Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 1, С. 11–17

УДК **519.17**

АВТОМОРФИЗМЫ МОНСТРА КАМЕРОНА С ПАРАМЕТРАМИ $(6138, 1197, 156, 252)$

В. В. Биткина

Пусть 3-(V, K, Λ) схема $E = (X, B)$ является расширением симметричной 2-схемы. Тогда либо E является адамаровой 3-$(4\Lambda+4, 2\Lambda+2, \Lambda)$ схемой, либо $V = (\Lambda+1)(\Lambda^2+5\Lambda+5)$ и $K = (\Lambda+1)(\Lambda+2)$, либо $V = 496$, $K = 40$ и $\Lambda = 3$. Дополнительный граф к блочному графу 3-$(496, 40, 3)$ схемы сильно регулярен с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$. Назовем этот дополнительный граф монстром Камерона. В работе найдены автоморфизмы монстра Камерона.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, вершинно симметричный граф, группа автоморфизмов графа.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф $\{a\} \cup [a]$.

Граф Γ называется *сильно регулярным графом* с параметрами (v, k, λ, μ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, каждое ребро Γ лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин.

Система инцидентности $(X, \mathscr{B})$ с множеством точек X и множеством блоков $\mathscr{B}$ называется $t-(V, K, \Lambda)$ *схемой*, если $|X| = V$, каждый блок содержит ровно K точек и любые t точки лежат ровно в Λ блоках. Любая 2-схема является (V, B, R, K, Λ) схемой, где B — число блоков, каждая точка инцидентна R блокам, и имеют место равенства $VR = BK$, $(V-1)\Lambda = R(K-1)$. Схема называется *симметричной*, если $B = V$. Схема называется *квазисимметричной*, если для любых двух блоков $B, B' \in \mathscr{B}$ имеем $|B \cap B'| \in \{x, y\}$. Числа x, y называются *числами пересечений квазисимметричной схемы*, и предполагается, что $x < y$.

Блочный граф квазисимметричной схемы $(X, \mathscr{B})$ в качестве вершин имеет блоки схемы и два блока $B, C \in \mathscr{B}$ смежны, если $|B \cap C| = y$. Блочный граф квазисимметричной (V, B, R, K, Λ) схемы сильно регулярен с собственными значениями $k = (R-1)(K - xB + x)/(y - x)$ кратности 1, $(R - K - \Lambda + x)/(y - x)$ кратности $V - 1$ и $-(K - x)/(y - x)$ кратности $B - V$.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 15-11-10025 (теорема), а также соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (следствие).

Производной схемой для t-(V,K,Λ) схемы $\mathscr{D}=(X,\mathscr{B})$ в точке $x\in X$ называется схема $\mathscr{D}_x$ с множеством точек $X_x=X-\{x\}$ и множеством блоков $\mathscr{B}_x=\{B-\{x\}:\ x\in B\in\mathscr{B}\}$. Схема $\mathscr{E}$ называется *расширением схемы* $\mathscr{D}$, если производная схемы $\mathscr{E}$ в некоторой точке изоморфна $\mathscr{D}$. Хорошо известно, что проективная плоскость расширяема, только если ее порядок равен 2 или 4. П. Камерон [1, теорема 1.35] описал расширения симметричных 2-схем.

Предложение 1. *Пусть* 3-(V,K,Λ) *схема* $\mathscr{E}=(X,\mathscr{B})$ *является расширением симметричной 2-схемы. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $\mathscr{E}$ *является адамаровой* 3-$(4\Lambda+4,2\Lambda+2,\Lambda)$ *схемой;*

(2) $V=(\Lambda+1)(\Lambda^2+5\Lambda+5)$ *и* $K=(\Lambda+1)(\Lambda+2)$*;*

(3) $V=496$, $K=40$ *и* $\Lambda=3$.

В случае (3) имеем $R=V-1=495$, $B=VR/K=496\cdot 495/40=6138$ и дополнительный граф к блочному графу схемы имеет параметры $(6138,1197,156,252)$ и спектр $1197^1,9^{5642},-105^{495}$. Отсюда максимальный порядок коклики не больше $vm/(k+m)=6138\cdot 105/1302=495$. В частности, граница Хофмана для коклик совпадает с границей Цветковича. Дополнительный граф к блочному графу 3-$(496,40,3)$ схемы назовем монстром Камерона. В [2] доказано, что окрестность любой вершины в монстре Камерона — сильно регулярный граф с параметрами $(1197,156,15,21)$. В [3] найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1197,156,15,21)$.

Предложение 2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(1197,156,15,21)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $|\Omega|\leqslant 171$, $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11,13,19\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p=3$ *и* $\alpha_1(g)=72l$, *либо* $p=7$ *и* $\alpha_1(g)=168l-21$, *либо* $p=19$ *и* $\alpha_1(g)=456l+171$*;*

(2) Ω *является* n*-кликой, либо*

(i) $p=13$, $n=1$ *и* $\alpha_1(g)=312l+156$, *либо*

(ii) $p=2$, $n=9$ *и* $\alpha_1(g)=48l+12$ *или* $n=11$ *и* $\alpha_1(g)=32l-12$, *либо*

(iii) $p=5$, $n=2$ *и* $\alpha_1(g)=120l+45$ *или* $n=7$ *и* $\alpha_1(g)=120l-30$*;*

(3) Ω *является* $(3t+1)$*-кокликой,* $p=3$ *и* $\alpha_1(g)=72l+12-45t$*;*

(4) Ω *содержит геодезический 2-путь и* $p\leqslant 13$.

Там же доказано, что сильно регулярный граф с параметрами $(1197,156,15,21)$ не является реберно симметричным. В данной работе найдены автоморфизмы монстра Камерона.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s<0$. *Если* D *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s\leqslant d-\frac{w(k-d)}{v-w}\leqslant r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma-D$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* D.

$\lhd$ Это утверждение хорошо известно (см., например, [4, § 2]). $\rhd$

Лемма 2 [5, теорема 3.2]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ) *и собственными значениями* $k,r,-m$. *Если* g *— автоморфизм графа* Γ *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$, *то* $|\Omega|\leqslant v\cdot\max\{\lambda,\mu\}/(k-r)$.

Из лемм 1–2 следует, что для сильно регулярного графа с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$ число вершин в коклике (клике) не больше 495 (не больше 12) и $|\Omega| \leqslant 6138 \cdot 252/1188 = 31 \cdot 42 = 1302$.

Лемма 3. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(1197, 156, 15, 21)$, G — *группа автоморфизмов графа* Γ, g — *элемент порядка* 11 *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $|\Omega| = 11t - 2$, $t \leqslant 15$, *степень вершины в* Ω *равна* $11s + 2$, $2 \leqslant s \leqslant 10$ *и* $\alpha_1(g) = 33(8m + 9 - 5t)$;

(2) $|G|$ *не делится на* 121.

$\lhd$ Имеем $|\Omega| = 11t - 2 \leqslant 171$, поэтому $t \leqslant 15$. Далее, степень вершины в Ω равна $11s + 2$, $s \leqslant 13$, $\lambda_\Omega = 4, 15$, $\mu_\Omega = 10, 21$.

Допустим, что Ω содержит вершину c степени, не меньшей 123. Тогда число ребер между $\Omega(c)$ и $\Omega_2(c)$ не меньше $123 \cdot 8$, но не больше $39 \cdot 21$, противоречие.

Допустим, что Ω содержит вершину c степени 13. Тогда число ребер между $\Omega(c)$ и $\Omega_2(c)$ равно $10(11t-16)$, но не больше $13 \cdot 96$, поэтому t не больше 12. Теперь $\Omega(c)$ содержит не более одной вершины, смежной с 96 вершинами из $\Omega_2(c)$, поэтому указанное число ребер не больше $13 \cdot 85$ и t не больше 11. Повторив данное рассуждение несколько раз, убедимся, что $t \leqslant 3$. Теперь число ребер между $\Omega(c)$ и $\Omega_2(c)$ равно $10(11t - 16) = 8 \cdot 13$ и $10t = 24$, противоречие.

По [2, лемма 3] имеем $\chi_1(g) = (55t + \alpha_1(g)/3 - 67)/8$ и $\alpha_1(g) = 3(8l + 67 - 55t)$ делится на 11. Поэтому $l = 11m + 4$ и $\alpha_1(g) = 33(8m + 9 - 5t)$.

Допустим, что h — автоморфизм порядка 121 графа Γ и $h^{11} = g$. Тогда Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(11t - 2, 34, 15, 21)$, противоречие.

Пусть $U = \langle g, h \rangle$ — подгруппа порядка 121 в группе автоморфизмов графа Γ, $\Sigma = \mathrm{Fix}(U)$, $a \in \Sigma$. Тогда $\Sigma(a)$ содержит не менее двух вершин. Для вершины $b \in \Sigma(a)$ подграф $\Sigma(a) \cap [b]$ содержит 4 или 15 вершин. Если Σ является кликой, то $|\Sigma| = 10$, $\Sigma(a) \cap [b]$ содержит 8 вершин из $\Sigma(a)$ и еще 7 вершин, противоречие. Как и выше доказывается, что степень любой вершины в Σ не меньше 24, $|\Sigma| = 11e - 2$.

Допустим, что для $a \in \Sigma$ подграф $[a]$ не содержит U-орбиту Δ длины 121. Тогда для вершины $u \in \Delta$ подграф $[u] \cap [a]$ содержит не более одной вершины из Σ, противоречие с тем, что 21 и 20 не делятся на 11. Значит, Δ содержится в $[a]$ для любой вершины $a \in \Sigma$. Противоречие с тем, что число вершин в Σ не меньше 3.

Итак, в Γ нет U-орбит длины 121. Теперь $1197 \leqslant |\Sigma| + 12(163 - |\Sigma|)$ и $|\Sigma| \leqslant 69$. Далее, $156 \leqslant |\Sigma(a)| + 12(35 - |\Sigma(a)|)$ и $|\Sigma(a)| \leqslant 24$. Таким образом, Σ — регулярный граф степени 24 и ввиду леммы 3 имеем $|\Sigma| \geqslant 45 \cdot 19/7$, противоречие. $\rhd$

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [6]. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений графа, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает мономиальное матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(G)$-инвариантных подпространств W_0, W_1, W_2 матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g \in G$ получим равенство

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

В леммах 4–6 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$ и спектром $1197^1, 9^{5642}, -105^{495}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и χ_2 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 495.

Лемма 4. *Имеем $\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/114 + 198/19$, $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l, не кратного p, и $495 - \chi_2(g)$ делится на p.*

$\lhd$ Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$. Тогда

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5642 & 806/19 & -217/19 \\ 455 & -825/19 & 198/19 \end{pmatrix}$$

и $\chi_2(g) = (15\alpha_0(g) - 25\alpha_1(g)/19 + 6\alpha_2(g)/19)/186$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/114 + 198/19$.

Два последних утверждения леммы следуют из леммы 1 [7]. $\rhd$

3. Автоморфизмы монстра Камерона с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) если Ω — пустой граф, то либо $p = 31$ и $\alpha_1(g) = 31 \cdot 78$, либо $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 11(114l - 6)$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 3(114l + 54)$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 2(114l - 33)$;

(2) если Ω является n-кликой, то либо

(i) $p = 19$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 19(6l + 3)$, либо

(i) $p = 13$, $n = 2$ и $\alpha_1(g) = 6 \cdot 13(19l - 5)$, либо

(iii) $p = 5$, $n = 3$ и $\alpha_1(g) = 3(190l + 25)$ или $n = 8$ и $\alpha_1(g) = 6(95l + 20)$, либо

(iv) $p = 2$, $n = 10$ и $\alpha_1(g) = 6(38l + 4)$ или $n = 12$ и $\alpha_1(g) = 6(38l - 21)$;

(3) если Ω является m-кокликой, то $p = 3$, $m = 3t$, $t \leqslant 70$ и $\alpha_1(g) = 9(38l + 10 + 3t)$ или $p = 7$, $m = 7t - 1$, $t \leqslant 70$ и $\alpha_1(g) = 63(38l + 8 + t)$;

(4) если Ω содержит ребро и является объединением m ($m \geqslant 2$) изолированных клик, то $p = 2$ и порядки изолированных клик в Ω равны 10 или 12.

$\lhd$ Пусть Ω — пустой граф, $\alpha_i(g) = pw_i$. Так как $6138 = 9 \cdot 22 \cdot 31$, то $p \in \{2, 3, 11, 31\}$.

Пусть $p = 31$. Тогда $\chi_2(g) = 31(-w_1 + 36)/114$ и $\alpha_1(g) = 31(114l - 36)$. Если $l = 2$, то $\alpha_1(g) = 31 \cdot 192$ и найдется кликовая $\langle g\rangle$-орбита длины 31, противоречие. Значит, $\alpha_1(g) = 31 \cdot 78$, $\alpha_2(g) = 31 \cdot 120$.

Пусть $p = 11$. Тогда $\chi_2(g) = 11(-w_1 + 108)/114$, $\alpha_1(g) = 11(114l - 6)$ и $\alpha_2(g) = 11(192 - 114l)$.

Пусть $p = 3$. Тогда число $\chi_2(g) = (-w_1 + 396)/38$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 3(114l + 54)$.

Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_2(g) = (-w_1 + 594)/57$ нечетно и $\alpha_1(g) = 2(114l - 33)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 1197 и 4940, поэтому $p = 19$, $\chi_2(g) = (63 - w_1)/6$ и $\alpha_1(g) = 19(6l + 3)$.

Пусть $n \geqslant 2$ и $a, b \in \Omega$. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^{\perp}$, то p делит 1040, 3900 и $158 - n$, поэтому и $p = 2, 5, 13$. В случае $p = 2$ по предложению 2 имеем $n = 10, 12$. Если $n = 10$, то число $\chi_2(g) = (213 - \alpha_1(g)/6)/19$ нечетно и $\alpha_1(g) = 6(38l + 4)$. Если $n = 12$, то число $\chi_2(g) = (216 - \alpha_1(g)/6)/19$ нечетно и $\alpha_1(g) = 6(38l - 21)$.

В случае $p = 5$ получим $n = 3$, число $\chi_2(g) = (405 - \alpha_1(g)/3)/38$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 3(190l + 25)$ или $n = 8$, число $\chi_2(g) = (210 - \alpha_1(g)/6)/19$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 6(95l + 20)$.

В случае $p = 13$ получим $n = 2$, $\chi_2(g) = (201 - \alpha_1(g)/6)/19$ и $\alpha_1(g) = 6 \cdot 13(19l - 5)$.

Пусть Ω является m-кокликой, $0 < m \leqslant 495$. Если $a, b \in \Omega$, то g действует полурегулярно на $[a] \cap [b]$, $[a] - [b]$, поэтому p делит 252 и 945. Отсюда $p = 3, 7$. Если $p = 3$, то $m = 3t$, $t \leqslant 165$, число $\chi_2(g) = 3(3t + 132 - \alpha_1(g)/9)/38$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 9(38l + 10 + 3t)$.

Если $p = 7$, то $m = 7t - 1$, $t \leqslant 70$, $\chi_2(g) = 3(7t + 132 - \alpha_1(g)/9)/38$ и $\alpha_1(g) = 63(38l + 8 + t)$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением m $(m \geqslant 2)$ изолированных клик. Если a, c — несмежные вершины из Ω, то g действует полурегулярно на $[a] \cap [c]$ и p делит 252.

Пусть a, b — смежные вершины из клики, лежащей в Ω. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^{\perp}$, то p делит 1040. Отсюда $p = 2$ и порядки изолированных клик в Ω равны 10 или 12. $\triangleright$

Лемма 6. *Если Ω содержит геодезический путь b, a, c, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины $a \in \Omega$, то $p \leqslant 5$, $\Omega = a^{\perp}$ и $\alpha_1(g) = 0$;*

(2) *g точно действует на $[a]$ для некоторого 2-пути b, a, c и $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31\}$;*

(3) *если $\Omega(a)$ не содержит геодезических 2-путей, то $\Omega(a)$ — коклика и $p = 3$.*

$\triangleleft$ Если Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины $a \in \Omega$, то $\Omega = a^{\perp}$ и $\alpha_1(g) = 0$. Далее, $\chi_2(g) = 3(\alpha_0(g) + 66)/38$, и $495 - \chi_2(g)$ делится на p. Заметим, что объединение подграфов $u^{\perp} - [a]$ по всем вершинам u из некоторой $\langle g \rangle$-орбиты длины p содержит $p(1198 - 252)$ вершин и $946p \leqslant 4940$, поэтому $p \neq 5$.

Можно считать, что g точно действует на $[a]$ для некоторого 2-пути b, a, c из Ω (в противном случае g фиксирует каждую вершину графа Γ). Теперь ввиду предложения 2 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31\}$.

Пусть $\Omega(a)$ не содержит геодезических 2-путей. По предложению 2 подграф $\Omega(a)$ является кокликой и $p = 3$. $\triangleright$

Теорема. *Пусть Γ — монстр Камерона с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|\Omega| \leqslant 171$, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 31$ и $\alpha_1(g) = 31 \cdot 78$, либо $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 11(114l - 6)$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 3(114l + 54)$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 2(114l - 33)$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо*

(*i*) *$p = 19$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 19(6l + 3)$, либо*

(*i*) *$p = 13$, $n = 2$ и $\alpha_1(g) = 6 \cdot 13(19l - 5)$, либо*

(*iii*) *$p = 5$, $n = 3$ и $\alpha_1(g) = 3(190l + 25)$ или $n = 8$ и $\alpha_1(g) = 6(95l + 20)$, либо*

(*iv*) *$p = 2$, $n = 10$ и $\alpha_1(g) = 6(38l + 4)$ или $n = 12$ и $\alpha_1(g) = 6(38l - 21)$;*

(3) Ω *является* m*-кокликой,* $p=3$, $m=3t$, $t\leqslant 70$ *и* $\alpha_1(g)=9(38l+10+3t)$ *или* $p=7$, $m=7t-1$, $t\leqslant 70$ *и* $\alpha_1(g)=63(38l+8+t)$;

(4) Ω *содержит ребро и является объединением* m $(m\geqslant 2)$ *изолированных клик,* $p=2$ *и порядки изолированных клик в* Ω *равны* 10 *или* 12;

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и* $p\leqslant 13$.

$\lhd$ Доказательство теоремы следует из лемм 5–6 и предложения 2. $\rhd$

До конца работы будем предполагать, что G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. По теореме $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11,13,19,31\}$ и $|G:G_a|=18\cdot 11\cdot 31$.

Лемма 7. *Пусть* f *— элемент порядка* 31 *из* G, g *— элемент простого порядка* $p<31$ *из* $C_G(f)$. *Тогда либо* Ω *— пустой граф,* $p=2$ *и* $\alpha_1(g)=31\cdot 42$, *либо выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $p=13$, *то* $|\Omega|=31(13s+3)$, $s\leqslant 3$ *и* $\alpha_1(g)=3(38l+93(13s+3)+392)$;

(2) $p\neq 11$.

$\lhd$ Пусть f — элемент порядка 31 из G. По теореме $\alpha_1(f)=31\cdot 78$, $\alpha_2(f)=31\cdot 120$. Пусть g — элемент простого порядка $p<31$ из $C_G(f)$. Если Ω — пустой граф, то p делит 78 и 120, поэтому $p=2,3$. В случае $p=3$ число $\alpha_1(g)=3(114l+54)$ делится на 31, поэтому $7l-13$ делится на 31 и $l\geqslant 24$, противоречие. В случае $p=2$ число $\alpha_1(g)=2(114l-33)$ делится на 31, поэтому $5l+1$ делится на 31 и $l=6$.

Пусть Ω — непустой граф. Тогда $|\Omega|=31t$ и p делит $198-t$. Далее, $\chi_2(g)=(93t+392-\alpha_1(g)/3)/38$ и $\alpha_1(g)=3(38l+93t+392)$ делится на p.

Если $p=13$, то $t=13s+3$, и с учетом неравенства $31(13s+3)\leqslant 1302$ имеем $s\leqslant 3$ и $8-l$ делится на 13.

Если $p=11$, то $t=11s$. Так как g фиксирует не менее десяти $\langle f\rangle$-орбит на $W=\{w\mid d(w,w^f)=2\}$, то $10\leqslant s$, противоречие. $\rhd$

Лемма 8. *Имеем* $S(G)=O_{2,3}(G)$, *цоколь* $\bar T$ *группы* $\bar G=G/S(G)$ *изоморфен* $L_2(32)$ *и либо*

(1) $\bar T_a$ *— подгруппа порядка* 16, $V=S(G)$ *является* 3*-группой,* $|V:V_a|=3$ *и* $\bar T$ *действует неприводимо на* V, *либо*

(2) $\bar T_a$ *— подгруппа порядка* 32, $S(G)=VW$, *где* V *является силовской* 3*-подгруппой из* $S(G)$, $|V:V_a|=3$ *и* $\bar T$ *действует неприводимо на* V, W *является силовской* 2*-подгруппой из* $S(G)$, $|W:W_a|=2$ *и* $\bar T$ *действует неприводимо на* W.

$\lhd$ Из лемм 3, 7 следует, что $S(G)=O_{2,3}(G)$.

Пусть $\bar T$ — цоколь группы $\bar G=G/S(G)$. По [8, таблица 1] группа $\bar T$ изоморфна $L_2(32)$ или $O'N$. Но в группе $O'N$ наименьший индекс собственной подгруппы равен 122760, противоречие.

Значит, $\bar T\cong L_2(32)$ и $\bar T_a$ — подгруппа порядка 16 или 32.

Если $\bar T_a$ — подгруппа порядка 16, то $V=S(G)$ является абелевой 3-группой, $|V:V_a|=3$ и $\bar T$ действует неприводимо на V.

Если $\bar T_a$ — подгруппа порядка 32, то $S(G)=VW$, где V является силовской 3-подгруппой из $S(G)$, $|V:V_a|=3$ и $\bar T$ действует неприводимо на V, W является силовской 2-подгруппой из $S(G)$, $|W:W_a|=2$ и $\bar T$ неприводимо на W. Лемма доказана. $\rhd$

Следствие. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(6138,1197,156,252)$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(1197,156,15,21)$ *(в частности,* Γ *— монстр Камерона), и группа* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ. *Тогда* $S(G)=O_{2,3}(G)$, *цоколь* $\bar T$ *группы* $\bar G=G/S(G)$ *изоморфен* $L_2(32)$ *и либо*

(1) $\bar{T}_a$ — *подгруппа порядка* 16, $V = S(G)$ *является абелевой* 3-*группой*, $|V : V_a| = 3$ *и* $\bar{T}$ *действует неприводимо на* V, *либо*

(2) $\bar{T}_a$ — *подгруппа порядка* 32, $S(G) = VW$, *где* V *является силовской* 3-*подгруппой из* $S(G)$, $|V : V_a| = 3$ *и* $\bar{T}$ *действует неприводимо на* V, W *является силовской* 2-*подгруппой из* $S(G)$, $|W : W_a| = 2$ *и* $\bar{T}$ *действует неприводимо на* W.

В частности, $|G|$ *не делится на* 19 *и* Γ *не является реберно симметричным графом.*

$\lhd$ Доказательство следует из лемм 7–8. $\rhd$

Литература

1. *Cameron P., Van Lint J.* Designs, Graphs, Codes and their Links.—Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1981.—240 p.—(London Math. Soc. Student Texts, № 22).
2. *Махнев А. А.* Расширения симметричных 2-схем // Межд. конф. Мальцевские чтения. Тез. докл.—Новосибирск, 2015.—С. 111.
3. *Биткина В. В., Гутнова А. К., Махнев А. А.* Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 2.—С. 5–11.
4. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb.—1993.—Vol. 14.—P. 397–407.
5. *Behbahani M., Lam C.* Strongly regular graphs with non-trivial automorphisms // Discrete Math.—2011.—Vol. 311, № 2–3.—P. 132–144.
6. *Cameron P. J.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—232 p.—(London Math. Soc. Student Texts, №45).
7. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН.—2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
8. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electronic Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 15 августа 2016 г.

Биткина Виктория Васильевна
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
ассистент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: bviktoriyav@mail.ru

AUTOMORPHISMS OF THE CAMERON'S MONSTER WITH PARAMETERS $(6138, 1197, 156, 252)$

Bitkina V. V.

Let the 3-(V, K, Λ) scheme $E = (X, B)$ be an extension of the symmetric 2-scheme. Then either E is Hadamard 3-$(4\Lambda+4, 2\Lambda+2, \Lambda)$ scheme, or $V = (\Lambda+1)(\Lambda^2+5\Lambda+5)$ and $K = (\Lambda+1)(\Lambda+2)$, or $V = 496$, $K = 40$ and $\Lambda = 3$. The complementary graph of a block graph of 3-$(496, 40, 3)$ scheme is strongly regular with parameters $(6138, 1197, 156, 252)$. Let's call this complementary graph Cameron's monster. In this paper automorphisms of monster are studied.

Key words: strongly regular graph, vertex symmetric graph, automorphism group of a graph.