Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 73–77

ЗАМЕТКИ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Ю. Ф. Коробейник

В заметке, посвященной памяти выдающегося российского математика А. Ф. Леонтьева, рассматриваются некоторые вопросы теории мероморфных и выпуклых функций.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, нули дзета-функции Римана, выпуклая функция, односторонняя производная.

1. Одна гипотеза и ее следствия

Перед формулировкой основного результата данного параграфа введем некоторые необходимые для дальнейшего определения и обозначения.

Назовем число T из $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ *ζ-нерегулярной ординатой*, если $\zeta(x_T + iT) = 0$ хотя бы для одного значения x_T из $\mathbb{R}$. Здесь и всюду далее символ $\zeta(z)$ обозначает, как обычно, дзета-функцию Римана, которая, как хорошо известно (см., например, [1]), регулярна в области $0 < |z-1| < +\infty$, а в точке $z = 1$ имеет простой полюс. Далее (см. там же), в вертикальной полуплоскости $E_1 := \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ функция $\zeta(z)$ представляется абсолютно сходящимся обыкновенным рядом Дирихле:

$$\zeta(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-z} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x}\big(\cos(y \ln n) - i \sin(y \ln n)\big) \quad (\forall\, z = x + iy \in E).$$

Обозначим символом x_0 единственное число из интервала $(1, 2)$ такое, что $\zeta(x_0) = 2$. Тогда, если $z \in E_{x_0} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > x_0\}$, то

$$\operatorname{Re}\zeta(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x}\cos(y \ln n) \geqslant 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x} > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x_0} = 2 - \zeta(x_0) = 0.$$

Благодаря наличию на отрицательной полуоси так называемых «тривиальных нулей» $\zeta(z)$ вида $z = -2m$, $m = 1, 2, \ldots$, значение $T = 0$ является ζ-нерегулярной ординатой и, следовательно, множество μ всех ζ-нерегулярных ординат непусто. Более того, как было установлено Харди лет 100 назад (см., например, [1]), на «срединной» прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ имеется бесконечное множество нулей $\zeta(z)$, и поэтому множество μ содержит бесконечное число элементов. При этом, как известно [1], все нули $\zeta(z)$ вида $x + iT$ при любом $T \neq 0$ могут находиться лишь в интервале $(iT, 1 + iT)$. Отсюда с помощью обычной теоремы единственности для аналитических функций легко показать, что множество μ не имеет конечных предельных точек и поэтому может быть представлено в таком виде: $\mu = \{0\} \cup \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{-\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots$, $\lim \mu_n = +\infty$.

Пусть $T \in (\mu_{k_0}, \mu_{k_0+1})$, $k_0 \geqslant 1$. Зафиксируем какое-либо δ из $\left(0, \frac{x_0-1}{4}\right)$ и обозначим символом $N(T)$ сумму кратностей всех нулей $\zeta(z)$, лежащих внутри прямоугольного контура Γ с вершинами в точках A, C, D, F, где $\Gamma := \bigcup_{k=1}^{4} \Gamma_k$, $\Gamma_1 = [A, C]$, $\Gamma_2 = [C, D]$, $\Gamma_3 = [D, F]$, $\Gamma_4 = [F, A]$; $A = (1 - x_0 - \delta - iT)$, $C = (x_0 + \delta - iT)$, $D = (x_0 + \delta + iT)$, $F = (1 - x_0 - \delta + iT)$.

Гипотеза $\mathbf{A}_1$. Если $T > 1$ и $T \notin \mu$, то справедливо равенство

$$N(T) = g_1(T) + g_2(T), \tag{52}$$

в котором $g_1(T)$ — функция, определенная и непрерывная на интервале $(1, +\infty)$, а функция $g_2(T)$ определена на множестве

$$L := (1, +\infty) \setminus \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$$

и удовлетворяет условию $\sup_{T \in L} |g_2(T)| = q < 2$.

Сформулируем и докажем теперь основной результат данного параграфа.

Теорема. *Если гипотеза A_1 справедлива, то*

1) *верна гипотеза Римана об отсутствии у $\zeta(z)$ нулей в полуплоскости $E_{1/2} := \left\{z : \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\right\}$,*

2) *все нули $\zeta(z)$ на прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ — простые.*

$\lhd$ Зафиксируем какой-либо номер $k_0 \geqslant 1$ и возьмем любое значение T из интервала (μ_{k_0}, μ_{k_0+2}), отличное от μ_{k_0+1}. По предположению теоремы равенство (52) выполняется для всех значений T, достаточно близких к μ_{k_0+1}, но отличных от μ_{k_0+1}. Если значение T монотонно возрастает и проходит через точку $T = \mu_{k_0+1}$, то левая часть равенства (52) испытывает при этом разрыв первого рода, причем величина скачка функции $N(T)$ в точке $T = \mu_{k_0+1}$ равна $2n_{k_0+1} + 4m_{k_0+1}$, где n_{k_0+1} — кратность возможного нуля $\zeta(z)$ вида $\frac{1}{2} + i\mu_{k_0+1}$, а m_{k_0+1} — сумма кратностей всех возможных нулей $\zeta(z)$, расположенных в интервале $\left(\frac{1}{2} + i\mu_{k_0+1}, x_0 + i\mu_{k_0+1}\right)$. При этом для любого $k_0 \geqslant 1$ $n_{k_0+1} + m_{k_0+1} \geqslant 1$ (более точно, если $n_{k_0+1} \neq 0$), то $2n_{k_0+1} + 4m_{k_0+1} \geqslant 2$, а когда $m_{k_0+1} \neq 0$, то $2n_{k_0+1} + 4m_{k_0+1} \geqslant 4$).

С другой стороны, в правой части равенства (52) функция $g_1(T)$ по предположению определена и непрерывна в любой точке интервала $(1, +\infty)$ и, в частности, в точке μ_{k_0+1}. Что же касается функции $g_2(T)$, то она может иметь (и обязана иметь из-за поведения левой части (52) и функции $g_1(T)$) в этой точке $T = \mu_{k_0+1}$ разрыв первого рода, причем величина скачка $g_2(T)$ в этой точке не превосходит $2q < 4$. Следовательно, обязательно выполняется равенство $m_{k_0+1} = 0$.

Чтобы завершить доказательство первого утверждения теоремы, достаточно заметить, что номер $k_0 \geqslant 1$ можно выбрать как угодно большим. Кроме того, должно выполняться равенство $n_{k_0+1} = 1$ (уже при всех $k_0 \geqslant 1$), что и доказывает второе утверждение теоремы. $\rhd$

Отметим некоторые следствия доказанной теоремы (разумеется, предполагая, что гипотеза A_1 верна). Прежде всего, все нули $\zeta(z)$ — простые и лежат на двух взаимно-перпендикулярных прямых — вещественной оси $(-\infty, +\infty)$ и «срединной» прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. Обозначим еще при любом $T > 1$ через B_T квадрат $\{z \colon |\operatorname{Im} z| < T, \, |\operatorname{Re} z - \frac{1}{2}| < T\}$, через K_T — круг $\{z \colon |z - \frac{1}{2}| < T\}$ и, наконец, через $N_0(T)$ число всех нулей $\zeta(z)$, лежащих в прямоугольнике $\{z \colon 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1, \ 0 < \operatorname{Im} z < T\}$. Возьмем теперь любую функцию $\psi(T)$, определенную и положительную в интервале $(1, +\infty)$ и такую, что

$\lim_{T\to+\infty}\psi(T)=+\infty$. При этом функция $\psi(T)$ может возрастать (до $+\infty$) при $T\to\infty$ как угодно медленно. Тогда из доказанной теоремы прямо вытекает

Следствие. $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{N_0(T)-g_1(T)}{\psi(T)}=0$.

Такое же равенство будет иметь место, если $N_0(T)$ заменить числом $\widehat{N}_0(T)$ всех нулей $\zeta(z)$, принадлежащих квадрату B_T, или числом $\widetilde{N}_0(T)$ всех нулей $\zeta(z)$ из круга K_T, и потребовать, чтобы $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{T}{\psi(T)}=0$.

2. Небольшое замечание к одной теореме из [2]

В первой главе первого тома известной книги У. Хеймана и П. Кеннеди [2], довольно быстро изданного в русском переводе, в числе других в п. 1.3 приводится и теорема 1.6 (см. [2, с. 28]) о свойствах выпуклых функций. Ограничимся здесь лишь одной нужной нам фразой из ее довольно длинной формулировки: «…Левая производная непрерывна справа и не превосходит правой производной…». Эта фраза содержит явную описку и в том виде, в каком она имеется в формулировке теоремы, просто неверна (ошибочность утверждения о непрерывности справа левой производной выпуклой функции легко показать на весьма простых примерах). В вышеприведенной фразе из формулировки теоремы 1.6 из [2] слово «справа» следует заменить на слово «слева».

Я останавливаюсь здесь, возможно, чересчур подробно, на этой описке по двум причинам. Прежде всего, эта описка в формулировке теоремы 1.6 имеется и в английском оригинале [3]. По-видимому, автор (как и переводчик и редактор русского издания) в спешке ее просмотрели. Во-вторых, я хотел бы пожелать всем моим более молодым коллегам внимательно и критично относиться ко всем печатным источникам, которые они используют в своей работе, вникая и в формулировку используемого результата (независимо от научного авторитета его автора) и (по возможности) в его доказательство. В противном случае они могут повторить одну мою довольно неприятную ошибку. Дело в том, что последние 15–20 лет я весьма интенсивно занимаюсь исследованием дзета-функции Римана. Однажды именно с помощью этой теоремы из [2], а, точнее, с помощью этой злополучной фразы из ее формулировки, которая была приведена выше, я довольно легко показал ошибочность гипотезы Линделефа (см., например, [1, гл. 13]), а следовательно, и гипотезы Римана, так как, как известно (см., например, там же), первая следует из второй. Но так как я всегда верил (и до сих пор верю) в справедливость гипотезы Римана, то после весьма кратковременной эйфории я вновь начал просматривать проведенное доказательство и обратил внимание на теоремы 1.6 из [2]. Ознакомившись (впервые!) с ее доказательством, я с удивлением обнаружил, что в нем доказывается (и на мой взгляд совершенно правильно), что правая производная непрерывна справа (и, соответственно, левая производная непрерывна слева), т. е. доказывается утверждение, противоположное вышеприведенной части формулировки теоремы. Таким образом, в исправлении нуждается только указанная выше часть формулировки теоремы 1.6 из [2].

Позднее я совершенно случайно обнаружил в книге [4], опубликованной в Москве еще в 1958 г., правильную формулировку вышеприведенной фразы из теоремы 1.6 [2], для непрерывных выпуклых функций (см. лемму 1.2 и замечание к ней из [4, гл. I, § 1, с. 14–15]).

3. Заключение

В заключение я хотел бы прежде всего выразить свою искреннюю и глубокую благодарность Анатолию Георгиевичу Кусраеву за то, что он постоянно верил (надеюсь, и сейчас верит) в мои творческие возможности и оказывал мне всемерную поддержку.

Я благодарю моих учеников Ю. А. Кирютенко и С. Н. Мелихова за их постоянное ко мне внимание и помощь в техническом оформлении моих результатов в виде статей.

Пробегая мысленно взором свою довольно долгую преподавательскую и научную деятельность, я бы хотел поблагодарить моих университетских учителей Анатолия Петровича Гремяченского, Семена Яковлевича Альпера, Михаила Григорьевича Хапланова, Юрия Семеновича Очана, Петра Степановича Папкова, Вадима Петровича Вельмина за то, что они своими прекрасными лекциями пробудили во мне, семнадцатилетнем пареньке, поступившем в 1947 г. на физическое отделение физико-математического факультета Ростовского университета, любовь к математике и желание всерьез ею заниматься, а также за свое постоянное внимание к моим первым, еще робким студенческим «опусам».

На протяжении шестидесятилетней научной деятельности я неоднократно встречался и беседовал со многими крупными математиками — такими, как, например, И. М. Виноградов, М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, С. М. Никольский, В. С. Владимиров, П. Л. Ульянов, А. А. Гончар, Б. Я. Левин, А. И.Маркушевич, Ф. Д. Гахов, Д. Фогт, Р. Майзе и многие другие — все они внимательно (во всяком случае, так мне казалось) слушали мои выступления на научных семинарах, конференциях, съездах, конгрессах, а затем обстоятельно их обсуждали, зачастую в домашней обстановке, выступая в роли радушных хозяев.

Из этой блестящей плеяды мне хочется выделить Алексея Федоровича Леонтьева, чьи несомненные научные заслуги не оценены должным образом (с моей точки зрения) мировой научной общественностью. На протяжении многих лет он был мне как старший брат, опекавший меня и помогавший по самым разным вопросам. Его влияние на мое научное творчество несомненно. Я неоднократно бывал у него и в его московской квартире, недалеко от МЭИ, и на даче в Валентиновке (нередко — с ночевками), а после переезда А. Ф. Леонтьева в Уфу — и на его тамошней квартире. И всегда я встречал радушный прием и самого Алексея Федоровича, и его верной спутницы жизни Марии Григорьевны.

Уверен, что «леонтьевский посев» в Уфе, уже давший таких хороших математиков, как Напалков В. В., Юлмухаметов Р. С., Хабибулин Б. Н., Гайсин А. М. и многих других, и в будущем обеспечит плодотворную работу башкирских математиков.

Светлой памяти этого замечательного человека и выдающегося ученого, чей столетний юбилей со дня рождения отмечается в мае 2017 года, я и посвящаю эту статью.

Литература

1. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.—407 с.
2. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.—М.: Мир, 1980.—304 с.
3. *Hayman W. K., Kennedy P. B.* Subharmonic functions. Vol. I.—London–N. Y.–San Francisko: Academic Press, 1976.
4. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.—М.: ГИФМЛ, 1958.—271 с.

Статья поступила 25 января 2017 г.

Коробейник Юрий Федорович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: kor@math.rsu.ru

ON SOME PROBLEMS IN THE THEORY OF FUNCTIONS

Korobeĭnik Yu. F.

The paper devoted the memory of the outstanding Russian mathematician A. F. Leont'ev (1917–1987) consists of three sections. In § 1 the author sets one probably new hypothesis concerning the well known Riemann's Zeta Function $\zeta(z)$ and proves with the helps of this hypothesis that all zeros of $\zeta(z)$ are simple and lie only on the real axis and on the line $\operatorname{Re} z = 1/2$. In § 2 the formulation of one theorem on convex functions from the first part of the monography of Hayman W. K. and Kennedy P. B. a bit is slightly corrected. In the last section the author express his gratitude to some mathematicians (especially to A. F. Leont'ev) who supported him throughout his comparatively long scientific career.

Key words: Riemann's Zeta Function and its zeros, convex functions and its derivatives.