*Владикавказский математический журнал*
*2015, Том 17, Выпуск 3, С. 53–55*

*УДК* **517.9**

# ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ В ПРОСТРАНСТВАХ РОСТКОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**С. Н. Мелихов**

*К 70-летию*
*Сёмена Самсоновича Кутателадзе*

В работе доказано, что любой абсолютно сходящийся ряд в пространстве ростков всех аналитических на произвольном множестве $M \subset \mathbb{C}^N$ функций, наделенном топологией проективного предела, сходится абсолютно в пространстве Фреше всех функций, аналитических в некоторой открытой окрестности множества $M$. Это позволяет, в частности, освободиться от предположений о росте показателей рядов экспонент, делавшихся в некоторых утверждениях ранее.

**Ключевые слова:** пространство ростков аналитических функций, абсолютно сходящиеся ряды, выпуклое локально замкнутое множество.

Для $\mu, z \in \mathbb{C}^N$ положим

$$\langle \mu, z\rangle := \sum_{j=1}^{N} \mu_j z_j, \quad e_\mu(z) := \exp\langle \mu, z\rangle, \quad |\mu| := \left(\sum_{j=1}^{N} |\mu_j|^2\right)^{1/2}.$$

В работе [2] были исследованы абсолютно представляющие системы экспонент $\left(e_{\lambda_k}\right)_{k\in M}$ ($M$ — бесконечное подмножество $\mathbb{N}^N$) в пространстве $A(Q)$ ростков всех функций, аналитических на выпуклом локально замкнутом множестве $Q$ в $\mathbb{C}^N$. Некоторые утверждения в [2] были установлены при дополнительном предположении

$$\lim_{|k|\to\infty} \frac{\log|k|}{|\lambda_k|} = 0. \tag{1}$$

В этой статье доказывается одно свойство абсолютно сходящихся рядов в пространстве ростков аналитических функций (теорема 1), которое позволяет, в частности, от условия (1) освободиться.

Приведем некоторые сведения о пространствах ростков аналитических функций [4]. Если $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ открыто, то $A(\Omega)$ — пространство всех аналитических в $\Omega$ функций с топологией равномерной сходимости на семействе всех компактных подмножеств $\Omega$. Если $K$ — компакт в $\mathbb{C}^N$, то $A(K)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на $K$, т. е. в некоторой открытой окрестности $K$. В этом случае $A(K)$ наделяется топологией индуктивного предела пространств $A(\Omega)$, где $\Omega$ пробегает семейство всех открытых окрестностей $K$. Пусть теперь $M$ — произвольное подмножество $\mathbb{C}^N$. Через $A(M)$ обозначим пространство ростков всех функций, аналитических на $M$, т. е. в некоторой открытой окрестности $M$. В общем случае в $A(M)$ можно вводить две естественные топологии. Топология pr в $A(M)$ — топология проективного предела пространств $A(K)$, где $K$ пробегает семейство всех компактных подмножеств $M$. Топология in в $A(M)$ — топология индуктивного предела пространств $A(\Omega)$, где $\Omega$ пробегает семейство всех открытых окрестностей $M$. Топология in всегда не слабее топологии pr. Согласно [4, доказательство утверждения 1.2] всякое ограниченное в $(A(M), \mathrm{pr})$ множество содержится и ограничено в $A(\Omega)$ для некоторой открытой окрестности $\Omega$ множества $M$. Отсюда, в частности, следует, что ограниченные в $(A(M), \mathrm{pr})$ и в $(A(M), \mathrm{in})$ множества — одни и те же. Оказывается, аналогичный факт имеет место и для абсолютно сходящихся рядов.

Для множества $S \subseteq \mathbb{C}^N$, функции $f : S \to \mathbb{C}$ положим $p_S(f) := \sup_{z\in S}|f(z)|$. Далее, $M$ — подмножество $\mathbb{C}^N$.

**Теорема 1.** *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно в $(A(M), \mathrm{pr})$. Тогда существует открытая окрестность $\Omega$ множества $M$ такая, что все функции $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, аналитически продолжаются в $\Omega$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно в $A(\Omega)$.*

$\lhd$ Множество $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в $(A(M), \mathrm{pr})$. По доказательству предложения 1.2 (см. [4]) существует открытая окрестность $\omega$ множества $M$ такая, что каждая функция $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, (однозначно) аналитически продолжается в $\omega$. Пусть $K$ — компакт в $M$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно в пространстве $A(K)$ и $(LB)$-пространство $A(K)$ регулярно (см., например, [1]), то существует открытая окрестность $\Omega_K \subset \omega$ множества $K$ такая, что $f_n \in A(\Omega_K)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\sum_{n=1}^{\infty} p_{\Omega_K}(f_n) < +\infty$. Пусть $\Omega := \bigcup_K \Omega_K$ ($K$ пробегает семейство всех компактных подмножеств $\Omega$). Тогда $\Omega$ — открытая окрестность $M$, в которую аналитически продолжаются все функции $f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Возьмем компакт $R$ в $\Omega$. Найдется конечное семейство компактов $K_j$, $1 \leqslant j \leqslant J$, в $M$, для которых $R \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} \Omega_{K_j}$. Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_R(f_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \max_{1\leqslant j\leqslant J} p_{\Omega_{K_j}}(f_n) \leqslant \sum_{j=1}^{J} \left( \sum_{n=1}^{\infty} p_{\Omega_{K_j}}(f_n) \right) < +\infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно в $A(\Omega)$. $\rhd$

**Следствие 2.** *Абсолютно сходящиеся ряды в $(A(M), \mathrm{pr})$ и в $(A(M), \mathrm{in})$ — одни и те же.*

Из теоремы 1 вытекает, что замечание 7 (б), теорема 8, следствия 9 и 10, теорема 14 статьи [2] справедливы без предположения (1). В частности, имеют место следующие утверждения. В них $Q$ — выпуклое локально замкнутое множество в $\mathbb{C}^N$, т. е. выпуклое множество, обладающее фундаментальной последовательностью компактных подмножеств (см. [2, § 1]).

**Следствие 3.** *Пусть $Q$ обладает базисом окрестностей, состоящим из областей голоморфности. Если в $(A(Q), \mathrm{pr})$ существует абсолютно представляющая система $\left(e_{\mu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, то пересечение $Q$ с любой опорной гиперплоскостью к $\overline{Q}$ компактно.*

$\lhd$ Возьмем $f \in A(Q)$. Существует последовательность $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_{\mu_n}$, и последний ряд абсолютно сходится в $(A(Q), \mathrm{pr})$ (к $f$). По теореме 1 найдется открытая окрестность $\Omega$ множества $Q$, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_{\mu_n}$ сходится абсолютно в $A(\Omega)$. Тогда он сходится абсолютно в $A(\operatorname{conv}\Omega)$ (см. доказательство теоремы 8 в [2]); $\operatorname{conv}\Omega$ обозначает выпуклую оболочку $\Omega$. Поэтому $f$ аналитически продолжается в $\operatorname{conv}\Omega$. Следовательно, $Q$ обладает базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей. Значит [2, лемма 3], пересечение $Q$ с любой опорной гиперплоскостью к $\overline{Q}$ компактно. $\rhd$

Замечание 4. $Q$ обладает базисом окрестностей, состоящим из областей голоморфности, например, если 1) $Q \subseteq \mathbb{C}$; 2) пересечение $Q$ с любой комплексной опорной гиперплоскостью к $\overline{Q}$ компактно; 3) $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ [3, замечание 3.12].

**Следствие 5.** *Пусть $Q$ обладает базисом окрестностей, состоящим из областей голоморфности, и существует опорная гиперплоскость к $\overline{Q}$, пересечение которой с $Q$ не является компактным. Тогда в $A(Q)$ не существует ни одной абсолютно представляющей системы $\left(e_{\mu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. В частности, это так, если $Q \subset \mathbb{R}^N$ и $Q$ некомпактно.*

## Литература


1. *Макаров Б. М.* Об индуктивных пределах нормированных пространств // Вестник ЛГУ.— 1965.— № 13, вып. 3.—С. 50–58.
2. *Мелихов С. Н., Момм З.* О свойстве внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент на выпуклых локально замкнутых множествах // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 2.— С. 36–45.
3. *Bonet J., Meise R., Melikhov S. N.* The dual of the space of holomorphic functions on locally closed convex sets // Publ. Mat.—2005.—Vol. 49.—P. 487–509.
4. *Martineau A.* Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes // Math. Annal.—1966.—Vol. 163.— P. 62–88.


*Статья поступила 15 мая 2015 г.*

Мелихов Сергей Николаевич
Южный федеральный университет,
*профессор кафедры алгебры и дискретной математики*,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт,
*ведущий научный сотрудник отдела мат. анализа*
РОССИЯ, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: melih@math.rsu.ru

## A REMARK ON ABSOLUTELY CONVERGENT SERIES IN SPACES OF GERMS OF ANALYTIC FUNCTIONS

Melikhov S. N.

It is proved that each absolutely convergent series in the space of germs of all analytic functions on a some set $M \subset \mathbb{C}^N$ endowed with the projective topology converges absolutely in the Fréchet space of analytic functions on an open neighborhood of $M$. In particular, this allows us to remove the assumptions about the growth of exponents of exponential series, posed in some previous statements.

**Key words:** space of germs of analytic functions, absolutely convergent series, convex locally closed set.