Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 61–70

УДК **517.538**

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ СУММАМИ УИТТЕКЕРА И ИХ МОДИФИКАЦИЯМИ: УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ[1]

А. Я. Умаханов, И. И. Шарапудинов

Найдены достаточные условия равномерной сходимости на отрезке $[0,\pi]$ sinc-приближений — значений интерполяционнных операторов Уиттекера и некоторых модифицированных операторов.

Ключевые слова: sinc-функция, оператор Уиттекера, равномерная сходимость, условие Дини — Липшица, абсолютная непрерывность, ограниченная вариация, сумма Лейбница, преобразование Абеля.

1. Введение

Sinc-функция или кардинальный синус определяется формулой

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

и является целой функцией. При действительных значениях $x \neq 0$, ввиду известного неравенства $|\sin x| < |x|$, справедлива оценка $|\operatorname{sinc} x| < 1$. Зафиксируем натуральное n и рассмотрим сумму

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \operatorname{sinc} n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right), \tag{2}$$

которая сопоставляет каждой функции $f(x)$, определенной на $[0,\pi]$, целую функцию $L_n(f,x)$, совпадающую с $f(x)$ в узловых точках $x_k = x_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n$. Эта сумма называется *n-ой интерполяционной суммой* или *n-ым интерполяционным оператором Уиттекера*. Самого Э. Т. Уиттекера [1] интересовал вопрос о возможности восстановления функции на всей числовой прямой по ее значениям на некоторой равномерной сетке $\{kh\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $h > 0$, для чего он ввел в рассмотрение так называемую кардинальную функцию (или кардинальный ряд), сужение которой на отрезок $[0,\pi]$ в случае $h = \frac{\pi}{n}$ имеет вид (2). Независимо аналогичные ряды по sinc-функциям применяли В. А. Котельников [2] и К. Э. Шеннон [3] для однозначного восстановления сигнала по его дискретным отсчетам, и соответствующая теорема в теории информации носит имена Уиттекера, Котельникова и Шеннона. Впоследствии кардинальные ряды Уиттекера нашли широкое применение в численных методах, теории приближения и интерполяции различных классов функций, решении дифференциальных и интегральных уравнений, в теории информации. В частности, этим вопросам посвящены работы [4–13].

[1] Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00486.

Здесь нас интересует вопрос сходимости $\{L_n(f,x)\}$ на отрезке $[0,\pi]$. Первые задачи подобного рода для аналитических функций были рассмотрены в [14–18]. В [19] и [20] получен критерий равномерной сходимости сумм (2) внутри интервала $(0,\pi)$, аналогичный критерию А. А. Привалова равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа [21]. В частности, следствие из теоремы 6 в [20] утверждает, что на любом отрезке $[a,b]$, $0<a<b<\pi$, $\{L_n(f,x)\}$ равномерно сходятся к $f(x)$, если эта функция удовлетворяет условию Дини — Липщица:

$$\lim_{t\to+0}\omega(f,t)\ln t=0, \tag{3}$$

где

$$\omega(f,t)=\sup_{\substack{|x_2-x_1|\leqslant t,\\ 0\leqslant x_1,x_2\leqslant\pi}}|f(x_2)-f(x_1)|$$

— модуль непрерывности $f(x)$ на отрезке $[0,\pi]$. Но равномерной сходимости на всем отрезке $[0,\pi]$ нет даже для функции $f(x)\equiv 1$. В настоящей статье найдены достаточные условия на функцию $f(x)$, при соблюдении которых $\{L_n(f,x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[0,\pi]$. Кроме того, сконструированы модификации операторов Уиттекера, обладающие свойством равномерной сходимости на $[0,\pi]$ при несколько менее ограничительных условиях на $f(x)$.

2. Условия равномерной сходимости sinc-приближений

Впервые задача о равномерной сходимости sinc-приближений для функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0,\pi]$, была рассмотрена в [22]. В частности, в [22] доказано, что любая исчезающая на концах отрезка $[0,\pi]$ функция из класса Дини — Липшица может быть приближена операторами (2) равномерно на всем отрезке $[0,\pi]$. Мы приведем здесь доказательство этого утверждения, отличное от предложенного в работе [22], при дополнительном требовании об абсолютной непрерывности функции f на $[0,\pi]$. А именно, справедливо

Предложение 1. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Дини — Липщица на $[0,\pi]$ и пусть $f(0)=f(\pi)=0$. Тогда последовательность функций $\{L_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$, определеных формулой (2), равномерно сходится к $f(x)$ на $[0,\pi]$.*

Для доказательства этого предложения нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ — монотонная последовательность неотрицательных (неположительных) чисел. Тогда*

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right|\leqslant\max\{|a_0|,|a_n|\}. \tag{4}$$

$\lhd$ По аналогии с рядами Лейбница такие суммы будем называть суммами Лейбница. Поскольку

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(-a_k)\right|=\left|-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right|,$$

то можно считать, что $a_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Предположим также, что последовательность $\{a_k\}_{k=0}^n$ невозрастающая. Если $n = 2m$, то

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) + a_{2m} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a_k \\ = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2m-1} - a_{2m}) \leqslant a_0. \end{aligned}$$

Если же $n = 2m - 1$, то

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) = \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k a_k \\ = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2m-3} - a_{2m-2}) - a_{2m-1} \leqslant a_0. \end{aligned}$$

В случае неубывающей последовательности неотрицательных чисел аналогичные выкладки приводят к неравенству $\left|\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k\right| \leqslant a_n$. $\rhd$

Лемма 2. *При* $n \geqslant 1$, $0 \leqslant m \leqslant n$ *и* $x \in (-\infty, +\infty)$ *верно неравенство*

$$\left| \sum_{k=0}^{m} \operatorname{sinc} n \left(x - \frac{k\pi}{n} \right) \right| < 2. \tag{5}$$

$\lhd$ Если x совпадает с одним из узлов $x_k = \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, то левая часть (5) равна 1 и неравенство верно. Пусть $\frac{s\pi}{n} < x < \frac{(s+1)\pi}{n}$ для некоторого целого s, $0 < s < m$. Преобразуем оцениваемую сумму к виду

$$\sum_{k=0}^{m} \operatorname{sinc} n \left(x - \frac{k\pi}{n} \right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} = \sin nx \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{nx - k\pi}$$

и разобьем ее на две части

$$S_1 = \sin nx \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k}{nx - k\pi}, \quad S_2 = \sin nx \sum_{k=s+1}^{m} \frac{(-1)^k}{nx - k\pi}.$$

Согласно выбору s, $\{nx - k\pi\}_{k=0}^{s}$ и $\{nx - k\pi\}_{k=s+1}^{m}$ — убывающие последовательности соответственно положительных и отрицательных чисел. Следовательно, обе последовательности $\{(nx - k\pi)^{-1}\}_{k=0}^{s}$ и $\{(nx - k\pi)^{-1}\}_{k=s+1}^{m}$ являются возрастающими последовательностями чисел одного знака. Таким образом, обе суммы являются суммами Лейбница, и из неравенства (4) леммы 1 получаем оценки

$$\begin{aligned} |S_1| \leqslant \frac{|\sin nx|}{|nx - s\pi|} = \left| \frac{\sin(nx - s\pi)}{nx - s\pi} \right| = |\operatorname{sinc}(nx - s\pi)| < 1, \\ |S_2| \leqslant \frac{|\sin nx|}{|nx - (s+1)\pi|} = \left| \frac{\sin(nx - (s+1)\pi)}{nx - (s+1)\pi} \right| = |\operatorname{sinc}(nx - (s+1)\pi)| < 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Складывая последние неравенства, получаем неравенство (5). Если же $x < 0$ или $x > \frac{m\pi}{n}$, то вся сумма $\sum_{k=0}^{m} \operatorname{sinc} n(x - \frac{k\pi}{n})$ является суммой Лейбница и по лемме 1 не превосходит $\max\{|\operatorname{sinc} nx|, |\operatorname{sinc}(nx - s\pi)|\} \leqslant 1$, так что неравенство (5) верно и в этом случае. $\rhd$

Замечание 1. Оценку (5) можно уточнить. При $0 < s < m$ и $\frac{s\pi}{n} < x < \frac{(s+1)\pi}{n}$, согласно неравенствам (6),

$$\begin{aligned}|S_1| + |S_2| &\leqslant |\sin nx| \left(\frac{1}{|nx - s\pi|} + \frac{1}{|nx - (s+1)\pi|}\right) \\ &= |\sin nx| \left(\frac{1}{nx - s\pi} - \frac{1}{nx - (s+1)\pi}\right) \\ &= \sin(nx - s\pi) \left(\frac{1}{nx - s\pi} + \frac{1}{\pi - (nx - s\pi)}\right) \\ &= \sin t \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\pi - t}\right) = \frac{\pi \sin t}{t(\pi - t)} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t),\end{aligned}$$

где $t = nx - s\pi$, $0 < t < \pi$. Так как $\varphi(t) = \operatorname{sinc} t + \operatorname{sinc}(\pi - t)$, то эта функция определена на $(-\infty, +\infty)$. В частности, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 1$. Производная $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi'(t) = \frac{\pi p(t)}{t^2(\pi - t)^2},$$

где $p(t) = (\pi t - t^2)\cos t - (\pi - 2t)\sin t$. Легко видеть, что $p(0) = p(\frac{\pi}{2}) = p(\pi) = 0$. Далее, $p'(t) = (t^2 - \pi t + 2)\sin t = 0$ при $t = 0$, $t = \pi$, $t_1 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$ и $t_2 = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$, причем $0 < t_1 < \frac{\pi}{2} < t_2 < \pi$.

Очевидно, что $p'(t) > 0$ при $0 < t < t_1$ и $p'(t) < 0$ при $t_1 < t < \frac{\pi}{2}$. Это вместе с равенствами $p(0) = p(\frac{\pi}{2}) = 0$ влечет, что $p(t) > 0$ на $(0, \frac{\pi}{2})$. Следовательно, $\varphi'(t) > 0$ на $(0, \frac{\pi}{2})$, т. е. $\varphi(t)$ возрастает на $(0, \frac{\pi}{2})$. Отсюда и из соотношения $\varphi(t) = \varphi(\pi - t)$ вытекает, что $\varphi(t)$ убывает на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Таким образом, в точке $t = \frac{\pi}{2}$ функция $\varphi(t)$ достигает своего наибольшего значения $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi}$ и

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \operatorname{sinc} n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)\right| \leqslant \frac{4}{\pi}. \tag{7}$$

Последняя оценка не улучшаема. Знак равенства достигается при $n = m = 1$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

Замечание 2. Неравенства (5) и (7) остаются верными и для сумм

$$\sum_{k=m_1}^{m} \operatorname{sinc} n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right),$$

так как

$$\sum_{k=m_1}^{m} \operatorname{sinc} n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m-m_1} \operatorname{sinc} n\left(y - \frac{k\pi}{n}\right),$$

где $y = x - \frac{m_1\pi}{n}$, $0 \leqslant m_1 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 1$.

Лемма 3. *Пусть $\delta > 0$ и $\psi_{mn\delta}(x) = \sum_{k=0}^{m}{}' \operatorname{sinc} n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)$, где штрих у знака суммирования означает суммирование по значениям k, $0 \leqslant k \leqslant m$, для которых $\left|x - \frac{k\pi}{n}\right| \geqslant \delta$. Тогда*

$$|\psi_{mn\delta}(x)| \leqslant \frac{2}{n\delta} \tag{8}$$

при $0 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 1$ и $x \in (-\infty, +\infty)$.

$\triangleleft$ Обозначим через s_1 наибольшее целое значение k, для которого $k \leqslant \frac{n(x-\delta)}{\pi}$, а через s_2 — наименьшее целое значение k, для которого $k \geqslant \frac{n(x+\delta)}{\pi}$. Предположим сначала, что $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant m$. Тогда $\psi_{mn\delta}(x) = \sigma_1 + \sigma_2$, где

$$\sigma_1 = \sin nx \sum_{k=0}^{s_1} \frac{(-1)^k}{n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)}, \quad \sigma_2 = \sin nx \sum_{k=s_2}^{m} \frac{(-1)^k}{n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)}.$$

Как и при доказательстве леммы 2 убеждаемся, что обе суммы σ_1 и σ_2 являются суммами Лейбница и согласно оценке (4) леммы 1 удовлетворяют неравенствам

$$|\sigma_1| \leqslant |\sin nx| \cdot \frac{1}{n\left|x - \frac{s_1\pi}{n}\right|} \leqslant \frac{1}{n\delta}, \quad |\sigma_2| \leqslant |\sin nx| \cdot \frac{1}{n\left|x - \frac{s_2\pi}{n}\right|} \leqslant \frac{1}{n\delta},$$

откуда и следует (8). Если же $s_1 < 0$ или $s_2 > m$, то вся сумма $\psi_{mn\delta}(x)$ будет суммой Лейбница и, следовательно, оценивается как одна из сумм σ_1 или σ_2: $|\psi_{mn\delta}(x)| \leqslant \frac{1}{n\delta}$. $\triangleright$

$\triangleleft$ Доказательство предложения 1. Поскольку $f(x)$ абсолютно непрерывна на промежутке $[0,\pi]$, то для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset [0,\pi]$, $j = 0, 1, \ldots, l$, из условия $\sum_{j=1}^{l}(b_j - a_j) < 2\delta$ будет следовать, что $\sum_{j=1}^{l}|f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. Кроме того, абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию. Обозначим полную вариацию $f(x)$ на $[0,\pi]$ через V $(V = \overset{\pi}{\underset{0}{V}}(f))$. Пусть $0 \leqslant x < 2\delta$. Выберем целое $m = m(\delta)$ так, чтобы было $\frac{m\pi}{n} < 2\delta \leqslant \frac{(m+1)\pi}{n}$ и представим оператор $L_n(f,x)$, определенный формулой (2), в виде суммы

$$L_n(f,x) = L_{n,1}(x) + L_{n,2}(x),$$

где

$$L_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k)\operatorname{sinc} n(x - x_k), \quad L_{n,2}(x) = \sum_{k=m+1}^{n} f(x_k)\operatorname{sinc} n(x - x_k),$$

$$x_k = \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Применив преобразование Абеля к сумме $L_{n,1}(x)$, получим

$$L_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^{m-1}(f(x_k) - f(x_{k+1}))\sum_{j=0}^{k}\operatorname{sinc} n(x - x_j) + f(x_m)\sum_{j=0}^{m}\operatorname{sinc} n(x - x_j).$$

Согласно неравенству (5) из леммы 2 получим

$$|L_{n,1}(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1}|f(x_k) - f(x_{k+1})|\left|\sum_{j=0}^{k}\operatorname{sinc} n(x - x_j)\right|$$

$$+ |f(x_m)|\left|\sum_{j=0}^{m}\operatorname{sinc} n(x - x_j)\right| \leqslant 2\sum_{k=0}^{m-1}|f(x_k) - f(x_{k+1})| + 2|f(x_m)|$$

$$= 2\left(\sum_{k=0}^{m-1}|f(x_k) - f(x_{k+1})| + |f(x_m) - f(x_0)|\right).$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{m-1}(x_{k+1} - x_k) = \frac{m\pi}{n} < 2\delta \quad \text{и} \quad 0 < x_m - x_0 = \frac{m\pi}{n} < 2\delta,$$

то из условия выбора δ для абсолютно непрерывной функции $f(x)$ следует, что при $0 \leqslant x < 2\delta$

$$|L_{n,1}(x)| < 2(\varepsilon + \varepsilon) = 4\varepsilon. \tag{9}$$

Теперь применим преобразование Абеля ко второй сумме $L_{n,2}(x)$:

$$L_{n,2}(x) = \sum_{k=m+1}^{n-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) \sum_{j=m+1}^{k} \operatorname{sinc} n(x - x_j) + f(x_n) \sum_{j=m+1}^{n} \operatorname{sinc} n(x - x_j).$$

Учитывая, что $f(x_n) = f(\pi) = 0$, согласно замечанию 2 к лемме 2 получим

$$|L_{n,2}(x)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \left| \sum_{j=m+1}^{k} \operatorname{sinc} n(x - x_j) \right|$$

$$\leqslant \frac{2}{n\delta} \sum_{k=m+1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \leqslant \frac{2V}{n\delta} < \varepsilon$$

при $n > n_0 = \left[\frac{2V}{\varepsilon\delta}\right]$. Из последнего неравенства и неравенства (9) вытекает, что

$$|L_n(f, x)| \leqslant |L_{n,1}(x)| + |L_{n,2}(x)| < 4\varepsilon + \frac{2V}{n\delta} < 4\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon$$

и, следовательно, при $n > n_0$ и $0 \leqslant x < 2\delta$

$$|L_n(f, x) - f(x)| \leqslant |L_n(f, x)| + |f(x) - f(0)| < 5\varepsilon + \varepsilon = 6\varepsilon. \tag{10}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что неравенство (10) остается верным и при $n > n_0$ и $\pi - 2\delta < x \leqslant \pi$. С другой стороны, согласно приведенному во введении следствию теоремы 6 из [20], для данного $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_1 = n_1(\varepsilon, \delta)$ такой, что при $n > n_1$ и $\delta \leqslant x \leqslant \pi - \delta$ будет $|L_n(f, x) - f(x)| < \varepsilon$. Отсюда и из (10) следует, что при $n > \max\{n_1, n_0\}$ и $0 \leqslant x \leqslant \pi$ верно неравенство $|L_n(f, x) - f(x)| < 6\varepsilon$, что означает равномерную сходимость последовательности функций $\{L_n(f, x)\}$ к $f(x)$ на всем промежутке $[0, \pi]$. $\rhd$

Следствие 1. *Если функция $f(x) \in \mathrm{Lip}_1[0, \pi]$ и $f(0) = f(\pi) = 0$, то последовательность функций $\{L_n(f, x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на $[0, \pi]$.*

$\lhd$ На самом деле, из $f(x) \in \mathrm{Lip}_1[0, \pi]$ следует, что функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, \pi]$ и удовлетворяет там условию Дини — Липщица. $\rhd$

Замечание 3. Из абсолютной непрерывности функции $f(x)$ не следует, что она удовлетворяет условию Дини — Липщица. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln\left(\frac{2\pi}{x}\right)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

является абсолютно непрерывной на $[0, \pi]$, поскольку ее производная $f'(x) = \frac{1}{x \ln^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)}$ существует при $0 < x \leqslant \pi$, является суммируемой на $[0, \pi]$ и $f(x) = \int_0^x \frac{1}{t \ln^2\left(\frac{2\pi}{t}\right)}\, dt$. В то же время модуль непрерывности этой функции $\omega(f, t) = \frac{1}{\ln\left(\frac{2\pi}{t}\right)}$, а

$$\lim_{t \to o+} \omega(f, t) \ln t = \lim_{t \to o+} \frac{\ln t}{\ln(2\pi) - \ln t} = -1 \neq 0,$$

т. е. $f(x)$ не удовлетворяет условию (3) Дини — Липщица.

3. Модифицированные операторы

В случае, если $f(0) \neq 0$ или $f(\pi) \neq 0$, значения операторов (2), как было отмечено выше, не сходятся равномерно к $f(x)$ на всем отрезке $[0, \pi]$. Для обеспечения равномерной сходимости приходится несколько видоизменить операторы Уиттекера.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Дини — Липщица на $[0, \pi]$. Тогда последовательность функций*

$$\widehat{L}_n(f, x) = L_n(F, x) + L_1(f, x), \tag{11}$$

где $L_1(f, x) = f(0) \operatorname{sinc} x + f(\pi) \operatorname{sinc}(x - \pi)$, $F(x) = f(x) - L_1(f, x)$, а $L_n(\cdot, x)$ задан формулой (2), равномерно сходится к $f(x)$ на $[0, \pi]$.

$\lhd$ На самом деле, $F(0) = f(0) - L_1(f, 0) = f(0) - f(0) = 0$,

$$F(\pi) = f(\pi) - L_1(f, \pi) = f(\pi) - f(\pi) = 0.$$

Так как функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Дини — Липщица на $[0, \pi]$, то $F(x)$ также абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Дини — Липщица на $[0, \pi]$. Тогда по предложению последовательность $\{L_n(F, x)\}$ равномерно на $[0, \pi]$ сходится к $F(x) = f(x) - L_1(f, x)$. Следовательно, $\widehat{L}_n(f, x) = L_n(F, x) + L_1(f, x)$ равномерно на $[0, \pi]$ сходится к $F(x) + L_1(f, x) = f(x) - L_1(f, x) + L_1(f, x) = f(x)$. $\rhd$

Замечание 4. Оператор (11) в явном виде выглядит так

$$\widehat{L}_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f) \operatorname{sinc} n \left(x - \frac{k\pi}{n} \right),$$

где

$$A_0(f) = f(0), \quad A_n(f) = f(\pi),$$

$$A_k(f) = f\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f(0) \operatorname{sinc}\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f(\pi) \operatorname{sinc}\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Пусть теперь $f(x)$ непрерывна на $[0, \pi]$ и дифференцируема на концах этого промежутка, т. е. существуют односторонние производные $f'(0)$ и $f'(\pi)$. Тогда функция $G(x) = \frac{f(x) - L_1(f, x)}{\sin x}$ непрерывна на $(0, \pi)$ и при $x \to +0$

$$G(x) = \frac{f(x) - f(0) \operatorname{sinc} x - f(\pi) \operatorname{sinc}(x - \pi)}{\sin x} = \frac{f(x) - f(0)(1 + o(x)) - f(\pi) \frac{\sin x}{\pi - x})}{\sin x}$$
$$= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \frac{x}{\sin x} - f(0) o(1) \frac{x}{\sin x} - \frac{f(\pi)}{\pi - x} \to f'(0) - \frac{f(\pi)}{\pi}.$$

Аналогично при $x \to \pi - 0$

$$G(x) \to -f'(\pi) - \frac{f(0)}{\pi}.$$

Значит, после доопределения $G(0) = f'(0) - \frac{f(\pi)}{\pi}$ и $G(\pi) = -f'(\pi) - \frac{f(0)}{\pi}$ функция

$$G(x) = \begin{cases} f'(0) - \frac{f(\pi)}{\pi}, & x = 0, \\ \frac{f(x) - L_1(f, x)}{\sin x}, & 0 < x < \pi, \\ -f'(\pi) - \frac{f(0)}{\pi}, & x = \pi \end{cases} \tag{12}$$

становится непрерывной на всем отрезке $[0, \pi]$.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0,\pi]$ и дифференцируема на концах этого промежутка, а функция $G(x)$, определенная формулой* (12), *имеет ограниченную вариацию на $[0,\pi]$ и удовлетворяет условию Дини — Липщица. Тогда последовательность функций*

$$\widetilde{L}_n(f,x)=\sin x L_n(G,x)+L_1(f,x), \tag{13}$$

где $L_n(\cdot,x)$ — оператор, заданный формулой (2), *равномерно сходится к $f(x)$ на $[0,\pi]$.*

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 4. *Функция $\operatorname{sinc} x$, заданная формулой* (1), *при $x\neq 0$ удовлетворяет неравенствам*

$$0<1-\operatorname{sinc} x<\frac{x^2}{6}. \tag{14}$$

$\lhd$ Из приведенного во введении неравенства $|\operatorname{sinc} x|<1$ при $x\neq 0$ следует, что $0<1-\operatorname{sinc} x<2$. Следовательно, правое неравенство (14) достаточно доказать при $0<\frac{x^2}{6}<2$ или $0<x^2<12$. Из разложения функции $\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ в ряд Тейлора получим

$$1-\operatorname{sinc} x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Модуль общего члена ряда $a_k(x)=\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\to 0$ при $k\to\infty$ для любого x. Кроме того, $a_k(x)>a_{k+1}(x)$ равносильно $0<x^2<(2k+2)(2k+3)$. Правая часть последнего неравенства достигает наименьшего значения при $k=1$. Следовательно, последовательность $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является убывающей при $0<x^2<20$ и, в частности, при $0<x^2<12$. Значит, последний ряд является рядом Лейбница и его сумма меньше модуля первого члена, т. е. $1-\operatorname{sinc} x<\frac{x^2}{6}$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Обозначим

$$M:=\sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}|G(x)|,\quad V:=\overset{\pi}{\underset{0}{V}}(G).$$

Применив преобразование Абеля и неравенство (5), из леммы 2 получим

$$\begin{aligned}|L_n(G,x)|&\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|G(x_k)-G(x_{k+1})|\left|\sum_{j=0}^{k}\operatorname{sinc} n(x-x_j)\right|+|G(x_n)|\left|\sum_{j=0}^{n}\operatorname{sinc} n(x-x_j)\right|\\&\leqslant 2\sum_{k=0}^{n-1}|G(x_k)-G(x_{k+1})|+2\,|G(x_n)|\leqslant 2(V+M),\end{aligned} \tag{15}$$

где $x_k=\frac{k\pi}{n}$, $k=0,1,\dots,n$. Поскольку $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $[0,\pi]$, то для данного $\varepsilon>0$ найдется такое δ, $0<\delta<\min\{1,\frac{\varepsilon}{V+2M}\}$, что для любых x_1,x_2 из этого промежутка $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$ при $|x_2-x_1|<\delta$. Пусть $0\leqslant x<\delta$. Тогда из (12)–(15) следует

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{L}_n(f,x)-f(x)\right|&\leqslant\left|\widetilde{L}_n(f,x)-f(0)\right|+|f(x)-f(0)|\\&\leqslant\sin\delta\,|L_n(G,x)|+|f(0)|\,(1-\operatorname{sinc})x+|f(\pi)|\,\frac{\sin\delta}{\pi-\delta}+\varepsilon\\&\leqslant\delta(V+M)+M\frac{\delta^2}{6}+M\frac{\delta}{\pi-\delta}+\varepsilon\leqslant\delta(V+2M)+\varepsilon\leqslant\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned} \tag{16}$$

Последняя оценка справедлива и при $\pi - \delta < x \leqslant \pi$. С другой стороны, согласно следствию теоремы 6 из [20], для данного $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$ такой, что при $n > n_0$ и $\delta \leqslant x \leqslant \pi - \delta$ будет $|L_n(G, x) - G(x)| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$\begin{gathered} \left|\widetilde{L}_n(f, x) - f(x)\right| = |\sin x L_n(G, x) + L_1(f, x) - f(x)| \\ = \left|\sin x \left(L_n(G, x) - \frac{f(x) - L_1(f, x)}{\sin x}\right)\right| = |\sin x (L_n(G, x) - G(x))| \\ \leqslant |L_n(G, x) - G(x)| < \varepsilon. \end{gathered} \tag{17}$$

Наконец, из (16), (17) получаем, что при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и $n > n_0$ выполнено неравенство $|\widetilde{L}_n(f, x) - f(x)| < 2\varepsilon$. $\triangleright$

В заключение отметим, что основные результаты настоящей работы были анонсированы в [23].

Литература

1. *Whittaker E. T.* On the functions which are represented by expansions of the interpolation theory // Proc. Roy. Soc. Edinburgh.—1915.—Vol. 35.—P. 181–194.
2. *Котельников В. А.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Всесоюзный энергетический коммитет. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. По радиосекции.—М: Управление связи РККА, 1933.—С. 1–19.
3. *Shannon C. E.* A mathematical theory of communication // Bell System Tech. J.—1948.—Vol. 27.—P. 379–423, 623–656.
4. *Schoenberg I. J.* Cardinal interpolation and spline functions // J. Approx. Theory.—1969.—Vol. 2.—P. 167–206.
5. *McNamee J., Stenger F., Whitney E. L.* Whittaker's cardinal function in retrospect // Mathematics of Computation.—1971.—Vol. 25.—№ 113.—P. 141–154.
6. *Stenger F.* An analytic function which is an approximate characteristic function // SIAM J. Appl. Math.—1975.—Vol. 12.—P. 239–254.
7. *Stenger F.* Approximations via the Whittaker cardinal function // J. Approx. Theory.—1976.—Vol. 17.—P. 222–240.
8. *Higgins J. R.* Five short stories about the cardinal series // Bull. Amer. Math. Soc.—1985.—Vol. 12.—P. 45–89.
9. *Lund J., Kenneth L. B.* Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations.—Philadelphia: J. Soc. Ind. Appl. Math., 1992.—304 p.
10. *Stenger F.* Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions.—N. Y.: Springer-Verlag, 1993.—565 p.
11. *Young R. M.* An Introduction to Nonharmonic Fourier Series. Revised first edition.—San Diego: Academic Press. A Harcourt Science and Technology Company, 2001.—235 p.
12. *Жук А. С., Жук В. В.* Некоторые ортогональности в теории приближения // Зап. научн. семин. ПОМИ.—2004.—Т. 314.—С. 83–123.
13. *Antuna A., Guirao L. G., Lopez M. A.* Shannon–Whittaker–Kotel'nikov's theorem generalized // MATCH Commun. Math. Comput. Chem.—2015.—Vol. 73.—P. 385–396.
14. *Трынин А. Ю.* Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа — Штурма — Лиувилля // Тез. докл. 10 Саратовской зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения» (27 января–2 февраля 2000 г.).—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000.—С. 140–141.
15. *Трынин А. Ю.* Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам // Математика. Механика.—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005.—Т. 7.—С. 124–127.
16. *Скляров В. П.* О наилучшей равномерной sinc аппроксимации на конечном отрезке // Тез. докл. 13 Саратовской зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения» (27 января–3 февраля 2006 г.).—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.—С. 161.
17. *Trynin A. Yu., Sklyarov V. P.* Error of sinc approximation of analytic functions on an interval // Sampling Theory in Signal and Image Processing.—2008.—Vol. 7, № 3.—P. 263–270.

18. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East J. Approx.—2008.—Vol. 14, № 2.—P. 183–192.
19. *Трынин А. Ю.* Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 5.—С. 1155–1166.
20. *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. вузов. Математика.—2008.—№ 6.—С. 66–78.
21. *Привалов А. А.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки.—1986.—Т. 39, № 6.—С. 228–243.
22. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 11.—С. 61–108.
23. *Шарапудинов И. И., Умаханов А. Я.* Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости // Материалы 18-й междунар. Саратовской зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения».—Саратов, 2016.—С. 332–334.

Статья поступила 3 марта 2016 г.

Умаханов Айвар Ярахмедович
Дагестанский научный центр РАН,
научный сотрудник отдела математики и информатики
РОССИЯ, 367025, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45;

Дагестанский государственный педагогический университет,
доцент кафедры методики преподавания математики и информатики
РОССИЯ, 367013, Махачкала, ул. Гамидова, 17 а
E-mail: aivarumahanov@gmail.com

Шарапудинов Идрис Идрисович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Дагестанский государственный педагогический университет,
заведующий кафедрой математического анализа
РОССИЯ, 367013, Махачкала, ул. Гамидова, 17 а
E-mail: sharapud@mail.ru

INTERPOLATION OF FUNCTIONS BY THE WHITTAKER SUMS AND THEIR MODIFICATIONS: CONDITIONS FOR UNIFORM CONVERGENCE

Umakhanov A. Y., Sharapudinov I. I.

We consider Hammerstein–Voltera type nonlinear system of integral equations in critical case. Above mentioned equations have applications in rediative transfer theory and kinetic theory of gases. Using special iteration methods and method of monotone operators theory we prove the exitstence of by component positive solutions in space of bounded and summerable functions with zero limit at infinity. Some examples of corresponding equations representing separate interest are also given.

Key words: nonlinear system of integral equations, Hammerstein–Voltera type operator, iteration, monotonisity, primitive matrix, summerable solution.