Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 3–13

УДК **517.9**

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО НЕТОЧНЫМ ГРАНИЧНЫМ ДАННЫМ

Е. В. Абрамова

В работе рассматривается задача о наилучшем (оптимальном) восстановлении решения задачи Дирихле для верхней полуплоскости по точно или приближенно известному преобразованию Фурье граничной функции. Построена серия оптимальных методов восстановления и вычислена соответствующая погрешность восстановления.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, экстремальная задача, задача Дирихле, преобразование Фурье.

Введение

Общая постановка задачи оптимального восстановления линейного функционала на некотором классе по точной информации об элементах этого класса впервые появилась в диссертации С. А. Смоляка [1], а по неточной — в работе [2]. Для линейных операторов эта тематика была развита в работах [3–8]. В задаче оптимального восстановления оптимальные методы ищутся сразу для всех функций из данного класса и в этом смысле данная задача идейно восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-х гг. прошлого века о нахождении наилучшего подпространства среди всех подпространств фиксированной размерности, приближающего данный класс функций. Заметим, что с точки зрения приложений вполне естественно считать, что мы имеем дело не с индивидуальным элементом, а лишь с представителем некоторого семейства. В данной работе решается задача о наилучшем восстановлении решения задачи Дирихле для верхней полуплоскости на прямой, параллельной оси абсцисс в метрике L_2 по неточно заданному преобразованию Фурье граничной функции, определенной на оси абсцисс.

1. Постановка задачи

Пусть r — натуральное число. Обозначим через $W_2^r(\mathbb{R})$ соболевский класс функций на прямой

$$W_2^r(\mathbb{R}) = \left\{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : f^{(r-1)}(\cdot) \in LAC(\mathbb{R}), \quad \left\| f^{(r)}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1 \right\},$$

где $LAC(\mathbb{R})$ обозначает множество функций на $\mathbb{R}$, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке.

Пусть Δ — оператор Лапласа на плоскости $\mathbb{R}^2$ и $f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$. Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0, \\ u(\cdot, 0) = f(\cdot), \end{cases} \tag{1}$$

заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхней полуплоскости, для которой $f(\cdot)$ является граничной функцией. Последнее понимается так: $u(\cdot,y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Решением этой задачи, как хорошо известно (см., например, [9]), является интеграл Пуассона

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} P(x-t,y) f(t)\, dt, \tag{2}$$

где $P(x,y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$.

Пусть $Y > 0$. Ставится задача о наилучшем восстановлении функции $u(\cdot, Y)$ — решении задачи Дирихле на прямой $y = Y$ — по следующей информации: на отрезке $[-\sigma,\sigma]$, $\sigma > 0$ известно преобразование Фурье $F[f](\cdot)$ функции $f(\cdot)$ либо точно, либо приближенно в метрике $L_2([-\sigma,\sigma])$, т. е. известна функция $g(\cdot) \in L_2([-\sigma,\sigma])$ такая, что $\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta$, где $\delta \geqslant 0$ (случай $\delta = 0$ соответствует точному знанию $F[f](\cdot)$ на $[-\sigma,\sigma]$). Для удобства будем считать, что функция $g(\cdot) = 0$ вне отрезка $[-\sigma,\sigma]$.

Задача оптимального восстановления $u(\cdot, Y)$ по указанной информации понимается следующим образом. Любое отображение $m\colon L_2([-\sigma,\sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$ называется *методом восстановления*, а величина

$$e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\\ g(\cdot)\in L_2([-\sigma,\sigma]),\\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot,Y) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

— *погрешностью метода* m.

Если $\delta = 0$, то это записывается так:

$$e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), 0, \sigma, m) = \sup_{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R})} \|u(\cdot,Y) - m(F[f](\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует метод, на котором погрешность принимает минимальное значение. Точнее говоря, нас интересует величина

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \inf_{m\colon L_2([-\sigma,\sigma])\to L_2(\mathbb{R})} e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, \widehat{m}).$$

Такие методы мы называем *оптимальными методами восстановления задачи Дирихле.*

Нашей целью является построение оптимальных методов восстановления и нахождение соответствующей погрешности оптимального восстановления.

2. Формулировка основного результата

Теорема. 1) *Пусть $\delta > 0$. Тогда погрешность оптимального восстановления задачи Дирихле имеет вид*

$$E(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \sqrt{\delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}, \quad \delta_1^2 = \delta^2/2\pi.$$

Для любой измеримой функции $a_1(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ такой, что

$$\left|a_1(\xi) - \frac{1}{1+e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}}\right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}}{(1+e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2} \times \left(e^{2Y|\xi|}(1+e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}) - 1\right), \quad \text{для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma],$$

линейный непрерывный оператор $\Lambda_{a_1} : L_2([-\sigma,\sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу

$$F[\Lambda_{a_1} g(\cdot)](\xi) = a_1(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|},$$

является оптимальным методом.

2) *Если $\delta = 0$, то погрешность оптимального восстановления задачи Дирихле имеет вид:*

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma\right) = \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}.$$

Для любой измеримой функции $a_2(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ такой, что

$$|a_2(\xi) - 1| \leqslant (\xi/\sigma)^r \cdot e^{-Y\sigma}, \quad \text{для п.в. } \xi \in [-\sigma, \sigma],$$

линейный непрерывный оператор $\Lambda_{a_2} : L_2([-\sigma,\sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий в образах Фурье по правилу

$$F[\Lambda_{a_2} g(\cdot)](\xi) = a_2(\xi) g(\xi) e^{-Y|\xi|},$$

является оптимальным методом.

Доказательство приведем в следующих двух параграфах.

3. Оценка снизу погрешности оптимального восстановления

1. Пусть $u(\cdot, Y)$ — решение задачи Дирихле (1) и m — произвольный метод восстановления. Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R}), \quad \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta. \tag{3}$$

Обозначим ее значение через S, т. е.

$$S = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}) \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Покажем, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения этой задачи: $E\,(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geqslant S$. Оценим сверху максимизируемый функционал в (3):

$$\begin{aligned}
2\|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \|u(\cdot, Y) - m(0) - (-u(\cdot, Y) - m(0))\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant \|u(\cdot, Y) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \| - u(\cdot, Y) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}))} \\
&\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\\ \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot, Y) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\\ g(\cdot)\in L_2([-\sigma,\sigma]),\\ \|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u\,(\cdot, Y) - m\,(g(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} = 2e\,(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m)\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant e\,(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m)\,.$

Переходя слева к верхней грани по всем функциям $f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$, таким, что $\|F[f]\,(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta$, а справа к нижней грани по всем методам $m : L_2\,([-\sigma, \sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$, получим:

$$E\,(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R})\\ \|F[f](\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])}\leqslant\delta}} \|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

т. е.

$$E\,(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geqslant S.$$

2. Найдем значение величины S. Так как $F[u(\cdot, Y)](\cdot) = e^{-Y|\xi|} \cdot F[f](\cdot)$ (см., например, [9]), то согласно теореме Планшереля квадрат значения задачи (3) равен значению следующей задачи:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \cdot |F[f](\xi)|^2\, d\xi \to \max, \\
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi)|F[f]\,(\xi)\,|^2 d\xi \leqslant \frac{\delta^2}{2\pi}, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}|F[f]\,(\xi)\,|^2\, d\xi \leqslant 1,
\end{gathered} \tag{4}$$

где $\chi_{(-\sigma,\sigma)}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $(-\sigma, \sigma)$. Нетрудно показать, что эта задача не имеет решения. Поэтому, формально заменяя $d\mu\,(\xi) = \frac{1}{2\pi}|F[f](\xi)|^2\, d\xi$, рассмотрим более общую задачу на произвольных положительных борелевских мерах на прямой («расширение» задачи (4)):

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\, d\mu(\xi) \to \max, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi)\, d\mu(\xi) \leqslant \delta_1^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}\, d\mu(\xi) \leqslant 1, \quad \delta_1^2 = \frac{\delta^2}{2\pi}. \tag{5}$$

3. Рассмотрим вначале случай, когда информация задана неточно ($\delta > 0$). Найдем значение «расширенной» задачи (5). Будем решать равносильную задачу на минимум:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} d\mu(\xi) \to \min, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi) d\mu(\xi) \leqslant \delta_1^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\mu(\xi) \leqslant 1. \tag{6}$$

Это выпуклая задача. Составим ее функцию Лагранжа:

$$L\left(d\mu\left(\xi\right),\lambda_1,\lambda_2\right) = -\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\,d\mu\left(\xi\right) + \lambda_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi)\,d\mu\left(\xi\right) - \delta_1^2\right) + \lambda_2\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\mu\left(\xi\right) - 1\right)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + \lambda_1\chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \lambda_2\xi^{2r}\right) d\mu\left(\xi\right) - \left(\lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\right).$$

По теореме Каруша — Куна — Такера (см., например, [10]), если существует допустимая мера $d\widehat{\mu}\left(\cdot\right)$ в (6) и коэффициенты $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ такие, что выполняются условия:

a) $\hat{\lambda}_1 \geqslant 0$; $\hat{\lambda}_2 \geqslant 0$;

b) $\hat{\lambda}_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi)\,d\mu\left(\xi\right) - \delta_1^2\right) = 0,\ \ \hat{\lambda}_2\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\mu\left(\xi\right) - 1\right) = 0;$

c) $\min\limits_{d\mu(\cdot)\geqslant 0} L\left(d\mu(\cdot),\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2\right) = L\left(d\widehat{\mu}\left(\cdot\right),\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2\right),$

то $d\widehat{\mu}\left(\cdot\right)$ — решение задачи (6). Условие c) равносильно следующему неравенству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + \hat{\lambda}_1\chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \hat{\lambda}_2\xi^{2r}\right) d\mu\left(\xi\right) \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2Y|\xi|} + \hat{\lambda}_1\chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \hat{\lambda}_2\xi^{2r}\right) d\widehat{\mu}\left(\xi\right),$$

справедливому для любой меры $d\mu(\cdot) \geqslant 0$.

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$q(\xi) = -e^{-2Y|\xi|} + \hat{\lambda}_1\chi_{(-\sigma;\sigma)}(\xi) + \hat{\lambda}_2\xi^{2r}.$$

Положим $\hat{\lambda}_1 = 1$ и $\hat{\lambda}_2 = \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}$. При этом функция $q(\xi)$ примет вид:

$$q(\xi) = \begin{cases} 1 - e^{-2Y|\xi|} + e^{-2Y\sigma}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^{2r}, & \xi \in (-\sigma;\sigma)\,; \\ e^{-2Y\sigma}\left(\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^{2r} - e^{-2Y(|\xi|-\sigma)}\right), & \xi \notin (-\sigma;\sigma)\,. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция $q(\cdot)$ всюду неотрицательна и обращается в нуль в точках $\xi = 0$ и $\xi = \sigma$ (т. е. $q\left(0\right) = 0$ и $q\left(\sigma\right) = 0$).

Пусть, далее, $d\widehat{\mu}(\xi) = A\delta\left(\xi\right) + B\delta\left(\xi - \sigma\right)$, где $\delta\left(\xi - \xi_0\right)$ — дельта-функция в точке ξ_0. Из условий

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-\sigma,\sigma)}(\xi) : d\hat{\mu}\left(\xi\right) = \delta_1^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} d\hat{\mu}\left(\xi\right) = 1,$$

находим коэффициенты

$$A = \delta_1^2, \quad B = \frac{1}{\sigma^{2r}}.$$

Таким образом, с заданными $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ и $d\hat{\mu}(\cdot)$ условия *a*), *b*) и *c*) выполнены. Значит, $d\hat{\mu}(\xi) = \delta_1^2 \cdot \delta(\xi) + \frac{\delta(\xi-\sigma)}{\sigma^{2r}}$ — решение задач (5), (6).

Подставляя найденное выражение для меры в максимизируемый функционал задачи (5), вычислим ее значение

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}. \tag{7}$$

Понятно, что значение задачи (4) не больше значения ее «расширения». Покажем, что на самом деле они совпадают.

Рассмотрим семейство функций $f_n(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид:

$$F[f_n]\,(\xi) = \begin{cases} K_1(n), & \text{если } \xi \in (0; 1/n)\,; \\ K_2(n), & \text{если } \xi \in (\sigma; \sigma + 1/n)\,; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $K_1^2(n) = 2\pi n \delta_1^2$, $K_2^2(n) = 2\pi n \frac{1-\delta_1^2/n^{2r}}{(\sigma+1/n)^{2r}}$. Легко проверить, что функции $f_n(\cdot)$ допустимы в задаче (4). Значение максимизируемого функционала в (4) на этих функциях:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|}|F[f_n]\,(\xi)\,|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(K_1^2(n)\int\limits_0^{1/n} e^{-2Y\xi}d\xi + K_2^2(n)\int\limits_{\sigma}^{\sigma+1/n} e^{-2Y\xi}d\xi\right)$$
$$\geqslant \frac{e^{-2Y/n}}{2\pi n}\left(K_1^2(n) + K_2^2(n)e^{-2Y\sigma}\right) = e^{-2Y/n}\left(\delta_1^2 + \frac{1-\delta_1^2/n^{2r}}{(\sigma+1/n)^{2r}}\, e^{-2Y\sigma}\right).$$

Ясно, что величина справа стремится к $\delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}$ и, тем самым, значения задач (4) и (5) совпадают. Откуда следует, что в случае неточно заданной информации ($\delta > 0$), значение нижней границы погрешности оптимального восстановления

$$S = \sqrt{\delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}.$$

Таким образом, показано, что в случае $\delta > 0$ для погрешности оптимального восстановления справедлива следующая оценка снизу:

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma\right) \geqslant \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}. \tag{8}$$

В случае, когда информация задана точно ($\delta = 0$), аналогичные выкладки приводят к следующему результату:

$$S = \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r},$$

и, тем самым,

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma\right) \geqslant \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}. \tag{9}$$

4. Оценка сверху погрешности оптимального восстановления и оптимальные методы

Будем искать оптимальные методы среди методов вида:

$$m\left(g\left(\cdot\right)\right) = \Lambda g\left(\cdot\right), \tag{10}$$

где $\Lambda : L_2([-\sigma,\sigma]) \to L_2(\mathbb{R})$ — линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид:

$$F[\Lambda g(\cdot)](\xi) = a(\xi)g(\xi)e^{-Y|\xi|}, \quad a(\cdot) \in L_\infty([-\sigma,\sigma]). \tag{11}$$

1. Вначале исследуем случай неточно заданной информации ($\delta > 0$). Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\|u(\cdot,Y) - m(g)(\cdot,Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \ \ \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2([-\sigma,\sigma])} \leqslant \delta, \quad \left\|f^{(r)}(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1.$$

Применяя теорему Планшереля, получим, что квадрат значения этой задачи равен значению следующей задачи:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}[f](\xi) - a(\xi)g(\xi)\right)|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\mathbb{F}[f](\xi) - g(\xi)|^2 d\xi \leqslant \delta_1^2, \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r}|\mathbb{F}[f](\xi)|^2 d\xi \leqslant 1.$$

Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ — некоторые положительные числа. Оценим сверху подынтегральное выражение в максимизируемом функционале, используя неравенство Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned}
&\left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}[f](\xi) - a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 \\
&= \left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}[f](\xi) - a(\xi)F[f](\xi) + a(\xi)F[f](\xi) - a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 \\
&= e^{-2Y|\xi|}\left|(1-a(\xi))\,\mathbb{F}[f](\xi) + a(\xi)\left(\mathbb{F}[f](\xi) - g(\xi)\right)\right|^2 \\
&= e^{-2Y|\xi|}\left|\frac{1-a(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}\xi^r}\sqrt{\lambda_2}\xi^r\mathbb{F}[f](\xi) + \frac{a(\xi)}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{\lambda_1}\left(\mathbb{F}[f](\xi) - g(\xi)\right)\right|^2 \\
&\leqslant e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\right)\left(\lambda_2\xi^{2r}|\mathbb{F}[f](\xi)|^2 + \lambda_1|\mathbb{F}[f](\xi) - g(\xi)|^2\right).
\end{aligned}$$

Обозначим

$$S(\xi) = e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2r}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\right), \quad \xi \in [-\sigma,\sigma].$$

Пусть $A = \operatorname{ess\,sup}_{\xi\in[-\sigma,\sigma]} S(\xi)$. Тогда на отрезке $[-\sigma,\sigma]$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}[f](\xi) - a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi \\
&\leqslant \frac{A}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left(\lambda_2\xi^{2r}|\mathbb{F}[f](\xi)|^2 + \lambda_1|\mathbb{F}[f](\xi) - g(\xi)|^2\right) d\xi \\
&\leqslant \frac{\lambda_2 A}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\xi^{2r}|\mathbb{F}[f](\xi)|^2 d\xi + \lambda_1 A\delta_1^2.
\end{aligned}$$

Если $\xi \in \mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]$, то $g(\xi)=0$, поэтому, учитывая, что $|\xi/\sigma|>1$, можем записать

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]}\left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]}\left|e^{-Y|\xi|}\mathbb{F}\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\sigma^{2r}}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]}\xi^{2r}\left|\mathbb{F}\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi.$$

Складывая эти неравенства, получим оценку на всей оси

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi$$

$$\leqslant \frac{\lambda_2 A}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\xi^{2r}\left|\mathbb{F}\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi+\frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\cdot\sigma^{2r}}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\sigma,\sigma]}\xi^{2r}\left|\mathbb{F}\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi+\lambda_1 A\delta_1^2.$$

Все вышесказанное справедливо для произвольных положительных чисел λ_1 и λ_2.

Пусть теперь $\hat{\lambda}_1=1$, $\hat{\lambda}_2=e^{-2Y\sigma}/\sigma^{2r}$. Дополнительно потребуем, чтобы $A=\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in[-\sigma,\sigma]}S(\xi)\leqslant 1$. Тогда, учитывая что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}|\mathbb{F}\left[f\right](\xi)|^2 d\xi\leqslant 1,$$

получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|e^{-Y|\xi|}\left(\mathbb{F}\left[f\right](\xi)-a(\xi)g(\xi)\right)\right|^2 d\xi\leqslant\frac{\lambda_2}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2r}\left|\mathbb{F}\left[f\right](\xi)\right|^2 d\xi+\delta_1^2\leqslant\frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}+\delta_1^2. \quad (12)$$

Таким образом, если метод восстановления m удовлетворяет условиям (10)–(11), причем $A=\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in[-\sigma,\sigma]}S(\xi)\leqslant 1$, то для его погрешности справедлива оценка

$$e(Y,W_2^r(\mathbb{R}),\delta,\sigma,m)\leqslant\sqrt{\delta_1^2+\frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}. \quad (13)$$

Эта оценка совпадает со значением нижней границы погрешности оптимального восстановления (8).

2. Проанализируем, какое условие на функцию $a(\xi)$ накладывает требование $S(\xi)\leqslant 1$, $\xi\in[-\sigma,\sigma]$. Имеем, выделяя полный квадрат,

$$S(\xi)=e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2r}}+\frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}\right)$$

$$=e^{-2Y|\xi|}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2r}}{\lambda_1\lambda_2\xi^{2r}}\left|a(\xi)-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2r}}\right|^2+\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2\xi^{2r}}\right)\leqslant 1.$$

Откуда

$$\left|a(\xi)-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2\,\xi^{2r}}\right|^2\leqslant\frac{\lambda_1\lambda_2\xi^{2r}\left(\left(\lambda_1+\lambda_2\xi^{2r}\right)e^{2Y|\xi|}-1\right)}{(\lambda_1+\lambda_2\xi^{2r})^2}.$$

Подставим выбранные нами ранее значения $\hat{\lambda}_1 = 1$ и $\hat{\lambda}_2 = \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}$:

$$\left| a(\xi) - \frac{1}{1 + (\xi/\sigma)^{2r} e^{-2Y\sigma}} \right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r} \left(\left(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}\right) e^{2Y|\xi|} - 1 \right)}{(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2}.$$

Следовательно, если функция $a(\cdot)$ удовлетворяет данному соотношению, то для погрешности соответствующего метода восстановления справедлива оценка (13).

3. Теперь перейдем к случаю точно заданной информации ($\delta = 0$). Аналогично предыдущему случаю рассмотрим экстремальную задачу:

$$\|u\,(\cdot, Y) - m\,(g)\,(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max,$$
$$\left\| f^{(r)}\,(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1, \quad F[f](\cdot) = g(\cdot) \ \text{ для п.в. } \ \xi \in [-\sigma, \sigma]\,.$$

Применяя теорему Планшереля, получим, что квадрат значения этой задачи равен значению следующей задачи:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} |e^{-Y|\xi|} \left(\mathbb{F}\,[f]\,(\xi) - a(\xi) g(\xi)\right)|^2 d\xi \to \max, \\ F[f](\cdot) = 0 \ \text{ для п.в. } \ \xi \in [-\sigma, \sigma]\,, \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} \left|\mathbb{F}\,[f]\,(\xi)\right|^2 d\xi \leqslant 1. \end{gathered} \tag{14}$$

Оценим максимизируемый функционал. Так как $g\,(\cdot) = 0$, $\xi \in \mathbb{R} \backslash [-\sigma, \sigma]$ и $Y > 0$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \left|\mathbb{F}\,[f]\,(\xi) - a(\xi) g(\xi)\right|^2$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{-2Y|\xi|} \cdot |a(\xi) - 1|^2 \left|\mathbb{F}\,[f]\,(\xi)\right|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R} \backslash [-\sigma, \sigma]} e^{-2Y|\xi|} \left|\mathbb{F}\,[f]\,(\xi)\right|^2 d\xi$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |a(\xi) - 1|^2 \left|\mathbb{F}\,[f]\,(\xi)\right|^2 d\xi + \frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\sigma^{2r}} \int\limits_{\mathbb{R} \backslash [-\sigma, \sigma]} \xi^{2r} \left|\mathbb{F}\,[f]\,(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Потребуем, чтобы функция $a(\cdot)$ удовлетворяла следующему условию:

$$|a(\xi) - 1|^2 \leqslant e^{-2Y\sigma} (\xi/\sigma)^{2r}, \quad \xi \in [-\sigma, \sigma]\,.$$

Тогда неравенство примет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} \left|\mathbb{F}\,[f]\,(\xi) - a(\xi) g(\xi)\right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{2\pi\sigma^{2r}} \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2r} \left|\mathbb{F}\,[f]\,(\xi)\right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}.$$

Значит, если метод восстановления m удовлетворяет условиям (10)–(11), причем

$$|a(\xi) - 1|^2 \leqslant e^{-2Y\sigma} (\xi/\sigma)^{2r}, \quad \xi \in [-\sigma, \sigma]\,,$$

то

$$e(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma, m) \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}.$$

Полученная оценка снова совпадает со значением нижней границы погрешности оптимального восстановления (8).

В § 3 доказано, что для погрешности оптимального восстановления справедливы следующие оценки снизу:

$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma\right) \geqslant \sqrt{\delta_1^2 + \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}}, \quad \delta > 0,$$
$$E\left(Y, W_2^r(\mathbb{R}), \sigma\right) \geqslant \frac{e^{-Y\sigma}}{\sigma^r}, \quad \delta = 0.$$

В § 4 показано, что если метод m имеет вид

$$m\left(g\left(\cdot\right)\right) = \Lambda g\left(\cdot\right),$$

где $\Lambda : L_2\left([-\sigma, \sigma]\right) \to L_2\left(\mathbb{R}\right)$ — линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид:

$$F[\Lambda g\left(\cdot\right)](\xi) = a(\xi)g(\xi)e^{-Y|\xi|},$$

и функция $a(\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$a\left(\cdot\right) \in L_\infty\left([-\sigma, \sigma]\right),$$
$$\left|a(\xi) - \frac{1}{1 + (\xi/\sigma)^{2r} \cdot e^{-2Y\sigma}}\right|^2 \leqslant \frac{e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}\left(\left(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r}\right)e^{2Y|\xi|} - 1\right)}{(1 + e^{-2Y\sigma}(\xi/\sigma)^{2r})^2}, \quad \delta > 0;$$
$$|a(\xi) - 1| \leqslant e^{-Y\sigma}(\xi/\sigma)^r, \quad \text{если } \ \delta = 0,$$

то погрешность соответствующего метода не превышает таких же величин и тем самым он оптимален.

Приведем пример оптимального метода.

1. Случай неточно заданной информации $(\delta > 0)$.

Можно показать, что метод вида (10)–(11), где $a\left(\xi\right) = \frac{1}{1+(\xi/\sigma)^{2r} \cdot e^{-2Y\sigma}}$, $\xi \in [-\sigma, \sigma]$, удовлетворяет всем требуемым условиям. Тогда

$$F[m(g)]\left(\xi\right) = \begin{cases} \frac{e^{-Y|\xi|} \cdot g(\xi)}{1+(\xi/\sigma) \cdot e^{-2Y\sigma}}, & \xi \in [-\sigma, \sigma]; \\ 0, & \xi \notin [-\sigma, \sigma]. \end{cases}$$

В этом случае восстановленное решение имеет вид:

$$u\left(x, Y\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \frac{e^{-Y|\xi|} \cdot g\left(\xi\right)}{1 + \left(\xi/\sigma\right)^{2r} \cdot e^{-2Y\sigma}} e^{i\xi x}\, d\xi,$$

где $C = \frac{1}{1+(\xi/\sigma)^{2r} \cdot e^{-2Y\sigma}}$ — сглаживающий множитель.

2. Случай точно заданной информации $(\delta = 0)$.

Функция $a\left(\cdot\right) = 1$, $\xi \in [-\sigma, \sigma]$, очевидно, удовлетворяет всем требованиям теоремы. Тогда восстановленное решение имеет вид

$$u\left(x, Y\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{-Y|\xi|} g\left(\xi\right) e^{i\xi x} d\xi.$$

Легко заметить, что это решение относится к классу оптимальных и в первом случае.

Автор выражает искреннюю благодарность Г. Г. Магарил-Ильяеву за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. ... к.ф.-м.н.—М.: МГУ, 1965.
2. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
3. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory.—N. Y.: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
4. *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal.—1979.—P. 87–105.
5. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery // Lecture Notes in Mathematics.—Berlin: Springer, 1985.—Vol. 1129.—P. 21–93.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его приложения.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // Тр. МИАН.—2010.—Vol. 269.—P. 181–192.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его приложения.—2010.—Т. 44.—С. 76–79.
9. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М., 1974.
10. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения (3-е изд.).—М.: Эдиториал УРСС, 2011.
11. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа (4-е изд.).—М.: Наука, 1976.

Статья поступила 2 сентября 2014 г.

Абрамова Елена Владимировна
Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики,
старший преподаватель
РОССИЯ, 119454, Москва, пр-т Вернадского, д. 78
E-mail: abramova_elena@inbox.ru

ON OPTIMAL RECOVERY OF DIRICHLET PROBLEM FROM A BOUNDARY FUNCTION KNOWN APPROXIMATELY

Abramova E. V.

The problem of best (optimal) recovery of a solution of the Dirichlet problem for the upper half-plane from the Fourier transform of the boundary functions known approximately in considered. A series of optimal recovery methods are foud and the corresponding errors recovery are calculated.

Key words: optimal recovery, extremal problem, Dirichlet's problem, Fourier transform.