{i-0.5}a\chi_{\overline{x}}, Y_{\overline{x}}Y\Big] \leqslant -M_2\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}Y_{\overline{x}}\big]\big|^2 + M_3(\overline{x}^mY, Y_{\overline{x}}],
\end{aligned} \tag{3.19}$$

где $\overline{x}^m = x^m_{i-0.5}$,

$$-\Big(x^m_{i-0.5}(\gamma y_{\overline{x}})_t, Y_{\overline{x}}\Big] = -\Big(1, x^m_{i-0.5}(\gamma y^2_{\overline{x}})_t\Big] - \Big(1, x^m_{i-0.5}\gamma_t y_{\overline{x}} Y_{\overline{x}}\Big] + \Big(\gamma_t, x^m_{i-0.5} y^2_{\overline{x}}\Big], \tag{3.20}$$

$$-\frac{1}{2}\Big(dx^m, Y^2\Big) + x^m_{N-0.5}\widetilde{\mu}_2 Y_N - \frac{1}{2}x^m_{N-0.5}\widetilde{\varkappa}\overline{\beta}Y^2_N \leqslant M_4(x^m, Y^2] + M_5 Y^2_N + M_6\widetilde{\mu}^2_2, \tag{3.21}$$

$$\big(\varphi, x^m Y\big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}Y\big]\big|^2_0 + \big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|^2_0\Big), \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}y_{t,0}Y_0 - 0.5hx^m_{N-0.5}\widetilde{\varkappa}y_{t,N}Y_N \\ &= -\frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}\frac{1}{\tau}(\hat{y}_0 - y_0)(\hat{y}_0 + y_0) - 0.5hx^m_{N-0.5}\widetilde{\varkappa}\frac{1}{\tau}(\hat{y}_N - y_N)(\hat{y}_N + y_N) \\ &= -\frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}(y^2_0)_t - 0.5hx^m_{N-0.5}\widetilde{\varkappa}(y^2_N)_t, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_1 x^m_{0.5}Y_0 - \frac{0.5h}{2(m+1)}x^m_{0.5}d_0Y^2_0 &= \widetilde{\mu}_1 x^m_{0.5}\frac{\sqrt{\frac{0.5hd_0}{2(m+1)}}}{\sqrt{\frac{0.5hd_0}{2(m+1)}}}Y_0 - \frac{0.5h}{2(m+1)}x^m_{0.5}d_0Y^2_0 \\ &\leqslant \frac{2(m+1)x^m_{0.5}}{0.5hd_0}\widetilde{\mu}^2_1 \leqslant M_7\widetilde{\mu}^2_1. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Учитывая преобразования (3.19)–(3.24), из (3.18) получаем

$$\begin{aligned} &M_1\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big]\big|^2_0\Big)_t + \big(1, \overline{x}^m(\gamma y^2_{\overline{x}})_t\big] + M_2\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}Y_{\overline{x}}\big]\big|^2_0 + \frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}(y^2_0)_t \\ &+0.5\,hx^m_{N-0.5}\widetilde{\varkappa}(y^2_N)_t \leqslant M_8\big(\overline{x}^m Y, Y_{\overline{x}}\big] - \big(1, \overline{x}^m\gamma_t y_{\overline{x}}Y_{\overline{x}}\big] + \big(\gamma_t, \overline{x}^m y^2_{\overline{x}}\big] \\ &+M_9\big\|x^{\frac{m}{2}}Y\big]\big|^2_0 + \frac{1}{2}\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|^2_0 + M_{10}\Big(\widetilde{\mu}^2_1 + \widetilde{\mu}^2_2 + Y^2_N\Big). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Справедлива следующая

Лемма 2 [13]. *Для любой функции $y(x)$, заданной на сетке $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 1, 2, \ldots, N\}$, справедливо неравенство*

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant l} y^2(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{x^m_0}\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}\big]\big|^2_0 + c(\varepsilon)\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big]\big|^2_0,$$

где ε — произвольная положительная постоянная, $c(\varepsilon) = \frac{1}{x^m_0}\Big(\frac{1}{l - x_0} + \frac{1}{\varepsilon}\Big)$, $0 < \delta \leqslant x_0$.

С учетом леммы 2 и на основании неравенства Коши с ε из (3.25) находим

$$\begin{aligned} &M_1\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big]\big|^2_0\Big)_t + \big(1, \overline{x}^m\gamma y^2_{\overline{x}}\big]_t + M_2\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}Y_{\overline{x}}\big]\big|^2_0 + \frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}(y^2_0)_t + 0.5hx^m_{N-0.5}\widetilde{\varkappa}(y^2_N)_t \\ &\leqslant 4\varepsilon\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}Y_{\overline{x}}\big]\big|^2_0 + M_{11}(\varepsilon)\big\|x^{\frac{m}{2}}Y\big]\big|^2_0 + M_{12}(\varepsilon)\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}\big]\big|^2_0 + M_{13}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|^2_0 + \widetilde{\mu}^2_1 + \widetilde{\mu}^2_2\Big). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (3.26)

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}Y\big]\big|^2_0 = \big\|x^{\frac{m}{2}}(\hat{y} + y)\big]\big|^2_0 \leqslant 2\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\hat{y}\big]\big|^2_0 + \big\|x^{\frac{m}{2}}y\big]\big|^2_0\Big). \tag{3.27}$$

Перепишем (3.26) при $\varepsilon = \frac{M_2}{8}$ с учетом (3.27). Тогда получим

$$
\begin{gathered}
M_1\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big]\big|_0^2\Big)_t + \big(1, \overline{x}^m\gamma y_{\overline{x}}^2\big]_t + \frac{M_2}{2}\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}Y_{\overline{x}}\big]\big|_0^2 + \frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m(y_0^2)_t + 0.5hx_{N-0.5}^m\widetilde{\varkappa}(y_N^2)_t \\
\leqslant M_{14}\big\|x^{\frac{m}{2}}\hat{y}\big]\big|_0^2 + M_{15}\Big(\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}\big]\big|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}}y\big]\big|_0^2\Big) + M_{16}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \widetilde{\mu}_1^2 + \widetilde{\mu}_2^2\Big).
\end{gathered} \tag{3.28}
$$

Умножим обе части (3.28) на τ и просуммируем по j' от 0 до j :

$$
\begin{gathered}
M_1\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\big]\big|_0^2 + c_0\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}^{j+1}\big]\big|_0^2 + \frac{M_2}{2}\sum_{j'=0}^{j}\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}Y_{\overline{x}}^{j'}\big]\big|_0^2\tau + \frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m\big(y_0^{j+1}\big)^2 \\
+ 0.5\,hx_{N-0.5}^m\widetilde{\varkappa}\big(y_N^{j+1}\big)^2 \leqslant M_{17}\sum_{j'=0}^{j}\big\|x^{\frac{m}{2}}\hat{y}^{j'}\big]\big|_0^2\tau + M_{18}\sum_{j'=0}^{j}\Big(\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}^{j'}\big]\big|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j'}\big]\big|_0^2\Big)\tau \\
+ M_{19}\sum_{j'=0}^{j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \widetilde{\mu}_1^2 + \widetilde{\mu}_2^2\Big)\tau + M_{20}\Big(\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}^0\big]\big|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}}y^0\big]\big|_0^2\Big) \\
+ \frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m\big(y_0^0\big)^2 + 0.5hx_{N-0.5}^m\widetilde{\varkappa}\big(y_N^0\big)^2.
\end{gathered} \tag{3.29}
$$

Оценим слагаемые, входящие в (3.29)

$$
\begin{gathered}
M_{17}\sum_{j'=0}^{j}\big\|x^{\frac{m}{2}}\hat{y}\big]\big|_0^2\tau + M_{18}\sum_{j'=0}^{j}\Big(\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}\big]\big|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}}y\big]\big|_0^2\Big)\tau \leqslant M_{21}\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\big]\big|_0^2 \\
+ M_{22}\sum_{j'=1}^{j}\Big(\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}^{j'}\big]\big|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j'}\big]\big|_0^2\Big)\tau + M_{23}\Big(\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}^0\big]\big|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}}y^0\big]\big|_0^2\Big)\tau,
\end{gathered} \tag{3.30}
$$

$$
\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m\big(y_0^0\big)^2 + 0.5hx_{N-0.5}^m\widetilde{\varkappa}\big(y_N^0\big)^2 \leqslant M_{24}\Big(\big\|y_{\overline{x}}^0\big]\big|_0^2 + \big\|y^0\big]\big|_0^2\Big), \tag{3.31}
$$

$$
\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}^0\big]\big|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}}y^0\big]\big|_0^2 \leqslant M_{25}\Big(\big\|y_{\overline{x}}^0\big]\big|_0^2 + \big\|y^0\big]\big|_0^2\Big). \tag{3.32}
$$

С учетом (3.30)–(3.32) из (3.29) находим

$$
\begin{gathered}
\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\big]\big|_0^2 + \big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}^{j+1}\big]\big|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j}\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}Y_{\overline{x}}^{j'}\big]\big|_0^2\tau \\
\leqslant M_{21}\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\big]\big|_0^2\tau + M_{26}\sum_{j'=1}^{j}\Big(\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}}y_{\overline{x}}^{j'}\big]\big|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j'}\big]\big|_0^2\Big)\tau \\
+ M_{27}\left(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \widetilde{\mu}_1^2 + \widetilde{\mu}_2^2\Big)\tau + \big\|y_{\overline{x}}^0\big]\big|_0^2 + \big\|y^0\big]\big|_0^2\right).
\end{gathered} \tag{3.33}
$$

Выбирая τ таким образом, что для всех $\tau \leqslant \tau_0$, $\tau_0 = \frac{1}{2M_{21}}$, из (3.33) получаем

$$\begin{aligned}\big\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\big]\big|_0^2 + \big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}} y_{\overline{x}}^{j+1}\big]\big|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j} \big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}} Y_{\overline{x}}^{j'}\big]\big|_0^2\tau \\ \leqslant M_{28}\sum_{j'=1}^{j}\Big(\big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}} y_{\overline{x}}^{j'}\big]\big|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}} y^{j'}\big]\big|_0^2\Big)\tau \\ + M_{29}\left(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \widetilde{\mu}_1^2 + \widetilde{\mu}_2^2\Big)\tau + \big\|y_{\overline{x}}^0\big]\big|_0^2 + \big\|y^0\big]\big|_0^2\right),\end{aligned} \tag{3.34}$$

На основании леммы 4 из [15, с. 171] из (3.38) получаем

$$\big\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\big]\big|_0^2 + \big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}} y_{\overline{x}}^{j+1}\big]\big|_0^2 \leqslant M_{30}\left(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \widetilde{\mu}_1^2 + \widetilde{\mu}_2^2\Big)\tau + \big\|y_{\overline{x}}^0\big]\big|_0^2 + \big\|y^0\big]\big|_0^2\right). \tag{3.35}$$

Учитывая (3.35), из (3.34) получаем априорную оценку

$$\begin{aligned}\big\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\big]\big|_0^2 + \big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}} y_{\overline{x}}^{j+1}\big]\big|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j} \big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}} Y_{\overline{x}}^{j'}\big]\big|_0^2\tau \\ \leqslant M\left(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|_0^2 + \widetilde{\mu}_1^2 + \widetilde{\mu}_2^2\Big)\tau + \big\|y_{\overline{x}}^0\big]\big|_0^2 + \big\|y^0\big]\big|_0^2\right),\end{aligned} \tag{3.36}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.5) *и* (3.11). *Тогда существуют такие* h_0, τ_0, *что если* $\tau \leqslant \tau_0$, $h \leqslant h_0$, *то при* $\sigma = 0.5$ *для решения разностной задачи* (3.1)–(3.4) *справедлива априорная оценка* (3.36).

Из полученной априорной оценки следует единственность, а также устойчивость решения разностной задачи (3.1)–(3.4) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4), $y(x_i,t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (3.1)–(3.4). Обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность, где $u_i^j = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в (3.1)–(3.4), получим задачу для z:

$$\overline{\varkappa} z_{t,i} = \Lambda(\overline{t}) z_i^{(\sigma)} + \Lambda^*(t) z + \Psi_i, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{3.37}$$

$$a_1\chi_0 z_{x,0}^{(\sigma)} + \big(\gamma_1 z_{x,0}\big)_t = \frac{0.5h}{m+1}\Big(z_{t,0} + d_0 z_0^{(\sigma)}\Big) - \nu_1, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{3.38}$$

$$-\Big(a_N\chi_N z_{\overline{x},N}^{(\sigma)} + \big(\gamma z_{\overline{x}}\big)_{t,N}\Big) = \widetilde{\varkappa}\overline{\beta} z_N^{(\sigma)} + 0.5h\widetilde{\varkappa} z_{t,N} - \nu_2, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{3.39}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{3.40}$$

где $\Psi = O\big(\frac{h^2+\tau^{m_\sigma}}{x}\big)$, $\nu_1 = O\big(h^2 + \tau^{m_\sigma}\big)$, $\nu_2 = O\big(h^2 + \tau^{m_\sigma}\big)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) разностной схемой (3.1)–(3.4) в классе решений $u = u(x,t)$ задачи (1)–(4).

Применяя априорную оценку (3.36) к решению задачи (3.37)–(3.40), получаем

$$\big\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\big]\big|_0^2 + \big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}} z_{\overline{x}}^{j+1}\big]\big|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j} \big\|\overline{x}^{\frac{m}{2}} (\hat{z}+z)_{\overline{x}}^{j'}\big]\big|_0^2\tau \leqslant M\sum_{j'=0}^{j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\Psi\big\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2\Big)\tau, \tag{3.41}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из (3.41) получим априорную оценку

$$\big\|xz^{j+1}\big]\!\big|_0^2 + \big\|\overline{x}z_{\overline{x}}^{j+1}\big]\!\big|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j} \big\|\overline{x}(\hat{z}+z)_{\overline{x}}^{j'}\big]\!\big|_0^2\tau \leqslant \overline{M}\sum_{j'=0}^{j}\Big(\big\|x\Psi\big\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2\Big)\tau. \tag{3.42}$$

Из априорной оценки (3.42) следует сходимость решения разностной задачи (3.1)–(3.4) к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) по норме

$$\big\|xz^{j+1}\big]\!\big|_1^2 = \big\|xz^{j+1}\big]\!\big|_0^2 + \big\|\overline{x}z_{\overline{x}}^{j+1}\big]\!\big|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j}\big\|\overline{x}(\hat{z}+z)_{\overline{x}}^{j'}\big]\!\big|_0^2\tau$$

на каждом слое так, что если существуют такие h_0, τ_0, то при $\sigma = 0.5$, $\tau \leqslant \tau_0$, $h \leqslant h_0$ справедлива оценка $\big\|x(y^{j+1}-u^{j+1})\big]\!\big|_1^2 \leqslant \overline{M}\big(h^2+\tau^2\big)$, где $\overline{M}$ — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Численный эксперимент. Рассмотрим следующую тестовую задачу:

$$u_t = \frac{1}{x^m}\big(x^m k(x,t)u_x\big)_x + \frac{1}{x^m}\big(x^m\eta(x,t)u_x\big)_{xt} + r(x,t)u_x - q(x,t)u + f(x,t),$$
$$0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T,$$
$$\Pi(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$-\Pi(l,t) = \beta(t)u(l,t) - \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$k(x,t) = e^{x+t}, \quad \eta(x,t) = e^{x-t}, \quad q(x,t) = e^{xt},$$
$$f(x,t) = -4e^{x^4-4t} - 4(3+m)x^2(1-e^{-t}) + e^{xt+x^4-4t},$$
$$\beta = e^t\cos(t), \quad \mu(t) = e^t\cos(t)(\cos(t)-1), \quad u_0(x) = e^{x^4},$$
$$\Pi(x,t) = k(x,t)u_x + \Big(\eta(x,t)u_x\Big)_t.$$

Точное решение задачи $u(x,t) = \cos(x) + \cos(t)$.

Ниже в таблице 1 сравниваются значения численного и точного решении задачи при $m = 2$. Таблица 2 показывает, что когда $h = \tau$, при уменьшении размера сетки максимальное значение погрешности при $\sigma = 0.5$, $m = 2$ уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации разностной схемы $O(h^2+\tau^2)$. Порядок сходимости равен $\log_{\frac{h_1}{h_2}}\frac{e_1}{e_2}$.

Таблица 1

Разность между численным и точным решениями задачи при $t = 1$, $h = \tau = 0.1$

(x_i)	Численное решение	Точное решение	Погрешность
0.0000	-0.0850179	0.0000000	0.0850179
0.1000	-0.1000645	-0.0489435	0.0511210
0.2000	-0.2339981	-0.1909830	0.0430151
0.3000	-0.4510539	-0.4122147	0.0388391
0.4000	-0.7283882	-0.6909830	0.0374052
0.5000	-1.0384600	-1.0000000	0.0384600
0.6000	-1.3509007	-1.3090170	0.0418838
0.7000	-1.6353523	-1.5877853	0.0475670
0.8000	-1.8644034	-1.8090170	0.0553864
0.9000	-2.0162655	-1.9510565	0.0652090
1.0000	-2.0769112	-2.0000000	0.0769112

Таблица 2

Изменение погрешности при уменьшении размера сетки
на $t = 1$, когда $h = \tau$

h	Максимальная погрешность	Порядок сходимости
1/500	0.00010300	
1/1000	0.00002576	1.9994264
1/2000	0.00000644	1.9997216

Литература

1. *Дзекцер Е. С.* Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР.—1975.—Т. 220, № 3.—С. 540–543.
2. *Рубинштейн Л. И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия АН СССР. Сер. геогр.—1948.—Т. 12, № 1.—С. 27–45.
3. *Ting T. W.* A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction // J. Math. Anal. Appl.—1974.—Vol. 45, № 9.—P. 23–31.
4. *Hallaire M.* L'eau et la production vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique.—1964.—№ 9.
5. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв.—М.: Наука, 1976.—352 с.
6. *Баренблат Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика.—1960.—Т. 25, № 5.—С. 852–864.
7. *Бештоков М. Х.* Метод функции Римана и разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа // Изв. высш. уч. зав. Сев.-Кавк. рег.—№ 5.—С. 6–9.
8. *Бештоков М. Х.* Разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Диф. уравнения.—2013.—Т. 49, № 9.—С. 1170–1177.
9. *Бештоков М. Х.* Об одной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка с нелокальным условием. // Изв. высш. уч. зав. Сев.-Кавк. рег.—2013.—№ 1.—С. 5–10.
10. *Бештоков М. Х.* Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2014.—2014.—Т.54, № 9.—С. 1497–1514.
11. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—616 с.
12. *Олисаев Э. Г.* Разностные методы решения нелокальных краевых задач для уравнения параболического типа с вырождением: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Владикавказ, 2003.—117 с.
13. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—407 с.
14. *Андреев В. Б.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Журн. вычисл. математики и матем. физ.—1968.—Т. 8, № 6.—С. 1218–1231.
15. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—416 с.

Статья поступила 25 ноября 2015 г.

Бештоков Мурат Хамидбиевич
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
доцент кафедры прикладной математики и информатики
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Канчукоев Владимир Зедунович
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
доцент кафедры прикладной математики и информатики
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: vlad-kan@yandex.ru

Эржибова Фарида Александровна
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
преподаватель каф. математических и общих естественнонаучных дисциплин
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Толстого, 175
E-mail: `ershibowa@yandex.ru`

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DEGENERATE MOISTURE TRANSFER EQUATION WITH A CONDITION OF THE THIRD KIND

Beshtokov M. KH., Kanchukoyev V. Z., Erzhibova F. A.

In this work, we study the pseudoparabolic equation in the three dimensional space. The equation of this form implies the presence of cylindrical or spherical symmetry that enables one to move from a three-dimensional problem to one-dimensional problem, but with degeneration. In this regard, we study the solvability and stability of solutions to boundary value problems for degenerate pseudoparabolic equation of the third order of general form with variable coefficients and third kind condition, as well as difference schemes approximating this problem on uniform grids. The main result consists in proving a priori estimates for a solution to both the differential and difference problems by means of the method of energy inequalities. The obtained inequalities imply stability of the solution relative to initial data and right side. Because of the linearity of the considered problems these inequalities allow us to state the convergence of the approximate solution to the exact solution of the considered differential problem under the assumption of the existence of the solutions in the class of sufficiently smooth functions. On the test examples the numerical experiments are performed confirming the theoretical results obtained in the work.

Key words: equation with degeneration, boundary value problem, condition of the third kind, a priori estimate, difference scheme, stability and convergence of a difference scheme, moisture transfer equation, pseudo-parabolic equation.

References

1. *Dzektser E. S.* Equations of motion of free-surface underground water in layered media. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [*Doklady Mathematics*], 1975, vol. 220, no. 3, pp. 540–543 (in Russian).
2. *Rubinshtein L. I.* On heat propagation in heterogeneous media. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr.*, 1948, vol. 12, no. 1, pp. 27–45 (in Russian).
3. *Ting T. W.* A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction. *J. Math. Anal. Appl.*, 1974, vol. 45, no. 1, pp. 23–31.
4. *Hallaire M.* L'eau et la production vegetable. *Inst. National de la Recherche Agronomique*, 1964, no. 9.
5. *Chudnovskii A. F. Teplofizika pochv* [*Thermal Physics of Soils*]. Moscow, Nauka, 1976, 352 p. (in Russian).
6. *Barenblat G. I., Zheltov Yu. P., and Kochina I. N.* Basic concept in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. *Prikladnaya matematika i mechanika* [*J. Appl. Math. Mech.*], 1960, vol. 25, no. 5, pp. 852–864 (in Russian).
7. *Beshtokov M. Kh.* Riemann function method and finite difference method for solving a nonlocal boundary value problem for a third-order hyperbolic equation. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Severo-Kavkaz. Reg.*, 2007, no. 5, pp. 6–9 (in Russian).
8. *Beshtokov M. Kh.* Finite-difference method for a nonlocal boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation. *Differ. Equations*, 2013, vol. 49, no. 9, pp. 1134–141. DOI: 10.1134/S0012266113090085.
9. *Beshtokov M. Kh.* On a boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation with a nonlocal condition. I*Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Severo-Kavkaz. Reg.*, 2013, no. 1, pp. 5–10 (in Russian).
10. *Beshtokov M. Kh.* A numerical method for solving one nonlocal boundary value problem for a third-order hyperbolic equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 9, pp. 1441–1458. DOI: 10.7868/S0044466914090051.
11. *Samarskii A. A. Teoriya raznostnih shem* [*Theory of Difference Schemes*]. Moscow, Nauka, 1983, 616 p. (in Russian).

12. *Olisaev E. G. Raznostnye Metody Reshenija Nelokal'Nyh Kraevyh Zadach Dlja Uravnenija Parabolicheskogo Tipa s Vyrozhdeniem.* Candidate's Dis. In Math. And Physics. Moscow, Russ. State Library, 2003 (In Russian).
13. *Ladyzhenskaya O. A. Kraevie zadachi matematicheskoi fiziki* [*Boundary Value Problems of Mathematical Physics*]. Moscow, Nauka, 1973, 408 p. (in Russian).
14. *Andreev V. B.* On the convergence of difference schemes approximating the second and third boundary value problems for elliptic equations. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1968, vol. 8, no. 6, pp. 44–62. DOI: 10.1016/0041-5553(68)90092-X.
15. *Samarskii A. A., Gulin A. V. Ustoichivost raznostnih shem* [*Stability of Finite Difference Schemes*]. Moscow, Nauka, 1973, 416 p. (in Russian).

Received November 25, 2015

Beshtokov Murat Khamidbievich
Kabardino-Balkar State University after Kh. M. Berbekov,
Associate Professor
173 Chernyshevskiy st., Nalchik, 360004, Russia
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Kanchukoev Vladimir Zedunovich
Kabardino-Balkar State University after Kh. M. Berbekov,
Associate Professor
173 Chernyshevskiy st., Nalchik, 360004, Russia
E-mail: vlad-kan@yandex.ru

Erzhibova Farida Aleksandrovna
Kabardino-Balkar State University after Kh. M. Berbekov,
the Teacher of Department of Mathematics
175 Tolstoy st., Nalchik, 360004, Russia
E-mail: ershibowa@yandex.ru