Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 4, С. 3–12

УДК **517.9**

НАИЛУЧШЕЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ СПЕКТРУ ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Е. В. Абрамова

Во многих прикладных задачах возникает ситуация, когда требуется восстановить значение функции по некоторой информации (обычно не точной и не полной). Общая задача об оптимальном восстановлении линейного функционала на классе функций по конечной информации впервые появилась в работе С. А. Смоляка. В дальнейшем эта тематика получила достаточно широкое развитие в самых разных направлениях. Существует множество подходов к решению подобных задач. Здесь мы следуем подходу, который предполагает наличие априорной информации об объекте, характеристики которого требуется восстановить. Это позволяет поставить задачу о нахождении наилучшего метода восстановления данной характеристики среди всех возможных методов восстановления. Такой взгляд на задачи восстановления идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-х гг. прошлого века о нахождении наилучших средств приближения для классов функций. Математическая теория, где изучаются задачи восстановления на основе указанного подхода, активно развивается в последние десятилетия, обнаруживая тесные связи с классическими задачами теории приближений и имея различные приложения к задачам практики. Работа посвящена задаче наилучшего восстановления решения задачи Дирихле в метрике L_2 на прямой в верхней полуплоскости, параллельной оси абсцисс, по следующей информации о граничной функции: граничная функция принадлежит некоторому соболевскому пространству функций, а ее преобразование Фурье известно приближенное (в метрике L_∞) на конечном отрезке, симметричном относительно нуля. Построен оптимальный метод восстановления и найдено точное значение погрешности оптимального восстановления. Следует отметить, что оптимальный метод использует, вообще говоря, не всю доступную информацию, а ту, которую использует, определенным образом «сглаживает».

Ключевые слова: задача Дирихле, оптимальное восстановление, экстремальная задача, преобразование Фурье.

Введение

Работа посвящена задаче наилучшего восстановления решения задачи Дирихле в метрике L_2 на прямой в верхней полуплоскости, параллельной оси абсцисс, по следующей информации о граничной функции: граничная функция принадлежит некоторому соболевскому пространству функций, а ее преобразование Фурье известно приближенное (в метрике L_∞) на конечном отрезке, симметричном относительно нуля. Построен оптимальный метод восстановления и найдено точное значение погрешности оптимального восстановления. Следует отметить, что оптимальный метод использует, вообще говоря, не всю доступную информацию, а ту, которую использует, определенным образом «сглаживает».

Общая задача об оптимальном восстановлении линейного функционала на классе функций по конечной информации впервые появилась в работе [1]. В дальнейшем эта тематика получила достаточно широкое развитие в самых разных направлениях (укажем лишь обзоры [2–4]). Отметим еще работы [5–7], где рассматриваются близкие по постановкам задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y>0, \\ u(\cdot,0)=f(\cdot), \end{cases} \tag{1.1}$$

заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхней полуплоскости, для которой $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$ является граничной функцией. Равенство $u(\cdot,0)=f(\cdot)$ понимается так: $u(\cdot,y)\to f(\cdot)$ при $y\to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Мы будем требовать еще, чтобы $\sup_{y>0}\|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R})}<\infty$. В этом случае решение задачи Дирихле единственно и задается интегралом Пуассона

$$u(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}} P(x-t,y)f(t)\,dt,$$

где $P(x,y)=\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$ (см., например, [8]).

Рассмотрим пространство функций

$$\mathscr{W}^r_{2\,\infty}(\mathbb{R})=\bigl\{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}):\ f^{(r-1)}(\cdot)\in \mathrm{LAC}(\mathbb{R}),\ f^{(r)}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\ F[f](\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R})\bigr\},$$

где $\mathrm{LAC}(\mathbb{R})$ обозначает множество функций на $\mathbb{R}$, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке, $F[f](\cdot)$ — преобразование Фурье функции $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$.

Обозначим через $W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R})$ соболевский класс функций на прямой

$$W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R})=\Bigl\{f(\cdot)\in \mathscr{W}^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}):\ \bigl\|f^{(r)}(\cdot)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant 1\Bigr\}.$$

Ставится задача о наилучшем восстановлении функции $u(\cdot,Y)$ — решении задачи Дирихле на прямой $y=Y$, где $Y>0$, по следующей информации о граничной функции $f(\cdot)\in W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R})$: задано приближенно ее преобразование Фурье $F[f](\cdot)$ на отрезке $[-\sigma,\sigma]$, $\sigma>0$, в метрике $L_\infty([-\sigma,\sigma])$, т. е. известна функция $g(\cdot)\in L_\infty([-\sigma,\sigma])$ такая, что $\|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta$, где $\delta>0$.

Задача оптимального восстановления $u(\cdot,Y)$ понимается следующим образом. Любое отображение $m\colon L_\infty[-\sigma,\,\sigma]\to L_2(\mathbb{R})$ объявляется *методом восстановления. Погрешность* этого метода определяется величиной

$$e\bigl(Y,W^r_{2\infty}(\mathbb{R}),\delta,\sigma,m\bigr)=\sup_{\substack{f(\cdot)\in W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}),\\ g(\cdot)\in L_\infty[-\sigma,\,\sigma],\\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty[-\sigma,\,\sigma]}\leqslant\delta}}\bigl\|u(\cdot,Y)-m(g(\cdot))\bigr\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует величина

$$E\bigl(Y,W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}),\delta,\sigma\bigr)=\inf_{m\colon L_\infty[-\sigma,\sigma]\to L_2(\mathbb{R})} e\bigl(Y,W^r_{2\infty}(\mathbb{R}),\delta,\sigma,m\bigr),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается:

$$E\bigl(Y,W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}),\delta,\sigma\bigr)=e\bigl(Y,W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}),\delta,\sigma,\widehat{m}\bigr).$$

Эти методы мы называем *оптимальными методами восстановления.*

Целью работы является построение оптимального метода и нахождение соответствующей погрешности оптимального восстановления в поставленной задаче.

2. Формулировка основного результата

Теорема 1. *Пусть* $\delta > 0$, $\sigma > 0$, $\widehat{\sigma} = \left(\frac{\pi(2r+1)}{\delta^2}\right)^{1/(2r+1)}$, $\sigma_0 = \min\{\sigma, \widehat{\sigma}\}$. *Метод* $\widehat{m} : L_\infty[-\sigma,\sigma] \to L_2(\mathbb{R})$, *действующий в образах Фурье по правилу*

$$F\big[\widehat{m}(g(\cdot))\big](\xi) = \begin{cases} e^{-Y|\xi|}\left(1 - e^{-2Y(\sigma_0-|\xi|)}\left(\frac{\xi}{\sigma_0}\right)^{2r}\right)g(\xi), & |\xi| \leqslant \sigma_0,\\ 0, & |\xi| > \sigma_0, \end{cases}$$

является оптимальным. Погрешность оптимального восстановления имеет вид

$$E\big(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma\big) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1 - e^{-2Y\sigma_0}\right) + e^{-2Y\sigma_0}\left(\frac{1}{\sigma_0^{2r}} - \frac{\delta^2\sigma_0}{\pi(2r+1)}\right)}.$$

3. Доказательство теоремы 1

Оценка снизу погрешности оптимального восстановления. Покажем, что погрешность оптимального восстановления $E(Y, W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma)$ не меньше значения следующей экстремальной задачи:

$$\big\|u(\cdot,Y)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad f(\cdot) \in W^r_{2\,\infty}(\mathbb{R}), \quad \big\|F[f](\cdot)\big\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta, \tag{3.1}$$

т. е. верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Пусть $f(\cdot)$ — допустимая функция в задаче (3.1). Заметим, что если $f(\cdot)$ допустима, то и $-f(\cdot)$ тоже допустима и ей соответствует решение $-u(\cdot,Y)$. Тогда для любого метода m имеем

$$\begin{aligned} 2\big\|u(\cdot,Y)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \big\|u(\cdot,Y) - m(0) - (-u(\cdot,Y) - m(0))\big\|_{L_2(\mathbb{R})}\\ &\leqslant \big\|u(\cdot,Y) - m(0)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} + \big\| - u(\cdot,Y) - m(0)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}\\ &\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^r_{2\infty}(\mathbb{R}),\\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \big\|u(\cdot,Y) - m(0)\big\|_{L_2(\mathbb{R})}\\ &\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^r_{2\infty}(\mathbb{R}),\\ g(\cdot)\in L_\infty([-\sigma,\sigma]),\\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \big\|u(\cdot,Y) - m(g(\cdot))\big\|_{L_2(\mathbb{R})} = 2\,e\big(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m\big). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\big\|u(\cdot,Y)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant e\big(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m\big).$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям $f(\cdot)$, а справа к нижней грани по всем методам $m : L_\infty\big([-\sigma,\sigma]\big) \to L_2(\mathbb{R})$, получаем

$$E\big(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma\big) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^r_{2\infty}(\mathbb{R}),\\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \big\|u(\cdot,Y)\big\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

т. е.

$$E\big(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma\big) \geqslant S, \tag{3.2}$$

где S — значение задачи (3.1).

Найдем величину S, решив задачу (3.1). Так как $F[u(\cdot,Y)](\xi)=e^{-Y|\xi|}\,F[f](\xi)$ для всех $\xi\in\mathbb{R}$ (см., например, [8]), то согласно теореме Планшереля, квадрат значения задачи (3.1) равен значению следующей задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi \to \max,\\ \left|F[f](\xi)\right|^2 \leqslant \delta^2 \quad \text{для п. в. } \xi\in[-\sigma,\sigma], \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi \leqslant 1.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Сопоставим данной задаче функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L\big(f(\cdot),\lambda_1(\cdot),\lambda_2\big) &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi \\ &+\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\lambda_1(\xi)\left(\left|F[f](\xi)\right|^2-\delta^2\right)d\xi+\lambda_2\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi-1\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Лемма 1. *Если найдутся функция* $\widehat{\lambda}_1(\cdot)\in L_\infty([-\sigma,\sigma])$, $\widehat{\lambda}_1(\cdot)\geqslant 0$, *число* $\widehat{\lambda}_2\geqslant 0$ *и допустимая в задаче* (3.3) *функция* $\widehat{f}(\cdot)$ *такие, что*

(*a*) $L\big(\widehat{f}(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\cdot),\widehat{\lambda}_2\big)=\min\limits_{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})} L\big(f(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\cdot),\widehat{\lambda}_2\big)$,

(*b*) $\displaystyle\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{\lambda}_1(\xi)\left(\left|F[\widehat{f}](\xi)\right|^2-\delta^2\right)d\xi=0$,

(*c*) $\displaystyle\widehat{\lambda}_2\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\left|F[\widehat{f}](\xi)\right|^2 d\xi-1\right)=0$,

то $\widehat{f}(\cdot)$ — *решение задачи* (3.3).

◁ Пусть $f(\cdot)$ — допустимая функция в (3.3). Тогда, учитывая это обстоятельство, а также неотрицательность $\lambda_1(\cdot)$ и λ_2, условия $(a),(b),(c)$, получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi &\geqslant -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi+\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{\lambda}_1(\xi)\left(\left|F[f](\xi)\right|^2-\delta^2\right)d\xi \\ &+\widehat{\lambda}_2\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi-1\right)=L\big(f(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\cdot),\widehat{\lambda}_2\big)\overset{(a)}{\geqslant} L\big(\widehat{f}(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\cdot),\widehat{\lambda}_2\big) \\ &=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|F[\widehat{f}](\xi)\right|^2 d\xi+\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{\lambda}_1(\xi)\left(\left|F[\widehat{f}](\xi)\right|^2-\delta^2\right)d\xi \\ &+\widehat{\lambda}_2\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\left|F[\widehat{f}](\xi)\right|^2 d\xi-1\right)\overset{(b),(c)}{=}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|F[\widehat{f}](\xi)\right|^2 d\xi,\end{aligned}$$

т. е. $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (3.3). ▷

Воспользуемся теперь леммой 1, чтобы найти решение задачи (3.3). Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$. Положим

$$\widehat{\lambda}_1(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(e^{-2Y|\xi|} - e^{-2Y\widehat{\sigma}}\left(\frac{\xi}{\widehat{\sigma}}\right)^{2r}\right), & |\xi| \leqslant \widehat{\sigma}, \\ 0, & |\xi| \geqslant \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{e^{-2Y\widehat{\sigma}}}{\widehat{\sigma}^{2r}},$$

функция $\widehat{f}(\cdot)$ такова, что ее преобразование Фурье имеет вид

$$\left|F[\widehat{f}\,](\xi)\right| = \begin{cases} \delta, & |\xi| \leqslant \widehat{\sigma}, \\ 0, & |\xi| > \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Проверим выполнение условий леммы. Очевидно, что $\widehat{\lambda}_1(\cdot) \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_2 > 0$, и простая проверка показывает, что функция $\widehat{f}(\cdot)$ допустима в задаче (3.3) и выполнены условия (b) и (c) леммы. Проверим выполнение условия (a). Для этого запишем функцию Лагранжа (3.4) в виде

$$L\left(f(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2\right) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi$$

$$+ \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \lambda_1(\xi)\left(\left|F[f](\xi)\right|^2 - \delta^2\right) d\xi + \lambda_2\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(-e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\lambda_1(\xi)\,\chi[-\sigma,\sigma](\xi) + \lambda_2\,\xi^{2r}\Big)\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi - \left(\delta^2\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\lambda_1(\xi)\,d\xi + \lambda_2\right),$$

где $\chi[-\sigma,\sigma](\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[-\sigma,\sigma]$.

Оценим первое слагаемое полученного выражения с $\lambda_1(\cdot) = \widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(-e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\widehat{\lambda}_1(\xi)\cdot\chi[-\sigma,\sigma](\xi) + \widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}\Big)\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\Big(-e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\widehat{\lambda}_1(\xi) + \widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}\Big)\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}]}\Big(-e^{-2Y|\xi|} + \widehat{\lambda}_2\xi^{2r}\Big)\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\left(-e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\,\frac{1}{2\pi}\left(e^{-2Y|\xi|} - \widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}\right) + \widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}\right)\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}]}\Big(-e^{-2Y|\xi|} + \widehat{\lambda}_2\xi^{2r}\Big)\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}]} e^{-2Y\widehat{\sigma}}\left(\left(\frac{\xi}{\widehat{\sigma}}\right)^{2r} - e^{-2Y(|\xi|-\widehat{\sigma})}\right)\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi \geqslant 0.$$

Но если $f(\cdot)=\widehat{f}(\cdot)$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(-e^{-2Y|\xi|}+2\pi\widehat{\lambda}_1(\xi)\,\chi[-\sigma,\sigma](\xi)+\widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}\Big)\big|F[\widehat{f}\,](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\left(-e^{-2Y|\xi|}+2\pi\,\frac{1}{2\pi}\left(e^{-2Y|\xi|}-\widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}\right)+\widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}\right)\delta^2\,d\xi=0.$$

Следовательно, выполнено и условие (a) леммы, и тем самым $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (3.3). Таким образом,

$$S^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-2Y|\xi|}\big|F[\widehat{f}\,](\xi)\big|^2\,d\xi=-L\big(\widehat{f}(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\cdot),\widehat{\lambda}_2\big)$$

$$=\delta^2\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi+\widehat{\lambda}_2=\frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1-e^{-2Y\widehat{\sigma}}\right).$$

Вместе с формулой (3.2) это означает, что в рассматриваемом случае

$$E\big(Y,W^r_{2\infty}(\mathbb{R}),\delta,\sigma\big)\geqslant\sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1-e^{-2Y\widehat{\sigma}}\right)}. \tag{3.5}$$

2. Пусть $\sigma<\widehat{\sigma}$. Положим

$$\widehat{\lambda}_1(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(e^{-2Y|\xi|}-e^{-2Y\sigma}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^{2r}\right), & |\xi|\leqslant\sigma,\\ 0, & |\xi|\geqslant\sigma,\end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_2=\frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}},$$

$$\big|F[\widehat{f}\,](\xi)\big|=\begin{cases}\delta, & |\xi|<\sigma,\\ C\,\delta(\xi\pm\sigma), & |\xi|=\sigma,\\ 0, & |\xi|>\sigma,\end{cases}$$

где $C^2=\frac{\pi}{\sigma^{2r}}-\frac{\delta^2\,\sigma}{2r+1}$, а $\delta(\cdot)$ — дельта-функция в точке ξ_0.

Проверим выполнение условий леммы 1. Очевидно, что $\widehat{\lambda}_1(\cdot)\geqslant 0$ и $\widehat{\lambda}_2>0$. Функция $f(\cdot)$ допустима в (3.3). Действительно, $|F[\widehat{f}\,](\xi)|^2\leqslant\delta^2$ для п. в. $\xi\in[-\sigma,\sigma]$. Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\big|F[\widehat{f}\,](\xi)\big|^2\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2\,\frac{\sigma^{2r+1}}{2r+1}+2C^2\sigma^{2r}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2\,\frac{\sigma^{2r+1}}{2r+1}+2\left(\frac{\pi}{\sigma^{2r}}-\frac{\delta^2\sigma}{2r+1}\right)\sigma^{2r}\right)=1.$$

Очевидно, что условия (b) и (c) леммы выполняются. Проверим выполнение условия (a).

Как и раньше, преобразуем функцию Лагранжа к виду

$$L\big(f(\cdot),\lambda_1(\cdot),\lambda_2\big)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(-e^{-2Y|\xi|}+2\pi\lambda_1(\xi)\,\chi[-\sigma,\sigma](\xi)+\lambda_2\,\xi^{2r}\Big)\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$-\left(\delta^2\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\lambda_1(\xi)\,d\xi+\lambda_2\right).$$

Оценивая первое слагаемое полученного выражения с $\lambda_1(\cdot) = \widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(- e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\widehat{\lambda}_1(\xi)\,\chi[-\sigma,\sigma] + \widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}\Big)\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\geqslant\sigma} e^{-2Y\sigma}\left(\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^{2r} - e^{-2Y(|\xi|-\sigma)}\right)\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi \geqslant 0.$$

При этом значение этого слагаемого на функции $\widehat{f}(\cdot)$, как нетрудно проверить, равно нулю. Следовательно, $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (3.3), и, значит,

$$S^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\,\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi = -L\big(\widehat{f}(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2\big)$$

$$= \delta^2\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi + \widehat{\lambda}_2 = \frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1 - e^{-2Y\sigma}\right) + e^{-2Y\sigma}\left(\frac{1}{\sigma^{2r}} - \frac{\sigma}{\widehat{\sigma}^{2r+1}}\right).$$

Отсюда и из формулы (3.2) следует, что в рассматриваемом случае

$$E\big(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma\big) \geqslant \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1 - e^{-2Y\sigma}\right) + e^{-2Y\sigma}\left(\frac{1}{\sigma^{2r}} - \frac{\sigma}{\widehat{\sigma}^{\,2r+1}}\right)}. \tag{3.6}$$

Оценка сверху и оптимальный метод. Покажем, что метод $\widehat{m}$ из формулировки теоремы является оптимальным. Снова рассмотрим два случая.

1. Пусть $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$. Выше для данного случая были определены функция $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и число $\widehat{\lambda}_2$. Обозначим

$$a_1(\xi) = \begin{cases} 1 - e^{-2Y(\widehat{\sigma}-|\xi|)}\left(\frac{\xi}{\widehat{\sigma}}\right)^{2r}, & |\xi| \leqslant \widehat{\sigma}, \\ 0, & |\xi| \geqslant \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Погрешность метода $\widehat{m}$ равна, по определению, значению следующей экстремальной задачи:

$$\big\|u(\cdot, Y) - \widehat{m}(g)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad \big\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\big\|_{L_\infty([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta, \quad \big\|f^{(r)}(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1.$$

Применяя теорему Планшереля, получим, что квадрат значения этой задачи равен значению следующей задачи:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|e^{-Y|\xi|}\big(F[ft](\xi) - a_1(\xi)g(\xi)\big)\right|^2 d\xi \to \max, \\ \big|F[f](\xi) - g(\xi)\big|^2 \leqslant \delta^2 \quad \text{при п. в. } |\xi| \leqslant \sigma, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi \leqslant 1. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Максимизируемый в (3.7) функционал представим в виде суммы двух интегралов:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\,\big|F[f](\xi) - a_1(\xi)g(\xi))\big|^2\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} e^{-2Y|\xi|}\,\big|F[f](\xi) - a_1(\xi)g(\xi)\big|^2\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|>\widehat{\sigma}} e^{-2Y|\xi|}\,\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi.$$

Оценим подынтегральное выражение в первом слагаемом, используя неравенство Коши — Буняковского:

$$e^{-2Y|\xi|}\left|\big(F[f](\xi)-a_1(\xi)g(\xi)\big)\right|^2=e^{-2Y|\xi|}\left|\big(1-a_1(\xi)\big)F[f](\xi)+a_1(\xi)\big(F[f](\xi)-g(\xi)\big)\right|^2$$

$$=e^{-2Y|\xi|}\left|\frac{1-a_1(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}\,\xi^r}\sqrt{\widehat{\lambda}_2}\,\xi^rF[f](\xi)+\frac{a_1(\xi)}{\sqrt{2\pi\,\widehat{\lambda}_1(\xi)}}\sqrt{2\pi\,\widehat{\lambda}_1(\xi)}\,\big(F[f](\xi)-g(\xi)\big)\right|^2$$

$$\leqslant e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a_1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}}+\frac{|a_1(\xi)|^2}{2\pi\,\widehat{\lambda}_1(\xi)}\right)\left(\widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2+2\pi\,\widehat{\lambda}_1(\xi)\,\big|F[f](\xi)-g(\xi)\big|^2\right).$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a_1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\,\xi^{2r}}+\frac{|a_1(\xi)|^2}{2\pi\,\widehat{\lambda}_1(\xi)}\right)=1.$$

Интегрируя полученное неравенство с учетом этого обстоятельства и учитывая ограничения в задаче (3.7), приходим к следующей оценке для интеграла слева в (2.5):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-2Y|\xi|}\big|F[f](\xi)-a_1(\xi)g(\xi))\big|^2\,d\xi$$

$$\leqslant\frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi+\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,\big|F[f](\xi)-g(\xi)\big|^2\,d\xi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|>\widehat{\sigma}}\frac{e^{-2Y|\xi|}}{\xi^{2r}}\,\xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$\leqslant\frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi+\delta^2\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-2Y\widehat{\sigma}}}{\widehat{\sigma}^{2r}}\int\limits_{|\xi|>\widehat{\sigma}}\xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$=\frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi+\delta^2\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi\leqslant\frac{e^{-2Y\widehat{\sigma}}}{\widehat{\sigma}^{\,2r}}+\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}}\left(e^{-2Y|\xi|}-e^{-2Y\widehat{\sigma}}\left(\frac{\xi}{\widehat{\sigma}}\right)^{2r}\right)d\xi$$

$$=\frac{\delta^2}{2\pi Y}\big(1-e^{-2Y\widehat{\sigma}}\big).$$

Следовательно,

$$e\big(Y,W^r_{2\infty}(\mathbb{R}),\delta,\sigma,\widehat{m}\big)\leqslant\sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\big(1-e^{-2Y\widehat{\sigma}}\big)}\,.$$

Вместе с оценкой (3.2) это означает, что при $\sigma\geqslant\widehat{\sigma}$ метод $\widehat{m}$ из формулировки теоремы является оптимальным и справедливо нужное выражение для погрешности оптимального восстановления.

2. Пусть $\sigma<\widehat{\sigma}$. Обозначим

$$a_2(\xi)=\begin{cases}1-e^{-2Y(\sigma-|\xi|)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^{2r}, & |\xi|\leqslant\sigma,\\ 0, & |\xi|\geqslant\sigma.\end{cases}$$

Рассуждения совершенно аналогично предыдущему случаю, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-2Y|\xi|}\big|\big(F[f](\xi)-a_2(\xi)g(\xi)\big)\big|^2\,d\xi\leqslant\frac{\delta^2}{2\pi Y}\big(1-e^{-2Y\sigma}\big)+e^{-2Y\sigma}\left(\frac{1}{\sigma^{2r}}-\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}^{\,2r+1}}\right),$$

и поэтому

$$e\big(Y, W^r_{2\infty}(\mathbb{R}), \delta, \sigma, \widehat{m}\big) \leqslant \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y}\left(1-e^{-2Y\sigma}\right)+e^{-2Y\sigma}\left(\frac{1}{\sigma^{2r}}-\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}^{\,2r+1}}\right)}\,.$$

Отсюда и (3.6) следует, что при $\sigma < \widehat{\sigma}$ метод $\widehat{m}$ из формулировки теоремы оптимален и справедлива нужное выражение для погрешности оптимального восстановления. Теорема 1 доказана.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. ...канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory / Eds. C. A. Micchelli, T. J. Rivlin.—N. Y.: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
3. *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal.—1979.—Vol. 16.—P. 87–105.
4. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery // Lect. Notes Math.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—Vol. 1129.—P. 21–93.
5. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функцион. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64. DOI: 10.4213/faa157.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // Тр. МИАН.—2010.—Т. 269.—С. 181–192.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функцион. анализ и его прил.—2010.—Т. 44.—С. 76–79. DOI: 10.4213/faa2999.
8. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М., 1974.
9. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения / 3-е изд.—М.: Эдиториал УРСС, 2011.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа / 4-е изд.—М.: Наука, 1976.

Статья поступила 23 ноября 2016 г.

Абрамова Елена Владимировна
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
старший преподаватель кафедры высшей математики
РОССИЯ, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14
E-mail: `el.v.abramova@gmail.com`

THE BEST RECOVERY OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FROM INACCURATE SPECTRUM OF THE BOUNDARY FUNCTION

Abramova E. V.

In many applied problems appears a situation where it is necessary to recover the value of a function from some information (usually not exact or complete). The general problem of the optimal recovery of a linear functional on a class of functions from finite information first appeared in the works of S. A. Smolyak. In the future this subject has received a fairly wide development in a variety of ways. There are many approaches which solve similar problems. Here we follow the approach that assumes the existence of a priori information about the object whose characteristics are to be recovered. This allows us to set the problem of finding the best method for recovering this characteristic among all possible recovery methods. This view of reconstruction tasks ideologically goes back to Kolmogorov's work in the years 1930s on finding the best means of approximation for classes of functions. The mathematical theory, where recovery problems are studied on the basis of this approach, has been actively developing in recent decades, revealing close links with the classical problems of approximation theory and having various applications to the problems of practice. This paper is devoted to the problem of best recovery of the solution of the Dirichlet problem in the L_2 metric on the line in the upper half-plane parallel to the abscissa axis, according to the following information about the boundary function: the boundary function belongs to some Sobolev space of functions, and its Fourier transform knows an approximate (in the L_∞ metric) on finite segment symmetric with respect to zero. An optimal recovery method is constructed and the exact value of the optimum recovery error is found. It should be noted that the optimal method uses, generally speaking, not all available information, and the one that uses it, in a certain way, "smoothes out".

Key words: Dirichlet problem, optimal recovery, extremal problem, Fourier transform.

References

1. *Smolyak S. A. Ob optimalnom vosstanovlenii funktsii i funktsionalov ot nikh* [*On Optimal Reconstruction of Functions and Functionals of Them*], Kand. diss., Moscow, MGU, 1965 (in Russian).
2. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A Survey of optimal recovery, *Optimal Estimation in Approximation Theory* (eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin), N. Y., Plenum Press, 1977, pp. 1–54.
3. *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1979, vol. 16, pp. 87–105.
4. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery, *Lect. Not. Math.*, Berlin: Springer-Verlag, 1985, vol. 1129, pp. 21–93.
5. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Y.* Optimal recovery of functions and their derivatives from inaccurate information about the spectrum and inequalities for derivatives, *Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya* [*Functional Analysis and Its Applications*], 2003, vol. 37, no. 3, pp. 51–64 (in Russian).
6. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Y.* On the Reconstruction of Convolution-type operators from inaccurate information, *Proc. Steklov Instit. Math.*, 2010, vol. 269, pp. 174–185. DOI: 10.1134/S008154381002015X.
7. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Y.* On Optimal Harmonic Synthesis from Inaccurate Spectral Data, *Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya* [*Functional Analysis and Its Applications*], 2010, vol. 44, no. 3, pp. 76–79. DOI: 10.4213/faa2999 (in Russian).
8. *Stein E., Weiss G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton, Princeton Univ. Press, 1971.
9. *Magaril-Il'yaev G. G., Tikhomirov V. M. Vypuklyi analiz i ego prilozheniya* [*Convex Analysis and its Applications*]. Moscow, Editorial URSS, 2011 (in Russian).
10. *Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elementy teorii funktsii i funktsionalnogo analiza* [*Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*], Moscow, Nauka, 1976 (in Russian).

Received November 23, 2016

Abramova Elena Vladimirovna
National Research University "Moscow Power Engineering Institute",
14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russia
E-mail: el.v.abramova@gmail.com