Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 72–83

УДК **519.6**

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧАХ С НЕГЛАДКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

Р. А. Хачатрян

В статье методом шатров получены необходимые условия экстремума в задачах математического программирования с негладкими ограничениями типа равенств. В некоторых таких задачах, где ограничения задаются, вообще говоря, не локально липшицевыми функциями, доказано правило множителей Лагранжа. Необходимые условия выражаются в терминах субдифференциала Мишеля — Пено и нижнего асимптотического субдифференциала Половинкина.

Ключевые слова: субдифференциал, шатер, касательный конус.

1. Мотивация, определения и обозначения

Исследования по необходимым условиям экстремума в последние годы были связаны в основном с более детальным изучением задач, в которых участвуют негладкие функции. При этом на первый план выдвигаются два аспекта: использование техники выпуклого анализа для невыпуклых задач и учет негладких ограничений типа равенства.

В статье [4] Ф. Кларком, с использованием вариационного принципа Экланда [13], доказано правило множителей Лагранжа в задачах с ограничениями типа равенств, задаваемых локально липшицевыми функциями. Правило множителей Лагранжа в терминах субдифференциала Кларка, при помощи теоремы о накрывании, доказано и в работе [3].

Несмотря на хорошие свойства субдифференциала Кларка, его использование в необходимых условиях экстремума не всегда приводит к удовлетворительному результату. Простейшие примеры показывают, что полученное в терминах обобщенных градиентов Кларка необходимое условие минимума довольно грубо и не позволяет отбросить заведомо неоптимальные точки. Это связано с тем, что для невыпуклой функции локальное ее поведение не всегда хорошо описывается обобщенной производной Кларка.

В работе [10] П. Мишелем и Ж. П. Пено введена новая выпуклая аппроксимация локально липшицевой функции. Введенный ими субдифференциал сохраняет многие свойства субдифференциала Кларака и входит в него. В [10] получено необходимое условие экстремума в задачах с негладкими ограничениями типа неравенств. В статье [11] в задачах с негладкими ограничениями типа равенств получено правило множителей Лагранжа в терминах субдифференциала Мишеля — Пено.

В настоящей статье показано, что применение метода шатров к негладким задачам приводит к получению принципиально новых результатов. Статья идейно связана с работами В. Г. Болтянского [2], Ф. Кларка [4], П. Мишеля и Ж. П. Пено [10], Б. Н. Пшеничного [7, 8] и Е. С. Половинкина [5], А. Д. Иоффе [11].

Для вышеуказанной задачи получено необходимое условие экстремума, в котором субдифференциал целевой функции — нижний асимптотический субдифференциал Половинкина [5], а остальные — субдифференциалы Мишеля — Пено (теорема 3.3).

Б. Н. Пшеничным в [6] введено понятие верхней выпуклой аппроксимации (в.в.а) для негладких функций. Пусть $f(x)$ — произвольная функция. Положим

$$F(x_0,\overline{x}) = \limsup_{\substack{\overline{y}\to\overline{x},\\ \lambda\downarrow 0}} \frac{f(x_0+\lambda\overline{y}) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Положительно однородная выпуклая, замкнутая по $\overline{x}$ функция $h(x_0,\overline{x})$ называется *верхней выпуклой аппроксимацией* функции f в точке x_0, если

$$h(x_0,\overline{x}) \geqslant F(x_0,\overline{x}) \quad (\forall\, \overline{x}\in\mathbb{R}^n).$$

Множество

$$\partial f(x_0) = \big\{x^*\in\mathbb{R}^n : \, h(x_0,\overline{x}) \geqslant \langle x^*,\overline{x}\rangle \ \forall\,\overline{x}\in\mathbb{R}^n\big\}$$

называется *субдифференциалом функции* f в точке x_0. Здесь $\langle x^*,\overline{x}\rangle$ — скалярное произведение векторов x^* и $\overline{x}$, принадлежащих $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1 [6]. Выпуклый конус $K_M(x_0)$ называется *конусом касательных направленный множества* M в точке x_0, если из включения $\overline{x}\in K_M(x_0)$ следует, что существует такая функция $\varphi(\lambda)$, что

$$x_0+\lambda\overline{x}+\varphi(\lambda)\in M$$

при достаточно малых $\lambda\geqslant 0$ и $\lambda^{-1}\varphi(\lambda)\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$.

Следующая теорема является необходимым условием экстремума в общей задаче математического программирования в терминах в.в.а.

Теорема 1.1 [6]. *Пусть x_0 — точка минимума функции f на множестве M. Допустим, что $h(x_0,\overline{x})$ — в.в.а. для f в x_0. Тогда*

$$\partial f(x_0)\cap K_M^*(x_0)\neq\varnothing.$$

Здесь $K_M^*(x_0)$ — сопряженный конус к конусу $K_M(x_0)$, т. е.

$$K_M^*(x_0) = \big\{x^*\in\mathbb{R}^n : \, \langle x^*,\overline{x}\rangle \geqslant 0 \ \forall\,\overline{x}\in K_M(x_0)\big\}.$$

Заметим, что в.в.а. определяется неоднозначно и для получения содержательных условий экстремума необходимо знать целые семейства в.в.а. Например, если f — вогнутая непрерывная функция, то для любого $x^*\in\partial(-f)(x_0)$ функция $h(x_0,\overline{x}) = \langle -x^*,\overline{x}\rangle$ есть в.в.а., а множество $\{-x^*\}$ — соответствующий субдифференциал вогнутой функции f.

Используя этот факт, в настоящей статье получено правило множителей Лагранжа в некоторых специальных классах экстремальных задач, где участвуют не локально липшицевые функции (теорема 3.1).

Определение 1.2 [10]. *Обобщенная производная Мишеля — Пено* функции f по направлению $\overline{x}$, обозначаемая $f'_{MP}(x_0,\overline{x})$, определяется следующим образом

$$f'_{MP}(x_0,\overline{x}) = \sup_{w\in R^n}\left\{\limsup_{\lambda\downarrow 0}\frac{f(x_0+\lambda(\overline{x}+w)) - f(x_0+\lambda w)}{\lambda}\right\}.$$

Определение 1.3 [10]. *Субдифференциалом Мишеля — Пено* для локально липшицевой функции f в точке x_0 называется множество

$$\partial_{MP} f(x_0) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : f'_{MP}(x_0, \overline{x}) \geqslant \langle x^*, \overline{x}\rangle \ \ \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Известно (см., например, [5, теорема 28.1, с. 341]), что если f — выпуклая функция в окрестности точки x_0, то $\partial f(x_0) = \partial_{MP} f(x_0)$, где $\partial f(x_0)$ — обычный субдифференциал функции f в x_0.

Нетрудно заметить, что если функция f локально липшицева, то обобщенная производная $f'_{MP}(x_0, \overline{x})$ является верхней выпуклой аппроксимацией функции f в точке x_0.

Приведем определение нижнего асимптотического субдифференциала.

Определение 1.4 [5]. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — локально липшицевая функция и $M \equiv \mathrm{epi}(f)$. Пусть $K = T_M(x_0) \dot{-} T_M(x_0)$, а $f'_{AL}(x_0, \overline{x})$ — положительно однородная выпуклая функция, надграфиком которой является конус K. *AL-субдифференциалом* функции f в точке x_0 называется множество

$$\partial_{AL} f(x_0) \equiv \{x^* \in \mathbb{R}^n : f'_{AL}(x_0, \overline{x}) \geqslant \langle x^*, \overline{x}\rangle \ \ \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Здесь $A \dot{-} B \equiv \{x \in \mathbb{R}^n / x + B \subseteq A\}$ — геометрическая разность множества A и B, а $T_M(x_0)$ — нижний конус касательных направлений ко множеству M в точке x_0 (см. [5, гл. 3, п. 24, определение 24.3]).

В [5, с. 328, формула 27.10] показано следующее представление:

$$f'_{AL}(x_0, \overline{x}) = \sup_{w \in \mathbb{R}^n} \big\{ f'_L(x_0, \overline{x} + w) - f'_L(x_0, w) \big\},$$

где

$$f'_L(x_0, u) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что функция $f'_{AL}(x_0, \overline{x})$ является верхней выпуклой аппроксимацией для f в точке x_0.

Определение 1.5 [1]. Выпуклый конус $K \subseteq K_M(x)$ называется *шатром* в точке $x \in M$, если существует отображение r, определенное в некоторой окрестности U нуля, такое, что

$$x + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M, \text{ если } \ \overline{x} \in K \cap U \text{ и } \ \frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0 \ \text{ при } \ \overline{x} \to 0.$$

Шатер K называется *непрерывным*, если r — непрерывное отображение.

В дальнейшем $\mathrm{cl}\{M\}$ — замыкание множества $M \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{con}(M - x_0) = \big\{ y \in \mathbb{R}^n / y = \lambda(x - x_0), \ \lambda \geqslant 0, \ x \in M \big\},$$

$$\mathrm{Lin}\, M = \mathrm{cl} \big\{ \mathrm{con}\, M - \mathrm{con}\, M \big\}.$$

2. Непрерывные шатры

Лемма 2.1. *Пусть $g(x)$ — липшицевая функция, определенная в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует функция $r(\overline{x}) = o(\overline{x})$, определенная в некоторой окрестности нуля, такая, что*

$$g(x_0 + \overline{x}) \leqslant g(x_0) + g'_{MP}(x_0, \overline{x}) + r(\overline{x}).$$

$\triangleleft$ Положим

$$r(\overline{x}) = \max\bigl\{0, g(x_0+\overline{x}) - g(x_0) - g'_{MP}(x_0,\overline{x})\bigr\}.$$

Покажем, что $r(\overline{x})$ обладает нужным свойством. Допустим противное. Это означает, что существуют последовательность $\overline{x_i} \to 0$ и положительное число ϵ_0 такие, что

$$r(\overline{x_i}) \geqslant \epsilon_0 \|\overline{x_i}\|.$$

Положим

$$\overline{y_i} = \frac{\overline{x_i}}{\|\overline{x_i}\|}, \quad \lambda_i = \|\overline{x_i}\|.$$

Тогда можно считать, что $\overline{y_i} \to \overline{y_0}$. Имеем

$$0 < \epsilon_0 \leqslant \lim_{i\to\infty} \sup \frac{r(\overline{x_i})}{\|\overline{x_i}\|} = \lim_{i\to\infty} \sup \left[\frac{g(x_0+\lambda_i\overline{y_i}) - g(x_0)}{\lambda_i} - g'_{MP}(x_0,\overline{y_i})\right]$$
$$\leqslant \lim_{i\to\infty} \left[\sup \frac{g(x_0+\lambda_i\overline{y_i}) - g(x_0+\lambda_i\overline{y_0})}{\lambda_i} + \frac{g(x_0+\lambda_i\overline{y_0}) - g(x_0)}{\lambda_i} - g'_{MP}(x_0,\overline{y_i})\right]$$
$$\leqslant \lim_{i\to\infty} \sup \left[g'_{MP}(x_0,\overline{y_0}) - g'_{MP}(x_0,\overline{y_i})\right] + \lim_{i\to\infty} \sup \frac{g(x_0+\lambda_i\overline{y_i}) - g(x_0+\lambda_i\overline{y_0})}{\lambda_i}.$$

Поскольку $g'_{MP}(x_0,\cdot)$ полунепрерывна снизу в нуле, то

$$\lim_{i\to\infty} \sup \left[g'_{MP}(x_0,\overline{y_0}) - g'_{MP}(x_0,\overline{y_i})\right] \leqslant 0.$$

Пусть функция g липшицева с константой L. Тогда имеем

$$\lim_{i\to\infty} \sup \frac{g(x_0+\lambda_i\overline{y_i}) - g(x_0+\lambda_i\overline{y_0})}{\lambda_i} \leqslant L\|\overline{y_i} - \overline{y_0}\| \to 0.$$

Итак получили противоречие, поскольку правая часть неравенства стремится к нулю, а ее левая часть — фиксированное положительное число. $\triangleright$

Теорема 2.1. *Пусть g локально липшицева и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — такая точка, что $x_0 \in M \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ и существует вектор w такой, что*

$$g'_{MP}(x_0, w) < 0,$$

а функция $g'_{MP}(x,w)$ полунепрерывна сверху в точке x_0.

Тогда подпространство

$$H \equiv \bigl\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : g'_{MP}(x_0,\overline{x}) \leqslant 0,\ g'_{MP}(x_0,-\overline{x}) \leqslant 0\bigr\}$$

является непрерывным шатром к множеству M в точке x_0.

$\triangleleft$ По лемме 2.1 существуют такие функции $r_i(\overline{x}) = o(\overline{x})$, $i = 1, 2$, что

$$g(x_0+\overline{x}) \leqslant g(x_0) + g'_{MP}(x_0,\overline{x}) + r_1(\overline{x}), \tag{2.1}$$

$$-g(x_0+\overline{x}) \leqslant -g(x_0) + g'_{MP}(x_0,-\overline{x}) + r_2(\overline{x}). \tag{2.2}$$

Так как по предположению функция $g'_{MP}(x,w)$ полунепрерывна сверху по x, то существует окрестность V точки x_0 такая, что

$$\max_{x\in V} g'_{MP}(x,w) \equiv m < 0.$$

Положим $p(\lambda) \equiv \sup\{r_1(\overline{x}) : \|\overline{x}\| \leqslant \lambda\}$. Ясно, что функция $p(\lambda)$ монотонно не убывает и $p(\lambda) = o(\lambda)$, $r_1(\overline{x}) \leqslant p(\|\overline{x}\|)$. Поэтому для $\overline{x} \in H$, $\gamma > 0$ из неравенства (2.1) получаем

$$g\big(x_0 + \overline{x} + \gamma\|\overline{x}\|w\big) \leqslant g(x_0) + g'_{MP}(x_0, \overline{x} + \gamma\|\overline{x}\|w)$$
$$+ p\big(\|\overline{x}\| + \gamma\|\overline{x}\|\|w\|\big) \leqslant g'_{MP}(x_0, \overline{x}) + \gamma\|\overline{x}\|g'_{MP}(x_0, w)$$
$$+p\big(\|\overline{x}\|(1+\gamma\|w\|)\big) \leqslant \|\overline{x}\|\left[\gamma g'_{MP}(x_0, w) + \frac{p((1+\gamma\|w\|)\|\overline{x}\|)}{\|\overline{x}\|}\right].$$

Выберем число $\delta_\gamma^+ > 0$ настолько малым, чтобы выражение, выделенное в квадратных скобках, было меньше, чем $\frac{1}{2}\gamma g'_{MP}(x_0, w)$ при $\|\overline{x}\| \leqslant \delta_\gamma^+$, $\overline{x} \neq 0$. Тогда

$$g\big(x_0 + \overline{x} + \gamma\|\overline{x}\|w\big) \leqslant \frac{1}{2}\gamma g'_{MP}(x_0, w)\|\overline{x}\| < 0.$$

Так как $(-g)'_{MP}(x_0, \overline{x}) = g'_{MP}(x_0, -\overline{x})$, то аналогично, используя неравенство 2.2, получим, что существует такое число $\delta_\gamma^- > 0$, что

$$g(x_0 + \overline{x} - \gamma\|\overline{x}\|w) > 0 \quad (\forall\, \overline{x} \in H,\ \|\overline{x}\| \leqslant \delta_\gamma^-,\ \overline{x} \neq 0).$$

Положим $\delta_\gamma = \min\{\delta_\gamma^+, \delta_\gamma^-\}$ и рассмотрим функцию

$$q(\tau) \equiv g(x_0 + \overline{x} + \tau\|\overline{x}\|w)$$

на отрезке $[-\gamma, \gamma]$. Имеем $q(\gamma) < 0$, $q(-\gamma) > 0$. Так как функция g непрерывна, то $q(\tau)$ тоже является непрерывной функцией. Поскольку функция q на отрезке $[-\gamma, \gamma]$ меняет знак, то в некоторой точке $\tau(\overline{x}) \in [-\gamma, \gamma]$ она обращается в нуль. Итак, для любого $\gamma > 0$ существует $\delta_\gamma > 0$ такое, что

$$g(x_0 + \overline{x} + \tau(\overline{x})\|\overline{x}\|w) = 0, \quad \mid \tau(\overline{x}) \mid \leqslant \gamma,\ \|\overline{x}\| \leqslant \delta_\gamma.$$

Заметим также, что

$$\limsup_{\Delta\downarrow 0} \frac{q(\tau+\Delta) - q(\tau)}{\Delta} = \limsup_{\Delta\downarrow 0} \left[\frac{g(x_0 + \overline{x} + (\tau+\Delta)\|\overline{x}\|w)}{\Delta} - \frac{g(x_0 + \overline{x} + \tau\|\overline{x}\|w)}{\Delta}\right]$$
$$\leqslant \|\overline{x}\|g'_{MP}\big(x_0 + \overline{x} + \tau\|\overline{x}\|w, w\big).$$

Поэтому в силу полунепрерывности сверху функции $g'_{MP}(x, w)$ по x в точке x_0 и условия $g'_{MP}(x_0, w) < 0$, имеем

$$\limsup_{\Delta\downarrow 0} \frac{q(\tau+\Delta) - q(\tau)}{\Delta} < 0 \ \text{ при малых } \ \overline{x}.$$

Отсюда следует, что функция q монотонно убывает и, следовательно, она имеет на отрезке $[-\gamma, \gamma]$ единственный корень. Поэтому функция $\tau(\overline{x})$ для достаточно малых $\overline{x}$ определяется однозначно. Из $|\tau(\overline{x})| \leqslant \gamma$ и $\|\overline{x}\| \leqslant \delta_\gamma$ следует, что $\tau(\overline{x}) \to 0$ при $\overline{x} \to 0$.

Покажем, что функция $\tau(\overline{x})$ непрерывна. Допустим противное. Пусть существуют две последовательности $\{\overline{x_i}\}$, $\{\overline{y_i}\}$ такие, что $\overline{x_i} \to \overline{x_0}$, $\overline{y_i} \to \overline{x_0}$, но $\tau(\overline{x_i}) \to \overline{\tau}$, $\tau(\overline{y_i}) \to \underline{\tau}$, $\overline{\tau} \neq \underline{\tau}$. Отсюда и из непрерывности функции f следует, что

$$g(x_0 + \overline{x_0} + \overline{\tau}\|\overline{x_0}\|w) = 0,$$

$$g(x_0 + \overline{x_0} + \underline{\tau}\|\overline{x_0}\|w) = 0, \quad |\overline{\tau}| \leqslant \gamma, \ |\underline{\tau}| \leqslant \gamma.$$

Отсюда $\overline{\tau} = \underline{\tau}$ в силу однозначности функции $\tau(\overline{x})$. Таким образом, показано, что в малой окрестности нуля и при $\overline{x} \in H$ функция $\tau(\overline{x})$ непрерывна и $\tau(\overline{x}) \to 0$,

$$g(x_0 + \overline{x} + \tau(\overline{x})\|\overline{x}\|w) = 0.$$

Так как $0 \in H$, то

$$\|Pr_H(\overline{x})\| \leqslant \|\overline{x}\|,$$

где $Pr_H(\overline{x})$ — проекция точки $\overline{x}$ на подпространство H. Положим

$$\Psi(\overline{x}) = \overline{x} + \tau(Pr_H(\overline{x}))\|\overline{x}\|w.$$

Очевидно, что функция Ψ непрерывна в некоторой окрестности U нуля и такова, что

$$g(x_0 + \Psi(\overline{x})) = 0 \quad (\forall\, \overline{x} \in H \cap U, \ \Psi(\overline{x}) - \overline{x} = o(\overline{x})).$$

Следствие. *Пусть функция g дифференцируема по Гато в окрестности точки x_0 и $g'_G(x_0) \neq 0$. Пусть вектор w такой, что $\langle g'_G(x_0), w\rangle < 0$ и функция $f(x) \equiv \langle g'_G(x), w\rangle$ полунепрерывна сверху в точке x_0. Тогда подпространство $H = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \langle g'_G(x_0), \overline{x}\rangle = 0\}$ является непрерывным шатром к множеству M в точке x_0.*

Замечание. Теорема 2.1 верна, если вместо обобщенной производной Пено использовать производную Кларка и тогда условие полунепрерывности сверху обобщенной производной автоматически выполняется. Заметим также, что если локально липшицевая функция $g(x)$ имеет обычную производную по направлениям, то согласно лемме 28.1 [5, гл. 3, п. 28] ее обобщенная производная Пено совпадает с обобщенной производной Кларка, и поэтому $g'_{MP}(x, \overline{x})$ полунепрерывна сверху по x.

3. О правиле множителей Лагранжа в негладких задачах оптимизации

Рассмотрим следующую задачу математического программирования:

$$f_0(x) \longrightarrow \min, \quad f_i(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k, \ x \in M). \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Пусть точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — решение задачи (3.1). Предположим также, что функции $f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, непрерывны в окрестности точки x_0 и дифференцируемы в этой точке. Пусть K является непрерывным шатром для множества M в точке x_0. Тогда существуют числа λ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, не равные нулю одновременно, и такие, что*

$$0 \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f'_i(x_0) - K^*.$$

$\lhd$ Обозначим

$$F(x) := \big(f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x), \ldots, f_k(x)\big).$$

Покажем, что

$$F'(x_0)K \neq \mathbb{R}^{k+1}.$$

Пусть

$$F'(x_0)K = \mathbb{R}^{k+1}.$$

Отсюда следует, что существует такой симплекс $[z_1, z_2, \dots, z_{k+2}] \subset \mathbb{R}^{k+1}$, содержащий нуль в качестве внутренней точки, что

$$[z_1, z_2, \dots, z_{k+2}] \in F'(x_0)K.$$

Значит, существуют векторы $\overline{x_j} \in K$ $(j = 1, 2, \dots, k+2)$ такие, что

$$z_j = F'(x_0)\overline{x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k+2. \tag{3.2}$$

Так как векторы $z_j - z_1$, $j = 2, 3, \dots, k+2$, образуют базис в $\mathbb{R}^{k+1}$, то можно определить линейное отображение $L : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$L(z_j - z_1) = \overline{x_j} - \overline{x_1}, \quad j = 2, \dots, k+2.$$

Пусть

$$z = \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j z_j + \left(1 - \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j\right) z_1 \in [z_1, z_2, \dots, z_{k+2}].$$

Положим

$$\varphi(z) = L(z - z_1) + \overline{x_1},$$

где $\varphi(z)$ — непрерывное отображение симплекса $[z_1, z_2, \dots, z_{k+2}]$ в множество $\operatorname{conv}\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_{k+2}}\}$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}\varphi(z) = L(z - z_1) + \overline{x_1} &= L\left(\sum_{j=2}^{k+2} \beta_j z_j + \left(1 - \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j\right) z_1 - z_1\right) + \overline{x_1} \\ &= L\left(\sum_{j=2}^{k+2} \beta_j (z_j - z_1)\right) + \overline{x_1} = \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j L(z_j - z_1) + \overline{x_1} \\ = \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j (\overline{x_j} - \overline{x_1}) + \overline{x_1} &= \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j \overline{x_j} + \left(1 - \sum_{j=2}^{k+2} \beta_j\right) \overline{x_1} \in \operatorname{conv}\{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{k+2}}\}.\end{aligned}$$

Так как K является непрерывным шатром для M в точке x_0, то существует непрерывное отображение $\psi(\overline{x}) \equiv \overline{x} + r(\overline{x})$, $r(\overline{x}) = o(\overline{x})$, такое, что

$$x_0 + \psi(\overline{x}) \in M \quad (\forall\, \overline{x} \in K \cap B_{\epsilon_0}(0)),$$

где ϵ_0 — некоторое положительное число. Для фиксированных чисел $\delta > 0$ и $\epsilon > 0$ определим непрерывное отображение ϕ_δ на $[z_1, z_2, \dots, z_{k+2}]$ следующим образом:

$$\phi_\delta(z) \equiv z - \frac{F(x_0 + \psi(L(\delta z - \delta z_1) + \delta \overline{x_1}))}{\delta} - \vec{\epsilon}, \quad z \in [z_1, z_2, \dots, z_{k+2}],$$

$$\vec{\epsilon} = (\epsilon, \underbrace{0, \dots, 0}_{k}).$$

При малых $\delta > 0$ имеем $\delta \operatorname{conv}\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_{k+2}}\} \subseteq B_{\epsilon_0}(0) \cap K$ и, следовательно,

$$L(\delta z - \delta z_1) + \delta \overline{x_1} = \delta \varphi(z) \in K \cap B_{\epsilon_0}(0). \tag{3.3}$$

Поскольку $F(x_0) = 0$ и отображение F дифференцируемо в точке x_0, то из (3.2)–(3.3) следует, что

$$\begin{aligned}\phi_\delta(z) &= z - \frac{F(x_0)}{\delta} - F'(x_0)\varphi(z) - \frac{o(x_0, \delta\varphi(z))}{\delta} - \vec{\epsilon} \\ &= z - F'(x_0)\left(\sum_{j=2}^{k+2} \beta_j(\overline{x_j} - \overline{x_1}) + \overline{x_1}\right) - \frac{o(x_0, \delta\varphi(z))}{\delta} - \vec{\epsilon} \\ &= z - z - \frac{o(x_0, \delta\varphi(z))}{\delta} - \vec{\epsilon} = -\frac{o(x_0, \delta\varphi(z))}{\delta} - \vec{\epsilon}.\end{aligned}$$

Следовательно, для достаточно малых $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ непрерывное отображение ϕ_δ отображает симплекс $[z_1, z_2, \ldots, z_{k+2}]$ в себя. Значит, по теореме Брауера существует неподвижная точка этого отображения, т. е. существует элемент $z_\epsilon \in [z_1, z_2, \ldots, z_{k+2}]$ такой, что

$$\phi_\delta(z_\varepsilon) = z_\varepsilon.$$

Отсюда, имея ввиду определение отображения $\Phi_\delta(z)$, получаем

$$f_0(x_0 + \psi(\delta\varphi(z_\varepsilon))) = f_0(x_0) - \epsilon\delta, \quad f_i(x_0 + \psi(\delta\varphi(z_\epsilon))) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$x_0 + \psi(\delta\varphi(z_\epsilon)) \in M.$$

Это противоречит тому, что x_0 — решение задачи (3.1). Таким образом доказано, что

$$F'(x_0)K \neq \mathbb{R}^{k+1}.$$

Значит, существует ненулевой вектор $\vec{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ такой, что

$$\left\langle \vec{\lambda}, F'(x_0)y^* \right\rangle \geqslant 0 \quad (\forall\, y^* \in K).$$

Следовательно, $\langle F'^*(x_0)\vec{\lambda}, \overline{x}\rangle \geqslant 0$ $(\forall\, \overline{x} \in K)$, т. е. $F'^*(x_0)\vec{\lambda} \in K^*$. Откуда, получаем

$$0 \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i'(x_0) - K^*. \ \rhd$$

Следствие. *Пусть в задаче* 3.1 *множество* M *задано следующим образом:*

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ g(x) = 0\right\}.$$

Пусть g *— выпуклая непрерывная функция и* $0 \notin \partial g(x_0)$. *Предположим также, что относительно функций* f_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, *выполнены все предположения теоремы* 3.1.

Тогда, если x_0 *— решение задачи* 3.1, *то для любого* $x^* \in \partial g(x_0)$ *существуют числа* $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *не равные нулю одновременно и такие, что*

$$0 \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_k f_i'(x_0) + \mathrm{cl}\left\{\,\mathrm{con}\,\partial g(x_0) - \mathrm{con}\,x^*\right\}. \qquad (3.4)$$

$\lhd$ В силу теоремы 3 из [9] для любого $x^* \in \partial g(x_0)$ выпуклый конус

$$K_M(x_0, x^*) \equiv \left\{\overline{x} :\ g'(x_0, \overline{x}) \leqslant 0,\ \langle x^*, \overline{x}\rangle \geqslant 0\right\}$$

является непрерывным шатром к множеству $M \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ в точке x_0. Следовательно, по теореме 3.1 для любого $x^* \in \partial g(x_0)$ существуют числа $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$0 \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i'(x_0) - K_M^*(x_0, x^*). \tag{3.5}$$

Имеем

$$K_M^*(x_0, x^*) = \operatorname{cl}\bigl\{\operatorname{con} x^* - \operatorname{con} \partial g(x_0)\bigr\}.$$

Отсюда, учитывая включение (3.5), немедленно получим правило множителей Лагранжа (3.4). $\rhd$

Заметим, что функции f_i, $i = 0, 1, \dots, k$, вообще говоря, не являются локально липшицевыми, а g может и не быть дифференцируемой функцией. Поэтому, при помощи вариационного принципа Экланда или теоремы о неявных функциях в задаче 3.1 невозможно получить правило множителей Лагранжа.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x) \to \min, \quad g(x) = 0, \quad x \in M. \tag{3.6}$$

Теорема 3.2. *Пусть f, g — выпуклые функции, а M — выпуклое множество. Пусть x_0 — решение задачи* (3.6) *и для некоторого $x_0^* \in \partial g(x_0)$ существуют такие векторы w_1, w_2, что*

$$g'(x_0, w_1) < 0, \quad \langle x_0^*, w_2\rangle > 0, \quad w_1, w_2 \in M - x_0.$$

Тогда либо

$$0 \in \partial f(x_0) + \operatorname{con} \partial g(x_0) - K_M^*(x_0), \tag{3.7}$$

либо

$$0 \in \partial f(x_0) - \operatorname{con} x_0^* - K_M^*(x_0). \tag{3.8}$$

$\lhd$ Пусть включение (3.7) не выполняется. Тогда согласно сильной отделимости выпуклых множеств существуют вектор u_1 и число $\delta_1 > 0$ такие, что

$$\bigl\langle u_1, y_1^* - (y_3^* - y_2^*)\bigr\rangle \leqslant -\delta_1 \quad (\forall\, y_1^* \in \partial f(x_0),\ y_2^* \in \operatorname{con} \partial g(x_0),\ y_3^* \in K_M^*(x_0)). \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что

$$\bigl\langle u_1, y_3^* - y_2^*\bigr\rangle \geqslant 0 \quad (\forall\, y_2^* \in \operatorname{con} \partial g(x_0),\ y_3^* \in K_M^*(x_0)). \tag{3.10}$$

Действительно, если для некоторых $y_2^* \in \operatorname{con} \partial g(x_0)$, $y_3^* \in K_M^*(x_0)$

$$\langle u_1, y_3^* - y_2^*\rangle < 0,$$

то при $\lambda \to +\infty$ имеем

$$\bigl\langle u_1, \lambda(y_3^* - y_2^*)\bigr\rangle \to -\infty,$$

а это противоречит соотношению (3.9). Значит, из (3.10) следует, что

$$\begin{aligned} u_1 \in (-\operatorname{con} \partial g(x_0) + K_M^*(x_0))^* &= (-\operatorname{con} \partial g(x_0))^* \cap K_M^{**}(x_0) \\ &= \bigl\{\overline{x} : g'(x_0, \overline{x}) \leqslant 0\bigr\} \cap \operatorname{cl}\{\operatorname{con}(M - x_0)\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из (3.9) следует, что

$$f'(x_0, u_1) = \max_{x^* \in \partial f(x_0)} \langle x^*, u_1 \rangle < -\delta_1. \tag{3.12}$$

Конусы

$$K_{\Omega^+}(x_0) := \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : g'(x_0, \overline{x}) \leqslant 0\}, \quad K_M(x_0) = \mathrm{cl}\{(\mathrm{con}\, M - x_0)\},$$

в силу теоремы 34.2 [1, гл. 4, п. 9, с. 278] являются непрерывными шатрами для множеств $\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leqslant 0\}$ и M соответственно. Поскольку по предположению теоремы

$$\mathrm{int}\, K_{\Omega^+}(x_0) \cap K_M(x_0) \neq \varnothing,$$

то согласно теореме 1.2 [6, гл. 4, п. 1, с. 290] о пересечении непрерывных шатров, выпуклый конус

$$K_1 \equiv K_{\Omega^+}(x_0) \cap K_M(x_0)$$

является конусом касательных направлений для $\Omega^+ \cap M$ в точке x_0. Отсюда и из (3.11) следует, что существует отображение $\varphi_1(\lambda) = o(\lambda)$ такое, что

$$\Psi_1(\lambda) \equiv x_0 + \lambda u_1 + \varphi_1(\lambda) \in M, \quad g(\Psi_1(\lambda)) \leqslant 0 \tag{3.13}$$

для достаточно малых $\lambda \geqslant 0$.

Аналогично, если включение (3.8) не имеет место, то существуют вектор u_2 и число $\delta_2 > 0$ такие, что

$$f'(x_0, u_2) < -\delta_2, \quad u_2 \in K_M(x_0) \cap K_{\Omega^-}(x_0), \tag{3.14}$$

$$\Omega^- \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geqslant 0\}, \quad K_{\Omega^-}(x_0) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \langle x_0^*, \overline{x} \rangle \geqslant 0\}.$$

Поскольку g выпукла, то

$$g(x_0 + \overline{x}) - g(x_0) \geqslant \langle x_0^*, \overline{x} \rangle \geqslant 0 \quad (\forall\, \overline{x} \in K_{\Omega^-}(x_0)).$$

Отсюда следует, что выпуклый конус $K_{\Omega^-}(x_0)$ является непрерывным шатром к множеству Ω^-. Поскольку по предположению $\mathrm{int}\, K_{\Omega^-}(x_0) \cap K_M(x_0) \neq \varnothing$, то конус

$$K_2 \equiv K_{\Omega^-}(x_0) \cap K_M(x_0)$$

также будет конусом касательных направлений для $\Omega^- \cap M$ в точке x_0. Отсюда и из (3.14) следует, что существует отображение $\varphi_2(\lambda) = o(\lambda)$ такое, что

$$\Psi_2(\lambda) \equiv x_0 + \lambda u_2 + \varphi_2(\lambda) \in M, \quad g(\Psi_2(\lambda)) \geqslant 0. \tag{3.15}$$

Поскольку множество M выпукло, то из соотношений (3.13) и (3.15) следует, что найдется точка $\xi \in [\Psi_1(\lambda), \Psi_2(\lambda)]$ такая, что

$$g(\xi) = 0, \quad \xi \in M.$$

Имеем также, что для некоторого $\alpha \in [0, 1]$

$$\xi = x_0 + \alpha\lambda u_1 + (1 - \alpha)\lambda u_2 + o(\lambda).$$

Отсюда и из соотношений (3.12) и (3.14) для достаточно малых $\lambda > 0$ получаем

$$f(\xi) - f(x_0) \leqslant f'(x_0, x_0 + \alpha\lambda u_1 + (1 - \alpha)\lambda u_2 + o(\lambda)) + o(\lambda) < 0,$$

что противоречит предположению о том, что точка x_0 — решение задачи (3.6).

Теорема 3.3. *Пусть x_0 — точка минимума локально липшицевой функции $f_0(x)$ при ограничениях*

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \ x \in R^n,$$

где f_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — также локально липшицевые функции. Пусть существуют такие векторы w_i, что $f'_{iMP}(x_0, w_i) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и функции $f'_{iMP}(x, w_i)$ полунепрерывны сверху по x в точке x_0. Тогда существуют число $\lambda_0 \geqslant 0$ и векторы $x_1^*, \ldots, x_k^*$, не все одновременно равные нулю, такие, что

$$0 \in \lambda_0 \partial_{AL} f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{k} x_i^*, \quad x_i^* \in \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_i(x_0), \ i = 1, \ldots, k. \tag{3.16}$$

$\lhd$ Положим $H_i \equiv \left\{ \overline{x} \in R^n / f'_{iMP}(x_0, \overline{x}) \leqslant 0, \ f'_{iMP}(x_0, -\overline{x}) \leqslant 0 \right\}$. По теореме 2.1 подпространство H_i является непрерывным шатром для множества $M_i = \{x \in R^n / f_i(x) = 0\}$ в точке x_0. Если конусы H_i отделимы, то существуют векторы $x_i^* \in H_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, k$, не равные нулю одновременно такие, что

$$x_1^* + x_2^* + \cdots + x_k^* = 0.$$

В этом случае условие (3.16) выполняется, поскольку имеем

$$H_i^* = cl\{\operatorname{con} \partial_{MP} f_i(x_0) - \operatorname{con} \partial_{MP} f_i(x_0)\} = \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_i(x_0),$$

и можно выбрать $\lambda_0 = 0$. Если конусы H_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, неотделымы, то в силу теоремы В [12] (теорема о пересечении локально непрерывных шатров, общий случай) конус

$$H \equiv \bigcap_{i=1}^{k} H_i$$

является конусом касательных направлений для множества $M = \bigcap_{i=1}^{k} M_i$ в точке x_0. В этом случае

$$H^* = H_1^* + H_2^* + \cdots + H_k^* = \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_1(x_0) + \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_2(x_0) + \cdots + \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_k(x_0).$$

Теперь, по теореме 1.1 имеем

$$\partial_{AL} f_0(x_0) \cap H^* \neq \varnothing.$$

Отсюда

$$0 \in \partial_{AL} f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Lin} \partial_{MP} f_i(x_0).$$

Тогда условие (3.16) выполняется при $\lambda_0 = 1$.

Литература

1. *Болтянский В. Г.* Оптимальное управление дискретными системами.—М.: Наука, 1973.—446 с.
2. *Болтянский В. Г.* Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи мат. наук.—1975.—Т. 30, № 3.—С. 3–55.
3. *Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.* Теорема Люстерника в теории экстремума // Успехи мат. наук.—1980.—Т. 35, № 5.—С. 11–46.

4. *Clarke F. H.* A new approach to Lagrange multipliers // Math. Oper. Res. 1.—1976.—№ 1.—P. 165–174.
5. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения.—М.: Физматлит, 2014.—608 с.
6. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи.—М.: Наука, 1980.—320 с.
7. *Пшеничный Б. Н., Хачатрян Р. А.* Ограничения типа равенств в негладких задачах оптимизации // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 3.—С. 553–556.
8. *Пшеничный Б. Н., Хачатрян Р. А.* Необходимые условия экстремума для негладких задач // Кибернетика.—Киев, 1983.—№ 3.—С. 111–116.
9. *Хачатрян Р. А.* О пересечении шатров в гильбертовом пространстве и необходимых условиях экстремума для негладких функций // Изв. АН АРМ ССР. Математика.—1988.—Т. 23, №3.—С. 149–162.
10. *Michel P., Penot J.-P.* Calcul sous-differentiel pour les functions lipschitziennes et non lipschitziennes // C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. I.—1984.—Vol. 291.—P. 269–272.
11. *Ioffe A. D.* A Lagrange multiplier rule with small convex-valued subdifferential for non-smoth problems of mathematical programming involving equality and nonfunctional constraints // Math. Programming.—1993.—№ 58.—P. 137–145.
12. *Ivanashi R.* On the Intersection of Continuous Local Tents // Proc. Japan Acad. Ser. A.—1993.—Vol. 69.—P. 308–311.
13. *Ekeland I.* On the variational principle // J. Math. Anal. Appl.—1974.—Vol. 47, № 2.—P. 324–353.

Статья поступила 25 января 2015 г.

Хачатрян Рафик Агасиевич
Ереванский государственный университет,
доцент кафедры численного анализа и мат. моделирования
АРМЕНИЯ, Ереван-0025, ул. Алека Манукяна, 1
E-mail: `khachatryan.rafik@gmail.com`

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN NON-SMOOTH PROBLEMS WITH EQUALITY CONSTRAINTS

Khachatryan R. A.

Necessary conditions for extremum in non smooth problems are obtained in this article. The problem under consideration includes both equality and inequality type constrains given by non-smooth functions. The necessary conditions are given in terms of asymptotic subdifferentials. Generalized Laganges's multiplier rule for non-smooth problems with not local lipschitz constraints is obtained. It is proved also that Peno's and Clark's generalized derivatives are upper convex approximations for local Lipshitz functions.

Key words: subdifferential, tent, tangent cone.