Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 1, С. 26–29

УДК **519.46**

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЕТИ

Н. А. Джусоева, Р. Ю. Дряева

Доказано, что циклические элементарные сети нечетного порядка являются дополняемыми, т. е. их можно дополнить диагональю до (полной) сети. В частности такие сети являются замкнутыми. Показано, что для произвольного четного порядка существуют элементарные циклические сети, которые не являются дополняемыми.

Ключевые слова: промежуточная подгруппа, нерасщепимый максимальный тор, сеть, циклическая сеть, сетевая группа, элементарная сетевая группа, трансвекция.

Изучение надгрупп нерасщепимого максимального тора, связанного с радикальным расширением $K = k(\sqrt[n]{d})$ степени n поля k, тесно связанно с циклическими элементарными сетями порядка n, ассоциированными с промежуточными подгруппами [1]. Исследованию таких сетей посвящена данная заметка. Доказано, что циклические элементарные сети нечетного порядка n можно дополнить до (полной) сети, в частности, они являются замкнутыми.

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R называется *сетью* [2] над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Для сети принята также терминология «ковер» [3]. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарный ковер* [4], [5, вопрос 15.46]). Таким образом, элементарная сеть — это набор $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R таких, что $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любой тройки попарно различных чисел i, r, j. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети.

Известно (см., например, [2]), что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij} \qquad (1)$$

для любых $i \neq j$. Диагональные подгруппы σ_{ii} определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik},$$

где суммирование ведется по всем k отличным от i.

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России и темы НИР ЮМИ ВНЦ РАН (рег. номер НИОКР 115033020013).

Элементарная сеть σ называется *замкнутой* (или *допустимой* [5, вопрос 15.46]), если элементарная группа

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\alpha) : \alpha \in \sigma_{ij},\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \rangle$$

($t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$, $\alpha \in R$) не содержит новых элементарных трансвекций. Другими словами, замкнутость сети σ означает, что элементарная сеть $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{ij})$, индуцированная трансвекциями из элементарной группы $E(\sigma)$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \{\alpha \in R : t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)\}$$

совпадает с σ. Из построения сетевой группы [2] следует, что дополняемые элементарные сети являются замкнутыми. С другой стороны, в [6] приводится пример замкнутой, но не дополняемой сети.

Пусть R — унитальное кольцо $d \in R$. Пусть, далее, $A_2, \ldots, A_n$ — подгруппы аддитивной группы кольца R. Через $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_2, \ldots,\ A_n)$ мы обозначаем таблицу (без диагонали), определенную следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j < i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j > i. \end{cases} \tag{2}$$

Если так определенная таблица является элементарной сетью, то $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_2, \ldots,\ A_n)$ мы называем ***циклической элементарной сетью***, ассоциированной с циклическим тором тором T [1], или просто циклической элементарной сетью. Вопросы, связанные с сетями, в частности с циклическими сетями, рассматривались также в [7]–[10].

Теорема. *Для нечетного n, $n \geqslant 3$, циклическая элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_2, \ldots,\ A_n)$ порядка n является дополняемой.*

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть n нечетно, $n \geqslant 3$ и $\sigma = (\sigma_{ij})$ — циклическая элементарная сеть. Тогда*

$$\sigma_{k1}^2 \sigma_{1k} \subseteq \sigma_{k1}, \quad \sigma_{1k}^2 \sigma_{k1} \subseteq \sigma_{1k}, \quad 2 \leqslant k \leqslant n. \tag{3}$$

$\lhd$ a) Покажем первое включение леммы. Пусть в начале $3 \leqslant k \leqslant n-1$. Согласно (2) $\sigma_{k1} = \sigma_{k+1,2} = A_k$. Далее, заметим, что $k+1 \neq n-k+3$, так как n нечетно, в частности $k \neq \frac{n+2}{2}$. Заметим также, что $n-k+3 \leqslant n$, так как $k \geqslant 3$. Далее, согласно (2) $\sigma_{k1}^2 \sigma_{1k} = A_k^2 dA_{n-k+2}$. С другой стороны, согласно (2) $\sigma_{2,n-k+3} = dA_k$, $\sigma_{n-k+3,2} = A_{n-k+2}$. Поэтому

$$\sigma_{k1}^2 \sigma_{1k} = A_k^2 dA_{n-k+2} = \sigma_{k+1,2}\sigma_{2,n-k+3}\sigma_{n-k+3,2} \subseteq \sigma_{k+1,2} = \sigma_{k1}.$$

Пусть теперь $k = 2$ ($n \geqslant 3$). Тогда (см. (2))

$$\sigma_{21}^2 \sigma_{12} = A_2^2 dA_n = \sigma_{32}\sigma_{21}\sigma_{12} \subseteq \sigma_{31}\sigma_{12} \subseteq \sigma_{32} = \sigma_{21}.$$

Наконец, пусть $k = n$ ($n \geqslant 3$). Тогда (см. (2))

$$\sigma_{n1}^2 \sigma_{1n} = A_n^2 dA_2 = \sigma_{n1}\sigma_{12}\sigma_{21} \subseteq \sigma_{n2}\sigma_{21} \subseteq \sigma_{n1}.$$

b) Покажем теперь второе включение леммы. Имеем (см. (1))

$$\sigma_{k1} = A_k, \quad \sigma_{1k} = dA_{n-k+2}, \quad \sigma_{n+2-k,1} = A_{n+2-k},$$

при этом отметим, что $k \neq n-k+2$ (так как n нечетно). Поэтому

$$\sigma_{k1}\sigma_{1k}^2 = A_k d^2 A_{n+2-k}^2 = dA_k\sigma_{n+2-k,1}\sigma_{1k} \subseteq dA_k\sigma_{n+2-k,k}$$
$$= d\sigma_{n+2-k,k}\sigma_{k1} \subseteq d\sigma_{n+2-k,1} = dA_{n+2-k} = \sigma_{1k}. \ \rhd$$

$\lhd$ Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы согласно (1) нам нужно показать включения

$$\sigma_{ij}^2\sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ji}^2\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ji}. \tag{4}$$

Не умаляя общности предположим, что $i > j$. Согласно (2)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i-j+1,1} = A_{i-j+1}, \quad \sigma_{ji} = \sigma_{1,i-j+1} = dA_{n+1+j-i}.$$

Положим $k = i-j+1$. Тогда $\sigma_{ij} = \sigma_{k1}$, $\sigma_{ji} = \sigma_{1k}$. Заметим при этом, что $2 \leqslant k \leqslant n$. Следовательно, для доказательства включений (4) достаточно применить лемму, т. е. включения (3). $\rhd$

Отметим, что условие нечетности n, требуемое в теореме, существенно. Приведем пример элементарной циклической сети четного порядка, которая не дополняема.

Пусть F – произвольное поле, $F(x)$ — поле рациональных функций $\frac{f}{g}$, $f, g \in F[x]$, в котором мы рассматриваем две подгруппы

$$A = \left\{\frac{f}{g} \in F(x) : \deg g - \deg f \geqslant 4\right\}, \quad B = \frac{F}{x} + A.$$

Пусть $n = 2m$ — четно ($m \geqslant 1$), $d = 1$. Положим $A_i = A$, $2 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq m+1$, $A_{m+1} = B$ и рассмотрим таблицу $\sigma = \sigma(A_2, \dots, A_n)$. В силу очевидных включений $A^2 \subseteq B$, $AB \subseteq A$ система $\sigma = \sigma(A_2, \dots, A_n)$ является сетью. Заметим, что $\sigma_{1,m+1} = \sigma_{m+1,1} = B$, но B^3 не содержится в B, поэтому $\sigma_{1,m+1}\sigma_{m+1,1}\sigma_{1,m+1}$ не содержится в $\sigma_{1,m+1}$, следовательно (см. (1)), представленная сеть σ не является дополняемой.

Следствие. *Циклическая элементарная сеть нечетного порядка является замкнутой.*

Литература

1. *Койбаев В. А., Шилов А. В.* О подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—2010.—Т. 375.—С. 130–139.
2. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
3. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.—М.: Наука, 1982.—288 с.
4. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.
5. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд-е 17-е.—Новосибирск, 2010.
6. *Койбаев В. А.* Элементарные сети в линейных группах // Труды Института математики и механики УрО РАН.—2011.—Т. 17, № 4.—С. 134–141.
7. *Койбаев В. А.* Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый тор // Алгебра и анализ.—2009.—Т. 21, № 5.—С. 70–86.
8. *Койбаев В. А.* Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 4.—С. 39–43.
9. *Койбаев В. А., Нужин Я. Н.* Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундамент. и прикл. матем.—2013.—Т. 18, вып. 1.—С. 75–84.
10. *Дряева Р. Ю., Койбаев В. А.* Разложение элементарной трансвекции в элементарной группе // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—2015.—Т. 435.—С. 33–40.

Статья поступила 14 марта 2016 г.

Джусоева Нонна Анатольевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `djusoevanonna@rambler.ru`

Дряева Роксана Юрьевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
аспирант кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Россия, ул. Ватутина, 46
E-mail: `dryaeva-roksana@mail.ru`

CYCLICAL ELEMENTARY NETS

Dzhusoeva N. A., Dryaeva R. Y.

Let R be a commutative ring with the unit and $n \in \mathbb{N}$. A set $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of additive subgroups of the ring R is a *net* over R of order n, if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all $1 \leqslant i, r, j \leqslant n$. A net which doesn't contain the diagonal is called *an elementary* net. An elementary net $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, is *complemented*, if for some additive subgroups σ_{ii} of R the set $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leqslant i, j \leqslant n$ is a full net. An elementary net σ is called *closed*, if the elementary group $E(\sigma) = \langle t_{ij}(\alpha) : \alpha \in \sigma_{ij}, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\rangle$ doesn't contain elementary transvections. It is proved that the cyclic elementary odd-order nets are complemented. In particular, all such nets are closed. It is also shown that for every odd $n \in \mathbb{N}$ there exists an elementary cyclic net which is not complemented.

Key words: intermediate subgroup, non-split maximal torus, net, cyclic net, net group, elementary group, transvection.