Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 60–71

УДК **517.984.64**

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ ПРОИЗВОДНЫМ ДРУГИХ ПОРЯДКОВ И САМОЙ ФУНКЦИИ

С. А. Унучек

В работе изучается задача одновременного восстановления производных функции k_1-го и k_2-го порядков в среднеквадратичной норме по неточно заданным производным n_1-го и n_2-го порядков и самой функции. Решение приводится при некоторых условиях на погрешности, с которыми заданы производные и сама функция. Полностью задача решена для случая $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. При этом оказывается, что в отличие от ранее встречавшихся ситуаций, в общем случае погрешность восстановления зависит от всех трех погрешностей, с которыми задана исходная информация.

Ключевые слова: оптимальный метод, преобразование Фурье, экстремальная задача.

Введение

Общая постановка задачи оптимального восстановления функционала принадлежит С. А. Смоляку [1]. Она явилась обобщением задачи о наилучших квадратурных формулах С. М. Никольского [2], которая в свою очередь возникла на основе идей А. Н. Колмогорова. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [3]. В данной работе изучается задача одновременного восстановления производных функций k_1-го и k_2-го порядков в среднеквадратичной норме по неточно заданным производным n_1-го и n_2-го порядков и самой функции. Решение приводится при некоторых условиях на погрешности, с которыми заданы производные и сама функция. Полностью задача решена для случая $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. Нам показался этот случай интересен тем, что в задачах восстановления производных при задании погрешности в среднеквадратичной норме не встречался случай, когда более двух множителей Лагранжа отличны от нуля. Для заданной погрешности в равномерной норме ситуация, когда много множителей Лагранжа отлично от нуля, достаточно распространен (см. [4, 5]). Ранее задача оптимального восстановления k-ой производной функции по приближенной информации о самой функции и ее n-ой производной рассматривалась в работе [6].

1. Основные понятия

Рассмотрим соболевское пространство функций

$$\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}) = \Big\{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(n-1)}(\cdot) \text{ — локально абсолютно непрерывна}, \quad x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $n_0 = 0$, $n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$. Предположим, что для каждой функции $x(\cdot) \in \mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ приближенно известны ее производные n_1-го и n_2-го порядков и сама функция, т. е. известны функции $y_0(\cdot)$, $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_j, \quad j = 0, 1, 2.$$

Задача состоит в одновременном оптимальном восстановлении производных k_1-го и k_2-го порядков функции $x(\cdot) \in \mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$.

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3 \to (L_2(\mathbb{R}))^2.$$

Погрешностью методов φ будем называть величину

$$e(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\ \overline{Y} \in (L_2(\mathbb{R}))^3 \\ \|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j \|x^{(k_j)}(\cdot) - \varphi_j(\overline{Y})(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2)$, $\overline{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $\overline{Y} = (y_0(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\varphi = (\varphi_1(\overline{Y}), \varphi_2(\overline{Y}))$. Здесь $p = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 \geqslant 0$ — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению производной какого-либо порядка.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \inf_{\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3 \to (L_2(\mathbb{R}))^2} e(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi).$$

Методы $\widehat{\varphi}$, на которых достигается нижняя грань, будем называть оптимальными методами.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Если $\delta_1 \geqslant \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, погрешность оптимального восстановления равна*

$$E\left(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}\right) = \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2}, \tag{1}$$

где

$$\widehat{\lambda}_0 = p_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_1/n_2} \left(1 - \frac{k_1}{n_2}\right) + p_2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_2/n_2} \left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right),$$
$$\widehat{\lambda}_2 = p_1 \frac{k_1}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_1/n_2 - 1)} + p_2 \frac{k_2}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_2/n_2 - 1)}.$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}), \widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ такой, что его преобразование Фурье

$$F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y}) = (i\xi)^{k_s} \left(1 - \alpha_s(\xi)\right) Fy_0(\xi) + (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi) Fy_2(\xi), \quad s = 1, 2,$$

где

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} + \theta_s(\xi) |\xi|^{n_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 \left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}},$$

а $\theta_s(\cdot)$ — произвольные функции из $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие условию

$$p_1\xi^{2k_1}\theta_1^2(\xi)+p_2\xi^{2k_2}\theta_2^2(\xi)\leqslant 1,$$

является оптимальным.

Положим

$$W=\sqrt{p_1^2\delta_0^2+2p_1p_2\delta_1^2+p_2^2\delta_2^2},$$
$$\widehat{\lambda}_0=\begin{cases}\frac14\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_0}}\left(3p_1+p_2\frac{\delta_2}{\delta_0}\right), & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \frac{p_1^2\delta_1}{2W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\end{cases}$$
$$\widehat{\lambda}_1=\begin{cases}0, & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \frac{p_2^2W^2+2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\end{cases}$$
$$\widehat{\lambda}_2=\begin{cases}\frac14\sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2}}\left(p_1\frac{\delta_0}{\delta_2}+3p_2\right), & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \frac{p_2^2\delta_1}{2W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2}.\end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $k\in\mathbb{N}$, $k_1=k$, $n_1=2k$, $k_2=3k$, $n_2=4k$. Тогда*

$$E(\mathscr{W}_2^4(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta})=\begin{cases}\sqrt[4]{\delta_0\delta_2}\sqrt{p_1\delta_0+p_2\delta_2}, & \delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \sqrt{\delta_1W}, & \delta_1\leqslant\sqrt{\delta_0\delta_2}.\end{cases}$$

Метод $\widehat{\varphi}=(\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}),\widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ такой, что его преобразование Фурье

$$F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y})=\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)Fy_j(\xi),\quad s=1,2,$$

где $\alpha_j^s(\cdot)$ — любые функции из $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие в случае $\delta_1\geqslant\sqrt{\delta_0\delta_2}$ условиям

$$\alpha_0^s(\xi)=(i\xi)^{(2s-1)k}(\cdot)\frac{\widehat{\lambda}_0-\theta_s(\xi)\xi^{4k}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{8k}-p_1\xi^{2k}-p_2\xi^{6k}\right)}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{8k}},$$
$$\alpha_1^s(\xi)=0,$$
$$\alpha_2^s(\xi)=(i\xi)^{(2s-5)k}(\cdot)\frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{8k}+\theta_s(\xi)\xi^{4k}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{8k}-p_1\xi^{2k}-p_2\xi^{6k}\right)}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{8k}},$$

$s=1,2$, а $\theta_s(\cdot)$ — произвольные функции из $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие условию

$$p_1\xi^{2k}\theta_1^2(\xi)+p_2\xi^{6k}\theta_2^2(\xi)\leqslant 1,$$

в случае $\delta_1<\sqrt{\delta_0\delta_2}$ условиям

$$\begin{cases}\sum_{j=0}^2(i\xi)^{2kj}\alpha_j^s(\xi)=(i\xi)^{(2s-1)k}, \quad s=1,2,\\ p_1\left(\sum_{j=0}^2\frac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)+p_2\left(\sum_{j=0}^2\frac{|\alpha_j^2(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)\leqslant 1,\end{cases}$$

является оптимальным.

3. Доказательства

Сначала рассмотрим задачу оптимального восстановления производных k_1-го и k_2-го порядков в общем виде. Докажем, что имеет место неравенство

$$E\left(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta}\right) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j\|x^{(k_j)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}. \tag{2}$$

Для любой функции $x(\cdot)\in\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ такой, что выполнены условия $\|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j$, $j=0,1,2$, и для любого метода φ имеем

$$\begin{gathered}
2\left(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2}\\
=\left(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)-(-x)^{(k_1)}(\cdot)+\varphi(0)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)-(-x)^{(k_2)}(\cdot)+\varphi(0)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2}\\
\leqslant\left(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2}\\
+\left(p_1\|(-x)^{(k_2)}(\cdot)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+p_2\|(-x)^{(k_2)}(\cdot)-\varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2}\leqslant 2e(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta},\varphi),
\end{gathered}$$

т. е., для любого метода φ выполняется

$$e(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta},\varphi) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j\|x^{(k_j)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}.$$

Отсюда следует неравенство (2).

Это означает, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\begin{gathered}
\sqrt{p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}\to\max,\\
\|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j,\quad j=0,1,2.
\end{gathered}\tag{3}$$

Перейдем к квадрату задачи (3) и запишем ее в образах Фурье. По теореме Планшереля имеем

$$\|x^{(m)}(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\|Fx^{(m)})(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\|(i\xi)^m(Fx)(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^{2m}|(Fx)(\xi)|^2\,d\xi.$$

Тем самым, приходим к следующей задаче:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(p_1\xi^{2k_1}+p_2\xi^{2k_2})|(Fx)(\xi)|^2\,d\xi\to\max,\\
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^{2n_j}|(Fx)(\xi)|^2\,d\xi\leqslant\delta_j^2,\quad j=0,1,2.
\end{gathered}\tag{4}$$

Теперь докажем теорему 1. Пусть $\delta_1 \geqslant \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}}\delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$. Покажем, что погрешность оптимального восстановления не меньше величины $\widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2$. Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которой

$$(Fx_m)(\xi) = \begin{cases} D(m), & \xi \in [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0], \\ 0, & \xi \notin [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0], \end{cases}$$

где $\xi_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{n_2}}$, $D(m) = \delta_0\sqrt{2\pi m}$. Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} D^2(m)\,d\xi \leqslant \frac{1}{2\pi m}D^2(m) = \delta_0^2,$$

и, учитывая условие $\delta_1 \geqslant \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}}\delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, выполняются соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_1}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^{2n_1}D^2(m)\,d\xi \leqslant \frac{D^2(m)}{2\pi m}\xi_0^{2n_1} \leqslant \delta_1^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_2}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi \leqslant \frac{D^2(m)}{2\pi m}\xi_0^{2n_2} = \delta_2^2,$$

то последовательность функций $x_m(\cdot)$ допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi}p_1\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k_1}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi}p_2\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k_2}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \frac{D^2(m)}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0}\left(p_1\xi^{2k_1} + p_2\xi^{2k_2}\right)d\xi \geqslant \delta_0^2\left(p_1\left(\xi_0 - \frac{1}{m}\right)^{2k_1} + p_2\left(\xi_0 - \frac{1}{m}\right)^{2k_2}\right).$$

При $m \to \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к величине

$$Q = \delta_0^2\left(p_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_1}{n_2}} + p_2\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_2}{n_2}}\right) = \widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2$$

при

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_0 &= p_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_1}{n_2}}\left(1 - \frac{k_1}{n_2}\right) + p_2\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_2}{n_2}}\left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right), \\ \widehat{\lambda}_2 &= p_1\frac{k_1}{n_2}\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_1-n_2}{n_2}} + p_2\frac{k_2}{n_2}\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_2-n_2}{n_2}}, \end{aligned} \tag{5}$$

т. е. в случае $\delta_1 \geqslant \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}}\delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$ погрешность оптимального восстановления

$$E(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) \geqslant \sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2}.$$

Займемся построением оптимальных методов. Оптимальные методы в общем случае будем искать среди методов $\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = (\widehat{\varphi}_1(\overline{Y}), \widehat{\varphi}_2(\overline{Y}))$ вида $\widehat{\varphi}_s(\overline{Y}(\cdot)) = \Lambda_0^s y_0(\cdot) + \Lambda_1^s y_1(\cdot) + \Lambda_2^s y_2(\cdot)$, где $\Lambda_j^s \colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $j = 0,1,2$, $s = 1,2$ — линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид:

$$F(\Lambda_j^s y_j)(\cdot) = \alpha_j^s(\cdot)(Fy_j)(\cdot), \quad j = 0,1,2,\ s = 1,2,$$

где $\alpha_j^s(\cdot) \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})$.

Для оценки оптимальной погрешности для фиксированных $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $j = 0,1,2$, $s = 1,2$, рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\|x^{(k_s)}(\cdot) - \sum_{j=0}^{2}\Lambda_j^s y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right) \to \max,$$
$$\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_j^2, \quad j = 0,1,2,\ s = 1,2.$$

Перепишем эту задачу в образах Фурье

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}Fx(\xi) - \sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)Fy_j(\xi)\right|^2 d\xi\right) \to \max,\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{n_j}Fx(\xi) - Fy_j(\xi)\right|^2 d\xi \leqslant \delta_j^2, \quad j = 0,1,2.\end{gathered} \tag{6}$$

Положим

$$z_j(\xi) = (i\xi)^{n_j}Fx(\xi) - Fy_j(\xi), \quad j = 0,1,2.$$

Задача (6) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}Fx(\xi) - \sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)(i\xi)^{n_j}Fx(\xi) + \sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right) \to \max,\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2 d\xi \leqslant \delta_j^2, \quad j = 0,1,2.\end{gathered} \tag{7}$$

В случае $\delta_1 \geqslant \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}}\delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$ положим

$$\alpha_0^s(\xi) = (i\xi)^{k_s}\left(1 - \alpha_s(\xi)\right), \quad \alpha_1^s(\xi) = 0, \quad \alpha_2^s(\xi) = (i\xi)^{k_s - n_2}\alpha_s(\xi), \quad s = 1,2.$$

Задача (7) перепишется в виде

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}\left(1 - \alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi) + (i\xi)^{k_s - n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2 d\xi\right) \to \max,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2 d\xi \leqslant \delta_j^2, \quad j = 0,1,2.$$

Оценим подынтегральные функции с помощью неравенства Коши — Буняковского:

$$\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2$$
$$=\xi^{2k_s}\left|\frac{1-\alpha_s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_0}}\sqrt{\widehat{\lambda}_0}(\cdot)z_0(\xi)+\frac{(i\xi)^{-n_2}\alpha_s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}\sqrt{\widehat{\lambda}_2}(\cdot)z_2(\xi)\right|^2$$
$$\leqslant\xi^{2k_s}\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\left(\widehat{\lambda}_0\,|z_0(\xi)|^2+\widehat{\lambda}_2\,|z_2(\xi)|^2\right),\quad s=1,2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2d\xi\right)$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k_s}\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\left(\widehat{\lambda}_0\,|z_0(\xi)|^2+\widehat{\lambda}_2\,|z_2(\xi)|^2\right)d\xi\right).$$

Если выполняется условие

$$\sum_{s=1}^{2}\xi^{2k_s}p_s\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\leqslant 1,\tag{8}$$

то справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2d\xi\leqslant\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2,$$

т. е. оценка сверху совпадает с оценкой снизу, что означает оптимальность метода. Покажем, что множество оптимальных методов не пусто. Из условия (8) найдем ограничения на $\alpha_s(\xi)$ и построим явно какой-либо из методов.

$$\sum_{s=1}^{2}\xi^{2k_s}p_s\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)$$
$$=\frac{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2}\cdot\sum_{s=1}^{2}\xi^{2(k_s-n_2)}p_s\left|\alpha_s(\xi)-\frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right|^2+\frac{\sum\limits_{s=1}^{2}p_s\xi^{2k_s}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\leqslant 1,$$

$$\sum_{s=1}^{2}\xi^{2(k_s-n_2)}p_s\left|\alpha_s(\xi)-\frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right|^2\leqslant\frac{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2}{\left(\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}\right)^2}\cdot\left(\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}-\sum_{s=1}^{2}p_s\xi^{2k_s}\right).$$

Рассмотрим функцию

$$g(\xi)=-p_1\xi^{2k_1}-p_2\xi^{2k_2}+\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2},\quad \xi\geqslant 0,$$

и параметрически заданную кривую (см. рис. 1):

$$\begin{cases}x=\xi^{2n_2},\\ y=p_1\xi^{2k_1}+p_2\xi^{2k_2}.\end{cases}$$

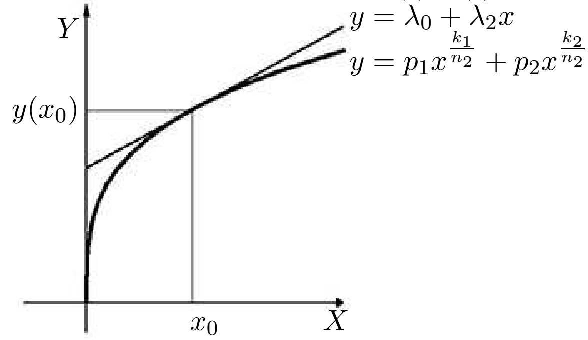

Рис. 1

Нетрудно видеть, что функция $y(x) = p_1 x^{k_1/n_2} + p_2 x^{k_2/n_2}$ возрастает и вогнута при $x \in [0, +\infty)$. В силу вогнутости функции выполняется неравенство $y \leqslant \widetilde{y}$, где $\widetilde{y} = kx + b$ — касательная к графику вогнутой функции $y(x)$ в некоторой точке $x_0 \geqslant 0$. Построим касательную в точке $x_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2$. Значения коэффициентов касательной равны $k = y'(x_0) = \widehat{\lambda}_2$, $b = \widetilde{y}(0) = \widehat{\lambda}_0$. График функции $y(x) = p_1 x^{k_1/n_2} + p_2 x^{k_2/n_2}$ расположен ниже прямой $y \leqslant \widetilde{y} = \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 x$. Это означает, что $g(\xi) \geqslant 0$, т. е.

$$\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - \sum_{s=1}^{2} p_s \xi^{2k_s} \geqslant 0.$$

Положим

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} + \theta_s(\xi)|\xi|^{n_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 \left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}}.$$

Тогда условие (8) выполняется при всех $\theta_s(\xi) \in \mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, $s = 1, 2$, удовлетворяющих условию

$$p_1 \xi^{2k_1} \theta_1^2(\xi) + p_2 \xi^{2k_2} \theta_2^2(\xi) \leqslant 1,$$

в частности, при $\theta_1(\xi) = \theta_2(\xi) = 0$. $\triangleright$

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. В случае $\delta_1 \geqslant \sqrt{\delta_0 \delta_2}$ утверждение теоремы 2 вытекает из теоремы 1.

Пусть

$$\delta_1 < \sqrt{\delta_0 \delta_2}. \tag{9}$$

Покажем, что в этом случае погрешность оптимального восстановления не меньше величины $\sqrt{\delta_1 W}$. Пусть

$$\Delta_0 = \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2}, \quad P = \frac{p_1^2}{p_2^2},$$

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \left(\frac{\Delta_2 + P\Delta_0 - \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}}{2}\right)^{1/k} \\ &= \left(\frac{p_1^2 \delta_0^2 + p_2^2 \delta_2^2 - \sqrt{(p_1^2 \delta_0^2 + p_2^2 \delta_2^2)^2 - 4 p_1^2 p_2^2 \delta_1^4}}{2 p_2^2 \delta_1^2}\right)^{\frac{1}{4k}}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\xi_1 = \left(\frac{\Delta_2 + P\Delta_0 + \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}}{2}\right)^{1/k}$$
$$= \left(\frac{p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2 + \sqrt{(p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2)^2 - 4p_1^2p_2^2\delta_1^4}}{2p_2^2\delta_1^2}\right)^{\frac{1}{4k}}, \tag{11}$$
$$D_1(m) = \sqrt{2\pi m\frac{\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}}}, \quad D_2(m) = \sqrt{2\pi m\frac{\delta_1^2 - \delta_0^2\xi_0^{4k}}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}}}.$$

Подкоренное выражение в равенствах (10) и (11) положительно, так как из (9) следует, что $\Delta_0\Delta_2 > 1$, и, следовательно,

$$\Delta_2 + P\Delta_0 \geqslant 2\sqrt{\Delta_2 P\Delta_0} \geqslant 2\sqrt{P}.$$

Тем самым доказано, что $\xi_0 < \xi_1$.

Покажем, что

$$\frac{\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}} > 0.$$

Для этого достаточно доказать, что $\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2 > 0$ или $\Delta_0\xi_1^{4k} > 1$. Это неравенство можно записать в виде

$$\frac{2P\Delta_0}{\Delta_2 + P\Delta_0 - \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}} > 1.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно показать, что

$$\sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P} > \Delta_2 - P\Delta_0.$$

Если правая часть этого неравенства отрицательна, то оно очевидно выполнено, а если правая часть неотрицательна, то неравенство выполнено в силу очевидного соотношения

$$(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P > (\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P\Delta_0\Delta_2 = (\Delta_2 - P\Delta_0)^2.$$

Осталось показать, что

$$\frac{\delta_1^2 - \delta_0^2\xi_0^{4k}}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}} = \delta_0^2 - \frac{\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}} > 0.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно убедиться в справедливости неравенства $\Delta_0\xi_0^4 < 1$, которое можно записать в виде

$$\frac{2P\Delta_0}{\Delta_2 + P\Delta_0 + \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}} < 1.$$

Доказательство этого неравенства сводится к доказательству неравенства

$$\sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P} > P\Delta_0 - \Delta_2,$$

которое фактически уже было доказано.

Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которой

$$(Fx_m)(\xi) = \begin{cases} D_1(m), & \xi \in [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0], \\ D_2(m), & \xi \in [\xi_1 - \frac{1}{m}; \xi_1], \\ 0, & \xi \notin [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0] \cup [\xi_1 - \frac{1}{m}; \xi_1]. \end{cases}$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} D_1^2(m)\,d\xi+\int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1} D_2^2(m)\,d\xi\right)\leqslant\frac{D_1^2(m)+D_2^2(m)}{2\pi m}=\delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{4k}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0}\xi^{4k}D_1^2(m)\,d\xi+\int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1}\xi^{4k}D_2^2(m)\right)$$

$$\leqslant\frac{D_1^2(m)\xi_0^{4k}+D_2^2(m)\xi_1^{4k}}{2\pi m}=\frac{2\pi m\left(\delta_0^2\xi_0^{4k}\xi_1^{4k}-\delta_1^2\xi_0^{4k}+\delta_1^2\xi_1^{4k}-\delta_0^2\xi_0^{4k}\xi_1^{4k}\right)}{2\pi m\left(\xi_1^{4k}-\xi_0^{4k}\right)}=\delta_1^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{8k}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0}\xi^{8k}D_1^2(m)\,d\xi+\int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1}\xi^{8k}D_2^2(m)\right)$$

$$\leqslant\frac{D_1^2(m)\xi_0^{8k}+D_2^2(m)\xi_1^{8k}}{2\pi m}=\frac{2\pi m\left(\delta_0^2\xi_0^{8k}\xi_1^{4k}-\delta_1^2\xi_0^{8k}+\delta_1^2\xi_1^{8k}-\delta_0^2\xi_0^{4k}\xi_1^{8k}\right)}{2\pi m\left(\xi_1^{4k}-\xi_0^{4k}\right)}$$

$$=\delta_1^2\left(\xi_1^{4k}+\xi_0^{4k}\right)-\delta_0^2\frac{p_1^2}{p_2^2}=\delta_2^2,$$

то последовательность функций $x_m(\cdot)$ допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\left(p_1\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi+p_2\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{6k}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(D_1^2(m)\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0}\left(p_1\xi^{2k}+p_2\xi^{6k}\right)d\xi+D_2^2(m)\int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1}\left(p_1\xi^{2k}+p_2\xi^{6k}\right)d\xi\right)$$

$$\geqslant\frac{D_1^2(m)\left(p_1\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^{2k}+p_2\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^{6k}\right)+D_2^2(m)\left(p_1\left(\xi_1-\frac{1}{m}\right)^{2k}+p_2\left(\xi_1-\frac{1}{m}\right)^{6k}\right)}{2\pi m}.$$

При $m\to\infty$ данная дробь стремится к величине

$$Q=\frac{W^2}{p_2\left(\xi_0^{2k}+\xi_1^{2k}\right)}=\delta_1 W=\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2$$

при указанных выше значениях ξ_0, ξ_1 и

$$\widehat{\lambda}_0=\frac{p_1^2\delta_1}{2W},\quad \widehat{\lambda}_1=\frac{p_2^2W^2+2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1 W},\quad \widehat{\lambda}_2=\frac{p_2^2\delta_1}{2W}.$$

Таким образом, в случае $\delta_1<\sqrt{\delta_0\delta_2}$ погрешность оптимального восстановления

$$E\left(\mathscr{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta}\right)\geqslant\sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2}.$$

Перейдем к построению оптимальных методов. При $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ задача (7) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{(2s-1)k}Fx(\xi)-\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)(i\xi)^{2kj}Fx(\xi)+\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\to\max,\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2 d\xi\leqslant\delta_j^2,\quad j=0,1,2.\end{gathered}\tag{12}$$

В случае $\delta_1 < \sqrt{\delta_0\delta_2}$, возьмем такие $\alpha_j^s(\xi)$, $s = 1, 2$, чтобы они удовлетворяли условию $\sum_{j=0}^{2}(i\xi)^{2kj}\alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-1)k}$. Задача (7) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\to\max,\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2 d\xi\leqslant\delta_j^2,\quad j=0,1,2.$$

Применим неравенство Коши — Буняковского для оценки подынтегральных функций:

$$\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2=\left|\sum_{j=0}^{2}\frac{\alpha_j^s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_j}}\sqrt{\widehat{\lambda}_j(\cdot)}z_j(\xi)\right|^2\leqslant\left(\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\left|z_j(\xi)\right|^2\right),\quad s=1,2.$$

Значит,

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\left|z_j(\xi)\right|^2\right)d\xi\right).$$

При выполнении условия

$$\sum_{s=1}^{2}p_s\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}\leqslant 1,\tag{13}$$

также выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\leqslant\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2,$$

т. е. указанные методы оптимальны. Докажем, что множество оптимальных методов также не пусто. Пусть

$$\alpha_j^s(\xi)=\frac{\widehat{\lambda}_j\,(i\xi)^{(2s-1)k}\,(-i\xi)^{2kj}}{\sum\limits_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\xi^{4kj}}.$$

Тогда условие $\sum_{j=0}^{2}(i\xi)^{2kj}\alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-1)k}$, $s = 1, 2$, выполняется. Покажем, что условие (13) также выполняется.

$$\sum_{s=1}^{2}p_s\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}=\frac{p_1\xi^{2k}+p_2\xi^{6k}}{\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\xi^{4kj}}.$$

Рассмотрим функцию

$$
\begin{aligned}
g_1(\xi) &= -p_1\xi^{2k} - p_2\xi^{6k} + \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_1\xi^{4k} + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k} \\
&= \frac{p_1^2\delta_1}{2W} - p_1\xi^{2k} + \frac{p_2^2W^2 + 2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1 W}\xi^{4k} - p_2\xi^{6k} + \frac{p_2^2\delta_1}{2W}\xi^{8k} \\
&= \frac{p_2^2\delta_1}{2W}\left(\xi_0^{4k}\xi_1^{4k} - 2\xi_0^{2k}\xi_1^{2k}\xi^{2k} + \left(\xi_0^{4k} + 4\xi_0^{2k}\xi_1^{2k} + \xi_1^{4k}\right)\xi^{4k} - 2\left(\xi_0^{2k} + \xi_1^{2k}\right)\xi^{6k} + \xi^{8k}\right) \\
&= \frac{p_2^2\delta_1}{2W}\left(\xi^{2k} - \xi_0^{2k}\right)^2\left(\xi^{2k} - \xi_1^{2k}\right)^2 \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

это означает что

$$
\frac{p_1\xi^{2k} + p_2\xi^{6k}}{\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\xi^{4kj}} \leqslant 1,
$$

условие (13) выполнено, множество оптимальных методов не пусто.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.—М.: Наука, 1988.—254 с.
3. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
4. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой // Мат. сб.—2002.—Т. 193.—С. 79–100.
5. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации // Функцион. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди — Литтлвуда — Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН.—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.

Статья поступила 21 марта 2016 г.

Унучек Светлана Александровна
Российская академия народного хозяйства
и государственной службы при Президенте РФ
старший преподаватель
РОССИЯ, 119571, Москва, проспект Вернадского, 82, стр.1
E-mail: svun@mail.ru

OPTIMAL RECOVERY OF THE DERIVATIVE OF THE FUNCTION FROM ITS INACCURATELY GIVEN OTHER ORDERS OF DERIVATIVES AND THE FUNCTION ITSELF

Unuchek S. A.

The paper deals with the problem of simultaneous recovery of the k_1-th and k_2-th order derivatives of a function in the mean square norm from inaccurately given derivatives of n_1-th and n_2-th order and the function itself. The solution is given under some conditions on the errors of given derivatives and the function itself. The problem is solved completely for the case $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. It turns out that in contrast to previously encountered situations in the general case, the error of recovery depends on errors of all three errors of input data.

Key words: optimal method, Fourier transform, extremal problem.