Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 64–77

УДК **517.5**

О КОНЕЧНОЙ ЛИПШИЦЕВОСТИ КЛАССОВ ОРЛИЧА — СОБОЛЕВА

Р. Р. Салимов

Найдено достаточное условие конечной липшицевости гомеоморфизмов класса Орлича — Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ при наличии условия типа Кальдерона на φ.

Ключевые слова: p-модули семейств кривых и поверхностей, p-ёмкость конденсатора, отображения с конечным искажением, классы Соболева и Орлича — Соболева, локальная и конечная липшицевость.

1. Введение

Напомним некоторые определения. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \geqslant 1 \tag{1.1}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \geqslant 1$. Тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x). \tag{1.2}$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $n-1<p<n$ и

$$M_p(f\Gamma) \leqslant K\, M_p(\Gamma) \tag{1.3}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D. При предположении, что f в (1.3) является гомеоморфизмом, Герингом было установлено, что отображение f является *локально липшицевым*, другими словами, для всех $x_0 \in D$ справедлива оценка

$$\limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant K^{\frac{1}{n-p}}, \tag{1.4}$$

см., например, теорему 2 в [1].

Напомним, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot J_f(x) \tag{1.5}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x) \geqslant 1$, где $f'(x)$ якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ — ее операторная норма: $\|f'(x)\| = \sup_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$ и $J_f(x) = \det f'(x)$ — якобиан отображения f.

Пусть $p \in (1, \infty)$. В дальнейшем, полагаем

$$K_p(x,f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^p}{J(x,f)}, & \text{если } J(x,f) \neq 0; \\ 1, & \text{если } f'(x) = 0; \\ \infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{1.6}$$

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [2], см. также [3].

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом L^φ пространство всех функций $f : D \to \mathbb{R}$, таких, что

$$\int\limits_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dm(x) < \infty \tag{1.7}$$

при некотором $\lambda > 0$, см., например, [4]. Здесь m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пространство L^φ называется *пространством Орлича*.

Классом Орлича — Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщенными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D. Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D, мы пишем $f \in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc} \subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Как обычно, мы пишем $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geqslant 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т. е., если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D, см. [5, раздел 1.1.3.].

Далее, если f — локально интегрируемая вектор–функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, m$, и

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right) dm(x) < \infty, \tag{1.8}$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы снова пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0) = 0$.

Отметим, что классы Орлича — Соболева сейчас, как и ранее, изучаются в самых различных аспектах многими авторами, см., например, [6–22].

2. Свойства классов Орлича — Соболева

Следующие свойства классов Орлича — Соболева можно найти в работе [14].

Теорема 2.1. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, где $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — неубывающая функция,* *такая что для некоторого $t_* \in (0, \infty)$*

$$\int_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{2.1}$$

Тогда отображение f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω.

Замечание 2.1. В частности, заключение теоремы 2.1 имеет место, если $f \in W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ при некотором $\alpha > n-1$. Последнее утверждение — результат Вяйсяля, см. [23, лемму 3]. Теорема 2.1 является также распространением в пространство $\mathbb{R}$ хорошо известной теоремы Меньшова — Геринга — Лехто на плоскости, см., например, [24–26].

Теорема 2.2. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (2.1). Тогда отображение f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω.*

Теорема 2.3. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию (2.1). Тогда любое непрерывное отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ обладает (N)-свойством, более того, локально абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$-мерной хаусдорфовой меры на почти всех гиперплоскостях $\mathscr{P}$, параллельных произвольной фиксированной гиперплоскости $\mathscr{P}_0$. Кроме того, на почти всех таких $\mathscr{P}$, $H^{n-1}(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на $E \subset \mathscr{P}$.*

Заметим, что, если условие вида (2.1) имеет место для некоторой неубывающей функции φ, то функция $\varphi_c(t) = \varphi(ct)$ при $c > 0$ также удовлетворяет соотношению (2.1). Кроме того, хаусдорфовы меры являются квазиинвариантными при квазиизометриях.

Следствие 2.1. *При условии (2.1) любое непрерывное отображение $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ обладает (N)-свойством относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, более того, локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах S с центром в заданной предписанной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, на почти всех таких сферах S выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $|\nabla f| = 0$ на множестве $E \subset S$.*

3. Модули семейств поверхностей

Следуя [27, раздел 9.2], далее *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ называется произвольное непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, где ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ и $k = 1, \ldots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S, y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card} \bigl\{x \in \omega : \ S(x) = y\bigr\}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k, см. [27, раздел 9.2].

Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ ее *интеграл над поверхностью* S определяется равенством

$$\int_S \rho \, d\mathscr{A} := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) \, N(S, y) \, dH^k y.$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k \, d\mathscr{A} \geqslant 1 \tag{3.1}$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Пусть $p \in (1, \infty)$ — заданное фиксированное число. Тогда *p-модулем* семейства Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) \, dm(x). \tag{3.2}$$

Говорят, что свойство P имеет место для *p-почти всех* (p-п.в.) k-мерных поверхностей S семейства Γ, если подсемейство всех поверхностей семейства Γ, для которых свойство P нарушается, имеет p-модуль нуль.

4. О емкости конденсатора

Следуя работе [28], пару $\mathscr{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. Конденсатор $\mathscr{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $G = A \setminus C$ — кольцо, т. е., если G — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus G$ состоит в точности из двух компонент. Говорят также, что конденсатор $\mathscr{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathscr{E} = (A, C)$ — конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в fD. Далее $f\mathscr{E} = (fA, fC)$.

Функция $u : A \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на прямой*, имеющей непустое пересечение с A, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в A. Функция $u : A \to \mathbb{R}$ принадлежит классу ACL (*абсолютно непрерывна на почти всех прямых*), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(\mathscr{E}) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL. Также обозначим

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F; G)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в G, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

При $p \geqslant 1$ величину

$$\operatorname{cap_p} \mathscr{E} = \operatorname{cap_p}(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathscr{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dm(x) \tag{4.2}$$

называют *p-емкостью* конденсатора $\mathscr{E}$. Емкости в контексте теории отображений хорошо представлены в монографии [29].

В дальнейшем при $p > 1$ мы будем использовать равенство

$$\operatorname{cap_p} \mathscr{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \tag{4.3}$$

см. [30–32].

Известно, что при $1 \leqslant p < n$

$$\mathrm{cap_p}\,\mathscr{E} \geqslant n\nu_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}}\,, \tag{4.4}$$

где ν_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, см., например, неравенство (8.9) в [33].

Если множество C связно, то при $n-1 < p \leqslant n$ имеет место оценка

$$(\mathrm{cap_p}\,\mathscr{E})^{n-1} \geqslant \gamma \frac{d(C)^p}{m(A)^{1-n+p}}, \tag{4.5}$$

где $d(C)$ — диаметр множества C, γ — положительная константа, зависящая только от размерности n и p, см. предложение 6 в [34].

5. Нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля

Говорят, см. [27, раздел 9.2], что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ является *обобщенно p-допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \mathrm{ext}_p \,\mathrm{adm}\,\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^{n-1}(x)\, d\mathscr{A} \geqslant 1 \tag{5.1}$$

для p-почти всех $S \in \Gamma$.

В работе [35, раздел 13], Ф. Геринг определил K-квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевой области не более чем в K раз. Следующее понятие мотивировано кольцевым определением Геринга.

Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q : D \to (0,\infty)$ измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке x_0*, если

$$M_p\left(f\Sigma_\varepsilon\right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext_p}\,\mathrm{adm}\,\Sigma_\varepsilon} \int\limits_R \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{5.2}$$

для каждого кольца

$$R = R(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}\,, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in (0, d_0),$$

где $d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, а Σ_ε обозначает семейство всех сфер

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}\,, \quad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0). \tag{5.3}$$

Развиваемая в работе теория нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля применима, в частности, к отображениям квазиконформным в среднем, см. [34, 36], и к так называемым (p,q)-квазиконформным отображениям, см. [37], которые использовались при изучении проблемы Ю. Г. Решетняка о суперпозиции функций пространств Соболева, см. например, [37–40]. В работах [41–43] приводятся приложения нижних Q-гомеоморфизмов к исследованию локального и граничного поведения гомеоморфных решений с обобщенными производными и к задаче Дирихле для уравнений Бельтрами с вырождением.

Исторически нижним Q-гомеоморфизмам относительно p-модуля предшествовали Q-гомеоморфизмы, которые исследовались в работах [44–47]. Кроме того, Q-отображения допускающие точки ветвления, изучались в работах [48–53].

Ниже приведен критерий нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля при $p > n-1$. Впервые критерий был доказан при $p = n$ в работе [54, теорема 2.1], см. также монографию [27, теорема 9.2].

Лемма 5.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, и пусть $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является нижним Q-гомеоморфизмом в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n-1$ тогда и только тогда, когда*

$$M_p(f\Sigma_\varepsilon) \geqslant \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \quad (\forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in (0,d_0)), \tag{5.4}$$

где $d_0 = \operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, Σ_ε — семейство всех сфер $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon,\varepsilon_0)$, и

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathscr{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}. \tag{5.5}$$

Инфимум в (5.2) достигается только для функции

$$\rho_0(x) = \left(\frac{Q(x)}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(|x-x_0|)}\right)^{\frac{1}{p-n+1}}. \tag{5.6}$$

Прежде чем доказывать основную лемму о нижних Q-гомеоморфизмах относительно p-модуля, приведем вспомогательную лемму 9.2 из монографии [27].

Лемма 5.2. *Пусть (X,μ) — измеримое пространство с конечной мерой μ, $q \in (1,\infty)$, и пусть $\varphi : X \to (0,\infty)$ — измеримая функция. Положим*

$$I(\varphi,q) = \inf_\alpha \int\limits_X \varphi\, \alpha^q\, d\mu, \tag{5.7}$$

где инфимум берется по всем измеримым функциям $\alpha : X \to [0,\infty]$ таким, что

$$\int\limits_X \alpha\, d\mu = 1. \tag{5.8}$$

Тогда

$$I(\varphi,q) = \left[\int\limits_X \varphi^{-\lambda}\, d\mu\right]^{-\frac{1}{\lambda}}, \tag{5.9}$$

где

$$\lambda = \frac{q'}{q}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \tag{5.10}$$

т. е. $\lambda = 1/(q-1) \in (0,\infty)$. *Кроме того, инфимум в (5.7) достигается только для функции*

$$\alpha_0 = C \cdot \varphi^{-\lambda}, \tag{5.11}$$

где

$$C = \left(\int\limits_X \varphi^{-\lambda}\, d\mu \right)^{-1}. \tag{5.12}$$

$\lhd$ Доказательство леммы 5.1. Заметим, что для каждой $\rho \in \mathrm{ext_p\,adm}\,\Sigma_\varepsilon$ функция

$$A_\rho(r) := \int\limits_{S(x_0,r)} \rho^{n-1}(x)\, d\mathscr{A} \neq 0 \quad \text{п. в.}$$

является измеримой по параметру r, например, по теореме Фубини. Таким образом, мы можем требовать выполнения равенства $A_\rho(r) \equiv 1$ п. в. вместо условия допустимости (3.1) при $k = n-1$, и

$$\inf_{\rho \in \mathrm{ext_p\,adm}\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{R_\varepsilon} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) = \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \left(\inf_{\alpha \in I(r)} \int\limits_{S(x_0,r)} \frac{\alpha^q(x)}{Q(x)}\, d\mathscr{A} \right) dr,$$

где $q = p/(n-1) > 1$, а через $I(r)$ обозначено множество всех измеримых функций $\alpha(x)$ на поверхности $S(x_0,r)$ таких, что

$$\int\limits_{S(x_0,r)} \alpha(x)\, d\mathscr{A} = 1.$$

Итак, лемма 5.1 следует из леммы 5.2 при $X = S(x_0,r)$, μ — $(n-1)$-мерная площадь на $S(x_0,r)$, $\varphi = \frac{1}{Q}\big|_{S(x_0,r)}$, и $q = p/(n-1) > 1$. $\rhd$

Таким образом, неравенство (5.4) является точным для нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля.

Лемма 5.3. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, и пусть $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая функция и $f : D \to \mathbb{R}^n$ — нижний Q-гомеоморфизмом в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n-1$. Тогда имеет место оценка*

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(\Delta(fS_1, fS_2, fD)\right) \leqslant \left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|\, Q \|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}, \tag{5.13}$$

где $S_j = S(x_0, r_j)$, $j = 1,2$.

$\lhd$ Действительно, пусть $0 < r_1 < r_2 < d(x_0, \partial D)$ и $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1,2$. Согласно неравенствам Хессе и Цимера (см., например, [31] и [55]),

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(f\left(\Delta(S_1, S_2, D)\right)\right) \leqslant \frac{1}{M_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}\left(f\left(\Sigma\right)\right)}, \tag{5.14}$$

поскольку $f(\Sigma) \subset \Sigma\left(f(S_1), f(S_2), f(D)\right)$, где Σ обозначает совокупность всех сфер с центром в точке x_0, расположенных между сферами S_1 и S_2, а $\Sigma\left(f(S_1), f(S_2), f(D)\right)$ состоит из всех $(n-1)$-мерных поверхностей в $f(D)$, отделяющих $f(S_1)$ и $f(S_2)$. Из соотношения (5.14) по лемме 5.1 вытекает заключение леммы 5.3. $\rhd$

6. Взаимосвязь нижних Q-гомеоморфизмов с классами Орлича — Соболева

Напомним, что отображение $g : X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *липшицевым,* если $\mathrm{dist}\,(g(x_1), g(x_2)) \leqslant M \cdot \mathrm{dist}\,(x_1, x_2)$ для некоторой постоянной $M < \infty$ и всех x_1, $x_2 \in X$. Говорят, что отображение $g : X \to Y$ *билипшицево,* если, оно, во-первых, липшицево, во-вторых, $M^* \cdot \mathrm{dist}\,(x_1, x_2) \leqslant \mathrm{dist}\,(g(x_1), g(x_2))$ для некоторой постоянной $M^* > 0$ и всех x_1, $x_2 \in X$.

Следующее утверждение является ключевым для дальнейшего исследования.

Лемма 6.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (2.1). *Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ является нижним $K_p(x, f)$-гомеоморфизмом относительно p-модуля с $p > n - 1$.*

$\lhd$ Обозначим через B (борелево) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал и $J_f(x) = \det f'(x) \neq 0$. Заметим, что множество B представляет собой не более чем счетное объединение борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., например, в [56, лемма 3.2.2]. Без ограничения общности, можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также через B_* оставшееся множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако, $f'(x) = 0$.

По теореме 2.1 множество $B_0 := D \setminus (B \bigcup B_*)$ имеет меру Лебега нуль. Следовательно, по теореме 9.1 в [27] имеем, что $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для p-почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в произвольной точке $x_0 \in D$, где «p-почти все» определяется в смысле p-модуля семейства поверхностей. Тогда, в силу леммы 9.1 в [27], $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$ и по следствию 2.1 получаем, что $H^{n-1}(f(B_0) \cap S^*_r) = 0$ и $H^{n-1}(f(B_*) \cap S^*_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$, где $S^*_r = f(S_r)$.

Заметим, что также $H^{n-1}(f(B_0) \cap S^*_r) = 0$ и $H^{n-1}(f(B_*) \cap S^*_r) = 0$ для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ в смысле p-модуля семейства поверхностей. Действительно, пусть Γ_0 — подсемейство всех сфер $S_r := S(x_0, r)$, для которых либо $H^{n-1}(f(B_0) \cap S^*_r) > 0$, либо $H^{n-1}(f(B_*) \cap S^*_r) > 0$. Обозначим через R множество всех $r \in \mathbb{R}$, для которых либо $H^{n-1}(f(B_0) \cap S^*_r) > 0$, либо $H^{n-1}(f(B_*) \cap S^*_r) > 0$. В силу сказанного выше, $m_1(R) = 0$. Тогда по теореме Фубини $m(E) = 0$, где $E = \{x \in D : |x - x_0| = r \in R\}$. Функция $\rho_1 : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, определенная символом ∞ при $x \in E$ и равная нулю на оставшемся множестве обобщенно p-допустима для семейства Γ_0. Таким образом, по (9.18) в [27] $M_p(\Gamma_0) \leqslant \int_E \rho_1^p dm(x) = 0$, т. е., действительно, $M_p(\Gamma_0) = 0$.

По теореме Кирсбрауна, см. [56, теорема 2.10.43], каждое отображение f_l может быть продолжено до липшицевского отображения $\widetilde{f_l} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которое по теореме Радемахера — Степанова $\widetilde{f_l}$ дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{R}^n$, см. [56, теорема 3.1.6]. В силу единственности аппроксимативного дифференциала см. в [56, п. 3.1.2], можно считать, что при всех $x \in B_l$ выполнено равенство $\widetilde{f_l}'(x) = f'(x)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех сфер S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$. Для произвольной функции $\rho_* \in \mathrm{adm}\, f(\Gamma)$, такой что $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0, и

$$\rho(x) := \rho_*(f(x)) \|f'(x)\| \quad \text{при } x \in D \setminus B_0 = B \cup B_*.$$

Рассуждая покусочно на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, согласно [56, раздел 1.7.6], а также используя геометрический смысл величины $\|f'(x)\|$ и ее связь с якобианом отображения, см., например, соотношения (2.5) и (2.6) в [57, гл. I, § 2], имеем, что

$$\int\limits_{S_r} \rho^{n-1}\, d\mathscr{A} = \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x))\|f'(x)\|^{n-1}\, d\mathscr{A}$$

$$= \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{\|f'(x)\|^{n-1}}{\frac{d\mathscr{A}_*}{d\mathscr{A}}} \cdot \frac{d\mathscr{A}_*}{d\mathscr{A}}\, d\mathscr{A} \geqslant \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{d\mathscr{A}_*}{d\mathscr{A}}\, d\mathscr{A}$$

$$= \int\limits_{S_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathscr{A}_* \geqslant 1$$

для почти всех S_r, и, следовательно, $\rho \in \mathrm{ext_p\,adm}\,\Gamma$. Используя замену переменных на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, см., например, [56, теорема 3.2.5], ввиду счетной аддитивности интеграла, получаем также оценку

$$\int\limits_{D} \frac{\rho^p(x)}{K_p(x,f)}\, dm(x) \;\leqslant\; \int\limits_{f(D)} \rho_*^p(x)\, dm(x),$$

что и завершает доказательство. $\rhd$

Следствие 6.1. *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *класса* $W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ *при* $\alpha > n-1$ *является нижним* $K_p(x,f)$*-гомеоморфизмом с* $p > n-1$.

Заметим, что соответствующий плоский случай был изучен в работах [58], [41–44], где установлено, что любой гомеоморфизм f конечного искажения на плоскости является нижним Q-гомеоморфизмом.

6.1. Конечная липшицевость классов Орлича — Соболева. Для непрерывного отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ и $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, положим

$$L(x,f) = \limsup_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}. \tag{6.1}$$

Говорят, что отображение f является *конечно липшицевым*, если $L(x,f) < \infty$ для всех $x \in D$.

Пусть $Q : G \to [0,\infty]$ — измеримая функция. Для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначим

$$⨍\limits_{E} Q(x)\, dm(x) = \frac{1}{m(E)} \int\limits_{E} Q(x)\, dm(x).$$

Теорема 6.1. *Пусть* D *и* D' *— области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. *Предположим, что* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм с конечным искажением класса* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, *где* $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *— неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (2.1) *и, кроме того, при* $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$

$$k_p(x_0) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \left(⨍_{B(x_0,\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x) \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} < \infty. \tag{6.2}$$

Тогда

$$L(x_0,f) = \limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leqslant c_{n,p} \cdot k_p^{\frac{1}{p-n}}(x_0) < \infty, \tag{6.3}$$

где $c_{n,p}$ — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

$\lhd$ Рассмотрим сферическое кольцо $R = R(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ такое, что $R(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset D$. Тогда $\mathscr{E} = \left(B\left(x_0, \varepsilon_2\right), \overline{B\left(x_0, \varepsilon_1\right)}\right)$ — кольцевой конденсатор в D и $f\mathscr{E} = \left(fB\left(x_0, \varepsilon_2\right), \overline{fB\left(x_0, \varepsilon_1\right)}\right)$ — кольцевой конденсатор в D'.

Пусть $\Gamma^* = \Delta(fS_1, fS_2, fR)$, где $S_j = S(x_0, r_j)$, $j = 1, 2$. Тогда согласно (4.3), имеем равенство

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} f\mathscr{E} = M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(\Gamma^*\right). \tag{6.4}$$

По лемме 5.3 получаем, что

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} f\mathscr{E} \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|\, K_p(x,f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}, \tag{6.5}$$

где $\|\, K_p(x,f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, d\mathscr{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}$.

Заметим, что

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \|\, K_p(x,f)\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) \cdot \frac{dr}{\|\, K_p(x,f)\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}. \tag{6.6}$$

Применяя теорему Фубини и неравенство Гёльдера с $q = \frac{p}{p-n+1}$, $q' = \frac{p}{n-1}$, имеем

$$\left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|\, K_p(x,f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{\frac{p}{p-n+1}}} \int\limits_R [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x). \tag{6.7}$$

Комбинируя неравенства (6.7) и (6.5), получим

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} f\mathscr{E} \leqslant \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{\frac{p}{p-n+1}}} \int\limits_R [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x). \tag{6.8}$$

Далее, выбирая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$, получим

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB(x_0, 4\varepsilon), f\overline{B(x_0, 2\varepsilon)}\right) \leqslant \frac{1}{(2\varepsilon)^{\frac{p}{p-n+1}}} \int\limits_{B(x_0,4\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x). \tag{6.9}$$

С другой стороны, в силу неравенства (4.4) вытекает оценка

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB(x_0, 4\varepsilon), f\overline{B(x_0, 2\varepsilon)}\right) \geqslant c_1 \left[m(fB(x_0, 2\varepsilon))\right]^{\frac{n(p-n+1)-p}{n(p-n+1)}}, \tag{6.10}$$

где c_1 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Комбинируя (6.9) и (6.10), получаем, что

$$\frac{m(fB(x_0, 2\varepsilon))}{m(B(x_0, 2\varepsilon))} \leqslant c_2 \left[\fint_{B(x_0,4\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x)\right]^{\frac{n(p-n+1)}{n(p-n+1)-p}}, \tag{6.11}$$

где c_2 — положительная постоянная зависящая только от n и p.

Далее, выбирая в (6.8) $\varepsilon_1=\varepsilon$ и $\varepsilon_2=2\varepsilon$, получим

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\left(fB(x_0,2\varepsilon),f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^{\frac{p}{p-n+1}}}\int\limits_{B(x_0,2\varepsilon)}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,dm(x)\,. \tag{6.12}$$

С другой стороны, в силу неравенства (4.5), получаем

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\left(fB(x_0,2\varepsilon),f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right)\geqslant\left(c_3\frac{d^{\frac{p}{p-n+1}}(fB(x_0,\varepsilon))}{m^{1-n+\frac{p}{p-n+1}}(fB(x_0,2\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{6.13}$$

где c_3 — положительная константа, зависящая только от n и p.

Комбинируя (6.12) и (6.13), получаем, что

$$\frac{d(fB(x_0,\varepsilon))}{\varepsilon}\leqslant c_4\left(\frac{m(fB(x_0,2\varepsilon))}{m(B(x_0,2\varepsilon))}\right)^{i_1}\left(\fint_{B(x_0,2\varepsilon)}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,dm(x)\right)^{i_2}, \tag{6.14}$$

где

$$i_1=\frac{(1-n)(p-n+1)+p}{p},\quad i_2=\frac{(n-1)(p-n+1)}{p}$$

и c_4 — положительная константа, зависящая только от n и p.

Эта оценка вместе с (6.11) дает неравенство

$$\frac{d(fB(x_0,\varepsilon))}{\varepsilon}\leqslant c_5\left(\fint_{B(x_0,4\varepsilon)}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}dm(x)\right)^{j_1}$$
$$\times\left(\fint_{B(x_0,2\varepsilon)}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}dm(x)\right)^{j_2}, \tag{6.15}$$

где

$$j_1=\frac{n\left((1-n)(p-n+1)+p\right)(p-n+1)}{p\left(n(p-n+1)-p\right)},\quad j_2=\frac{(n-1)(p-n+1)}{p}$$

и c_5 — положительная константа, зависящая только от n и p.

Переходя к верхнему пределу при $\varepsilon\to0$, получаем

$$L(x_0,f)=\limsup_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\leqslant\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{d(fB(x_0,\varepsilon))}{\varepsilon}\leqslant c\cdot[k_p(x_0)]^{\frac{1}{p-n}},$$

где c — положительная постоянная, зависящая только от n и p. $\rhd$

Следствие 6.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant3$. Предположим, что $f:D\to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с условием* (2.1) *и, кроме того, при $p\in\left(n,n+\frac{1}{n-2}\right)$*

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\fint_{B(x_0,\varepsilon)}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,dm(x)<\infty\quad(\forall\,x_0\in D). \tag{6.16}$$

Тогда гомеоморфизм f является конечно липшицевым.

Замечание 6.5. В соответствии с леммой 10.6 в [27] конечно липшицевые отображения обладают N-свойством относительно хаусдорфовых мер и, таким образом, являются абсолютно непрерывными на кривых и поверхностях.

Построим пример гомеоморфизма с конечным искажением, не являющегося конечно липшицевым.

Пример. Предположим, что $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$. Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 3$, где

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\left(1 + (p-n)\int\limits_{|x|}^{1} \frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{1}{p-n}}$$

при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Касательная и радиальная дилатации f на сфере $|x| = r$, $r \in (0,1)$, легко вычисляются:

$$\delta_T = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\left(1 + (p-n)\int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{1}{p-n}}}{r}$$

и

$$\delta_r = \frac{\left(1 + (p-n)\int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{t^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}\right)^{-\frac{p-n+1}{p-n}}}{r^{p-n+1}\ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{t}\right)}.$$

Заметим, что $\delta_T \geqslant \delta_r$ и

$$\delta_T^{p-n+1} = \delta_r \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{r}\right).$$

Следовательно, ввиду сферической симметрии мы видим, что

$$K_p(x,f) = \frac{\delta_T^p}{\delta_T^{n-1}\delta_r} = \frac{\delta_T^{p-n+1}}{\delta_r} = \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}\left(\frac{e}{|x|}\right).$$

Очевидно, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} ⨍_{B(0,\varepsilon)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x) = \infty\,.$$

Тем не менее, как легко проверить по правилу Лопиталя, $\frac{|f(x)|}{|x|} \to \infty$ при $x \to 0$, т. е. гомеоморфизм f не является липшицевым в нуле.

Литература

1. *Gehring F. W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N. Y., 1969), Ann. of Math. Studies.—1971.—Vol. 66.—P. 175–193.
2. *Iwaniec T., Sverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc.—1993.—Vol. 118.—P. 181–188.
3. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis.—Oxford: Clarendon Press, 2001.
4. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.—Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958.
5. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева.—Ленинград: ЛГУ, 1985.—416 с.
6. *Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Об отображениях в классах Орлича — Соболева на римановых многообразиях // Укр. матем. вiсник.—2011.—Т. 8, № 3.—С. 319–342.
7. *Alberico A., Cianchi A.* Differentiability properties of Orlicz–Sobolev functions // Ark. Mat.—2005.—Vol. 43.—P. 1–28.

8. *Calderon A. P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. Math. Univ. Parma.—1951.—Vol. 2.—C. 203–213.
9. *Cianchi A.* A sharp embedding theorem for Orlicz–Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J.—1996.—Vol. 45, № 1.—P. 39–65.
10. *Donaldson T.* Nonlinear elliptic boundary-value problems in Orlicz–Sobolev spaces // J. Diff. Eq.—1971.—Vol. 10.—P. 507–528.
11. *Gossez J. P., Mustonen V.* Variational inequalities in Orlicz–Sobolev spaces // Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.—1987.—Vol. 11.—P. 379–392.
12. *Hsini M.* Existence of solutions to a semilinear elliptic system through generalized Orlicz–Sobolev spaces // J. Partial Differ. Equ.—2010.—Vol. 23, № 2.—P. 168–193.
13. *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Compactness // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.—2002.—Vol. 27, № 2.—P. 391–417.
14. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича — Соболева // Алгебра и анализ.—2013.—Т. 25, № 6.—С. 1–53.
15. *Koronel J. D.* Continuity and k-th order differentiability in Orlicz–Sobolev spaces: W^kL_A // Israel J. Math.—1976.—Vol. 24, № 2.—P. 119–138.
16. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* On functions with derivatives in a Lorentz space // Manuscripta Math.—1999.—Vol. 10.—P. 87–101.
17. *Khruslov E. Ya., Pankratov L. S.* Homogenization of the Dirichlet variational problems in Sobolev–Orlicz spaces // Operator theory and its applications (Winuipeg, MB, 1998).—Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 2000.—Vol. 25.—P. 345–366.
18. *Landes R., Mustonen V.* Pseudo-monotone mappings in Sobolev–Orlicz spaces and nonlinear boundary value problems on unbounded domains // J. Math. Anal. Appl.—1982.—Vol. 88.—P. 25–36.
19. *Lappalainen V., Lehtonen A.* Embedding of Orlicz–Sobolev spaces in Hölder spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.—1989.—Vol. 14, № 1.—P. 41–46.
20. *Onninen J.* Differentiability of monotone Sobolev functions // Real. Anal. Exchange.—2000/2001.—Vol. 26, № 2.—P. 761–772.
21. *Tuominen H.* Characterization of Orlicz–Sobolev space // Ark. Mat.—2007.—Vol. 45, № 1.—P. 123–139.
22. *Vuillermot P. A.* Hölder-regularity for the solutions of strongly nonlinear eigenvalue problems on Orlicz–Sobolev space // Houston J. Math.—1987.—Vol. 13.—P. 281–287.
23. *Väisälä J.* Two new characterizations for quasiconformality // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math.—1965.—Vol. 362.—P. 1–12.
24. *Menchoff D.* Sur les differencelles totales des fonctions univalentes // Math. Ann.—1931.—Vol. 105.—P. 75–85.
25. *Gehring F. W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.—1959.—Vol. 272.—P. 3–8.
26. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane.—N. Y.: Springer-Verlag, 1973.
27. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory.—N. Y. etc.: Springer, 2009.—367 p.—(Springer Monographs in Mathematics.)
28. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.—1969.—Vol. 448.—P. 1–40.
29. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.—Новосибирск: Наука, 1983.
30. *Gehring F. W.* Quasiconformal mappings // Complex Analysis and its Applications, Vol. 2, International Atomic Energy Agency.—Vienna, 1976.—P. 213–268.
31. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Arc. Mat.—1975.—Vol. 13.—P. 131–144.
32. *Shlyk V. A.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 6.—С. 216–221.
33. *Maz'ya V.* Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math.—2003.—Vol. 338.—P. 307–340.
34. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб.—1986.—Т. 130, № 2.—С. 185–206.
35. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc.—1962.—Vol. 103.—P. 353–393.
36. *Golberg A.* Homeomorphisms with integrally restricted moduli // Complex Analysis and Dynamical Systems IV. Part 1: Function Theory and Optimization.—Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 2011.—P. 83–98.—(Contemp. Math., 553).
37. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Матем.—2002.—№ 10.—С. 11–33.
38. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Лебега и дифферен-

цируемость квазиаддитивных функций множества // Владикавк. мат. журн.—2002.—Т. 4, № 1.—С. 11–33.
39. *Vodop'yanov S. K.* Description of composition operators of Sobolev spaces // Doklady Math.—2005.—Vol. 71, № 1.—P. 5–9.
40. *Vodop'yanov S. K.* Composition operators on Sobolev spaces // Complex Analysis and Dynamical Systems II.—2005.—P. 401–415.—(Contemp. Math., 382).
41. *Lomako T., Salimov R., Sevost'yanov E.* On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest. Math. Ser.—2010.—T. 59, № 2.—C. 263–274.
42. *Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Алгебра и анализ.—2013.—Т. 25, № 4.—С. 101–124.
43. *Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E.* On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemp. Math.—2013.—Vol. 591.—P. 211–242.
44. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 6.—С. 1361–1376.
45. *Салимов Р. Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. мат.—2008.—Т. 72, № 5.—С. 141–148.
46. *Салимов Р. Р.* Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 4.—С. 920–930.
47. *Salimov R. R.* On finitely Lipschitz space mappings // Сиб. электрон. мат. изв.—2011.—Т. 8.—P. 284–295.
48. *Салимов Р. Р.* О липшицевости одного класса отображений // Мат. заметки.—2013.—Т. 94, № 4.—С. 591–599.
49. *Салимов Р. Р.* О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля // Дальневост. мат. журн.—2014.—Т. 14, № 2.—С. 257–269.
50. *Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций // Мат. сб.—2010.—Т. 201, № 6.—С. 131–158.
51. *Севостьянов Е. А.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Изв. РАН. Сер. матем.—2010.—Т. 74, № 1.—С. 159–174.
52. *Севостьянов Е. А.* О пространственных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику // Алгебра и анализ.—2012.—Т. 24, № 1.—С. 131–156.
53. *Севостьянов Е. А.* О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. мат. журн.—2010.—Т. 51, № 5.—С. 1129–1146.
54. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вiсник.—2008.—Т. 5, № 2.—С. 157–181.
55. *Ziemer W. P.* Extremal length and p-capacity // The Michigan Math. J.—1969.—Vol. 16, № 1.—P. 43–51.
56. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры.—М.: Наука, 1987.—760 с.
57. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением.—Новосибирск: Наука, 1982.
58. *Салимов Р. Р.* Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ.—2014.—Vol. 26, № 6.—С. 143–171.

Статья поступила 23 октября 2014 г.

Салимов Руслан Радикович
Институт математики НАН Украины,
старший научный сотрудник
УКРАИНА, 01601, Киев-4, ул. Терещенковская, 3
E-mail: `salimov07@rambler.ru`, `ruslan623@yandex.ru`

ON FINITE LIPSCHITZ ORLICZ–SOBOLEV CLASSES

Salimov R. R.

It is found a sufficient condition of finite Lipschitz of homeomorphisms of the Orlicz–Sobolev class $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ under a condition of the Calderon type.

Key words: finitely Lipschitz mapping, p-modulus, p-capacity, Orlicz–Sobolev class, Orlicz space, lower Q-homeomorphism, mappings of finite distortion.