Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 4, С. 27–40

УДК **517.9**

ОБ ОПЕРАТОРЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

У. В. Баркина, С. Н. Мелихов

Пусть Q — выпуклое (не обязательно ограниченное) множество в $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью, обладающее счетным базисом окрестностей из выпуклых областей; $A(Q)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на Q, с естественной топологией индуктивного предела. В статье доказан критерий того, что фиксированный ненулевой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, действующий в $A(Q)$, имеет линейный непрерывный правый обратный. Этот критерий получен в терминах существования специального семейства субгармонических функций.

Ключевые слова: линейный непрерывный правый обратный, дифференциальный оператор бесконечного порядка, пространство ростков аналитических функций, выпуклое множество.

Введение

Пусть Q — выпуклое множество в $\mathbb{C}$, $A(Q)$ — пространство всех ростков функций, аналитических в некоторой открытой окрестности Q, с естественной топологией индуктивного предела. Для целой в $\mathbb{C}$ функции $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ нулевого типа при порядке 1 дифференциальный оператор бесконечного порядка $a(D)(f) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$ линейно и непрерывно отображает $A(Q)$ в $A(Q)$ [2]. В настоящей работе рассмотрены выпуклые множества Q, обладающие счетным базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей. Класс таких множеств Q содержит все выпуклые области и выпуклые компакты в $\mathbb{C}$. Для множеств Q с указанным свойством всякий ненулевой оператор $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ сюръективен [2], и возникает естественная задача о существовании линейного непрерывного правого обратного к нему. В данной работе для выпуклого множества $Q \subset \mathbb{C}$ со счетным базисом окрестностей из выпуклых областей (и с непустой внутренностью) доказывается критерий того, что фиксированный ненулевой оператор $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный. Критерий получен в терминах существования специального семейства субгармонических функций. В случае, когда Q ограничено, подобный критерий был доказан в [8]. Для специальных классов выпуклых множеств $Q \subset \mathbb{C}$ аналогичные результаты (в различных терминах) установлены З. Моммом [21, 22] (для выпуклой области Q), Ю. Ф. Коробейником [5] (для выпуклого многоугольника Q), М. Лангенбрухом [15] (в случае, когда Q — отрезок), С. Н. Мелиховым и З. Моммом [9, 19] (для выпуклого компакта Q и для выпуклого локально замкнутого множества Q).

Схема изложения в данной работе аналогична схеме изложения в статье [8], в которой рассмотрен случай ограниченного Q. Однако, неограниченность Q влечет ряд существенных трудностей (описание геометрической структуры выпуклых множеств со счетным базисом окрестностей из выпуклых областей; доказательство ультраборнологичности пространства целых функций, изоморфного сильному сопряженному к $A(Q)$, и ассоциированного пространства векторнозначных последовательностей), преодоленных в данной работе. Подробная аналитическая реализация условия существования специальных семейств субгармонических функций, равносильная наличию линейного непрерывного правого обратного к $a(D)$, будет предпринята в следующей статье.

1. Геометрическая структура множества Q

Для множества $M \subset \mathbb{C}$ символами $\overline{M}$, ∂M, $\operatorname{int} M$, $\operatorname{conv} M$ обозначим, соответственно, замыкание, границу, внутренность и выпуклую оболочку M в $\mathbb{C}$. Символ $[x, y]$ обозначает (прямолинейный) отрезок с концами $x, y \in \mathbb{C}$.

Пусть Q — выпуклое подмножество $\mathbb{C}$; $\omega := Q \cap \partial Q$ — часть границы Q, содержащаяся в Q. Ниже мы будем рассматривать множества Q, имеющие счетный базис окрестностей, состоящий из выпуклых областей. Характеризация ограниченных выпуклых множеств Q с таким свойством получена в [4, теорема 1] и [7, теорема 1]. Докажем аналогичный результат для необязательно ограниченного Q.

Положим $B(\mu, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \mu| < r\}$, $\overline{B}(\mu, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \mu| \leqslant r\}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

Лемма 1.1. (I) *Пусть Q — выпуклое подмножество $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью, $\omega \neq \varnothing$, $Q_0 := (\operatorname{int} Q) \cup ((\partial Q)\backslash\omega)$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *Q имеет счетный базис окрестностей, состоящий из выпуклых областей.*

(ii) *Множество ω и пересечение множества Q_0 с любой прямой, опорной к $\overline{Q}$, компактны.*

(II) *Пусть Q — выпуклое подмножество $\mathbb{C}$, внутренность которого пуста. Q имеет счетный базис окрестностей, состоящий из выпуклых областей, тогда и только тогда, когда Q — отрезок.*

$\lhd$ $(i) \Rightarrow (ii)$: Поскольку Q имеет счетный базис окрестностей, то вследствие [4, теорема 1] множество ω компактно. Предположим, что пересечение Q_0 с некоторой прямой l, опорной к $\overline{Q}$, не является компактным. Тогда существует полуинтервал $[z_1, z_2)$, содержащийся в $(\partial Q)\backslash\omega$, такой, что его конец z_2 лежит в ω. Пусть P — открытая полуплоскость с границей l, не содержащая $\overline{Q}$. Возьмем какую-либо замкнутую полуполосу, поперечная (ограниченная) сторона m которой лежит на интервале (z_1, z_2), а граничные перпендикулярные к m лучи лежат в $P \cup l$. Дополнение этой полосы является открытой окрестностью Q, но, очевидно, не содержит ни одной выпуклой окрестности Q. Получено противоречие. Значит, пересечение Q_0 с любой прямой, опорной к $\overline{Q}$, компактно.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Очевидно, что открытые множества $\widetilde{Q}_n := (\operatorname{int} Q) \bigcup (\omega + B(0, \frac{1}{n}))$, $n \in \mathbb{N}$, образуют базис окрестностей Q. Покажем, что выпуклые области $Q_n := \operatorname{conv}((\operatorname{int} Q) \cup (\omega + B(0, \frac{1}{n})))$, $n \in \mathbb{N}$, тоже образуют базис окрестностей Q. Предположим противное: существует n_0 такое, что $Q_m \not\subseteq \widetilde{Q}_{n_0}$ для любого m. Тогда для любого m существуют $y_m \in \operatorname{int} Q$, $z_m \in \operatorname{conv}(\omega + B(0, \frac{1}{m}))$, $t_m \in [0, 1]$ такие, что

$$x_m = (1 - t_m)\, y_m + t_m z_m \in Q_m \setminus \widetilde{Q}_{n_0}.$$

Рассмотрим возможные случаи.

1) Пусть последовательность $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ содержит ограниченную подпоследовательность. Тогда существуют возрастающая последовательность $m_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, и $x, z \in \mathbb{C}$,

$t \in [0,1]$ такие, что при $k \to \infty$

$$x_{m_k} \to x, \quad z_{m_k} \to z, \quad t_{m_k} \to t.$$

Заметим, что $z \in \operatorname{conv}\omega \subseteq Q$. Поскольку множество $\mathbb{C} \setminus \widetilde{Q}_{n_0}$ замкнуто, то $x \in \mathbb{C} \setminus \widetilde{Q}_{n_0}$. Значит, $x \notin Q$ и, тем более, $x \notin \omega$.

Предположим, что $x \in (\partial Q) \setminus Q$. Поскольку множество $\overline{Q}$ выпукло, то $[x,z] \subseteq \overline{Q}$. Для любого k интервал (x_{m_k}, z_{m_k}) не пересекается с Q. Действительно, пусть для некоторого k существует $w_k \in (x_{m_k}, z_{m_k}) \cap Q$. Поскольку $x_{m_k} \in [y_{m_k}, w_{m_k}]$ и Q выпукло, то $x_{m_k} \in Q$, что противоречит тому, что $x_{m_k} \notin Q$. Отсюда следует, что интервал (x,z) содержится в ∂Q. Значит, $z \in \partial Q$. Поскольку $z \in Q$, то $z \in \omega$. Это противоречит условию (ii).

Предположим, что $x \notin \overline{Q}$. Существует прямая p такая, что x и $\overline{Q}$ лежат по разные стороны от p. Тогда для больших k (пусть для $k \geqslant k_0$) точки x_{m_k} и z_{m_k} тоже лежат по разные стороны от p (там, где x и $\overline{Q}$ соответственно). Поскольку y_{m_k} находится по ту же сторону от p, что и x_{m_k} при $k \geqslant k_0$ (ведь $x_{m_k} \in [y_{m_k}, z_{m_k}]$), то это противоречит тому, что $y_{m_k} \in Q$.

2) Пусть теперь $x_m \to \infty$. Положим $B := \operatorname{conv}(\omega + \overline{B}(0,1))$; B — выпуклое компактное множество. Так как $x_m \to \infty$, то $x_m \notin B$ при $m \geqslant m_0$. При этом $z_m \in B$ для любого m. Поэтому при $m \geqslant m_0$ отрезок $[x_m, z_m]$ пересекается с ∂B в некоторой точке $\tilde{x}_m \in \partial B$. Заметим, что $\tilde{x}_m \in [y_m, z_m]$, т. е. $\tilde{x}_m \in Q_m$. Кроме того, $\tilde{x}_m \notin \omega + B(0, \frac{1}{n_0})$. Отметим также, что $[x_m, z_m] \cap Q = \varnothing$ (в противном случае $x_m \in Q$). Значит, $\tilde{x}_m \notin Q$ и $\tilde{x}_m \notin \operatorname{int} Q$, т. е. $\tilde{x}_m \in Q_m \setminus \widetilde{Q}_{n_0}$ при $m \geqslant m_0$. При этом последовательность $(\tilde{x}_m)_{m \geqslant m_0}$ ограничена. По части 1) этого не может быть.

Таким образом, последовательность выпуклых областей $Q_n := \operatorname{conv}((\operatorname{int} Q) \cap (\omega + B(0, \frac{1}{n})))$, $n \in \mathbb{N}$, является базисом окрестностей Q.

Утверждение (II) следует из [4, теорема 1]. $\rhd$

Замечание 1.2. (а) По доказательству леммы 1.1, если выпуклое множество $Q \subset \mathbb{C}$ с непустой внутренностью удовлетворяет условиям (ii) и $\omega \neq \varnothing$, то выпуклые области

$$Q_n := \operatorname{conv}\left(\left(\operatorname{int} Q\right) \cup \left(\omega + B(0, 1/n)\right)\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

образуют базис окрестностей Q.

(б) Доказательство импликации $(i) \Rightarrow (ii)$ в лемме 1.1 аналогично ее доказательству в случае ограниченного Q в [7]. Доказательство же импликации $(ii) \Rightarrow (i)$ существенно отличается от ее доказательства для ограниченного Q в [7].

2. Описание пространства $A(Q)$ и его сопряженного

Всюду далее Q — выпуклое подмножество $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью и со счетным базисом окрестностей из выпуклых областей Q_n, $n \in \mathbb{N}$, как в замечании 1.2. Пусть $A(Q_n)$ — пространство всех функций, аналитических в Q_n, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах Q_n, $n \in \mathbb{N}$. В пространстве $A(Q)$ ростков всех функций, аналитических на Q, определим топологию индуктивного предела: $A(Q) := \operatorname{ind}_{n\to} A(Q_n)$. Эта топология не зависит от выбора последовательности Q_n, $n \in \mathbb{N}$, выпуклых областей, составляющих базис окрестностей Q.

Зафиксируем некоторую фундаментальную последовательность $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ компактных подмножеств $\operatorname{int} Q$ такую, что $K_m \subset K_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$K_{nm} := \operatorname{conv}\left(K_m \cup \left(\omega + \overline{B}\left(0, \frac{m}{n(n+m)}\right)\right)\right), \quad m \in \mathbb{N},$$

— фундаментальная система компактных подмножеств Q_n.

Для ограниченного множества $M \subset \mathbb{C}$ символом H_M обозначим опорную функцию M

$$H_M(z) := \sup_{t\in M} \operatorname{Re}(zt), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть $H_{nm} := H_{K_{nm}}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$H_{nm}(z) = \max\left(H_{K_m}(z); H_\omega(z) + \frac{m}{n(n+m)}|z|\right), \quad z \in \mathbb{C},\ n, m \in \mathbb{N}.$$

Для $n, m \in \mathbb{N}$ определим банаховы пространства целых функций

$$A_{nm} := \left\{ f \in A(\mathbb{C}) : \|f\|_{nm} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp H_{nm}(z)} < +\infty \right\}.$$

Положим $A_{Q_n} := \operatorname{ind}_{m\to\infty} A_{nm}$, $A_Q := \operatorname{proj}_{\leftarrow n} A_{Q_n}$.

Далее $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Для локально выпуклого пространства F символ F' обозначает топологическое сопряженное к F пространство.

Лемма 2.1. (*a*) *Преобразование Лапласа* $\mathscr{F}(\varphi)(\lambda) := \varphi(e_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in A(Q)'$, *устанавливает топологический изоморфизм сильного сопряженного к* $A(Q)$ *пространства* $A(Q)'_\beta$ *на* A_Q.

Двойственность между $A(Q)$ *и* A_Q *определяется билинейной формой* $\langle g, f\rangle = \mathscr{F}^{-1}(f)(g)$, $g \in A(Q)$, $f \in A_Q$.

$A(Q)$ — *монтелевское, а значит, и рефлексивное пространство.*

(*b*) *Пространства* A_{Q_n}, $n \in \mathbb{N}$, *и* A_Q *полны.*

$\lhd$ Утверждение (a) доказано в [7, лемма 2] в случае, когда Q ограничено. Приведенное в [7] доказательство подходит и для случая необязательно ограниченного множества Q. Поскольку сборник [7] труднодоступен, это доказательство приведем здесь.

Согласно [11, гл. IV, 4] выполняется алгебраическое равенство $A(Q)' = \operatorname{proj}_{\leftarrow n} A(Q_n)'$. Поскольку всякое ограниченное в некотором пространстве $A(Q_n)$ множество ограничено и в $A(Q)$, то сильная топология в $A(Q)'$ мажорирует топологию проективного предела $\operatorname{proj}_{\leftarrow n} A(Q_n)'_\beta$. Так как любое ограниченное в $A(Q)$ множество содержится и ограничено в некотором пространстве $A(Q_n)$ [16, гл. I, § 3, предложение 1.2], то, наоборот, топология в $\operatorname{proj}_{\leftarrow n} A(Q_n)'_\beta$ мажорирует сильную топологию в $A(Q)'$. Поэтому первая часть утверждения (a) вытекает из того, что $\mathscr{F}$ — топологический изоморфизм каждого пространства $A(Q_n)'_\beta$ на $\operatorname{ind}_{m\to} A_{nm}$ (см., например, [3, гл. I, § 2]).

Поскольку $A(Q)$ бочечно и всякое ограниченное в $A(Q)$ множество содержится и ограничено, а значит, и относительно компактно в некотором $A(Q_n)$ и в $A(Q)$, то $A(Q)$ является монтелевским пространством.

(*b*): Пространство A_{Q_n} полно, так как оно топологически изоморфно сильному сопряженному к борнологическому пространству $A(Q_n)$, $n \in \mathbb{N}$ [18, следствие 24.11]. A_Q полно как проективный предел полных пространств A_{Q_n}, $n \in \mathbb{N}$ [11, гл. 2, 5.3]. $\rhd$

Замечание 2.2. Базис окрестностей множества Q образуют также области $\widetilde{Q}_n := (\operatorname{int} Q) \cup (\omega + B(0, 1/n))$, $n \in \mathbb{N}$, для которых $Q_n = \operatorname{conv} \widetilde{Q}_n$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется

$m \in \mathbb{N}$ такое, что $Q_m \subset \widetilde{Q}_n$ и $A(Q_n) \hookrightarrow A(\widetilde{Q}_n) \hookrightarrow A(Q_m)$ ($\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения).

Для любого $n \in \mathbb{N}$ компакты

$$Q_{nm} := K_m \cup \left(\omega + \overline{B}\left(0, \frac{m}{n(n+m)}\right)\right), \quad m \in \mathbb{N},$$

образуют фундаментальную систему компактных подмножеств $\widetilde{Q}_n$. Топологию пространства $A(\widetilde{Q}_n)$ задает последовательность преднорм $|g|_{nm} := \sup_{z \in Q_{nm}} |g(z)|$, $g \in A(\widetilde{Q}_n)$, $m \in \mathbb{N}$.

Так же, как и для ограниченного Q (см. [8, лемма 1.5]), имеет место

Лемма 2.3. *Пространство A_Q ультраборнологично (т. е. является индуктивным пределом некоторого семейства банаховых пространств* [18]).

$\lhd$ Применим функтор Proj^1 проективного спектра (LB)-пространств [10, 24, 25]. Пусть $\mathscr{A}_Q$ — проективный спектр пространств A_{Q_n} и отображений вложения $i^n_{n+1} : A_{Q_{n+1}} \to A_{Q_n}$. Без ограничения общности можно считать, что внутренность Q содержит нуль. По [23] множество $\mathscr{P}$ всех многочленов полно в A_{Q_n} для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как $\mathscr{P} \subset A_Q$, то A_Q плотно в A_{Q_n} для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, спектр $\mathscr{A}_Q$ — приведенный. Поскольку пространство A_Q полно (лемма 2.1 (b)), то пространство A_Q ультраборнологично тогда и только тогда, когда оно борнологично. По [25, теорема 3.4] A_Q борнологично, если $\mathrm{Proj}^1 \mathscr{A}_Q = 0$. По [26] для справедливости равенства $\mathrm{Proj}^1 \mathscr{A}_Q = 0$ достаточно выполнения условия

$$(P_2^*)\ (\forall\, \mu)\, (\exists\, n, k)\, (\forall\, m, M)\, (\exists\, N, S)\, (\forall\, y \in A'_{Q_\mu}) \quad \|y\|^*_{km} \leqslant S \max(\|y\|^*_{MN}; \|y\|^*_{\mu n}),$$

где $\|y\|^*_{ij} := \sup_{\|f\|_{ij} \leqslant 1} |y(f)|$. Вследствие рефлексивности пространств $A(Q_n)$ и замечания 2.2 условие (P_2^*) равносильно такому:

$$(P_2')\ (\forall\, \mu)\, (\exists\, n, k)\, (\forall\, m, M)\, (\exists\, N, S)\, (\forall\, g \in A(\widetilde{Q}_\mu)) \quad |g|_{km} \leqslant S \max(|g|_{MN}; |g|_{\mu n}).$$

Условие (P_2') выполняется, если

$$(\forall\, \mu)\, (\exists\, n, k)\, (\forall\, m, M)\, (\exists\, N) \quad Q_{km} \subset Q_{MN} \cup Q_{\mu n},$$

т. е.

$$(\forall\, \mu)\, (\exists\, n, k)\, (\forall\, m, M)\, (\exists\, N) \quad K_m \cup \left(\omega + \overline{B}\left(0, \frac{m}{k(k+m)}\right)\right)$$
$$\subset \left(K_N \cup \left(\omega + \overline{B}\left(0, \frac{N}{M(M+N)}\right)\right)\right) \cup \left(K_n \cup \left(\omega + \overline{B}\left(0, \frac{n}{\mu(\mu+n)}\right)\right)\right).$$

Последнее вложение выполняется, если выбирать $n := \mu$, $k := 2\mu$, $N := m$. $\rhd$

3. Ассоциированное пространство векторнозначных последовательностей

Пусть $[1, 0]$ — векторное пространство всех целых в $\mathbb{C}$ функций нулевого типа при порядке 1; функция $a \in [1, 0]$ отлична от многочлена и $V(a)$ — множество всех нулей a (множество $V(a)$ бесконечно). Согласно [1, 6] найдется последовательность попарно непересекающихся кругов $B_j := B(\mu_j, r_j)$, $j \in \mathbb{N}$, нулевой линейной плотности (т. е. таких, что $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_j = \infty$ и $\lim\limits_{r\to+\infty} (\sum_{|\mu_j|<r} r_j)/r = 0$), удовлетворяющих следующим условиям:

1) $V(a) \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ и $V(a) \cap B_j \neq \varnothing$ для любого $j \in \mathbb{N}$;
2) вне $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ выполняется асимптотическое равенство $\log|a(z)| = o(|z|)$, $|z| \to \infty$.

Для каждой функции $a \in [1,0]$, отличной от многочлена, зафиксируем такую последовательность $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Отметим, что $\lim_{j\to\infty} r_j/|\mu_j| = 0$. Можно считать, что $|\mu_j| \leqslant |\mu_{j+1}|$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim_{j\to\infty}(\log j)/|\mu_j| = 0$.

Приведем далее конструкцию из [17]. Пусть $A_\infty(B_j)$, $j \in \mathbb{N}$, — банахово пространство всех ограниченных аналитических в круге B_j функций; $I_j := a|_{B_j} \cdot A_\infty(B_j)$ — замкнутый идеал в $A_\infty(B_j)$, порожденный функцией $a|_{B_j}$; $E_j := A_\infty(B_j)/I_j$. В E_j определим топологию фактор-пространства нормой

$$\|f + I_j\|_j := \inf_{\xi\in f+I_j} \sup_{z\in B_j} |\xi(z)|.$$

Пространство E_j конечномерно, его размерность k_j равна числу нулей функции a (с учетом их кратностей), содержащихся в круге B_j. Для $n, m \in \mathbb{N}$ определим пространства последовательностей

$$\Lambda_m(Q_n, a, \mathbb{E}) := \left\{ X = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod_{j\in\mathbb{N}} E_j : \; |||X|||_{nm} := \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|x_j\|_j}{\exp H_{nm}(\mu_j)} < \infty \right\},$$

$$\Lambda(Q_n, a, \mathbb{E}) := \operatorname{ind}_{m\to} \Lambda_m(Q_n, a, \mathbb{E}), \quad \Lambda(Q, a, \mathbb{E}) := \operatorname{proj}_{\leftarrow n} \Lambda(Q_n, a, \mathbb{E}).$$

Для последовательности $\mathbb{E}' := (E'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сильных сопряженных E'_j к пространствам E_j с нормами $\|\cdot\|'_j$ и $n \in \mathbb{N}$ определим пространства Фреше

$$K(Q_n, a, \mathbb{E}') := \left\{ X = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod_{j\in\mathbb{N}} E'_j : \forall\, m \in \mathbb{N} \; \sum_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|'_j \exp H_{nm}(\mu_j) < \infty \right\},$$

и положим

$$K(Q, a, \mathbb{E}') := \operatorname{ind}_{n\to} K(Q_n, a, \mathbb{E}).$$

Поскольку $\lim\limits_{j\to\infty}(\log j)/|\mu_j| = 0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ пространство $\Lambda(Q_n, a, \mathbb{E})$ алгебраически и топологически совпадает с локально выпуклым пространством

$$\Lambda_1(Q_n, a, \mathbb{E}) := \left\{ X = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod_{j\in\mathbb{N}} E_j : \exists\, m \in \mathbb{N} : \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|x_j\|_j}{\exp H_{nm}(\mu_j)} < \infty \right\},$$

наделенным естественной топологией индуктивного предела.

Для бесконечной матрицы $B = (b_{j,n,s})_{j,n,s\in\mathbb{N}}$ такой, что $0 < b_{j,n,s+1} \leqslant b_{j,n,s} \leqslant b_{j,n+1,s}$, $n, s \in \mathbb{N}$, введем пространства числовых последовательностей

$$\Lambda_n(B) := \left\{ x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \exists\, s \in \mathbb{N} : \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j| b_{j,n,s} < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

с топологиями индуктивных пределов банаховых пространств и положим

$$\Lambda(B) := \operatorname{proj}_{\leftarrow n} \Lambda_n(B).$$

Лемма 3.1. *Пусть функция $a \in [1,0]$ отлична от многочлена. Пространство $\Lambda(Q, a, \mathbb{E})$ ультраборнологично.*

◁ Определим «растянутую» матрицу $B := (b_{j,n,m})_{j,n,m\in\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$b_{j,n,m} := \exp(-H_{nm}(\mu_j)), \quad \sum_{i=0}^{l-1} k_i < j \leqslant \sum_{i=0}^{l} k_i, \quad l \in \mathbb{N};\ k_0 := 0.$$

Пусть e_{jk}, $1 \leqslant k \leqslant k_j := \dim E_j$, — базис Ауэрбаха в E_j [14]. Поскольку $\lim\limits_{j\to\infty}(\log j)/|\mu_j = 0$, $\lim\limits_{j\to\infty} r_j/|\mu_j| = 0$, то (по доказательству [17, предложение 1.4]) отображение

$$T\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{k_j} c_{jk}e_{jk}\right) := d, \quad d_j := c_{lk},\ j = k + \sum_{i=0}^{l-1} k_i,\ 1 \leqslant k \leqslant k_l,\ l \in \mathbb{N},$$

— топологический изоморфизм $\Lambda(Q, a, \mathbb{E})$ на $\Lambda(B)$.

Покажем, что пространство $\Lambda(B)$ ультраборнологично. По [25, теорема 4.2] ультраборнологичность $\Lambda(B)$ равносильна следующему условию:

$$(P)\quad (\forall\,\mu)\,(\exists\,n,k)\,(\forall\,m,M)\,(\exists\,N,S)\,(\forall\,j)\qquad \frac{1}{b_{j,k,m}} \leqslant \max\left(\frac{1}{b_{j,M,N}}; \frac{1}{b_{j,\mu,n}}\right),$$

т. е.

$$\begin{aligned}\max&\left(H_{K_m}(\mu_j); H_\omega(\mu_j) + \frac{m}{k(k+m)}|\mu_j|\right)\\ &\leqslant \log S + \max\left(\max\left(H_{K_N}(\mu_j); H_\omega(\mu_j) + \frac{N}{M(M+N)}|\mu_j|\right);\right.\\ &\qquad\qquad\left.\max\left(H_{K_n}(\mu_j); H_\omega(\mu_j) + \frac{n}{\mu(\mu+n)}|\mu_j|\right)\right).\end{aligned}$$

Условие (P) выполняется: как и при доказательстве леммы 2.3, можно взять $n := \mu$, $k := 2\mu$, $N := m$ (и $S := 1$). ▷

Следствие 3.2. *Пространство $\Lambda(Q, a, \mathbb{E})$ рефлексивно. Его сильное сопряженное можно отождествить с $K(Q, a, \mathbb{E})$.*

◁ Для каждого $n \in \mathbb{N}$, по [17, лемма 1.2], $K(Q_n, a, \mathbb{E}')'_\beta$ — сильное сопряженное к пространству Фреше — Шварца $K(Q_n, a, \mathbb{E}')$ — можно отождествить с $\Lambda(Q_n, a, \mathbb{E})$. Поэтому $\Lambda(Q, a, \mathbb{E})$ — приведенный проективный предел последовательности (DFS)-пространств. По [25, теорема 3.5] пространство $\Lambda(Q, a, \mathbb{E})'_\beta$ рефлексивно и может быть отождествлено с $\mathrm{ind}_{n\to}\Lambda(Q_n, a, \mathbb{E})'_\beta$, т. е. с $K(Q, a, \mathbb{E}')$. ▷

Лемма 3.3. *Пусть функция $a \in [1, 0]$ отлична от многочлена. Оператор*

$$\rho : A_Q/(a\cdot A_Q) \to \Lambda(Q, a, \mathbb{E}), \quad f + a\cdot A_Q \mapsto \left(f|_{B_j} + I_j\right)_{j\in\mathbb{N}},$$

— линейный топологический изоморфизм «на».

◁ Из определения $A_Q/(a\cdot A_Q)$, $\Lambda(Q, a, \mathbb{E})$ и ρ вытекает, что оператор ρ линейно и непрерывно отображает $A_Q/(a\cdot A_Q)$ в $\Lambda(Q, a, \mathbb{E})$. Если $f \in A_Q$, $\rho(f + a\cdot A_Q) = 0$, то $f|_{B_j} \in I_j$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Значит, функция $f|_{B_j}$ делится на $a|_{B_j}$ для любого $j \in \mathbb{N}$ и f/a — целая функция. Поскольку a имеет вполне регулярный рост, то $f/a \in A_Q$ и $f \in a\cdot A_Q$. Таким образом, отображение ρ инъективно.

Покажем, что $\rho : A_Q/(a\cdot A_Q) \to \Lambda(Q,a,\mathbb{E})$ сюръективно. Используем гомологический метод доказательства утверждений подобного рода, предложенный в [10], и адаптированный к конкретным проективным спектрам в [24, 25]. Его применение основано на том, что для всех $n \in \mathbb{N}$ «локальные» отображения $\rho_{0,n} : A_{Q_n} \to \Lambda(Q_n,a,\mathbb{E})$, $f \to (f|_{B_j})_{j\in\mathbb{N}}$ — топологические гомоморфизмы с ядром $a \cdot A_{Q_n}$.

Пусть $\mathscr{A}_Q$ — проективный спектр пространств A_{Q_n} и отображений вложения i^n_{n+1} : $A_{Q_{n+1}} \to A_{Q_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно [22] (см. доказательство в [22, предложение 6]), для любого $n \in \mathbb{N}$ короткая последовательность

$$0 \longrightarrow A_{Q_n} \xrightarrow{M_a} A_{Q_n} \xrightarrow{\rho_{0,n}} \Lambda(Q_n,a,\mathbb{E}) \longrightarrow 0,$$

в которой M_a — оператор умножения на функцию a, точна (здесь это означает, что операторы $\rho_{0,n}$ сюръективны). По доказательству леммы 2.3 $\mathrm{Proj}^1\mathscr{A}_Q = 0$. По [25, теорема 5.1] отображение $\rho_0 : A_Q \to \Lambda(Q,a,\mathbb{E})$, $\rho_0(f) := (f|_{B_j} + I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сюръективно. При этом $\mathrm{Ker}\,\rho_0 = a \cdot A_Q$. По лемме 3.1 пространство $\Lambda(Q,a,\mathbb{E})$ ультраборнологично. Пространство A_Q, как счетный проективный предел (LB)-пространств, имеет сеть (web) [18, лемма 24.28]. По теореме об открытом отображении [18, Теорема 24.30] оператор ρ — топологический изоморфизм $A_Q/(a \cdot A_Q)$ на $\Lambda(Q,a,\mathbb{E})$. $\rhd$

4. Критерий существования правого обратного к дифференциальному оператору бесконечного порядка

Для функции $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ из $[1,0]$ дифференциальный оператор бесконечного порядка с характеристической функцией a определяется следующим образом [2]:

$$a(D)(f) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}.$$

Если функция a отлична от тождественного нуля, то для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор $a(D)$: $A(Q_n) \to A(Q_n)$ сюръективен [2]. Значит, любой ненулевой оператор $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ сюръективен.

Лемма 4.1. *Пусть $a \in [1,0]\backslash\{0\}$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) Оператор $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный.

(ii) Сопряженный к $a(D)$ оператор $M_a : A_Q \to A_Q$, $f \mapsto af$, имеет линейный непрерывный левый обратный.

(iii) Фактор-отображение $q : A_Q \to A_Q/(a\cdot A_Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный.

$\lhd$ Утверждения (i) и (ii) равносильны вследствие рефлексивности $A(Q)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Пусть L — линейный непрерывный левый обратный к M_a. Отображение $M_a \circ L$ является непрерывным проектором A_Q на $a \cdot A_Q = \mathrm{Im}\, M_a$, а $R(q(f)) := f - M_a \circ L(f)$ — линейным непрерывным правым обратным к $q : A_Q \to A_Q/(a \cdot A_Q)$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Доказательство аналогично доказательству леммы 1.12 в [20]. Пусть R — правый обратный к q. Тогда $I - R\circ q$ — непрерывная проекция A_Q на $\mathrm{Ker}(R\circ q) = \mathrm{Im}\, M_a$, а $L := M_a^{-1} \circ (I - R\circ q)$ — линейный левый обратный к M_a. График оператора $L : A_Q \to A_Q$ замкнут, по лемме 2.3 пространство A_Q ультраборнологично. Кроме того, A_Q имеет сеть (web) (как проективный предел последовательности (LB)-пространств). По теореме о замкнутом графике [18, теорема 24.34] оператор L непрерывен, а значит, является линейным непрерывным левым обратным к M_a. $\rhd$

Если функция $a \in [1,0]$ отлична от многочлена, то символ A_a обозначает множество всех предельных точек последовательности $(z/|z|)_{z \in V(a)}$.

Для множества $M \subset \mathbb{C}$ положим $\Gamma(M) := \{\lambda b : \lambda \geqslant 0,\, b \in M\}$. Пусть $SH(\mathbb{C})$ — множество всех субгармонических в $\mathbb{C}$ функций.

Теорема 4.2. (I) *Пусть a — ненулевой многочлен. Тогда оператор $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный.*

(II) *Пусть функция $a \in [1,0]$ отлична от многочлена. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *Оператор $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный.*

(ii) *Существуют функции $v_t \in SH(\mathbb{C})$ ($t \in \Gamma(A_a)$) такие, что $v_t(t) \geqslant 0$, $t \in \Gamma(A_a)$, и*

$$(\forall\, n)\,(\exists\, n')\,(\forall\, m)\,(\exists\, m') \quad v_t(z) \leqslant H_{nm'}(z) - H_{n'm}(t), \quad z \in \mathbb{C},\ t \in \Gamma(A_a).$$

$\lhd$ (I): Ядро $\operatorname{Ker} a(D)$ оператора $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ конечномерно. Значит, оно топологически дополнимо в $A(Q)$ [11, гл. 1, 3.5]. Так как отображение $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ сюръективно, то по теореме об открытом отображении для (LF)-пространств оно открыто. Поэтому оператор $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный. (Если P — непрерывный проектор $A(Q)$ на $\operatorname{Ker} a(D)$, то линейным непрерывным правым обратным к $a(D)$ является оператор $g = a(D)(f) \mapsto f - P(f)$.)

(i) $\Rightarrow$ (ii): По лемме 4.1 фактор-отображение $A_Q \to A_Q/(a \cdot A_Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный. Вследствие леммы 3.3 существует линейный непрерывный правый обратный τ к оператору $\rho_0 : A_Q \to \Lambda(Q,a,\mathbb{E})$, $f \mapsto (f|_{B_j} + I_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Если сильные сопряженные пространства к A_Q и $\Lambda(Q,a,\mathbb{E})$ отождествить с $A(Q)$ и $K(Q,a,\mathbb{E}')$ соответственно, то сопряженный к τ оператор τ' непрерывно действует из $A(Q)$ в $K(Q,a,\mathbb{E}')$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. По факторизационной теореме Гротендика [12, теорема 6.5.1] найдется $n' \in \mathbb{N}$ такое, что τ' отображает непрерывно $A(Q_n)$ в $K(Q_{n'},a,\mathbb{E}')$. Поэтому оператор τ'', сопряженный к $\tau' : A(Q_n) \to K(Q_{n'},a,\mathbb{E}')$, непрерывен из $\Lambda(Q_{n'},a,\mathbb{E}) \simeq K(Q_{n'},a,\mathbb{E}')'_\beta$ в $A_{Q_n} \simeq A(Q_n)'_\beta$. Вследствие рефлексивности A_Q и $\Lambda(Q,a,\mathbb{E})$ выполняется равенство $\tau = \tau''|_{\Lambda(Q,a,\mathbb{E})}$. Таким образом, оператор τ продолжается (единственным образом) до линейного непрерывного оператора из $\Lambda(Q_{n'},a,\mathbb{E})$ в A_{Q_n}. По факторизационной теореме Гротендика для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется $m' \in \mathbb{N}$, для которого τ отображает непрерывно $\Lambda_m(Q_{n'},a,\mathbb{E})$ в $A_{nm'}$. Значит,

$$(\forall\, n)\,(\exists\, n')\,(\forall\, m)\,(\exists\, m')\,(\exists\, C_{nm} > 0) \qquad \|\tau(X)\|_{nm'} \leqslant C_{nm} |||X|||_{n'm},\ \ X \in \Lambda_m(Q_{n'},a,\mathbb{E}). \tag{1}$$

Зафиксируем $t \in A_a$. Существуют последовательность нулей t_s функции a, возрастающая последовательность $j_s \in \mathbb{N}$ такие, что $t_s \in B_{j_s}$ и $t_s/|t_s| \to t$ при $s \to \infty$. Так как $\lim\limits_{j\to\infty} r_j/|\mu_j| = 0$, то $\lim\limits_{s\to\infty} \mu_{j_s}/|t_s| = t$. Для $s \in \mathbb{N}$ выберем последовательность X_s следующим образом: $(X_s)_{j_s} \equiv 1 (\operatorname{mod} I_{j_s})$ (т. е. $(X_s)_{j_s}$ — класс эквивалентности, содержащий функцию, тождественно равную 1 на B_{j_s}) и $(X_s)_l \equiv 0 (\operatorname{mod} I_l)$, если $l \neq j_s$. Положим $f_s := \tau(X_s)$, $s \in \mathbb{N}$. Поскольку $|||X_s|||_{n'm} \leqslant \exp(-H_{n'm}(\mu_{j_s}))$, то, вследствие (1),

$$\|f_s\|_{nm'} \leqslant C_{nm} \exp(-H_{n'm}(\mu_{j_s})),$$

откуда

$$|f_s(z)| \leqslant C_{nm} \exp(H_{nm'}(z) - H_{n'm}(\mu_{j_s})), \quad z \in \mathbb{C},\ s \in \mathbb{N}.$$

Функции $u_s(z) := \log|f_z(z)|$ субгармоничны в $\mathbb{C}$ и удовлетворяют неравенствам

$$u_s(z) \leqslant \log C_{nm} + H_{nm'}(z) - H_{n'm}(\mu_{j_s}), \quad z \in \mathbb{C},\ s \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

По построению $f|_{B_{j_s}} + I_{j_s} = (X_s)_{j_s} = 1 + I_{j_s}$. Значит, существует функция $g_s \in I_{j_s}$, для которой $f|_{B_{j_s}} = 1 + g_s$. Следовательно, $f_s(t_s) = 1 + g(t_s) = 1$ и $u_s(t_s) = \log|f(t_s)| = 0$, $s \in \mathbb{N}$.

Пусть v_t — полунепрерывная сверху регуляризация функции $\limsup\limits_{s\to\infty} u_s(t_s z/t)/|t_s|$. Функция v_t субгармонична в $\mathbb{C}$ и $v_t(t) \geqslant \limsup\limits_{s\to\infty} u_s(t_s)/|t_s| \geqslant 0$. Из оценок (2), с учетом того, что $\mu_{j_s}/|t_s| \to t$, вытекает:

$$\limsup_{s\to\infty} u_s(t_s z/t)/|t_s| \leqslant H_{nm'}(z) - H_{n'm}(t), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом,

$$v_t(z) \leqslant H_{nm'}(z) - H_{n'm}(t), \quad t \in A_a,\ z \in \mathbb{C}.$$

Функции $v_{\lambda t}(z) := \lambda v_t(z/\lambda)$, $\lambda > 0$, $t \in A_a$, $z \in \mathbb{C}$, $v_0 \equiv 0$ являются искомыми.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Воспользуемся конструкцией, предложенной в [22]. Пусть e_{jk}, $1 \leqslant k \leqslant k_j$, — базис Ауэрбаха в E_j ($k_j := \dim E_j$), а X_{jk} — последовательности $(0, \ldots, 0, e_{jk}, 0, \ldots)$, в которых единственная ненулевая координата e_{jk} находится на $(k + \sum_{i=0}^{j-1} k_i)$-ой позиции ($k_0 := 0$). По доказательству [17, предложение 1.4] последовательность $(X_{jk})_{1\leqslant k\leqslant k_j, j\in\mathbb{N}}$ — абсолютный базис в $\Lambda(Q, a, \mathbb{E})$.

Выберем последовательность нулей $z_j \in B_j$, $j \in \mathbb{N}$, функции a. Существуют точки $t_j \in A_a$ такие, что $\varepsilon_j := |z_j/|z_j| - t_j| \to 0$, $j \to \infty$ (без ограничения общности можно считать, что $z_j \neq 0$, $j \in \mathbb{N}$). Положим $R_j := 2r_j + \varepsilon_j|z_j|$, $j \in \mathbb{N}$, и

$$V_j(z) := \sup_{|w|\leqslant R_j} v_{|z_j|t_j}(z + w), \quad z \in \mathbb{C},\ j \in \mathbb{N}.$$

Функции V_j субгармоничны в $\mathbb{C}$. Поскольку $v_{|z_j|t_j}(|z_j|t_j) \geqslant 0$, то $V_j|_{B_j} \geqslant 0$, $j \in \mathbb{N}$. Из оценок сверху для функций v_t следует, что

$$(\forall\, n)\,(\exists\, n')\,(\forall\, m)\,(\exists\, m')\,(\exists\, C \geqslant 0) \quad V_j(z) \leqslant H_{nm'}(z) - H_{n'm}(\mu_j) + C, \quad z \in \mathbb{C},\ j \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

В [22, предложение 6] показано, что существуют локально ограниченная функция $q : \mathbb{C} \to [0, +\infty)$ (зависящая только от a), для которой $q(z) = o(|z|)$, $z \to \infty$, постоянная $C_1 > 0$, целые функции g_{jk}, $1 \leqslant k \leqslant k_j$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\rho_0(g_{jk}) = (g_{jk}|_{B_l} + I_l)_{l\in\mathbb{N}} = X_{jk} \tag{4}$$

и

$$|g_{jk}(z)| \leqslant C_1 \exp\Big(\sup_{|w-z|\leqslant 1} \big(V_j(w) + q(z)\big)\Big), \quad z \in \mathbb{C},\ 1 \leqslant k \leqslant k_j,\ j \in \mathbb{N}.$$

Вследствие (3)

$$(\forall\, n)\,(\exists\, n')\,(\forall\, m)\,(\exists\, m')\,(\exists\, C_2 \geqslant 0)$$
$$|g_{jk}(z)| \leqslant C_2 \exp(H_{nm'}(z) - H_{n'm}(\mu_j)), \quad z \in \mathbb{C},\ 1 \leqslant k \leqslant k_j,\ j \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$R\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant k_j,\\ j\in\mathbb{N}}} c_{jk} X_{jk}\Bigg) := \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant k_j,\\ j\in\mathbb{N}}} c_{jk} g_{jk}.$$

Из оценок сверху для $|g_{jk}|$ вытекает, что все функции g_{jk} принадлежат A_Q, ряд по функциям g_{jk} в определении R абсолютно сходится в A_Q и оператор R линейно и непрерывно отображает $\Lambda(Q,a,\mathbb{E})$ в A_Q. Вследствие равенств (4) R — линейный непрерывный правый обратный к $\rho_0 : A_Q \to \Lambda(Q,a,\mathbb{E})$. По лемме 3.3 фактор-отображение $q : A_Q \to A_Q/(a \cdot A_Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный. В силу леммы 4.1 существует линейный непрерывный правый обратный к $a(D) : A(Q) \to A(Q)$. $\rhd$

Замечание 4.3. Пусть функция $a \in [1,0]$ отлична от многочлена и оператор $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный. Тогда

(i) $H_Q < +\infty$ на A_a;

(ii) Для любого $b \in A_a$ не существует открытой окрестности точки b, в которой функция H_Q гармоническая.

$\lhd$ (i): Предположим, что существует $b \in A_a$ такое, что $H_Q(b) = +\infty$. По теореме 4.2 существует функция $v \in SH(\mathbb{C})$ такая, что $v(b) \geqslant 0$ и

$$(\forall\, n)\,(\exists\, n')\,(\forall\, m)\,(\exists\, m') \quad v(z) \leqslant H_{nm'}(z) - H_{n'm}(b), \quad z \in \mathbb{C},$$

т. е.

$$v(z) \leqslant \max\left(H_{K_{m'}}(z); H_\omega(z) + \frac{m'|z|}{n(n+m')}\right) \\ - \max\left(H_{K_m}(b); H_\omega(b) + \frac{m}{n'(n'+m)}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Выберем $z_0 \in \mathbb{C}$ такое, что $|z_0| = 1$ и $H_Q(z_0) < +\infty$. Тогда для любого $t > 0$, взяв в (5) n' для $n = 1$ и перейдя к пределу при $m \to \infty$, получим:

$$v(tz_0) \leqslant \max\left(H_Q(tz_0); H_\omega(tz_0) + t\right) - \max\left(H_Q(b); H_\omega(b) + \frac{1}{n'}\right) = -\infty.$$

Получено противоречие, поскольку множество $\{tz_0 : t > 0\}$ неполярно.

(ii): Предположим, что найдется точка $b \in A_a$, в некоторой окрестности которой функция H_Q гармоническая. Тогда H_Q гармоническая в некотором открытом угле Γ с началом в 0, содержащем b. По теореме 4.2 существуют функции $v_{rb} \in SH(\mathbb{C})$, $r > 0$, такие, что $v_{rb}(rb) \geqslant 0$ и

$$\begin{gathered}(\forall\, n)\,(\exists\, n')\,(\forall\, m)\,(\exists\, m')\,(\forall\, z \in \Gamma)\,(\forall\, r > 0) \\ u_r(z) := v_{rb}(z) - H_Q(z) \leqslant \max\left(H_{K_{m'}}(z); H_\omega(z) + \frac{m'|z|}{n(n+m')}\right) \\ - \max\left(H_{K_m}(rb); H_\omega(rb) + \frac{rm}{n'(n'+m)}\right) - H_Q(z).\end{gathered} \quad (6)$$

При этом функции u_r, $r > 0$, — субгармонические в Γ.

В неравенстве (6) зафиксируем n (и n') и перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получим

$$u_r(z) \leqslant \max\left(H_Q(z); H_\omega(z) + \frac{|z|}{n}\right) \\ - \max\left(rH_Q(b); rH_\omega(b) + \frac{r}{n'}\right) - H_Q(z), \quad z \in \Gamma,\ r > 0. \quad (7)$$

Переходя теперь к пределу при $n \to \infty$, будем иметь

$$u_r(z) \leqslant \max\left(H_Q(z); H_\omega(z)\right) - r\max\left(H_Q(b); H_\omega(b)\right) - H_Q(z)$$
$$= H_Q(z) - H_Q(z) - rH_Q(b) = -rH_Q(b), \quad z \in \Gamma.$$

Кроме того,

$$u_r(rb) \geqslant -H_Q(rb) = -rH_Q(b), \quad r > 0.$$

По принципу максимума для субгармонических функций для любого $r > 0$

$$u_r \equiv -rH_Q(b). \tag{8}$$

Пусть $H_Q(b) = H_\omega(b)$. Из неравенства (7) следует, что

$$u_r(z) \leqslant \max\left(H_Q(z); H_\omega(z) + \frac{|z|}{n}\right) - H_Q(z) - rH_Q(b) - \frac{r}{n'}, \quad z \in \Gamma,\ r > 0.$$

Возьмем $r = 1$ и $n = 1$. Тогда для $z \in \Gamma$ таких, что $|z|$ достаточно мало, $u_1(z) < -H_Q(b)$. Получено противоречие с (8).

Пусть $H_Q(b) > H_\omega(b)$. Тогда угол Γ можно выбрать так, что существует l_0 такое, что для любых l, $s \geqslant l_0$

$$H_{K_l}(z) \geqslant H_\omega(z) + \frac{l|z|}{s(s+l)}, \quad z \in \Gamma.$$

Возьмем в (6) $n := l_0$, какое-либо $m \geqslant l_0$ и выберем для него $m' \geqslant m$. Тогда

$$u_r(z) \leqslant H_{K_{m'}}(z) - H_Q(z) - rH_{K_m}(b), \quad z \in \Gamma,\ r > 0.$$

Зафиксировав в последнем неравенстве $r > 0$ и перейдя к пределу при $z \to \infty$, получим, что $\lim\limits_{\substack{z\to\infty,\\ z\in\Gamma}} u_r(z) = -\infty$. Это противоречит (8). $\rhd$

Приведем теперь некоторые определения из теории граничного поведения конформных отображений. Положим $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Пусть Ω — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, φ — конформное отображение единичного круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на Ω. Для $r \in (0, 1)$ положим $\Omega_r := \varphi(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\})$. Все компакты Ω_r выпуклые. Пусть H_r — опорная функция Ω_r. Согласно [21] существует

$$D_\Omega(z) := \lim_{r\to 1-0} \frac{H_\Omega(z) - H_r(z)}{1-r} \in (0, +\infty], \quad |z| = 1.$$

Пусть теперь Ω — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, ψ — конформное отображение $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ на $\mathbb{C}\backslash\Omega$ такое, что $\psi(\infty) = \infty$. Положим $\Omega_r := \mathbb{C}\backslash\psi(\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\})$, $r > 1$. Все компакты Ω_r выпуклые. Пусть H_r — опорная функция Ω_r. Согласно [9] существует

$$D_\Omega(z) := \lim_{r\to 1+0} \frac{H_r(z) - H_\Omega(z)}{r-1} \in [0, +\infty), \quad |z| = 1.$$

Пусть $\omega := (\partial Q)\backslash Q$, $\omega_0 := (\partial Q)\backslash\omega$. Введем множества опорных направлений

$$S_0 := \left\{a \in S : \operatorname{Re}(wa) = H_Q(a) \text{ для некоторого } w \in \omega_0\right\},\ S_\omega := S\backslash S_0.$$

Согласно [13, лемма 4.4] множество S_0 открыто в S.

Теорема 4.4. *Всякий ненулевой оператор $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(i) Q ограничено.

(ii) Функция $D_{\mathrm{int}\,Q}$ ограничена на каждом компакте в S_0.

(iii) Функция $1/D_{\overline{Q}}$ ограничена на некоторой окрестности множества S_ω в S.

$\lhd$ Пусть всякий ненулевой оператор $a(D) : A(Q) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный. Так как для любого $t \in S$ существует ненулевая функция $a \in [1,0]$, для которой $A_a = \{t\}$, то по замечанию 4.3 $H_Q(t) < +\infty$. Следовательно, Q ограничено. Согласно же [8, следствие 2.5] для ограниченного множества Q условия (ii) и (iii) равносильны существованию линейного непрерывного правого обратного у любого ненулевого оператора $a(D) : A(Q) \to A(Q)$. $\rhd$

Литература

1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.
2. *Коробейник Ю. Ф.* О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях // Мат. сб.—1968.—Т. 75 (117), №2.—С. 225–234.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, вып. 1.—С. 73–126.
4. *Коробейник Ю. Ф.* О счетной определимости множеств // Мат. заметки.—1996.—Т. 59, вып. 3.—С. 383–395.
5. *Коробейник Ю. Ф.* О правом обратном для оператора свертки в пространствах ростков на связных множествах в $\mathbb{C}$ // Мат. сб.—1996.—Т. 187, № 1.—С. 55–86.
6. *Красичков-Терновский И. Ф.* Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Мат. заметки.—1978.—Т. 24, B. 4.—С. 531–546.
7. *Мелихов С. Н.* Выпуклые конформные отображения и правые обратные к оператору представления рядами экспонент // Тр. Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 14. Материалы междунар. науч. конф. (Казань, 18–24 марта 2002 г.).—Казань: Казанское мат. общество, 2002.—С. 213–227.
8. *Мелихов С. Н.* Аналитические решения дифференциальных уравнений бесконечного порядка на выпуклых множествах с препятствием, открытым на границе // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и мат. моделированию.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004.—С. 141–162.
9. *Мелихов С. Н., Момм З.* О линейном непрерывном правом обратном для оператора свертки на пространствах ростков аналитических функций на выпуклых компактах в $\mathbb{C}$ // Изв. вузов. Математика.—1997.—№ 5.—С. 38–48.
10. *Паламодов В. П.* Функтор проективного предела в категории линейных топологических пространств // Мат. сб.—1968.—Т. 75.—С. 3–66.
11. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—360 с.
12. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.
13. *Bonet J., Meise R., Melikhov S. N.* The Dual of the Space of Holomorphic Functions on Locally Closed Sets // Publ. Mat.—2005.—Vol. 49.—P. 487–509.
14. *Jarchow H.* Locally Convex Spaces.—Stuttgart: Teubner, 1981.
15. *Langenbruch M.* Continuous linear right inverses for convolution operators in spaces of real analytic functions // Studia Math.—1994.—Vol. 110.—P. 65–82.
16. *Martineau A.* Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes // Math. Annal.—1966.—Vol. 163.—P. 62–88.
17. *Meise R.* Sequence space representations for (DFN)-algebras of entire functions modulo closed ideals // J. Reine und Angew. Math.—1985.—Vol. 363.—P. 59–95.
18. *Meise R., Vogt D.* Einführung in die Funktionalanalysis.—Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1992.—418 s.
19. *Melikhov S. N., Momm S.* Solutions operators for convoluion equations on the germs of analytic functions on compact convex sets of $\mathbb{C}^N$ // Stud. Math.—1995.—Vol. 117.—P. 79–99.
20. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic solutions of convolution equations on convex sets with obstacle in the boundary // Math. Scand.—2000.—Vol. 86.—P. 293–319.

21. *Momm S.* Convex univalent functions and continuous linear right inverses // J. Functional Analysis.—1992.—Vol. 103.—P. 85–103.
22. *Momm S.* Convolution equations on the analytic functions on convex domains in the plane // Bull. Sci. Math.—1994.—Vol. 118.—P. 259–270.
23. *Taylor B. A.* On weighted polynomial approximation of entire functions // Pac. J. Math.—1971.—Vol. 29.—P. 523–539.
24. *Vogt D.* Lectures on projective spectra of (DF)-spaces. Seminar lectures. AG Funktionalanalysis.—Düsseldorf: Wuppertal, 1987.—36 p.
25. *Vogt D.* Topics on projective spectra of (LB)-spaces // Advances in the theory of Fréchet spaces / T. Terzioğlu (ed.). Istambul, 1987, NATO ASI Series C.—Dordrecht: Kluwer, 1989.—Vol. 287.—P. 11–27.
26. *Wengenroth J.* Acyclic inductive spectra of Fréchet spaces // Stud. Math.—1996.—Vol. 120.—P. 247–258.

Статья поступила 11 августа 2014 г.

Баркина Ульяна Витальевна
Южный федеральный университет,
аспирант кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: barkinauv@rambler.ru

Мелихов Сергей Николаевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
Южный математический институт,
ведущий научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: melih@math.rsu.ru

ON A SOLUTION OPERATOR FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF INFINITY ORDER ON CONVEX SETS

Barkina U. V., Melikhov S. N.

Let Q be a convex (not necessarily bounded) set in $\mathbb{C}$ with the nonempty interior which has a countable neighborhood base of convex domains; $A(Q)$ be the space of germs of all analytic functions on Q with its natural inductive limit topology. Necessary and sufficient conditions under which a fixed nonzero differential operator of infinite order with constant coefficients which acts in $A(Q)$ has a continuous linear right inverse are established. This criterion is obtained in terms of the existence of a special family of subharmonic functions.

Key words: continuous linear right inverse, differential operator of infinite order, space of germs of analytic functions, convex set.