Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 1, С. 50–58

УДК **519.633**

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА АЛЛЕРА — ЛЫКОВА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

М. М. Лафишева, М. А. Керефов, Р. В. Дышекова

Работа посвящена построению разностных схем для уравнения влагопереноса Аллера — Лыкова. Рассмотрена задача с нелокальными граничными условиями типа В. А. Стеклова. Установлен факт сходимости разностной схемы со скоростью $O(h+\tau)$. Проведены численные расчеты с использованием метода окаймления.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса, нелокальные условия, разностная схема, априорная оценка, сходимость, метод окаймления.

Вопросы тепло-влагопереноса в почвах являются фундаментальными при решении многих задач гидрологии, агрофизики, гляциологии, экологии, строительной физики и других областей науки. Сложное взаимодействие потоков тепла в почво-грунтах и снежном покрове обусловливает протекание процессов инфильтрации, миграции и морозного пучения, испарения и транспирации, метаморфизма и снеготаяния.

Вопросы теплового и водного режима корнеобитаемого слоя почвы, процессов испарения и транспирации имеют важное значения для сельского хозяйства. Данные процессы определяют условия перезимовки и произрастания сельскохозяйственных культур. Велика роль миграции и инфильтрации влаги в формировании продуктивных запасов влаги на сельскохозяйственных полях.

Исследователи все свое внимание концентрируют на возможности отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов [2] и т. д.

Если уравнение переноса влаги

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D\frac{\partial W}{\partial x}\right], \tag{1}$$

где W — влажность в долях единицы, x — глубина, t — время, D — коэффициент диффузивности, предполагает бесконечную скорость распространения возмущения, то уравнение А. В. Лыкова

$$\frac{\partial W}{\partial t}+A_1\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D\frac{\partial W}{\partial x}\right] \tag{2}$$

учитывает конечную его скорость.

В то же время весьма существенно введение дополнительного слагаемого $A_1\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, даже когда оно мало. Особенно роль последнего становится заметной в процессах, предполагающих быстрые колебания влажности на границах исследуемого образца почвы.

Правильное истолкование того факта, когда и при каких условиях происходит движение влаги в прямом и обратном направлениях, возможно на основе нового модифицированного уравнения диффузии или уравнения Аллера [8]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D\frac{\partial W}{\partial x} + A\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}\right].$$

В литературе мы находим всевозможные постановки задач для таких уравнений. Одним из таких классов качественно новых задач являются нелокальные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных.

Нелокальными называют такие задачи, в которых вместо, или вместе с граничным условием ставятся условия, связывающие значения решения (и, возможно, его производных) во внутренних точках области или в точках границы и каких-либо внутренних точках. Подобные задачи возникают при математическом моделировании процессов различной природы, например, влагопереноса, теплопроводности, при изучении задач математической биологии, задач управления и других.

1. Постановка задачи. Априорная оценка

В замкнутой области $\bar{Q}_T = \{(x,t):\, 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + A\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(0,t) = \lambda u(l,t), \tag{4}$$

$$u_x(0,t) = \lambda u_x(l,t), \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{6}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x), \tag{7}$$

где $0 < c_0 \leqslant k(x,t) \leqslant c_1$, $|k_t| \leqslant c_2$, ρ, A — положительные постоянные.

Нелокальные условия типа (4)–(5) рассматривались еще В. А. Стекловым [6]. Краевые задачи с нелокальным условием по времени изучались в ряде работ А. И. Кожанова, М. М. Шханукова — Лафишева и др.

В предположении существования достаточно гладкого решения задачи (3)–(7), получим для него априорную оценку. Для чего умножим уравнение (3) скалярно на u_t:

$$(u_t, u_t) + \rho(u_{tt}, u_t) = ((ku_x)_x, u_t) + A(u_{xxt}, u_t) + (f, u_t), \tag{8}$$

где $(u, \vartheta) = \int\limits_0^l u\vartheta dx$, $(u,u) = \|u\|_0^2$.

Преобразуем, с учетом граничных условий, интегралы, входящие в (8)

$$(u_t, u_t) = \|u_t\|_0^2,$$
$$(u_{tt}, u_t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_0^2,$$

$$((ku_x)_x, u_t) = ku_x u_t\big|_0^l - \int\limits_0^l ku_x u_{tt}dx$$

$$= u_x(l,t)u_t(l,t)\left(k(l,t) - \lambda^2 k(0,t)\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^l ku_x^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^l k_t u_x^2 dx,$$

$$(f, u_t) \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_0^2,$$

$$(u_{xxt}, u_t) = u_{xt}(l,t)u_t(l,t) - u_{xt}(0,t)u_t(0,t) - \|u_{xt}\|_0^2 = u_{xt}(l,t)u_t(l,t)(1-\lambda^2) - \|u_{xt}\|_0^2.$$

Подставляя в (8) полученные соотношения, получим

$$\|u_t\|_0^2 + \frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_0^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^l ku_x^2\,dx + A\|u_{xt}\|_0^2$$
$$\leqslant u_{xt}(l,t)\,u_t(l,t)(1-\lambda^2) + u_x(l,t)\,u_t(l,t)\left(k(l,t) - \lambda^2 k(0,t)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^l k_t u_x^2 dx + \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_0^2. \quad (9)$$

Положим $k(l,t) = k(0,t)$, $\lambda = 1$. Тогда неравенство (9) примет вид

$$\rho\frac{d}{dt}\|u_t\|_0^2 + \frac{d}{dt}\int\limits_0^l ku_x^2 dx + 2A\|u_{xt}\|_0^2 \leqslant \int\limits_0^l k_t u_x^2 dx + \|f\|_0^2,$$

или, с учетом $|k_t| \leqslant c_2$, имеем

$$\rho\frac{d}{dt}\|u_t\|_0^2 + \frac{d}{dt}\int\limits_0^l ku_x^2 dx + 2A\|u_{xt}\|_0^2 \leqslant c_2\|u_x\|_0^2 + \|f\|_0^2. \quad (10)$$

Проинтегрируем (10) по τ от 0 до t

$$\rho\|u_t\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 + 2A\int\limits_0^t \|u_{xt}\|_0^2 d\tau \leqslant c_2\int\limits_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + c_0\left\|u_0'\right\|_0^2 + \int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \rho\|u_1\|_0^2. \quad (11)$$

Перепишем неравенство (11) в виде

$$\|u_x\|_0^2 \leqslant M_1\int\limits_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + F(t),$$

где $F(t) = M_2\left(\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_1(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2\right)$, M_1, M_2 — положительные постоянные.

Воспользуемся леммой Грануолла [1]. Тогда из неравенства (11) получим априорную оценку для решения исходной дифференциальной задачи (3)–(7)

$$\|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u_{xt}\|_0^2 d\tau \leqslant M\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_1(x)\|_0^2 + \left\|u_0'(x)\right\|_0^2\right). \quad (12)$$

Из оценки (12) следует единственность и устойчивость решения дифференциальной задачи по входным данным.

2. Разностная схема. Дискретный аналог априорной оценки

Введем в замкнутой области $\bar{Q}_T$ сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih : \ i = 0, 1, \ldots, N, \ h = l/N\},$$
$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau : \ j = 0, 1, \ldots, j_0, \ \tau = T/j_0\},$$

$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ с шагами $h = l/N$, $\tau = T/j_0$.

Дифференциальной задаче (3)–(7) поставим в соответствие разностную схему ($\lambda = 1$)

$$y_{\overset{0}{t}} + \rho y_{\bar{t}t} = \Lambda\left(\sigma_1 \widehat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \breve{y}\right) + A y_{\bar{x}x\overset{0}{t}} + \varphi. \tag{13}$$

$$y(0, t) = y(l, t), \tag{14}$$

$$y_{x,0} = y_{\bar{x},N}, \tag{15}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \tag{16}$$

$$y_t(x, 0) = u_1(x), \tag{17}$$

где

$$y_{\overset{0}{t}} = \frac{\widehat{y} - \breve{y}}{2\tau}, \ y_{\bar{t}t} = \frac{\widehat{y} - 2y + \breve{y}}{\tau^2}, \ \widehat{y} = y^{j+1}, \ y = y^j, \ \breve{y} = y^{j-1}, \ \Lambda y = (a y_{\bar{x}})_x, \ a_i = k_{i-1/2},$$

$$(a y_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right), \quad \varphi = f_i^j.$$

Порядок аппроксимации разностной схемы (13)–(17) $O(h + \tau)$.

Перепишем уравнение (13) при $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ и $k(x, t) = 1$. Примем во внимание также очевидное равенство [4]

$$\sigma \widehat{y} + (1 - 2\sigma) y + \sigma \breve{y} = y + \sigma \tau^2 y_{\bar{t}t}.$$

Теперь разностное уравнение (13) примет вид

$$y_{\overset{0}{t}} + \rho y_{\bar{t}t} = \Lambda y + \sigma \tau^2 \Lambda y_{\bar{t}t} + A \Lambda y_{\overset{0}{t}} + \varphi. \tag{18}$$

Для получения разностного аналога априорной оценки умножим скалярно уравнение (18) на $y_{\overset{0}{t}}$:

$$\left(y_{\overset{0}{t}}, y_{\overset{0}{t}}\right) + \rho\left(\left(E - \bar{\sigma}\tau^2 \Lambda\right) y_{\bar{t}t}, y_{\overset{0}{t}}\right) = \left(\Lambda y, y_{\overset{0}{t}}\right) + A\left(\Lambda y_{\overset{0}{t}}, y_{\overset{0}{t}}\right) + \left(\varphi, y_{\overset{0}{t}}\right), \tag{19}$$

где $\bar{\sigma} = \sigma/\rho$, $\|u\|_0^2 = (u, u)$, $(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h$.

Используем в дальнейших преобразованиях следующее равенство [4]

$$\left(y_{\bar{t}t}, y_{\overset{0}{t}}\right) = 0.5\left(\|y_{\bar{t}}\|_0^2\right)_t.$$

Рассмотрим слагаемые равенства (19):

$$\left(\left(E - \bar{\sigma}\tau^2 \Lambda\right) y_{\bar{t}t}, y_{\overset{0}{t}}\right) = \left(y_{\bar{t}t}, y_{\overset{0}{t}}\right) - \bar{\sigma}\tau^2 (\Lambda y_{\bar{t}t}, y_{\overset{0}{t}}) = 0.5(\|y_{\bar{t}}\|_0^2)_t - \bar{\sigma}\tau^2 0.5(\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2)_t,$$

$$\left(\Lambda y_{\overset{0}{t}}, y_{\overset{0}{t}}\right) = (y_{\bar{x}x\overset{0}{t}}, y_{\overset{0}{t}}) = -(y_{\bar{x}\overset{0}{t}}, y_{\bar{x}\overset{0}{t}}] + y_{\bar{x}\overset{0}{t},N}\, y_{\overset{0}{t},N} - y_{x\overset{0}{t},0}\, y_{\overset{0}{t},0} = -\left\| y_{\bar{x}\overset{0}{t}} \right]\Big|_0^2,$$

$$\left(\varphi, y_{\overset{0}{t}}\right) \leqslant \frac{1}{2}\,\|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2}\left\|y_{\overset{0}{t}}\right\|_0^2.$$

Имеет место формула [4]

$$-\left(\Lambda y, y_{\overset{0}{t}}\right) = \frac{1}{8}\Big(\|y_{\bar{x}} + \breve{y}_{\bar{x}}]|_0^2\Big)_t - \frac{\tau^2}{8}\Big(\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\Big)_t. \tag{20}$$

Подставив полученное в равенство (19) и учитывая выражение (20), будем иметь

$$\left\|y_{\overset{0}{t}}\right\|_0^2 + \frac{\rho}{2}\Big(\|y_{\bar{t}}\|_0^2\Big)_t + \frac{\rho\bar{\sigma}\tau^2}{2}\Big(\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\Big)_t + \frac{1}{8}\Big(\|y_{\bar{x}} + \breve{y}_{\bar{x}}]|_0^2\Big)_t$$
$$-\frac{\tau^2}{8}\Big(\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\Big)_t + \left\|y_{\bar{x}\overset{0}{t}}\right]\Big|_0^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2}\left\|y_{\overset{0}{t}}\right\|_0^2$$

или

$$\rho\Big(\|y_{\bar{t}}\|_0^2\Big)_t + \left(\rho\bar{\sigma}\tau^2 - \frac{\tau^2}{4}\right)\Big(\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2\Big)_t + \frac{1}{4}\Big(\|y_{\bar{x}} + \breve{y}_{\bar{x}}]|_0^2\Big)_t \leqslant \|\varphi\|_0^2. \tag{21}$$

Введем обозначение

$$E^j = \rho\|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 + \frac{1}{4}\Big(\|y_{\bar{x}} + \breve{y}_{\bar{x}}]|_0^2\Big).$$

Тогда неравенство (21) примет вид

$$E_t^j \leqslant \|\varphi\|_0^2$$

или

$$E^{j+1} - E^j \leqslant \tau\|\varphi\|_0^2.$$

Просуммируем последнее выражение по j'от 1 до j

$$E^{j+1} \leqslant E^1 + \sum_{j'=1}^{j}\left\|\varphi^{j'}\right\|_0^2\tau.$$

При $\sigma \geqslant 1/4$ из неравенства (21) получим

$$\rho\left\|\hat{y}_{\bar{t}}\right\|_0^2 + c_1\left\|\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}\right]_0^2 + \frac{1}{4}\Big(\left\|\hat{y}_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}\right]_0^2\Big) \leqslant \rho\left\|y_{\bar{t}}^1\right\|_0^2 + c_1\left\|y_{\bar{x}\bar{t}}^1\right]_0^2 + \frac{1}{4}\Big(\left\|y_{\bar{x}}^1 + y_{\bar{x}}^0\right]_0^2\Big) + \sum_{j'=1}^{j}\left\|\varphi^{j'}\right\|_0^2\tau.$$

Преобразуем слагаемое правой части последнего неравенства

$$\left\|y_{\bar{x}}^1 + y_{\bar{x}}^0\right]\Big|_0^2 = \|u_{1,\bar{x}}\tau + 2u_{0,\bar{x}}]|_0^2 \leqslant \frac{\tau}{2}\|u_{1,\bar{x}}]|_0^2 + \|u_{0,\bar{x}}]|_0^2.$$

Итак, получена априорная оценка

$$\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 + \|\hat{y}_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}]|_0^2 \leqslant M\left(\|u_1\|_0^2 + \|u_{1,\bar{x}}]|_0^2 + \|u_{0,\bar{x}}]|_0^2 + \sum_{j'=1}^{j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\tau\right). \tag{22}$$

Из оценки (22) следует устойчивость и сходимость разностной схемы (13)–(17).

3. Алгоритм численного решения задачи. Метод окаймления

Пусть $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/2$, $k(x,t) = 1$. Тогда разностное уравнение (13) примет вид

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i, \tag{23}$$

где

$$F_i = \frac{y_i^{j-1}}{2\tau} - \rho\frac{(y_i^{j-1} - 2y_i^j)}{\tau^2} + \left(\frac{a}{2} - \frac{A}{2\tau}\right)\frac{y_{i+1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i-1}^{j-1}}{h^2} + \varphi_i^j,$$

$$A_i = B_i = \frac{a}{2h^2} + \frac{A}{2\tau h^2}; \quad C_i = \frac{1}{2\tau} + \frac{\rho}{\tau^2} + \frac{a}{h^2} + \frac{A}{\tau h^2}.$$

Запишем граничные условия (14), (15) в виде

$$y_0 - y_N = 0, \tag{24}$$

$$2y_N - y_1 - y_{N-1} = 0. \tag{25}$$

Дополним задачу начальными условиями

$$y^0 = u_0, \tag{26}$$

$$y^1 = \tau u_1 + u_0. \tag{27}$$

Задачу (23)–(27) будем решать методом окаймления [7, 9], а не методом прогонки, так как матрица системы не трехдиагональна.

Представим задачу (23)–(27) в виде

$$A_N \cdot X_N = F_N, \tag{28}$$

где

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ A & -C & B & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A & -C & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу системы (28) A_N перепишем в виде окаймленной матрицы

$$A_N = \begin{pmatrix} A_{N-1} & u_N \\ \upsilon_N & a_{NN} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$A_{N-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ A & -C & B & \dots & 0 \\ 0 & A & -C & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -C \end{pmatrix}, \quad F_N = \begin{pmatrix} F_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Обозначим X_{N-1} решение усеченной системы

$$A_{N-1} \cdot X_{N-1} = F_{N-1}. \tag{29}$$

Аналогично Q_{N-1} есть решение той же системы, но с другой правой частью

$$A_{N-1} \cdot Q_{N-1} = -u_{N-1}. \tag{30}$$

Решать системы (29) и (30) можно методом прогонки. А затем, зная X_{N-1}, Q_{N-1}, мы легко вычислим по формуле [7] X_N

$$X_N = \begin{pmatrix} X_{N-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{f_N - \upsilon_N X_{N-1}}{a_{NN} + \upsilon_N Q_{N-1}} \cdot \begin{pmatrix} Q_{N-1} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Итак, разностная задача (23)–(27) решается с помощью метода окаймления на каждом временном слое, последовательно, начиная со второго.

Приведем результаты расчетов (в среде Matlab), при различных входных данных.

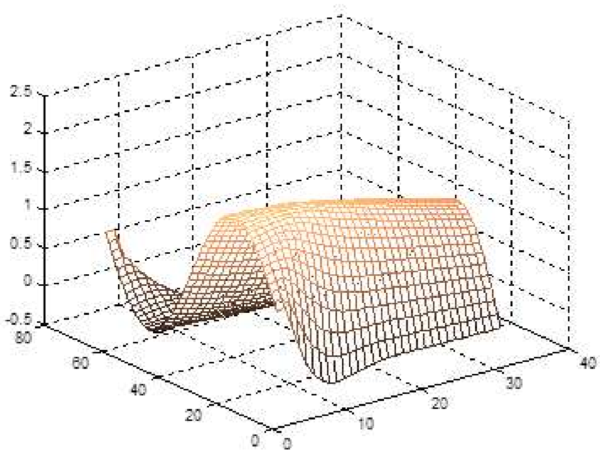

Рис. 1. Вычисления проведены со следующими входными данными: $u_0 = \sin x$, $u_1 = \cos x$, $A = 1$, $\rho = 1$, $f = 0$, $l = 2\pi$.

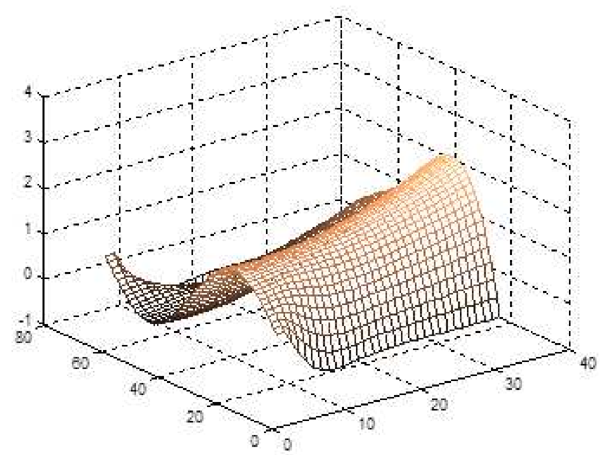

Рис. 2. Вычисления проведены со следующими входными данными: $u_0 = \sin x$, $u_1 = \cos x$, $A = 1$, $\rho = 1$, $f = 5$, $l = 2\pi$.

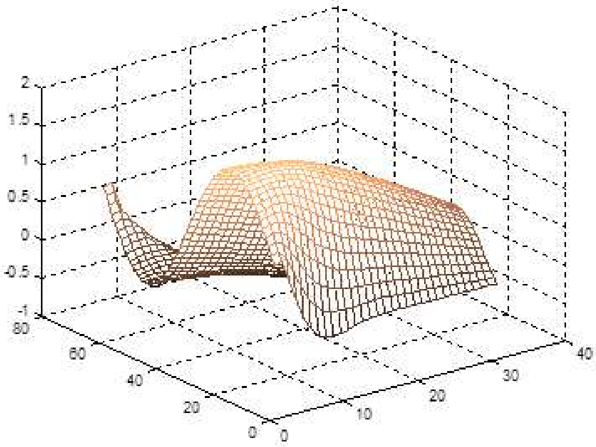

Рис. 3. Вычисления проведены со следующими входными данными:
$u_0 = \sin x$, $u_1 = \cos x$, $A = 1$, $\rho = 1$, $f = -1$, $l = 2\pi$.

Для проверки правильности работы алгоритма сравним точное решение задачи (3)–(7) с разностным решением задачи (13)–(17) (рис. 4).

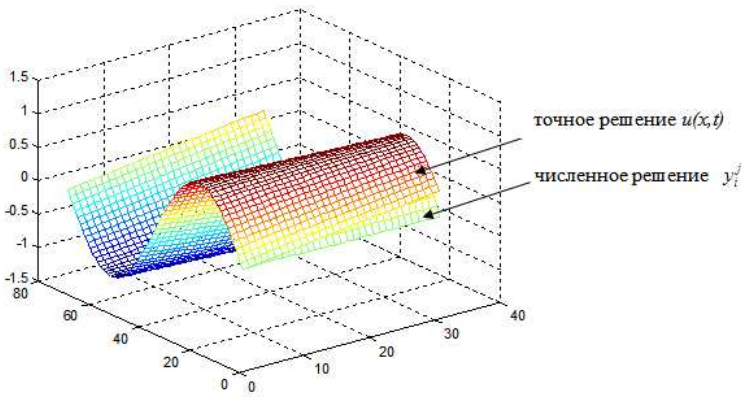

Рис. 4.

Возьмем функцию $u = \sin(x + t)$ (положив $A = 1$, $\rho = 1$), которая удовлетворяет граничным условиям при $l = 2\pi$. Тогда

$$u_0 = \sin x, \quad u_1 = \cos x, \quad f(x,t) = 2\cos(x + t).$$

При этом $\max\limits_{i,j} |y - u| = 0.4001$.

Литература

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—702 с.
2. *Нерпин С. В., Юзефович Г. И., Янгарбер В. А.* Математические методы прогнозирования водного режима // Материалы объединенной сессии ВАСХНИЛ и АН УзССР.—Ташкент: ФАН, 1967.—С. 279–293.
3. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—616 с.
5. *Соколенко Э. А., Делов В. М., Зелинченко Е. Н., Кавокин А. А.* Моделирование и управление водно-солевым режимом почв.—Алма-Ата: Наука КазССР, 1976.—180 с.

6. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики.—М.: Наука, 1983.—432 с.
7. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.—М: Физматгиз, 1960.—656 с.
8. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв.—М.: Наука, 1976.—353 с.
9. *Шхануков М. Х.* Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Нальчик, 1995.—225 с.

Статья поступила 2 июня 2016 г.

Лафишева Мадина Мухамедовна
Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х. М. Бербекова, *доцент кафедры ИМОАС*
РОССИЯ, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: taisauti@yandex.ru

Керефов Марат Асланбиевич
Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х. М. Бербекова, *доцент кафедры ИМОАС*
РОССИЯ, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: kerefov@mail.ru

Дышекова Рамета Владимировна
Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х. М. Бербекова, *магистр 2-го года обучения кафедры ИМОАС*
РОССИЯ, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: rometa.dikinova@mail.ru

DIFFERENCE SCHEMES FOR THE ALLER–LYKOV MOISTURE TRANSFER EQUATIONS WITH A NONLOCAL CONDITION

Lafisheva M. M., Kerefov M. A., Dyshekova R. V.

Questions of warm-moisture transfer in the soil are fundamental in solving of various problems of hydrology, agrophysics, ecology and others. Aller–Lykov equation obtained by introducing additional terms in the moisture transfer equation, which take into account the rapid fluctuations of humidity on the boundaries of the test sample of the soil and the final velocity of the perturbation. The paper deals with a boundary value problem for the Aller–Lykov moisture transfer equation with the first type Steklov conditions. A priori estimate for the solution of the differential problem is obtained by the method of energy inequalities, which implies the stability of its solution. Three-level scheme is built. A priori estimate for the solution of the difference problem is obtained. The fact of the convergence of a difference scheme with a rate of $O(h+\tau)$ is set. The features of the application of the bordering method to the numerical solution of the difference problem are considered. Numerical experiments are conducted, the results of which are attached.

Key words: moisture transfer equation, nonlocal conditions, difference scheme, a priori estimate, convergence, bordering method.