Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 65–74

УДК **517.54+517.518**

ОЦЕНКИ НА МОДУЛИ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ВЕСОВЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ (p, q)-ИСКАЖЕНИЕМ

М. В. Трямкин

Семёну Самсоновичу Кутателадзе
к 70-летнему юбилею

Мы формулируем аналоги неравенств Полецкого и Вяйсяля для отображений с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p, q)-искажением без дополнительного предположения об $\mathscr{N}$-свойстве Лузина.

Ключевые слова: отображение с ограниченным весовым (p, q)-искажением, модуль семейства кривых, функция Полецкого.

1. Введение

Понятие модуля семейства кривых на плоскости было введено в 1950 г. Л. Альфорсом и А. Бьерлингом [1], а затем распространено на многомерные пространства Б. Фугледе [2] и Б. В. Шабатом [3]. На языке этого понятия было сформулировано одно из эквивалентных описаний квазиконформных отображений, в связи с чем метод модулей приобрел важное значение в работе с этим классом отображений, позволив найти альтернативный подход к их изучению. Необходимость в таком подходе была вызвана отсутствием в многомерных пространствах теоремы Римана.

В 60-е годы прошлого века Ю. Г. Решетняк начал систематическое исследование отображений с ограниченным искажением, представляющих собой неоднолистный аналог квазиконформных отображений (подробное изложение содержится в монографии [4]). Пусть Ω — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Отображение $f = (f_1, \dots, f_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если для почти всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство $|Df(x)|^n \leqslant KJ(x, f)$, где $K \in [1, \infty)$ — постоянная, $Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1,\dots,n}$ — матрица Якоби, $|Df(x)|$ и $J(x, f)$ — ее операторная норма и определитель соответственно.

Основополагающий топологический результат Ю. Г. Решетняка заключается в том, что всякое непостоянное отображение с ограниченным искажением непрерывно, открыто и дискретно (см. [4, гл. 2, § 6]).

Впервые метод модулей к исследованию отображений с ограниченным искажением применил Е. А. Полецкий в 1970 г. [5]. Опираясь на упомянутые топологические характеристики, Е. А. Полецкий с помощью процедуры поднятия путей установил свойства

---

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-00552, и Совета по грантам Президента Российской Федерации, проект № НШ-2263.2014.1.

некоторого специального отображения, известного сегодня как функция Полецкого. Это позволило показать, что для отображений с ограниченным искажением модуль образа семейства кривых не превосходит модуля прообраза [5, теорема 1]. Последнее утверждение в наши дни называется неравенством Полецкого. В той же работе [5] получено некоторое улучшение этого неравенства в нормальных областях (см. [5, теорема 2]). Полезная интерпретация последнего была получена Ю. Вяйсяля [6, 3.1] и называется в литературе неравенством Вяйсяля. Немногим ранее были установлены аналогичные оценки для емкости (см. [7, 8]). Отметим, однако, что модульные неравенства суть более общие, чем соответствующие емкостные (см., например, [9, пример 1]).

Оценки для модуля и емкости играют ключевую роль в исследовании поведения отображения на границе, в теории распределения значений в духе Неванлинны (теоремы типа Лиувилля и Пикара, устранение особенностей) (см. [10]), связи дилатации с минимальной кратностью ветвления и др. Кроме того, модульная техника нашла применение в метрических пространствах с мерой, что привело к рассмотрению так называемых пространств Левнера (см., например, [11]).

Метод модулей, как показывает ряд недавно вышедших работ (см., например, монографию [12]), а также статьи [13–17], продолжает оставаться основным инструментом в изучении различных обобщений отображений с ограниченным искажением. В книге [12] рассматриваются Q-гомеоморфизмы с функцией Q из различных классов (интегрируемые, с ограниченным средним и с ограниченным конечным колебанием), отображения с конечным искажением длины и с конечным искажением площади, и для них устанавливаются результаты о дифференцируемости, поведении на границе, устранении особенностей, нормальных семействах и пр. В статьях [13, 14] емкостные оценки установлены для некоторых обобщений отображений с ограниченным искажением (в частности, на группах Карно) с требованием $\mathscr{N}$-свойства Лузина. В работе [15] установлены модульные и емкостные неравенства для отображений с конечным искажением при минимальных условиях регулярности в предположении о том, что исходное отображение также удовлетворяет $\mathscr{N}$-свойству. В статье [16] аналогичные неравенства получены для отображений с конечным (p,q)-искажением длины. В [17] оценка на модуль доказана для некоторого специального класса отображений, обладающих следующими свойствами: открытость, дискретность, дифференцируемость почти всюду, $\mathscr{N}$- и $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина, и так называемое *свойство абсолютной непрерывности в обратном направлении*.

Задача нашей работы — установить модульные неравенства для естественного обобщения класса отображений с ограниченным искажением без некоторых аналитических предположений, характерных для вывода результатов упомянутых выше работ. В настоящей статье основным является следующее

Определение 1 [18]. Пусть $\theta, \sigma\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — локально суммируемые функции (называемые *весовыми*) такие, что $\theta > 0$ и $\sigma > 0$ почти всюду. Отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с (θ,σ)-весовым ограниченным (p,q)-искажением*, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, если:

1) f непрерывно, открыто и дискретно;
2) f принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$;
3) $J(x,f) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$;
4) отображение f имеет *конечное искажение*:

$$\text{для почти всех } x \in \Omega \text{ равенство } J(x,f) = 0 \text{ влечет } Df(x) = 0;$$

5) функция локального (θ,σ)-весового q-искажения

$$\Omega\ni x\mapsto K_q^{\theta,\sigma}(x,f)=\begin{cases}\frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df(x)|}{\sigma^{\frac{1}{p}}(f(x))J(x,f)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x,f)\neq 0;\\ 0, & \text{если } J(x,f)=0,\end{cases}$$

принадлежит классу $L_\varkappa(\Omega)$, где $\varkappa$ находится из условия $\frac{1}{\varkappa}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ ($\varkappa=\infty$ при $q=p$).

Через $K_{q,p}^{\theta,\sigma}(f;\Omega)$ обозначим величину $\|K_q^{\theta,\sigma}(\cdot,f)\mid L_\varkappa(\Omega)\|$.

В этом определении наличие пункта 1) связано с тем, что при $q\in(n-1,n)$ отображение может и не обладать требуемыми топологическими свойствами. Отметим, что при $\theta=\sigma\equiv 1$ и $p=q=n$ мы получаем отображения, введенные Ю. Г. Решетняком.

В работе [18] получены емкостные неравенства для введенного класса отображений без требования $\mathscr{N}$-свойства Лузина. Подчеркнем, что ранее модульные и емкостные неравенства устанавливались в предположении, что отображение обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, которое заключается в том, что образ множества меры нуль также имеет меру нуль. Это требование необходимо было для того, чтобы образ множества точек ветвления имел нулевую меру. В настоящей статье мы доказываем модульные неравенства без дополнительного предположения об $\mathscr{N}$-свойстве Лузина. Это оказывается возможным благодаря следующему замечательному факту, установленному в статье [19] (см. также [18–22]): частные производные функции Полецкого обращаются в нуль почти всюду на образе множества точек ветвления. В § 3 мы скажем об этом подробнее. Этот факт использовался в работе [18] для получения оценок на емкости. Отметим, что при $q\in(n-1,n)$ отображение f не обязательно обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, что продемонстрировано в [23].

Во всех наших последующих рассмотрениях отображение f имеет $(\theta,1)$-весовое ограниченное (p,q)-искажение, т. е. $\sigma\equiv 1$.

Полный вариант этой заметки с подробным изложением доказательств будет опубликован в [24].

2. Предварительные сведения

2.1. Всюду в тексте символ Ω обозначает область (т. е. открытое связное множество) в пространстве $\mathbb{R}^n$, символ m_n — n-мерную меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Для области $U\subset\mathbb{R}^n$ запись $U\Subset\Omega$ означает, что множество U ограничено и $\overline{U}\subset\Omega$.

Пусть $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, $U\Subset\Omega$, $y\notin f(\partial U)$. Символом $\mu(y,f,U)$ мы будем обозначать *степень отображения f в точке y*. Подробную информацию об этом понятии можно найти, например, в [4, 2.1] и [10, I.4]. Если $\mu(y,f,U)>0$ для любой области $U\Subset\Omega$ и любой точки $y\in f(U)\setminus f(\partial U)$, то говорят, что отображение f *сохраняет ориентацию*.

Рассмотрим непрерывное открытое и дискретное отображение $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ и точку $x\in\Omega$. Тогда существует область $V\Subset\Omega$ такая, что $x\in V$ и $\overline{V}\cap f^{-1}(f(x))=\{x\}$. Если $V'\Subset\Omega$ — другая область с таким свойством, то можно показать (см. [10, с. 18]), что $\mu(f(x),f,V)=\mu(f(x),f,V')$. Поэтому равенство $i(x,f)=\mu(f(x),x,U)$ корректно определяет величину $i(x,f)$, называемую *локальным индексом отображения f в точке x*.

Область $D\Subset\Omega$ называется *нормальной* для непрерывного открытого и дискретного отображения $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$, если $f(\partial D)=\partial f(D)$. Если $x\in\Omega$ и D — нормальная область такая, что $D\cap f^{-1}(f(x))=\{x\}$, то D называется *нормальной окрестностью* точки x. Согласно [10, I.4.9] всякая точка $x\in\Omega$ имеет нормальную окрестность.

Отметим, что если D — нормальная область для отображения f, то $\mu(y,f,D)$ не зависит от $y \in f(D)$ (см. [10, с. 18]). Эту постоянную мы будем обозначать $\mu(f,D)$.

Точка $x \in \Omega$ называется *точкой ветвления* непрерывного отображения $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, если f не является гомеоморфизмом ни в какой окрестности точки x. Множество всех точек ветвления отображения f обозначим символом B_f. Заметим, что $x \in B_f$ тогда и только тогда, когда $i(x,f) \geqslant 2$.

Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, и $U \subset \Omega$. *Функцией кратности* называется отображение $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto N(y,f,U) = \#\{f^{-1}(y) \cap U\}$. Обозначим также: $N(f,U) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} N(y,f,U)$.

2.2. Здесь мы приведем понятия и утверждения, необходимые для описания аналитических свойств отображений.

Пусть $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Если существует функция $v_i \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$, такая, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int\limits_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx = -\int\limits_\Omega v_i(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

то v_i называется *обобщенной частной производной* функции u и обозначается через $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Функция $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, имеющая в области Ω обобщенные частные производные по всем переменным, принадлежит *пространству Соболева* $W_p^1(\Omega)$, $p \geqslant 1$, если $u \in L_p(\Omega)$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_p(\Omega)$ для каждого $i = 1,\dots,n$.

Отображение $f = (f_1,\dots,f_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W_p^1(\Omega)$ ($W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$), если все $f_i \in W_p^1(\Omega)$ (все $f_i \in W_p^1(D)$ для любой области $D \Subset \Omega$). Через $Df(x)$, $|Df(x)|$ и $J(x,f)$ мы обозначаем матрицу Якоби $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j=1,\dots,n}$, ее операторную норму $\sup_{|h|=1}|Df(x)h|$ и якобиан $\det Df(x)$ соответственно.

Для $(n\times n)$-матрицы $M = (a_{ij})$ через $\operatorname{adj} M$ мы обозначаем $(n\times n)$-матрицу, транспонированную к матрице (A_{ij}), где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Введем проекцию $\pi_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, которая точке $x = (x_1,\dots,x_n)$ ставит в соответствие точку $\pi_j(x) = (x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$. Обозначим $\bar{x}_j = \pi_j(x)$. Точку $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (\bar{x}_j, x_j)$. Говорят, что непрерывное отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}(\Omega)$, если для любого $j = 1,\dots,n$ отображение $x_j \mapsto f(\bar{x}_j,x_j)$ при почти всех $\bar{x}_j \in \pi_j(\Omega)$ абсолютно непрерывно на любом отрезке $[a,b]$ таком, что $\pi_j(\Omega)\times[a,b] \subset \Omega$.

Известно (см. [25, 26.4]), что если $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$, то f имеет почти всюду в Ω обычные частные производные, которые будут борелевскими функциями.

Отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, если $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$ и все частные производные f принадлежат классу $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Предложение 1 [10, I.1.2]. *Отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}^p(\Omega)$ тогда и только тогда, когда f непрерывно и $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$. При этом обобщенные и обычные частные производные совпадают почти всюду.*

2.3. Этот пункт посвящен понятию модуля семейства кривых, которое мы обобщим нужным нам образом.

Кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$ — это непрерывное отображение $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$, где I — промежуток в $\mathbb{R}$ (т. е. множество вида $\langle a,b\rangle$, где каждая из угловых скобок может быть круглой или квадратной, $a \leqslant b$, $a,b \in \mathbb{R}$; допускаются также бесконечные промежутки). Кривая α называется *замкнутой* (*открытой*), если интервал I компактен (открыт). Обозначим $|\alpha| = \alpha(I)$. Запись $\gamma' \subset \gamma$ будет означать, что кривая γ' есть сужение кривой γ на подынтервал или точку.

Если $\alpha\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — замкнутая кривая, то ее *длиной* назовем величину

$$\ell(\alpha) = \sup \sum_{i=1}^{l} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i+1})|,$$

где точная верхняя грань берется по всем конечным разбиениям $a = t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_l \leqslant t_{l+1} = b$. Если кривая α не замкнута, то положим ее длину равной $\ell(\alpha) = \sup \ell(\alpha|_J)$, где супремум берется по всем замкнутым подынтервалам J интервала I.

Кривая $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ называется *спрямляемой*, если $\ell(\alpha) < \infty$. Кривая называется *локально спрямляемой*, если каждая ее замкнутая подкривая спрямляема.

Рассмотрим замкнутую кривую $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Предположим, что она спрямляема. Определим функцию $s_\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ равенством $s_\alpha(t) = \ell(\alpha|_{[a,t]})$. Для спрямляемой кривой α существует единственная кривая $\alpha^0\colon [0,\ell(\alpha)] \to \mathbb{R}^n$, полученная из α монотонно возрастающей заменой параметра, такая, что $s_{\alpha^0}(t) = t$ и $\alpha = \alpha^0 \circ s_\alpha$ [25, 2.4]. Кривая α^0 называется *натуральной параметризацией* кривой α.

Пусть Γ — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Борелевская функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для Γ, если

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds \geqslant 1$$

для каждой локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma$. Совокупность всех допустимых функций обозначаем $\operatorname{adm}\Gamma$. Для весовой функции $\omega\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ и $p \in [1,\infty)$ определим *ω-весовой p-модуль* семейства Γ формулой

$$\operatorname{mod}_p^\omega \Gamma = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p \omega\, dm_n.$$

Свойства весовой функции мы будем оговаривать отдельно (как минимум, предполагается, что она локально суммируема и почти всюду $\omega > 0$). При $\omega \equiv 1$ мы получаем обычное определение p-модуля, и вместо $\operatorname{mod}_p^1 \Gamma$ будем писать $\operatorname{mod}_p \Gamma$. Если $\operatorname{adm}\Gamma = \varnothing$ (этот случай реализуется только тогда, когда в семействе Γ есть хотя бы одна кривая, задающая постоянное отображение), то полагаем $\operatorname{mod}_p^\omega \Gamma = \infty$.

Если Γ — семейство кривых в области Ω и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, то через $f(\Gamma)$ мы обозначаем семейство кривых $f \circ \gamma$, где $\gamma \in \Gamma$.

Замечание 1. Как следует из определения модуля, кривые, которые не являются локально спрямляемыми, можно не учитывать. Точнее, если Γ — семейство кривых, и Γ_1 — семейство таких $\gamma \in \Gamma$, что γ локально спрямляема, то $\operatorname{mod}_p^\omega(\Gamma) = \operatorname{mod}_p^\omega(\Gamma_1)$. В связи с этим, допуская известную вольность, мы будем говорить, что семейство кривых, которые не являются локально спрямляемыми, имеет нулевой модуль.

Пусть α — спрямляемая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^n$. Отображение $g\colon |\alpha| \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на* α, если $g \circ \alpha^0$ абсолютно непрерывно на $[0,\ell(\alpha)]$.

3. Аналог леммы Полецкого

В доказательстве модульных неравенств проводятся рассуждения, обосновывающие возможность параметризации кривой некоторым специальным образом. Впервые эти рассуждения были реализованы в [5, лемма 6], которая в дальнейшем получила название *леммы Полецкого*. Нам потребуется ее аналог. Прежде чем его сформулировать, выясним содержание понятия абсолютной преднепрерывности, которое заключает в себе описание специального типа параметризации.

Предположим, что $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение. Пусть $\beta\colon I_0 \to \mathbb{R}^n$ — замкнутая спрямляемая кривая, и $\alpha\colon I \to \Omega$ — кривая такая, что $f \circ \alpha \subset \beta$, т. е. $I \subset I_0$. Если функция $s_\beta\colon I_0 \to [0, \ell(\beta)]$ постоянна на некотором интервале $J \subset I$, то и отображение β постоянно на J. В свою очередь, ввиду дискретности f отображение α также постоянно на J. Следовательно, существует единственное отображение $\alpha^*\colon s_\beta(I) \to \Omega$ такое, что $\alpha = \alpha^* \circ s_\beta|_I$. Легко видеть, что α^* непрерывно и $f \circ \alpha^* \subset \beta^0$. Кривая α^* называется *f-представителем кривой α (относительно β)*, если $\beta = f \circ \alpha$. Предположим теперь, что $\beta = f \circ \alpha$. Отображение f называется *абсолютно преднепрерывным на α*, если α^* абсолютно непрерывно.

Приведем аналог леммы Полецкого.

Лемма 1. *Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p, q)-искажением, $n - 1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Предположим, что Γ — семейство кривых в Ω такое, что для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ выполнено следующее: кривая $f \circ \gamma$ локально спрямляема, и γ имеет замкнутую подкривую α, на которой f не абсолютно преднепрерывно. Тогда $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma) = 0$, где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$.*

В доказательстве этой леммы большое значение имеют свойства функции Полецкого, которая определяется следующим образом. Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение, сохраняющее ориентацию, $U \subset \Omega$ — нормальная область, и $N = \mu(f, U)$. На множестве $V = f(U)$ определим отображение $g_U\colon V \to \mathbb{R}^n$, называемое *функцией Полецкого*, равенством

$$V \ni y \mapsto g_U(y) = \frac{1}{N} \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} i(x, f)x. \tag{1}$$

Необходимые нам свойства отображения (1) будут приведены в предложении 2, для формулировки которого нужно сделать следующее замечание. Поскольку отображение $f\colon \Omega \to \Omega' = f(\Omega)$ принадлежит классу Соболева, то оно аппроксимативно дифференцируемо почти всюду. Следовательно, существует борелевское множество $\Sigma \subset \Omega$, $m_n(\Sigma) = 0$, вне которого f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Обозначим: $Z = \{x \in \Omega \setminus \Sigma\colon J(x, f) = 0\}$. С точностью до множества меры нуль множество Z можно считать борелевским. Кроме того, $m_n(Z) = 0$. Также можно считать, что $B_f \subset Z \cup \Sigma$, так как $Df(x) = 0$ в точках $x \in B_f$, где $Df(x)$ существует.

Дополнение $\Omega \setminus \Sigma$ можно разложить на счетную совокупность дизъюнктных измеримых множеств F_k, $k \in \mathbb{N}$, таких, что $\cup F_k = \Omega \setminus \Sigma$ и отображение $f|_{F_k} : F_k \to \Omega'$ липшицево для всех $k \in \mathbb{N}$. Каждое множество $F_k \setminus Z$ представимо в виде объединения счетного семейства дизъюнктных измеримых множеств F_{km}, $m \in \mathbb{N}$, таких, что отображение $f|_{F_{km}}\colon F_{km} \to \Omega'$ билипшицево для всех $m \in \mathbb{N}$. Согласно теореме Радемахера отображения $f|_{F_{km}}\colon F_{km} \to \Omega'$ дифференцируемы почти всюду на области определения, а в силу теоремы Лебега о дифференцировании аддитивной функции множества F_{km} можно считать состоящими только из точек плотности 1. Переобозначим семейство дизъюнктных множеств $\{F_{km}\}$ как $\{E_l\}$. Мы получим разложение

$$\Omega = \Sigma \cup Z \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l,$$

в правой части которого все множества дизъюнктны. Ему соответствует разложение в образе:

$$\Omega' = Z' \cup \Sigma' \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E'_l,$$

где $Z' = f(\Sigma)$, $\Sigma' = f(Z)$, $E'_l = f(E_l)$, причем $m_n(\Sigma') = 0$, а Z' может иметь положительную m_n-меру. Можно считать, что $f(B_f) \subset Z' \cup \Sigma'$.

Теперь мы готовы сформулировать свойства функции Полецкого.

Предложение 2 [19, теорема 1]**.** *Предположим, что непрерывное открытое и дискретное отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $q > n-1$, $J(x,f) \geqslant 0$ почти всюду, и f имеет конечное коискажение:* $\operatorname{adj} Df = 0$ *почти всюду на множестве $Z = \{x \in \Omega\colon J(x,f) = 0\}$. Тогда*

1) *f сохраняет ориентацию;*

2) *отображение g_U, определенное равенством* (1), *непрерывно, принадлежит классу Соболева $W^1_1(V)$ и имеет конечное искажение, т. е. $Dg_U(y) = 0$ почти всюду на множестве нулей якобиана* $\det Dg_U(y)$. *Более того, $f((\Sigma \cup Z) \cap U) \subset \{y \in U\colon Dg_U(y) = 0\}$, в частности, $f(B_f \cap U) \subset \{y \in U\colon Dg_U(y) = 0\}$.*

Замечание 2. Отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением в силу конечности искажения имеет конечное коискажение, и поэтому согласно п. 3 определения 1 и предложению 2 сохраняет ориентацию.

Также нам потребуется следующее

Предложение 3 [20, следствие 4]**.** *Пусть гомеоморфизм $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ областей пространства $\mathbb{R}^n$ принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $n-1 \leqslant q \leqslant \infty$, и имеет конечное коискажение:* $\operatorname{adj} D\varphi = 0$ *почти всюду на множестве $Z = \{x \in \Omega\colon J(x,\varphi) = 0\}$. Тогда обратный гомеоморфизм φ^{-1} принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega')$ и имеет конечное искажение: $D\varphi^{-1}(y) = 0$ почти всюду на множестве $Z' = \{y \in \Omega'\colon J(y,\varphi^{-1}) = 0\}$.*

Для того чтобы доказать лемму 1, мы сначала устанавливаем следующие леммы 2 и 3.

Лемма 2. *Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Тогда отображение g_U, определенное равенством* (1), *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}^{p'}(V)$, *где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$.*

Перед тем как сформулировать лемму 3, фиксируем область $D \Subset \Omega$. Удалим из нее множество точек ветвления. Тогда для всякого $x \in D \setminus B_f$ найдется число $r(x) > 0$ такое, что открытый шар $B(x,r(x)) \subset D \setminus B_f$ и f инъективно на $B(x,r(x))$. В силу теоремы Безиковича в семействе $\{B(x,r(x))\colon x \in D \setminus B_f\}$ найдется счетный набор шаров $\{B_j\}$ таких, что

$$D \setminus B_f \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j, \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \chi_{B_j}(x) \leqslant C(n),$$

где последнее неравенство выполняется для любой точки $x \in D \setminus B_f$, а постоянная $C(n)$ зависит только от размерности пространства.

Согласно предложению 3 обратные отображения $h_j = (f|_{B_j})^{-1}\colon f(B_j) \to B_j$ принадлежат классу Соболева $W^1_1(f(B_j))$ и имеют конечное искажение. Через A_j обозначим борелевское множество точек $y \in f(B_j)$, в которых определена матрица Якоби Dh_j. Поскольку $h_j \in W^1_1$ принадлежит классу Соболева, $m_n(f(B_j) \setminus A_j) = 0$. Положив $Dh_j(y) = 0$ в точках $y \in f(B_j) \setminus A_j$, получим борелевскую функцию $|Dh_j|\colon f(B_j) \to \mathbb{R}$. Определим борелевскую функцию $\rho_0 = \sup_{j \in \mathbb{N}} |Dh_j| \chi_{f(B_j)}$.

Положим
$$B_f^k = \{x \in D\colon i(x,f) = k\}, \quad k \geqslant 2.$$
Каждая точка $x \in B_f^k$ обладает нормальной окрестностью $U \subset D$. Покроем множество B_f^k такими нормальными окрестностями U_{ki}, $i \in \mathbb{N}$, и обозначим через g_{ki} отображения $g_{U_{ki}}$, определенные формулой (1). Через G_{ki} обозначим борелевское множество точек $y \in f(U_{ki})$, в которых определена матрица Якоби Dg_{ki}. Поскольку отображение g_{ki} соболевское, $m_n(f(U_{ki}) \setminus G_{ki}) = 0$. Положив $Dg_{ki}(y) = 0$ в точках $y \in f(U_{ki}) \setminus G_{ki}$, получим борелевские функции $|Dg_{ki}|\colon f(U_{ki}) \to \mathbb{R}$. Определим борелевские функции $\eta_{ki} = |Dg_{ki}|\chi_{f(U_{ki})}$. Введем также борелевское множество
$$F = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (f(B_j) \setminus A_j) \cup \bigcup_{\substack{k\geqslant 2\\ i\in\mathbb{N}}} (f(U_{ki}) \setminus G_{ki}).$$
Легко видеть, что $m_n(F) = 0$.

Лемма 3 (ср. с [10, II.7.2]). *Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Через Γ_0 обозначим семейство замкнутых кривых α в области D таких, что либо кривая $f\circ\alpha$ неспрямляема, либо $f\circ\alpha$ спрямляема и по крайней мере одно из следующих условий неверно:*

1) $\int_{f\circ\alpha} \chi_F \, ds = 0$;

2) $\int_{f\circ\alpha} \rho_0 \, ds < \infty$;

3) *если β — замкнутая подкривая кривой α и $|\beta| \subset B_j$, то h_j абсолютно непрерывно на $f\circ\beta$;*

4) *если β — замкнутая подкривая кривой α и $|\beta| \subset U_{ki}$, то g_{ki} абсолютно непрерывно на $f\circ\beta$;*

5) *если β — замкнутая подкривая кривой α и $|\beta| \subset U_{ki}$, то $\int_{f\circ\beta} \eta_{ki} \, ds < \infty$.*

Тогда $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_0) = 0$, где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$.

4. Модульные неравенства

Сформулируем аналог неравенства Полецкого (ср. с [5, теорема 1]).

Теорема 1. *Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Если Γ — семейство кривых в области Ω, то справедливо неравенство*
$$(\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma))^{1/p'} \leqslant K_{p,q}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1} (\operatorname{mod}_{q'}^{\omega} \Gamma)^{1/q'},$$
где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$, $q' = \frac{q}{q-(n-1)}$.

Неравенство Полецкого имеет обобщение, известное в литературе как неравенство Вяйсяля [6, 3.1]. Сформулируем его аналог.

Теорема 2. *Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Пусть Γ — семейство кривых в Ω, Γ' — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$, и m — положительное целое число. Предположим, что выполняется следующее условие: для* *каждой кривой $\beta\colon I \to \mathbb{R}^n$ в Γ' существуют кривые $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ в Γ такие, что для всех $x \in \Omega$ и $t \in I$ равенство $\alpha_j(t) = x$ справедливо не более чем для $i(x, f)$ значений индекса j. Тогда*

$$(\mathrm{mod}_{p'} \Gamma')^{1/p'} \leqslant \frac{K^{\theta,1}_{p,q}(f;\Omega)^{n-1}}{m^{1/p'}} (\mathrm{mod}^{\omega}_{q'} \Gamma)^{1/q'},$$

где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$, $q' = \frac{q}{q-(n-1)}$.

Из теоремы 2 выводим (ср. с [5, теорема 2])

Следствие 1. *Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p, q)-искажением, $n - 1 < q \leqslant p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Если D — нормальная область для f, Γ' — семейство кривых в $f(D)$, Γ — семейство кривых α в D такое, что $f \circ \alpha \in \Gamma'$, то*

$$(\mathrm{mod}_{p'} \Gamma')^{1/p'} \leqslant \frac{K^{\theta,1}_{p,q}(f;\Omega)^{n-1}}{N(f,D)^{1/p'}} (\mathrm{mod}^{\omega}_{q'} \Gamma)^{1/q'}.$$

Литература

1. *Ahlfors L. and Beurling A.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math.—1950.—Vol. 83.—P. 101–129.
2. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math.—1957.—Vol. 98.—P. 171–219.
3. *Shabat B. V.* The modulus method in space // Dokl. Akad. Nauk SSSR.—1960.—Vol. 130.—P. 1210–1213; English transl.: Soviet Math. Dokl.—1960.—Vol. 1.—P. 165–168.
4. *Reshetnyak Yu. G.* Space Mappings with Bounded Distortion.—Providence (R I): American Math. Soc., 1989.—(Translation of Math. Monogr.; Vol. 73).
5. *Poletskiĭ E. A.* The modulus method for nonhomeomorphic quasiconformal mappings // Mat. Sb.—1970.—Vol. 83 (125).—P. 261–272; English transl.: Math. USSR Sb.—1970.—Vol. 12.
6. *Väisälä J.* Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I.—1972.—Vol. 509.—P. 1–14.
7. *Martio O., Rickman S. and Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sc. Fenn. Ser. A I.—1969.—Vol. 448.—P. 5–40.
8. *Martio O.* A capacity inequality for quasiregular mappings // Ann. Sc. Fenn. Ser. A I.—1970.—Vol. 474.—P. 1–18.
9. *Poletskiĭ E. A.* On the removal of singularities of quasiconformal mappings // Mat. Sb.—1973.—Vol. 92 (134).—P. 242–256; English transl.: Math. USSR Sb.—1973.—Vol. 21.
10. *Rickman S.* Quasiregular Mappings.—Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1993.
11. *Heinonen J. and Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Math.—1998.—Vol. 181.—P. 1–41.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory.—N. Y.: Springer, 2009.
13. *Troyanov M. and Vodop'yanov S. K.* Liouville type theorems for mappings with bounded (co)-distortion // Ann. Inst. Fourier.—2002.—Vol. 52, № 6.—P. 1753–1784.
14. *Vodop'yanov S. K. and Ukhlov A.* Mappings with bounded (P, Q)-distortion on Carnot groups // Bull. Sci. Math.—2010.—Vol. 134, № 6.—P. 605–634.
15. *Koskela P. and Onninen J.* Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities // J. Reine Angew. Math.—2006.—Vol. 599.—P. 1–26.
16. *Salimov R. and Sevost'yanov E.* The Poletskii and Väisälä inequalities for the mappings with (p, q)-distortion // Complex Variables and Elliptic Equations: An International J.—2014.—Vol. 59, № 2.—P. 217–231.
17. *Sevost'yanov E.* About one modulus inequality of the Väisälä type.—2013.—URL: http://arxiv.org/abs/1204.3810v4.—(Preprint).
18. *Baykin A. N. and Vodop'yanov S. K.* Capacity estimates, Liouville's theorem, and singularity removal for mappings with bounded (p, q)-distortion // Siberian Math. J.—2015.—Vol. 56, № 2.—P. 237–261.

19. *Vodop'yanov S. K.* On the regularity of the Poletskii function under weak analytic assumptions on the given mapping // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2014.—Vol. 455, № 2.—P. 130–134; English transl.: Dokl. Math.—2014.—Vol. 89, № 2.—P. 157–161.
20. *Vodop'yanov S. K.* On regularity of mappings inverse to Sobolev mappings // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2008.—Vol. 423, № 5.—P. 592–596; English transl.: Dokl. Math.—2008.—Vol. 78, № 3.—P. 891–895.
21. *Vodop'yanov S. K.*, Mappings of finite distortion and Sobolev classes of functions // Dokl. Ross. Akad. Nauk.—2011.—Vol. 440, № 3.—P. 301–305; English transl.: Dokl. Math.—2011.—Vol. 84, № 2.—P. 640–644.
22. *Vodop'yanov S. K.* Regularity of mappings inverse to Sobolev mappings // Sb.: Mathematics.—2012.—Vol. 203, № 10.—P. 1383–1410.
23. *Ponomarev S. P.* On the N-property of homeomorphisms of the class W_p^1 // Sibirsk. Mat. Zh.—1987.—Vol. 28, № 2.—P. 140–148.
24. *Tryamkin M. V.* Modulus inequalities for mappings with weighted bounded (p,q)-distortion // Siberian Math. J.—2015.—Vol. 56, № 6.—(To appear).
25. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings.—Berlin: Springer-Verlag, 1971.

Статья поступила 28 августа 2015 г.

Трямкин Максим Владимирович
Новосибирский государственный университет,
ассистент кафедры высшей мат-ки физического факультета
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: `maxtryamkin@yandex.ru`

ESTIMATES OF MODULI OF CURVE FAMILIES FOR MAPPINGS WITH WEIGHTED BOUNDED (p,q)-DISTORTION

Tryamkin M. V.

We state the analogs of Poletskiĭ's and Väisälä's inequalities for mappings with $(\theta,1)$-weighted bounded (p,q)-distortion without the additional assumption that the mappings enjoy Lusin's $\mathscr{N}$-property.

Key words: mapping with weighted bounded (p,q)-distortion, modulus of a curve family, Poletskiĭ's function.