Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 4, С. 9–15

УДК **517.928**

ОБ АСИМПТОТИКЕ ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА[1]

М. Ш. Бадахов, О. Ю. Веремеенко, А. Б. Шабат

Рассматривается оператор Шредингера на прямой с финитным потенциалом. Для ряда примеров δ-образных потенциалов установлена асимптотика комплексных полюсов коэффицента прохождения $1/a(k)$. Планируется использовать эти полюса для построения эффективных приближенных методов решения одномерной обратной задачи рассеяния.

Ключевые слова: обратная задача рассеяния, нули целых функций.

1. Матрица рассеяния

Рассматривается теория рассеяния для уравнения Шредингера с финитным потенциалом. Мы заменяем потенциал $u(x)$ конечной суммой δ-функций:

$$\psi'' = (k^2 + u(x))\psi, \quad u(x) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \delta(x - x_j), \quad k \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Для произвольного непрерывного решения $\psi = \psi(x,k)$ уравнения (1),

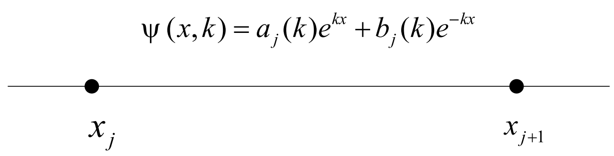
$$\psi(x,k) = a(j,k)e^{kx} + b(j,k)e^{-kx}, \quad x \in I_j = [x_j, x_{j+1}], \tag{2}$$

условия скачка его первых производных в узле x_j:

$$\lim_{x \to x_j + 0} \psi'(x,k) - \lim_{x \to x_j - 0} \psi'(x,k) = \gamma_j \psi(x_j, k), \tag{3}$$

позволяют выразить коэффициенты $a(j,k)$, $b(j,k)$ через $a(j-1,k)$, $b(j-1,k)$ и найти матрицу перехода в узле x_j с отрезка $I_{j-1} = [x_{j-1}, x_j]$ на следующий отрезок I_j с концами x_j и x_{j+1}:

$$(a,b)(j,k) = (a,b)(j-1,k) \times S_j(k), \qquad S_j(k) = \frac{1}{2k}\begin{pmatrix} 2k + \gamma_j & -\gamma_j e^{2kx_j} \\ \gamma_j e^{-2kx_j} & 2k - \gamma_j \end{pmatrix}. \tag{4}$$



[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 13-01-00070 и № 13-01-12460-0ФИ-М-2013, а также Программы поддержки научных школ, проект № НШ-3139.2014.2.

Пример 1. Пусть $k = 0$. Тогда при $u(x) = \gamma_j \delta(x - x_j)$

$$\psi(x) = \begin{cases} c_1 + c_2 x, & x \leqslant x_j; \\ c_3 + c_4 x, & x \geqslant x_j, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 x_j = c_3 + c_4 x_j; \\ c_4 - c_2 = \gamma_j (c_1 + c_2 x_j). \end{cases}$$

Разрешив эти уравнения относительно (c_3, c_4), находим, что

$$\begin{cases} c_3 = c_1(1 - \gamma_j x_j) - c_2 \gamma_j {x_j}^2; \\ c_4 = c_1 \gamma_j + c_2 (1 + \gamma_j x_j), \end{cases} \Leftrightarrow \quad (c_3, c_4) = (c_1, c_2) \begin{pmatrix} 1 - \gamma_j x_j & \gamma \\ -\gamma_j {x_j}^2 & 1 + \gamma_j x_j \end{pmatrix}.$$

Аналогичные вычисления при $k \neq 0$ приводят к формуле (4) и матрице $S_j(k)$, которую мы называем *элементарной матрицей рассеяния.*

Легко видеть, что двойному переходу с отрезка I_{j-1} на отрезок I_{j+1}, соответствует произведение соответствующих матриц S_i с $i = j, j+1$:

$$(a, b)(j + 1) = (a, b)(j) S_{j+1} = (a, b)(j - 1) S_j S_{j+1},$$

а в случае конечной суммы (1) с узлами $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, «суммарная» матрица рассеяния имеет следующий вид:

$$S(n; k) = S_1(k) \ldots S_n(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ b(-k) & a(-k) \end{pmatrix}, \quad a(k)a(-k) = 1 + b(k)b(-k). \tag{5}$$

Так как элементарные матрицы рассеяния имеют в нуле $k = 0$ полюс первого порядка возникает вопрос о порядке полюса в нуле у их произведения (5). Ниже (см. лемму 1) будет доказано, что порядок полюса этого произведения не может превосходить единицы.

В «прямой» задаче рассеяния требуется построить фундаментальную систему решений уравнения Шредингера с убывающим на бесконечности потенциалом $u(x)$:

$$\psi'' = (k^2 + u(x))\psi, \quad u(x) \to 0, \quad x \to \pm\infty. \tag{6}$$

Решения уравнения Шредингера (1), которые имеют чисто экспоненциальное поведение при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ называются в теории рассеяния *функциями Йоста.* В рассматриваемом нами финитном случае пара функций Йоста, связанная с правой полуплоскостью спектрального параметра

$$\mathbb{R}^2_+ = \{k \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re} k > 0\}, \tag{7}$$

определяется следующим образом:

$$\psi_1^+(x, k) = \begin{cases} e^{kx}, & x \approx -\infty; \\ a(k)e^{kx} + b(k)e^{-kx}, & x \approx \infty, \end{cases} \tag{8}$$

$$\psi_1^-(x, k) = \begin{cases} a(k)e^{-kx} - b(-k)e^{kx}, & x \approx -\infty; \\ e^{-kx}, & x \approx \infty. \end{cases} \tag{9}$$

Оба эти решения стремятся к нулю на «своей» бесконечности, когда спектральный параметр k находится в правой полуплоскости (7), а их вронскиан $\langle f, g \rangle = fg' - f'g$:

$$\langle \psi_1^+(x, k), \psi_1^-(x, k) \rangle = \langle a(k)e^{kx} + b(k)e^{-kx}, e^{-kx} \rangle = -2ka(k). \tag{10}$$

Поэтому нули $a(k)$ в правой полуплоскости определяют *собственные значения* $\lambda = -k^2$ спектральной задачи (1) с нулевыми краевыми условиями при $x \to \pm\infty$. Двойственное к (8) решение (9) соответствует замене $x \to -x$ и обращению матрицы рассеяния (5). Дополнительная пара функций Йоста $\psi_2^{\pm}(x, k)$, связанная с левой полуплоскостью спектрального параметра, определяется в случае финитного потенциала формулами:

$$\psi_2^+(x, k) = \psi_1^-(x, -k), \quad \psi_2^-(x, k) = \psi_1^+(x, -k).$$

Можно проверить, что

$$\psi_1^+(x, k) = a(k)\psi_2^+(x, k) + b(k)\psi_1^-(x, k) \tag{11}$$

и, что $\langle \psi_1^-, \psi_2^+ \rangle = 2k$.

В *обратной задаче рассеяния* требуется восстановить функции Йоста по матрице рассеяния. Роль *данных* обратной задачи в рассматриваемом финитном случае играют элементы $a(k) = a(N, k)$ и $b(k) = b(N, k)$ матрицы рассеяния. Единственность финитного потенциала с заданными $a(k)$ и $b(k)$ была установлена двумя существенно различными способами в работах [4] и [6].

Лемма 1. *Пусть матрица $S = \prod S_j$, является произведением конечного числа элементарных матриц рассеяния (4), соответствующих δ-образным потенциалам. Тогда матричная функция $2kS(k)$ является целой и ее структура в точке $k = 0$ имеет следующий вид:*

$$\lim_{k \to 0} 2kS(n, k) = \alpha_0(n) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

где коэффициент $\alpha_0(n) \neq 0$ в случае общего положения.

$\lhd$ Введем сокращенные обозначения

$$e_j = \exp(2kx_j), \quad \bar{e}_j = \exp(-2kx_j), \quad \hat{\gamma}_j = \gamma_j/2k.$$

Доказательство проводится индукцией по числу n сомножителей в формуле

$$S = \prod_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 + \hat{\gamma}_j & -e_j\hat{\gamma}_j \\ \bar{e}_j\hat{\gamma}_j & 1 - \hat{\gamma}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(n, k) & b(n, k) \\ \beta(n, -k) & a(n, -k) \end{pmatrix},$$

из которой следуют рекуррентные формулы

$$\begin{cases} a(n, k) = (1 + \hat{\gamma}_n)a(n-1, k) + \hat{\gamma}_n\bar{e}_n b(n-1, k); \\ b(n, k) = -\hat{\gamma}_n e_n a(n-1, k) + (1 - \hat{\gamma}_n)b(n-1, k). \end{cases} \tag{12}$$

Непосредственным вычислением получаем, что

$$2k \begin{cases} a(n-1, k) = \alpha_0 + 2k\alpha_1 + \ldots; \\ b(n-1, k) = -\alpha_0 + 2k\beta_1 + \ldots, \end{cases} \Rightarrow 2k \begin{cases} a(n, k) = \alpha_0(1 + \gamma_n x_n) + \gamma_n(\alpha_1 + \beta_1) + \ldots; \\ b(n, k) = -\alpha_0(1 + \gamma_n x_n) - \gamma_n(\alpha_1 + \beta_1) + \ldots \end{cases}$$

Поэтому сумма $a(n', k) + b(n', k)$ регулярна в точке $k = 0$ при $n' = n$, если она была регулярна при $n' = n - 1$. При $n = 1$ утверждение леммы следует из формулы (4). $\rhd$

В недавно опубликованной работе [10] рассматривается упрощенный вариант обратной задачи рассеяния, основанный на рациональной аппроксимации типа [2], отношения двух функций Йоста (8) и (9), подобных e^{kx} и e^{-kx}, соответственно, в правой полуплоскости (7):

$$R(x,k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi_1^+(x,k)}{\psi_1^-(x,k)} \times e^{-2kx}. \tag{13}$$

В качестве узлов $k = k_j$ интерполяционной задачи для $R(x,k) = \rho_j(x)$, $k = k_j$, выбираются нули элемента $a(k)$ матрицы рассеяния. При этом, в силу приведенного выше соотношения (11)

$$a(k) = 0 \;\Rightarrow\; \psi_1^+(x,k) = b(k)\psi_1^-(x,k) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\rho_j(x) = -2k_j\rho_j(x). \tag{14}$$

Замечание. Сформулированная интерполяционная задача (13), (14) является обобщением Баргмановского случая N-солитонных потенциалов (ср. [9, 10]), когда вещественные узлы интерполяции k_j, $j = 1,\dots,N$, располагаются в правой полуплоскости (7) и к ним добавляются $N+1$ узлов с $k = k_j' = -k_j$ и $k_0 = 0$. В силу [10] при любом расположении узлов, интерполяционная задача (13), (14) позволяет строить точные решения уравнений типа KdV и NLS. Вопрос о более общих достаточных условиях регулярности таких решений, в терминах условий на расположение узлов интерполяции k_j, представляет поэтому несомненный интерес, выходящий за рамки обратной задачи рассеяния для операторов Шредингера.

2. Нули $a(k)$ при $N = 2$ и $N = 3$

При $N = 1$, $u(x) = \gamma_1\delta(x - x_1)$ единственный нуль k_1 функции $2ka(k) = 2k + \gamma_1$ находится в правой полуплоскости при отрицательном γ_1. Ему соответствует собственная функция

$$\varphi(x) = e^{-k_1|x-x_1|} \to 0, \quad x \to \pm\infty.$$

При $N = 2$ и потенциале $u(x) = \gamma_1\delta(x - x_1) + \gamma_2\delta(x - x_2)$ рекуррентные формулы (12) дают[2]

$$a(k) = 1 + \frac{1}{2k}[\gamma_1 + \gamma_2] + \frac{1}{4k^2}\gamma_1\gamma_2E_{12}, \quad E_{12} = 1 - e^{2kx_{12}}, \quad x_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} x_i - x_j. \tag{15}$$

Уравнение $a(k) = 0$ для нулей вронскиана (10) несколько упрощается в случаях $\gamma_1 \pm \gamma_2 = 0$, соответствующих нечетным (четным) вещественным потенциалам $u(x)$. В частности, при $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = -2$, $x_{12} = -1$ в результате численных экспериментов находим, что соответствующее уравнение сводится к уточнению численных значений подгоночных коэффициентов в формуле

$$(1 - k^2)e^{2k} = 1 \;\Rightarrow\; k = z_n = C_1(n) + C_2(n)\log n + i(n\pi + \varepsilon_n).$$

При $C_1(n) \approx 1.145$; $C_2(n) = -1$, $\varepsilon_n = \varepsilon_0$ эта формула оказывается асимптотически правильной и, в дополнение к $z_0 = 0.916563$[3], остается привести численные значения нескольких первых нулей вронскиана, расположенных во втором квадранте полуплоскости

$$z_1 \approx -1.14 + 2.78i, \quad z_2 \approx -1.85 + 5.60i, \quad z_3 \approx -2.25 + 9.17i, \;\dots$$

[2] При $N > 1$ можно показать, что целая функция $2ka(k) = 0$ принадлежит специальному классу, рассматриваемому в монографии [1].

[3] Этот нуль дает единственное собственное значение $\lambda = -z_0^2$.

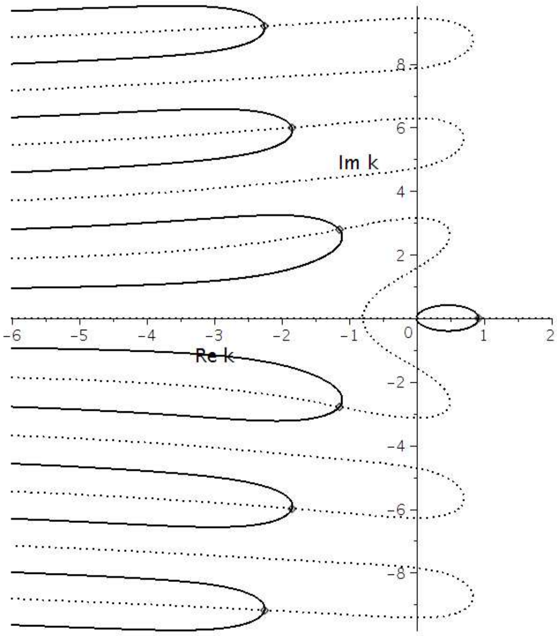


Рис. 1. $\gamma_1 = 2,\ \gamma_2 = -2.$

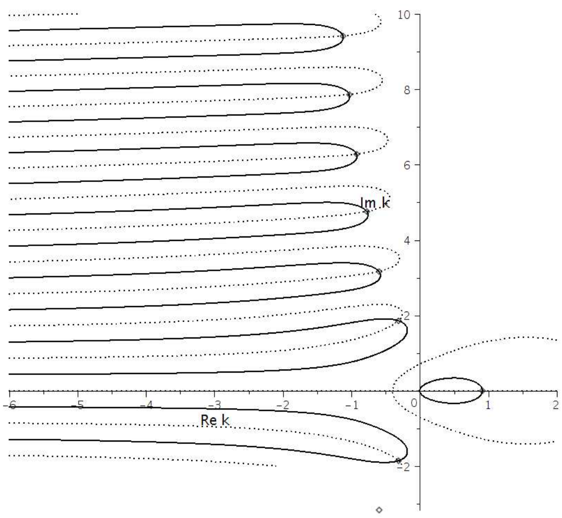


Рис. 2. $\gamma_1 = -2,\ \gamma_2 = 2,\ \gamma_3 = 2.$

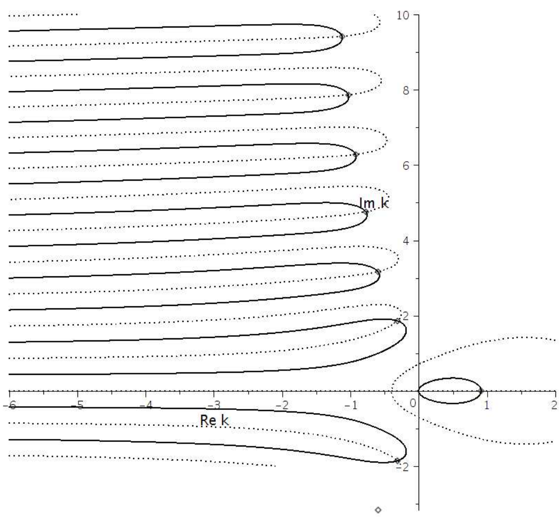


Рис. 3. $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 2,\ \gamma_3 = -2.$

Нули второго коэффициента $b(k)$ находятся при этом явно:

$$k^2 b(k) = 2(k-1)\operatorname{sh}(k) = 0 \ \Rightarrow\ k_0 = 1, \quad k_n = in\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Для четного потенциала нули $a(k)$ являются единицами для $\pm b(k)$:

$$u(x) = u(-x) \ \Rightarrow\ b(-k) = -b(k) \ \Rightarrow\ a(k)a(-k) = 1 - b^2(k) = (1-b(k))(1+b(k)). \quad (16)$$

При $N = 3$ аналогичная (15) формула принимает следующий вид:

$$a(3,k) = 1 + \sum_j \hat\gamma_j + \sum_{i<j} \hat\gamma_i \hat\gamma_j E_{ij} + \hat\gamma_1\hat\gamma_2\hat\gamma_3 E_{12}E_{23}, \quad E_{ij} = 1 - e^{2kx_{ij}}, \quad (17)$$

$$b(3,k) = -\sum_j \hat\gamma_j e_j + \sum_{i<j} \hat\gamma_i\hat\gamma_j (e_i - e_j) + \hat\gamma_1\hat\gamma_2\hat\gamma_3 (e_2 - e_3 - e_1 + e_1 \bar e_2 e_3). \quad (18)$$

Заметим, что если $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, то $E_{12} = E_{23} = 1 - e^{2k}$, и, как следствие, γ_1 и γ_3 в формулу (17) входят симметрично (т. е. при замене γ_1 на γ_3, γ_3 на γ_1 формула не меняет своего вида).

Это показывает, что для однозначного восстановления потенциала нужно знать и $a(k)$, и $b(k)$.

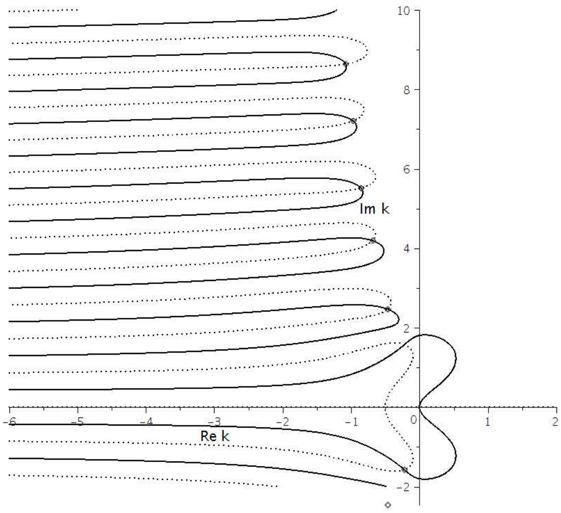


Рис. 4. $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 2$, $\gamma_3 = 2$.

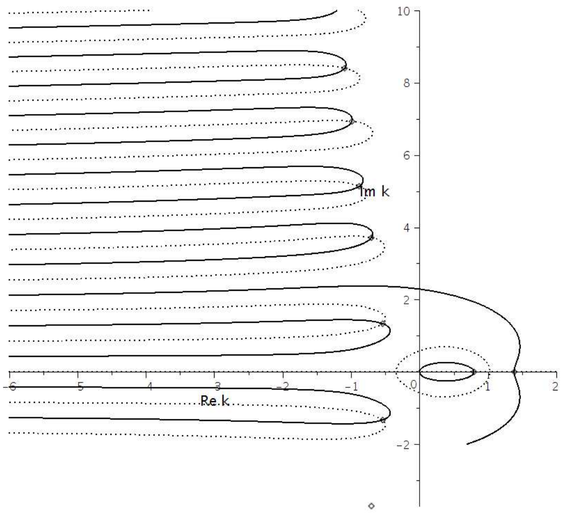


Рис. 5. $\gamma_1 = -2$, $\gamma_2 = -2$, $\gamma_3 = -2$.

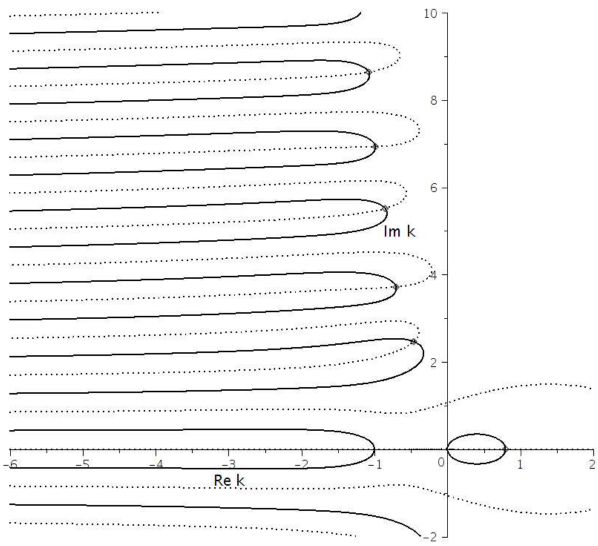


Рис. 6. $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = -2$, $\gamma_3 = 2$; асимптотическая формула для нулей $a(k)$ в левой полуплоскости при $N = 3$ $a(k) \approx 1 - \frac{\alpha}{k^2} e^{-2kx_{31}}$, $k = x + iy = \rho e^{i\theta}$, $x < 0$.

Мы благодарим В. Э. Адлера за помощь в организации вычисления корней нулей $a(k)$ в § 2 данной работы.

Литература

1. *Koosis P.* The logariphmic integral, I.—Cambridge, 1997.
2. *Baker G., Graves-Morris P.* Pade approximants, 2nd ed. // Enciclopedia of Math. and its Appl.—Cambridge: CUP, 1996.—Vol. 59.—P. 335–414.

3. *Альбеверио С., Хёэг-Крон Р., Гестези Ф.* Решаемые модели в квантовой механике.—М.: Мир, 1991.—569 с.
4. *Хабибуллин И., Шабат А.* Задача Штурма — Лиувилля.—Уфа: Башгосунивер, 1985.
5. *Захаров В., Шабат А.* Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния, II // Функц. анализ и его прил.—1979.—Vol. 13, № 3.—P. 13–22.
6. *Korotyaev Evg.* Inverse scattering on the real line // Inverse Problems.—2005.—Vol. 21.—P. 325–341.
7. *Жура Н. А., Солдатов А. П.* К решению обратной задачи Штурма — Лиувилля на всей оси // Докл. АН.—2013.—Т. 453, № 4.—С. 368–372.
8. *Шабат А. Б.* Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений // Функц. анализ и его прил.—1975.—Т. 9, № 3.—С. 75–78.
9. *Шабат А. Б.* Об одной интерполяционной задаче // Исследования по диф. уравнениям, мат. моделированию и проблемам мат. образования.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 66–74.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 8, ч. 2.).
10. *Шабат А. Б.* Рациональная интерполяция и солитоны // Теор. и мат. физика.—2014.—Т. 179, № 3.—С. 303–316.
11. *Повзнер А. Я.* О дифференциальных уравнениях типа Штурма — Лиувилля на полуоси // Мат. сб.—1948.—Т. 23.—С. 3–52.
12. *Агранович З. С., Марченко В. А.* Обратная задача рассеяния.—Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1960.—268 с.
13. *Marchenko V. A.* Sturm–Liouville Operators and Applications.—Basel: Birkhaüser Verlag, 1986.

Статья поступила 5 сентября 2014 г.

Бадахов Мухтар Шамильевич
Карачаево-Черкесский государственный университет,
аспирант кафедры математического анализа
РОССИЯ, 357190, Карачаевск, ул. Ленина, 29
E-mail: `badahov92@mail.ru`

Веремеенко Ольга Юрьевна
Южный федеральный университет,
студенка кафедры вычислительной мат-ки и мат. физики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
E-mail: `o.y.veremeenko@gmail.com`

Шабат Алексей Борисович
Карачаево-Черкесский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 357190, Карачаевск, ул. Ленина, 29;

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 142432, г. Черноголовка, пр. Ак. Семенова, д. 1-А
E-mail: `shabatab@mail.ru`

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF GENERALIZED EIGENVALUES OF THE SCHRODINGER OPERATOR

Badakhov M. Sh., Veremeenko O. Y., Shabat A. B.

The Schrodinger operator on the real line with compactly supported potential is considered. An asymptotic analysis of complex poles of the transmission coefficient $1/a(k)$ for some δ-type potentials is fulfilled. We are planning to use these poles producing effective methods of approximate solutions of the inverse scattering problem in the one-dimensional case.

Key words: inverse scattering problem, zeros of entire functions.