Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 2, С. 55–66

УДК **517.9**

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ПОДХОДА СИМОНЕНКО — КОЗАКА В ТЕОРИИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. В. Лукин

В работе представлено обобщение локальной структуры Симоненко — Козака на случай алгебр, порожденных многомерными операторами с компактными коэффициентами. Построенная локальная структура используется для получения критерия применимости проекционного метода решения уравнений для операторов многомерной свертки с компактными операторными коэффициентами.

Ключевые слова: интегральный оператор, оператор свертки, локальный метод, проекционный метод, компактные коэффициенты.

1. Введение

В [1] представлена теория проекционных методов для одномерных уравнений типа свертки. Для многомерных уравнений матричной свертки критерий применимости проекционного метода получен А. В. Козаком [2] на основе модификации локального метода И. Б. Симоненко [3, 4]. Исследование фредгольмовости многомерных интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа [5] редуцируется к исследованию операторов свертки на группе $\mathbb{R}^n$ с компактными коэффициентами при $n \geqslant 2$. В связи с этим представляется актуальным построение проекционного метода для решения уравнений с таким типом операторов. Распространение подхода Козака — Симоненко для сверток с операторными коэффициентами потребовало построения новой локальной структуры на основе имеющейся в [2], и исследования ее свойств. В настоящей работе для алгебры, порожденной операторами с компактными операторными коэффициентами, представлена конструкция такой локальной структуры, которая затем используется для получения критерия применимости проекционного метода для уравнений многомерной свертки с компактными коэффициентами. Построенный проекционный метод усиливает результаты [6, 7], где получено достаточное условие применимости приближенного метода решения уравнений свертки на группе $\mathbb{R}^n$ с компактными коэффициентами на основе редукции к проекционному методу для матричных сверток.

2. Основные результаты

Пусть $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{C}^k$, $k \geqslant 2$, — вещественное и комплексное k-мерные векторные пространства. Если W — банахово пространство, то через $\mathscr{L}(W)$ обозначим банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов в W. Пусть X и Y — линейные пространства с мерой μ. Через $L_p(X)$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначим банахово пространство измеримых комплекснозначных функций, суммируемых на X с p-ой степенью, и обычной нормой. Через $L_p(X)\otimes L_p(Y)$ обозначим топологическое тензорное произведение пространств $L_p(X)$ и $L_p(Y)$ (см., например, [8]). Рассмотрим операторные алгебры $\mathscr{A}(\subset \mathscr{L}(L_p(X)))$ и $\mathscr{B}(\subset \mathscr{L}(L_p(Y)))$, $1<p<\infty$. Если $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{B}$, то через $A\otimes B$ обозначим тензорное произведение операторов A и B, а через $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ — топологическое тензорное произведение алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Если $\mathscr{U}$ — банахова алгебра, то $\mathscr{U}^+$ — ее унитализация.

Приведем классическое определение проекционного метода (см. [9, с. 189]). Пусть $\{P_m\}_{m\geqslant 1}(\subset \mathscr{L}(L_p(X)))$ — последовательность проекторов, сильно сходящаяся к тождественному оператору $I_{\mathscr{L}(L_p(X))}$, и $A\in\mathscr{L}(L_p(X))$. Рассмотрим уравнение

$$Af=g. \tag{1}$$

Проекционным методом называется приближенный метод решения уравнения (1), состоящий в отыскании решения $f_m(\in P_mL_p(X))$ уравнения

$$P_mAP_mf_m=P_mg. \tag{2}$$

Если, начиная с некоторого номера m_0, для любого $g(\in L_p(X))$ уравнение (2) имеет единственное решение f_m, и при m стремящемся к бесконечности последовательность $\{f_m\}_{m\geqslant m_0}$ стремится к решению уравнения (1), то говорят, что к оператору A применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_m\}_{m\geqslant 1}$.

Пусть $\mathscr{V}_p$ — замкнутая подалгебра $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k))$, порожденная операторами свертки

$$(C_af)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^k} a(x-y)f(y)\,dy,\quad a\in L_1(\mathbb{R}^k);$$

$\mathfrak{X}$ — произвольный хаусдорфов компакт с мерой, $\mathscr{K}_p$ — идеал компактных операторов в $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k))$. Рассмотрим банахову алгебру $\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p}(=\mathscr{V}_p\otimes\mathscr{K}_p)$. Пусть M — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^k$. Будем предполагать, что для каждой точки x границы ∂M множества M существует конус K_x с вершиной в x, окрестности u, v точки x и C^1-диффеоморфизм $\varphi: u\to v$ такие, что $\varphi(x)=x$, $\varphi'(x)=I$ и $\varphi(M\cap u)=K_x\cap v$. В [2] в качестве примеров таких множеств приводится замкнутое множество с гладкой границей и образ замкнутого многогранника M при C^1-диффеоморфизме $\varphi:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$.

В пространстве $L_p(\mathfrak{X})$ зафиксируем базис $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$. Рассмотрим проектор Q^m, определенный в $L_p(\mathfrak{X})$ следующим образом:

$$(Q^mf)(y)=\sum_{i=1}^{m} f_i\eta_i(y),\quad f_i\in\mathbb{C}.$$

В [10, с. 132] доказано, что нормы таких проекторов ограничены в совокупности. Через P_M обозначим проектор, действующий в $L_p(\mathbb{R}^k)$ по формуле:

$$(P_Mf)(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\in M,\\ 0, & \text{если } x\notin M.\end{cases}$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $A\in(\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+$. Для того, чтобы операторы*

$$(P_{mM}\otimes Q^m)A(P_{mM}\otimes Q^m):(P_{mM}\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})\to(P_{mM}\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$$

были обратимы для всех m, начиная с некоторого номера m_0, и выполнялось условие

$$\sup_{m\geqslant m_0} \|((P_{mM}\otimes Q^m)A(P_{mM}\otimes Q^m))^{-1}\| < \infty, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех x ($\in \partial M$) были обратимы операторы

$$(P_{K_x}\otimes I)A(P_{K_x}\otimes I) : (P_{K_x}\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X}) \to (P_{K_x}\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X}).$$

Следствие 1. *Если $0 \in \operatorname{int} M$, то к оператору $A(\in (\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+)$ применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_{mM}\otimes Q^m\}_{m\geqslant 1}$ тогда и только тогда, когда оператор A обратим и для всех $x(\in \partial M)$ обратимы операторы $(P_{K_x}\otimes I)A(P_{K_x}\otimes I)$.*

Доказательство следствия вытекает из теоремы 1 и критерия применимости проекционного метода (см. [1, с. 91]). Доказательство теоремы 1, основанное на применении локального метода Симоненко — Козака, проводится в разделе 4. Раздел 3 содержит обобщение конструкции локальной структуры для алгебр операторов с операторными коэффициентами.

3. Вспомогательная локальная структура

Приведем несколько определений, обобщающих классический подход локального метода [4]. Пусть $\mathscr{A}$ — банахова алгебра с единицей e, X — компакт, а Σ_X — борелевская σ-алгебра подмножеств пространства X. Пусть задано некоторое отображение $p : \Sigma_X \to \mathscr{A}$. Говорят, что это отображение порождает в алгебре $\mathscr{A}$ *локальную структуру над пространством* X, если выполняются условия:

1) $p(X) = e$;
2) $(\forall\, u, v \in \Sigma_X)\ p(u\cap v) = p(u)p(v)$;
3) для любых $u, v \in \Sigma_X$, если $u\cap v = \varnothing$, то $p(u\cup v) = p(u) + p(v)$;
4) $\sup\limits_{u\in\Sigma_X} \|p(u)\| < \infty$.

Элемент $a \in \mathscr{A}$ называется *элементом локального типа*, если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств $u, v \in \Sigma_X$ $\ p(u)ap(v) = 0$.

Пусть $M(X)$ — банахова алгебра ограниченных комплексных функций, определенных на X, с обычными операциями и нормой, $K(X) = \{1_u\}_{u\in\Sigma_X}$ — семейство характеристических функций множеств $u \in \Sigma_X$. Через $S(X)$ обозначим минимальную замкнутую подалгебру алгебры $M(X)$, содержащую $K(X)$. Очевидно, что $S(X)$ содержит банахову алгебру $C(X)$ непрерывных вещественных функций на X.

Элемент $a \in \mathscr{A}$ называется *локально обратимым слева* (*справа*) в точке $x \in X$, если существуют окрестность u точки x и элемент $b \in \mathscr{A}$ такие, что $bap(u) = p(u)$ ($p(u)ab = p(u)$). Элемент $a \in \mathscr{A}$ называется *локально обратимым* в точке $x \in X$, если он локально обратим слева и справа в этой точке.

Элементы $a, b \in \mathscr{A}$ будем называть *эквивалентными в точке* $x \in X$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность u точки x такая, что

$$\|(a-b)p(u)\| < \varepsilon, \quad \|p(u)(a-b)\| < \varepsilon.$$

Сокращенно будем писать $a \sim_x b$.

Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — банаховы алгебры с локальными структурами над пространствами X и Y, порожденными отображениями $p : \Sigma_X \to \mathscr{A}$ и $p' : \Sigma_Y \to \mathscr{B}$; $a \in \mathscr{A}$ и $b \in \mathscr{B}$ — элементы этих алгебр, $x \in X$ и $y \in Y$ — фиксированные точки. Пусть существуют окрестности u и v точек x и y, гомеоморфизм $\varphi : u \to v$ и изоморфизм $T : p(u)\mathscr{A}p(u) \to p'(v)\mathscr{B}p'(v)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\varphi(x) = y$;
2) $(\forall\, w \in \Sigma_u) \quad T(p(w)) = p'(\varphi(w))$;
3) $T(p(u)ap(u)) \sim_y p'(v)bp'(v)$.

Тогда говорят, что элемент a в точке x *квазиэквивалентен* элементу b в точке y. Сокращенно будем писать $a \sim_x\sim_y b$ или $a \sim_x \varphi,\, T \sim_y b$.

Пусть X — измеримое подмножество в $\mathbb{R}^k$, через $\mathfrak{A}_X$ обозначим множество семейств $\{A_m\}_{m\geqslant1}$ линейных ограниченных операторов

$$A_m : (P_{mX} \otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}) \to (P_{mX} \otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$$

таких, что $\sup_{m\geqslant1} \|A_m\| < \infty$. Операции сложения, умножения и умножения на скаляр в $\mathfrak{A}_X$ можно ввести покоординатно, а норму определить равенством $\|\{A_m\}_{m\geqslant1}\| = \sup_{m\geqslant1} \|A_m\|$. Непосредственно проверяется, что множество $\mathfrak{A}_X$ с введенными таким образом операциями и нормой является банаховой алгеброй. Определим в $\mathfrak{A}_X$ следующее множество: $\mathfrak{J}_X = \big\{\{A_m\}_{m\geqslant1} \in \mathfrak{A}_X :\ \lim_{m\to\infty} \|A_m\| = 0\big\}$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{J}_X$ является замкнутым двухсторонним идеалом в $\mathfrak{A}_X$. Через $\mathscr{A}_X$ обозначим фактор-алгебру $\mathfrak{A}_X/\mathfrak{J}_X$. Класс смежности элемента $\{A_m\}_{m\geqslant1}$ $(\in \mathfrak{A}_X)$ по идеалу $\mathfrak{J}_X$ обозначим через $[\{A_m\}_{m\geqslant1}]_{\mathfrak{J}_X}$. Для каждого оператора $A : L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}) \to L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$ определим элемент $j_X(A)$ $(\in \mathscr{A}_X)$ формулой

$$j_X(A) = \big[\{(P_{mX} \otimes Q^m)A(P_{mX} \otimes Q^m)\}_{m\geqslant1}\big]_{\mathfrak{J}_X}. \tag{4}$$

Пусть $\dot{\mathbb{R}}^k$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^k$, $\overline{X}$ — замыкание множества X в $\dot{\mathbb{R}}^k$.

Теорема 2. *Отображение* $p : \Sigma_{\overline{X}} \to \mathscr{A}_X$, *определенное равенством*

$$p(u) = \big[\{P_{m(u\cap X)} \otimes Q^m\}_{m\geqslant1}\big]_{\mathfrak{J}_X},$$

порождает в алгебре $\mathscr{A}_X$ *локальную структуру над пространством* $\overline{X}$.

Выполнение четырех условий определения локальной структуры проверяется прямыми выкладками.

Зафиксируем безусловный базис $\{e_1(x), e_2(x), \dots, e_i(x), \dots\}_{i=1}^{\infty}$ в $L_p(\mathbb{R}^k)$ и безусловный базис $\{\eta_1(y), \eta_2(y), \dots, \eta_j(y), \dots\}_{j=1}^{\infty}$ в $L_p(\mathfrak{X})$. Известно, что последовательность вида

$$\{e_1\eta_1, e_1\eta_2, \dots, e_1\eta_j, \dots, e_2\eta_1, e_2\eta_2, \dots, e_2\eta_j, \dots, e_i\eta_1, e_i\eta_2, \dots, e_i\eta_j, \dots\}_{i,j=1}^{\infty} \tag{5}$$

образует безусловный базис в пространстве $L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$. Пусть $f(x,y) \in (P_{mX} \otimes Q^m)$ $L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$. Тогда функцию f можно разложить по базису (5):

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^m e_i(x)\eta_j(y), \quad \alpha_{ij}^m \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Введем отображение $\mu : S(\overline{X}) \to \mathscr{A}_X$ формулой $\mu(\varphi) = [\{\Phi_m\}_{m\geqslant1}]_{\mathfrak{J}_X}$, где

$$(\Phi_m f)(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^m \varphi(x/m) e_i(x)\eta_j(y), & x \in mX, \\ 0, & x \notin mX. \end{cases} \tag{7}$$

Лемма 1. 1) $\{\Phi_m\}_{m\geqslant 1} \in \mathfrak{A}_X$.

2) *μ является непрерывным гомоморфизмом.*

3) $\|\mu(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\|_{S(\overline{X})}$.

4) $(\forall\, u \in \Sigma_{\overline{X}}) \quad \mu(1_u) = p(u)$.

Лемма 1 доказывается прямыми выкладками. Из теоремы, доказанной в [2, с. 59], следует, что построенный гомоморфизм единственный.

Теорема 3. *Для любого оператора $A \in (\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+$ элемент $j_X(A)$ локального типа.*

$\lhd$ Доказательство теоремы сводится к доказательству следующего утверждения. Пусть $\lambda I + A \in (\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, и $\{u_m\}_{m\geqslant 1}$, $\{v_m\}_{m\geqslant 1}$ — семейства измеримых подмножеств $\mathbb{R}^k$. Пусть $\rho(u_m, v_m)$ — расстояние между множествами u_m и v_m. Если

$$\lim_{m\to\infty} \rho(u_m, v_m) = \infty,$$

то

$$\lim_{m\to\infty} \|(P_{u_m} \otimes Q^m)(\lambda I + A)(P_{v_m} \otimes Q^m)\| = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим оператор вида $\lambda I + \sum_{i=1}^{l} \tilde{A}_i \otimes B_i$, где $\tilde{A}_i$ — оператор свертки с финитным ядром $a_i(x)$, $B_i \in \mathscr{K}_p$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как операторы такого вида плотны в $(\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+$, то лемму достаточно доказать для таких операторов. Так как имеется конечное число ядер $a_i(x)$, то существует шар радиуса r такой, что при $|x| > r$ все ядра $a_i(x)$ обращаются в нуль. Так как при $\rho(u_m, v_m) > r$ $P_{u_m}\tilde{A}_i P_{v_m} = O$ и $P_{u_m}P_{v_m} = O$, то из равенства

$$\big(P_{u_m} \otimes Q^m\big)\left(\lambda I + \sum_{i=1}^{l} \tilde{A}_i \otimes B_i\right)\big(P_{v_m} \otimes Q^m\big) = \lambda\big(P_{u_m\cap v_m} \otimes Q^m\big) + \sum_{i=1}^{l} P_{u_m}\tilde{A}_i P_{v_m} \otimes Q^m B_i Q^m$$

следует, что при достаточно больших m

$$(P_{u_m} \otimes Q^m)\big(\lambda I + \sum_{i=1}^{l} \tilde{A}_i \otimes B_i\big)(P_{v_m} \otimes Q^m) = O,$$

что доказывает равенство (8). $\rhd$

4. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1 опирается на три леммы. Первая лемма устанавливает связь между обратимостью и локальной обратимостью операторов с компактными коэффициентами. Отметим при этом, что рассматриваемый оператор может и не быть оператором типа свертки.

Лемма 2. *Пусть K — измеримый конус с вершиной в нуле и оператор $A \in (\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k)) \otimes \mathscr{K}_p)^+$ такой, что элемент $j_K(A)$ локального типа. Для того, чтобы оператор*

$$(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I) : (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}) \to (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$$

был обратим, необходимо и достаточно, чтобы элемент $j_K(A)$ был локально обратим в нуле.

$\lhd$ *Необходимость.* Так как оператор $(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)$ обратим в $(P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$, то существует число m_0 такое, что для любого $m \geqslant m_0$ оператор $(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)$ обратим в соответствующем пространстве $(P_K \otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$. Следовательно, при

$m \geqslant m_0$ существует оператор C_m, обратный к $(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)$. Тогда элемент $c = [\{C_m\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_K}$ будет обратным, а значит, и локально обратным, к $j_K(A)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть элемент $j_K(A)$ локально обратим в нуле. Тогда существует элемент $b = [\{B_m\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_K} (\in \mathscr{A}_K)$ и окрестность $u (\subset \overline{K})$ точки 0 такие, что

$$bj_K(A)p(u) = p(u).$$

Следовательно, для любого $f (\in (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}))$

$$\lim_{m\to\infty} \|B_m(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)(P_{mu} \otimes Q^m)f - (P_{mu} \otimes Q^m)(P_K \otimes Q^m)f\| = 0.$$

Пусть $\beta = \sup_{m\geqslant 1} \|B_m\|$. Из предыдущего равенства получаем, что для любого фиксированного числа $\varepsilon (> 0)$ найдется номер m_0 такой, что для любого m $(\geqslant m_0)$

$$\|B_m(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)(P_{mu} \otimes Q^m)f - (P_{mu} \otimes Q^m)(P_K \otimes Q^m)f\| \leqslant \varepsilon;$$

$$\|(P_{mu} \otimes Q^m)(P_K \otimes Q^m)f\| - \varepsilon \leqslant \beta\|(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)(P_{mu} \otimes Q^m)f\|. \tag{9}$$

Так как $mu \cap K$ является для K исчерпывающей последовательностью подмножеств и последовательность $\{Q^m\}_{m\geqslant 1}$ сильно сходится к $I_{\mathscr{L}(L_p(\mathfrak{X}))}$, то

$$\lim_{m\to\infty} \|(P_{mu} \otimes Q^m)(P_K \otimes Q^m)f - f\| = 0; \quad \lim_{m\to\infty} \|(P_K \otimes Q^m)f - f\| = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим числовую последовательность $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Из (9) следует, что

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\exists\, m_0^n)\ (\forall\, m \geqslant m_0^n)$$
$$\frac{1}{\beta}\left\|(P_{mu} \otimes Q^m)(P_K \otimes Q^m)f\right\| - \frac{\varepsilon_n}{\beta} \leqslant \left\|(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)(P_{mu} \otimes Q^m)f\right\|.$$

Следовательно, существует строго монотонно возрастающая последовательность $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$, такая что для любого натурального n выполняется неравенство

$$\frac{1}{\beta}\left\|(P_{m_n u} \otimes Q^{m_n})(P_K \otimes Q^{m_n})f\right\| - \frac{\varepsilon_n}{\beta} \leqslant \left\|(P_K \otimes Q^{m_n})A(P_K \otimes Q^{m_n})(P_{m_n u} \otimes Q^{m_n})f\right\|. \tag{11}$$

Из (10) следует равенство

$$\lim_{m\to\infty} \left\|(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)(P_{mu} \otimes Q^m)f - (P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)f\right\| = 0. \tag{12}$$

Переходя к пределу в неравенстве (11) при $n \to \infty$, учитывая (10) и (12), получаем, что для любой функции $f (\in (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}))$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\beta}\|f\| \leqslant \|(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)f\|. \tag{13}$$

Покажем, что образ оператора $(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I) (\in \mathscr{L}((P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})))$ замкнут, т. е.

$$\mathrm{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I) = \overline{\mathrm{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)}. \tag{14}$$

Для этого рассмотрим последовательность $f_n (\in \mathrm{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I))$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f (\in \overline{\mathrm{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)}), \tag{15}$$

и покажем, что $f \in \operatorname{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)$. Известно, что

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\exists\, \varphi_n \in (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}))\quad (P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)\varphi_n = f_n. \tag{16}$$

Из фундаментальности последовательности $\{(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и неравенства (13) следует фундаментальность последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу полноты пространства $(P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$, существует функция $\varphi \in (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)\varphi_n = (P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)\varphi. \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) получаем равенство $(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)\varphi = f$, следовательно, $f \in \operatorname{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)$, что доказывает (14). Таким образом, из (13), (14) и теоремы об обратимости оператора, отграниченного от нуля [10, с. 119] следует обратимость оператора

$$(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I) : (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}) \to \operatorname{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I).$$

Докажем равенство

$$\overline{\operatorname{im}(P_K \otimes I)A(P_K \otimes I)} = (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X}). \tag{18}$$

Из локальной обратимости в нуле элемента $j_K(A)$ следует, что существует $c\ (\in \mathscr{A}_K)$ и окрестность $v(\subset \overline{K})$ точки 0 такие, что

$$p(v)j_K(A)c = p(v). \tag{19}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\in C(\overline{K}))$, для которой $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \notin v$. Умножим (19) слева на элемент $\mu(\varphi)$, где μ — гомоморфизм, определяемый формулой (7). Так как согласно лемме 1 $p(v) = \mu(1_v)$, то равенство (19) переписывается в виде $\mu(\varphi)j_K(A)c = \mu(\varphi)$. Так как элемент $j_K(A)$ локального типа, то из теоремы, доказанной в [2, с. 62] следует, что $j_k(A)$ коммутирует с любым элементом из $\mu(C(\overline{K}))$, следовательно,

$$\mu(\varphi)j_K(A)c = j_K(A)\mu(\varphi)c = \mu(\varphi). \tag{20}$$

Умножим правую часть равенства (20) на $p(\overline{K})$. Получим $j_K(A)\mu(\varphi)cp(\overline{K}) = \mu(\varphi)p(\overline{K})$. Пусть элемент c имеет вид $c = [\{C_m\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_K}$. Пусть $f \in (P_K \otimes I)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathfrak{X})$. Из последнего равенства следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\|(P_K \otimes Q^m)A(P_K \otimes Q^m)\Phi_m C_m(P_K \otimes Q^m)f - \Phi_m(P_K \otimes Q^m)f\| = 0. \tag{21}$$

Так как $mv \cap K$ — исчерпывающая последовательности подмножеств для K, то

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, r > 0)\qquad \int\limits_{K\setminus rv\times\mathfrak{X}} |f(x,y)|^p\, dxdy < \varepsilon.$$

Из непрерывности функции $\varphi(x)$ следует, что

$$(\exists\, m_0)\ (\forall\, m \geqslant m_0)\quad \max_{x\in rv}|1 - \varphi(x/m)|^p < \varepsilon.$$

Из этих соображений следует равенство

$$\lim_{m\to\infty}\|\Phi_m(P_K \otimes Q^m)f - f\| = 0. \tag{22}$$

Докажем равенство

$$\lim_{m\to\infty}\big\|(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-(P_K\otimes Q^m)A(P_K\otimes Q^m)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f\big\|=0.$$

Так как $\Phi_m\in\mathscr{L}((P_K\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X}))$, то достаточно показать, что

$$\lim_{m\to\infty}\|(P_K\otimes I)A\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-(P_K\otimes Q^m)A\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f\|=0. \tag{23}$$

Отметим, что оператор A представим в виде $A=\lambda I+\widetilde{A}$, где $\lambda\in\mathbb{C}$, $\widetilde{A}\in\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^k))\otimes\mathscr{K}_p$. Оценим норму оператора из (23)

$$\begin{aligned}&\|(P_K\otimes I)A\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-(P_K\otimes Q^m)A\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f\|\\&=\|(P_K\otimes I)\widetilde{A}\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-(P_K\otimes Q^m)\widetilde{A}\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f\|\\&\leqslant\|(P_K\otimes I)\widetilde{A}-(P_K\otimes Q^m)\widetilde{A}\|\|\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)\|\|f\|.\end{aligned} \tag{24}$$

Для $\widetilde{A}$ имеет место утверждение, аналогичное лемме 1 из [6]. Согласно этому утверждению

$$\lim_{m\to\infty}\|(P_K\otimes I)\widetilde{A}-(P_K\otimes Q^m)\widetilde{A}\|=0. \tag{25}$$

Так как $\{\Phi_m\}_{m\geqslant1}\in\mathfrak{A}_K$, то $\{\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)\}_{m\geqslant1}\in\mathfrak{A}_K$, и существует $\beta>0$ такое, что

$$\sup_{m\geqslant1}\|\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)\|<\beta.$$

Следовательно, (24) оценивается так:

$$\|(P_K\otimes I)\widetilde{A}-(P_K\otimes Q^m)\widetilde{A}\|\|\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)\|\|f\|\leqslant\beta\|(P_K\otimes I)\widetilde{A}-(P_K\otimes Q^m)\widetilde{A}\|\|f\|.$$

Таким образом, из последнего неравенства, (24) и (25) следует (23).

Для функции f имеет место оценка:

$$\begin{aligned}&\|(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-f\|\\&\leqslant\|(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-(P_K\otimes Q^m)A(P_K\otimes Q^m)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f\|\\&+\|(P_K\otimes Q^m)A(P_K\otimes Q^m)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-\Phi_m(P_K\otimes Q^m)f\|+\|\Phi_m(P_K\otimes Q^m)f-f\|.\end{aligned}$$

Из равенств (21)–(23) следует, что $\lim_{m\to\infty}\|(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f-f\|=0$. Обозначим через $\psi_m=\Phi_m C_m(P_K\otimes Q^m)f$. Тогда последнее равенство эквивалентно

$$\lim_{m\to\infty}\|(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)\psi_m-f\|=0,$$

что доказывает равенство (18). Замкнутость образа оператора $(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)$ была доказана ранее (см. (14)), как и обратимость этого оператора на своем образе. Таким образом, мы доказали, что $(P_K\otimes I)A(P_K\otimes I)$ обратим в пространстве $(P_K\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$. $\triangleright$

Пусть u, v $(\subset\mathbb{R}^k)$ — окрестности точки $x(\in\mathbb{R}^k)$ с гладкими границами, $\varphi:u\to v$ — C^1-диффеоморфизм такой, что $\varphi(x)=x$ и $\varphi'(x)=I$. Пусть

$$\sup_{x\in u}\big|(J\varphi)(x)\big|<\infty,\quad \sup_{y\in v}\big|(J\varphi^{-1})(y)\big|<\infty,$$

где $(J\varphi)(x) = \det\varphi'(x)$ — якобиан преобразования φ. Определим отображение $T_\varphi : p(u)\mathscr{A}_{\mathbb{R}^k}p(u) \to p(v)\mathscr{A}_{\mathbb{R}^k}p(v)$ следующим образом: пусть $a = [\{A_m\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}} (\in \mathscr{A}_{\mathbb{R}^k})$, тогда

$$T_\varphi(p(u)ap(u)) = \bigl[\bigl\{(P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)A_m(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m)\bigr\}_{m\geqslant 1}\bigr]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}, \quad (26)$$

где оператор $T_m : (P_{mv}\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X}) \to (P_{mu}\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$ определяется формулой

$$(T_m f)(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^m e_i(m\varphi(x/m))\eta_j(y), & x \in mu, \\ 0, & x \notin mu, \end{cases}$$

где $f(x,y) \in (P_{mv}\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathfrak{X})$ и ее разложение по базису (5) имеет вид (6).

Следующая лемма доказывается прямыми выкладками.

Лемма 3. *T_φ является изоморфизмом банаховых алгебр $p(u)\mathscr{A}_{\mathbb{R}^k}p(u)$ и $p(v)\mathscr{A}_{\mathbb{R}^k}p(v)$.*

Лемма 4. *Если $A \in (\mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p})^+$, то $j_{\mathbb{R}^k}(A) \sim_x \varphi$, $T_\varphi \sim_x j_{\mathbb{R}^k}(A)$.*

$\lhd$ Проверим три условия определения квазиэквивалентности. Выполнение первого условия очевидно, второе также легко проверяется прямыми выкладками. Отметим лишь, что для любого $w \in \Sigma_u$ справедливо равенство

$$(P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mw}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m) = P_{m\varphi(w)}\otimes Q^m. \quad (27)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и докажем, что $T_\varphi(p(u)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(u)) \sim_x p(v)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(v)$, т. е. что существует окрестность $w(\subset \dot{\mathbb{R}}^k)$ точки x такая, что

$$\begin{aligned} &\|(T_\varphi(p(u)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(u)) - p(v)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(v))p(w)\| < \varepsilon, \\ &\|p(w)(T_\varphi(p(u)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(u)) - p(v)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(v))\| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как по теореме 3 элемент $j_{\mathbb{R}^k}(A)$ локального типа, то достаточно доказать только первое неравенство. Представим оператор A в виде $A = \lambda I + \widetilde{A}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\widetilde{A} \in \mathscr{V}_p^{\mathscr{K}_p}$. Тогда, применяя (4), (26) и (27), получаем

$$\begin{aligned} &\|(T_\varphi(p(u)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(u)) - p(v)j_{\mathbb{R}^k}(A)p(v))p(w)\| \\ &= \|[\{((P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)\widetilde{A}(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m) \\ &\quad -(P_{mv}\otimes Q^m)\widetilde{A}(P_{mv}\otimes Q^m))(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\}_{m\geqslant 1}]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\|. \end{aligned}$$

Справедлива модификация леммы 1 из [6], из которой следует, что существует m_0 такое, что для любого $m \geqslant m_0$ выполняется неравенство

$$\|(I\otimes Q^m)\widetilde{A}(I\otimes Q^m) - \widetilde{A}\| < \varepsilon. \quad (29)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\big\|\big[\big\{\big((P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)\widetilde{A}(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m)\\
&\quad-(P_{mv}\otimes Q^m)\widetilde{A}(P_{mv}\otimes Q^m)\big)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|\\
&\leqslant\big\|\big[\big\{(P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)(\widetilde{A}-(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0}))\\
&\quad\times(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|\\
&\quad+\big\|\big[\big\{(P_{mv}\otimes Q^m)(\widetilde{A}-(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0}))(P_{mv}\otimes Q^m)\\
&\quad\times(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|+\big\|\big[\big\{\big((P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)(I\otimes Q^{m_0})\\
&\quad\times\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0})(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m)-(P_{mv}\otimes Q^m)(I\otimes Q^{m_0})\\
&\quad\times\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0})(P_{mv}\otimes Q^m)\big)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|.
\end{aligned}\tag{30}$$

Оценим отдельно каждое слагаемое. Из того, что $P_{mv}\otimes Q^m$, $P_{mu}\otimes Q^m$, T_m, T_m^{-1} и $P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m$ ограничены в совокупности и из (29) следует, что существует $C>0$ такое, что

$$\begin{aligned}
&\big\|\big[\big\{(P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)(\widetilde{A}-(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0}))(P_{mu}\otimes Q^m)\\
&\times T_m(P_{mv}\otimes Q^m)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|<C\left(\sup_{t\in u}|J\varphi(t)|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{t\in v}|J\varphi^{-1}(t)|\right)^{\frac{1}{p}}\varepsilon.
\end{aligned}\tag{31}$$

Аналогичным образом получаем оценку

$$\big\|\big[\big\{(P_{mv}\otimes Q^m)(\widetilde{A}-(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0}))(P_{mv}\otimes Q^m)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|<C\varepsilon.\tag{32}$$

Для третьего слагаемого в (30) имеет место равенство

$$\begin{aligned}
&\big\|\big[\big\{((P_{mv}\otimes Q^m)T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^m)(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0})(P_{mu}\otimes Q^m)T_m(P_{mv}\otimes Q^m)\\
&\quad-(P_{mv}\otimes Q^m)(I\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(I\otimes Q^{m_0})(P_{mv}\otimes Q^m)\big)(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^m)\big\}_{m\geqslant 1}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|\\
&=\big\|\big[\big\{((P_{mv}\otimes Q^{m_0})T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(P_{mu}\otimes Q^{m_0})T_m(P_{mv}\otimes Q^{m_0})\\
&\quad-(P_{mv}\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(P_{mv}\otimes Q^{m_0}))(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^{m_0})\big\}_{m\geqslant m_0}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|.
\end{aligned}$$

Из леммы 3, доказанной в [2, с. 68], следует, что существует окрестность w $(\subset\dot{\mathbb{R}}^k)$ точки x такая, что

$$\begin{aligned}
&\big\|\big[\big\{((P_{mv}\otimes Q^{m_0})T_m^{-1}(P_{mu}\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(P_{mu}\otimes Q^{m_0})T_m(P_{mv}\otimes Q^{m_0})\\
&-(P_{mv}\otimes Q^{m_0})\widetilde{A}(P_{mv}\otimes Q^{m_0}))(P_{m(w\cap\mathbb{R}^k)}\otimes Q^{m_0})\big\}_{m\geqslant m_0}\big]_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}^k}}\big\|<\varepsilon.
\end{aligned}\tag{33}$$

Таким образом, из (30)–(33) получаем справедливость неравенства (28). $\rhd$

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Из условия теоремы вытекает, что элемент $j_M(A)$ обратим в алгебре $\mathscr{A}_M$. Так как по теореме 3 элемент $j_M(A)$ локального типа, то из леммы 4 можно вывести, что $j_M(A)\sim_x\sim_x j_{K_x}(A)$ для любого $x(\in\partial M)$. Тогда на основании теоремы 5 из [2, с. 65] элемент $j_{K_x}(A)$ локально обратим в точке x. В силу леммы 2, учитывая инвариантность оператора A относительно сдвига, получаем, что операторы $(P_{K_x} \otimes I)A(P_{K_x} \otimes I)$ обратимы для всех x $(\in \partial M)$.

Достаточность. Пусть операторы $(P_{K_x} \otimes I)A(P_{K_x} \otimes I)$ обратимы для всех $x(\in \partial M)$. Тогда $j_{K_x}(A)$ локально обратим в точке x. В силу квазиэквивалентности $j_M(A) \sim_x \sim_x j_{K_x}(A)$ элемент $j_M(A)$ локально обратим в каждой точке $x(\in \partial M)$. Если $\operatorname{int} M \neq \varnothing$, то существует такая точка $x_0(\in \partial M)$, что $\operatorname{int} K_{x_0} \neq \varnothing$. Пусть $y_0 \in \operatorname{int} K_{x_0}$. Тогда $j_{K_{x_0}}(A) \sim_{y_0} \sim_{y_0} j_{\mathbb{R}^k}(A)$. Следовательно, $j_{\mathbb{R}^k}(A)$ локально обратим в точке y_0. Так как оператор A инвариантен относительно сдвига, то элемент $j_{\mathbb{R}^k}(A)$ локально обратим в точке $x(\in \mathbb{R}^k)$. Для $x \in \operatorname{int} M$ $j_M(A) \sim_x \sim_x j_{\mathbb{R}^k}(A)$. Следовательно, элемент $j_M(A)$ локально обратим в каждой точке x $(\in M)$. Тогда по теореме 3 из [2, с. 63] он обратим. Это означает, что операторы $(P_{mM} \otimes Q^m)A(P_{mM} \otimes Q^m)$ обратимы, начиная с некоторого m_0 и выполняется (3). $\triangleright$

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. М. Деундяку за руководство работой и множество ценных и полезных замечаний.

Литература

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
2. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Диф. и интегральные уравнения и их приложения. Сб. науч. трудов.—Элиста: Изд-во КалмГУ, 1983.—С. 58–73.
3. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных интегральных уравнений. I–II // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1965.—Т. 29, № 3, 4.—С. 567–586, 757–782.
4. *Симоненко И. Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих.—Ростов-н/Д.: ЦВВР, 2007.—120 с.
5. *Деундяк В. М., Мирошникова Е. И.* Об ограниченности и фредгольмовости интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа и переменными коэффициентами // Изв. вузов. Матем.—2012.—№ 7.—С. 1–15.
6. *Деундяк В. М., Лукин А. В.* Приближенный метод решения операторных уравнений свертки на группе $\mathbb{R}^n$ с компактными коэффициентами и приложения // Изв. вузов Северо-Кавказский регион.—2013.—№ 6.—С. 5–8.
7. *Лукин А. В.* Проекционный метод решения уравнений свертки с операторными коэффициентами // Тез. докл. междунар. конф. «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — IV».—Ростов-н/Д., 2014.—С. 36.
8. *Пилиди В. С.* О бисингулярном уравнении в пространстве L_p // Мат. исследования.—1972.—Т. 7, № 3.—С. 167–175.
9. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений.—М.: Наука, 1969.—456 с.
10. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа.—М.: Высшая школа, 1982.—271 с.

Статья поступила 25 мая 2015 г.

Лукин Александр Васильевич
Южный федеральный университет,
аспирант кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 28/2
E-mail: `alexanderlukin9@gmail.com`

APPLICATION OF SIMONENKO-KOZAK'S LOCAL PRINCIPE IN THE SECTION METHOD THEORY OF SOLVING CONVOLUTION EQUATIONS WITH OPERATOR COEFFICIENTS

Lukin A. V.

In this work we generalize the Simonenko–Kozak's local structure to algebras generated by multidimensional operators with compact coefficients. Then we apply this local structure to receive the criteria of applicability the method of solving equations for multidimensional convolution operators with compact coefficients.

Key words: integral operator, convolution operator, local method, section method, compact coefficients.