Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 3, С. 64–75

УДК **517.53/.54**

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КОРНЕВЫХ МНОЖЕСТВ ОДНОГО ВЕСОВОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ[1]

Ф. А. Шамоян, Е. Г. Родикова

В работе получено полное описание корневых множеств аналитических в круге функций, допускающих рост вблизи заданного конечного множества точек граничной окружности.

Ключевые слова: аналитическая функция, единичный круг, множество нулей аналитической функции.

Пусть $\mathbb{D}$ — единичный круг на комплексной плоскости, $\mathbb{T}$ — его граница, $H(\mathbb{D})$ — множество всех аналитических в $\mathbb{D}$ функций, Z_f — множество нулей тождественно отличной от нуля функции $f \in H(\mathbb{D})$, $E = \{e^{i\tau_k}\}_{k=0}^{m-1}$ — m точек на единичной окружности. Обозначим $\rho(z, E) = \operatorname{dist}(z, E)$ — расстояние от произвольной точки $z \in \mathbb{D}$ до множества E. Рассмотрим класс

$$H_\varphi(E) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \ln|f(z)| \leqslant c_f \varphi\left(\frac{1}{\rho(z, E)}\right),\ z \in \mathbb{D} \right\},$$

где φ — монотонно возрастающая положительная функция на $\mathbb{R}_+$.

Здесь и в дальнейшем, если не оговорено иное, мы будем обозначать через $C, c, c_1, \ldots, c_n(\alpha, \beta, \ldots)$ положительные константы, зависящие от $\alpha, \beta, \ldots$

В том случае, когда E состоит из одной точки, $\varphi(t) = t^q$, $0 < q < 1$, полное описание корневых множеств класса $H_\varphi(E)$ было получено в работах М. М. Джрбашяна [1], Х. Шапиро и А. Шилдса [2]. В бесконечном случае, когда $E = \mathbb{T}$, $\varphi(t) = \ln t$ результат окончательного характера был получен К. Сейпом (см. [3]). Полное описание корневых множеств и факторизационное представление класса $H_\varphi(E)$, $E = \mathbb{T}$, в случае более общих весов получено еще в 80-х гг. Ф. А. Шамояном (см. [4–6]). Приведем некоторые результаты из этих работ.

Пусть $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая положительная функция, $\varphi \in C^{(1)}(1, +\infty)$, такая, что

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \beta_\varphi, \quad \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \alpha_\varphi, \tag{1}$$

и $1 < \beta_\varphi \leqslant \alpha_\varphi < +\infty$.

Справедливы следующие утверждения:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-97508, и Министерства образования и науки РФ, проект № 1.1704.2014К.

Теорема А. *Пусть* $\Delta_{k,l} = \left\{1 - \frac{1}{2^k} \leqslant |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{\pi l}{2^k} \leqslant \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k}\right\}$ *— разбиение Уитни единичного круга,* $k = 0, 1, 2, \ldots,$ $l = -2^k, \ldots, 2^k - 1$, $Z = \{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *— последовательность точек из* $\mathbb{D}$, $n_{k,l}$ *— число точек* $\{z_k\}$ *в прямоугольнике* $\Delta_{k,l}$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $Z = Z_f$ *для* $f \in H_\varphi(\mathbb{T})$,
2. $n_{k,l} \leqslant c\varphi(2^k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ $l = -2^k, \ldots, 2^k - 1$.

Теорема Б. *Пусть* $\psi(x)$ *— монотонно убывающая функция на полуоси* $(0, +\infty)$, *такая что* $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = 0$, $\varphi(x)$ *— монотонно возрастающая положительная функция,* $\varphi \in C^{(1)}(1, +\infty)$, *удовлетворяющая условиям* (1). *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. *Для произвольной последовательности* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} = Z_f$, $f \in H_\varphi(\mathbb{T})$, *сходится ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} \psi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right) < +\infty$;
2. $\int_1^{+\infty} \psi(x)\, \varphi(x)\, dx < +\infty$.

В дальнейшем для случая, когда $E \subset \mathbb{T}$ — конечное множество точек на единичной окружности, в работе [7] было установлено следующее утверждение:

Теорема В. *Если* $f \in H_\varphi(E)$, $\varphi(t) = t^q$, $q \geqslant 0$, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *— последовательность нулей функции* f, *то сходится ряд:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\rho(z_k, E))^{(q-1+\varepsilon)_+} (1 - |z_k|) < +\infty,$$

где ε *— сколь угодно малое положительное число,* $x_+ = \max(x, 0)$.

В недавних работах Л. Голинского, С. Купина, С. Фаворова, Л. Радченко последний результат был обобщен в различных направлениях (см. [8–11]). Подобные результаты имеют ряд важных приложений в теории операторов, теории аппроксимации и других разделах комплексного и функционального анализа (см. там же). В частности, в работе [11], авторы получили аналог необходимого условия в теореме Б для класса $H_\varphi(E)$. Однако полного описания корневых множеств класса $H_\varphi(E)$ до сих пор не было получено.

Нами для случая конечного множества $E = \{e^{i\tau_k}\}_{k=0}^{m-1} \subset \mathbb{T}$ установлены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть* φ *— монотонно возрастающая положительная функция,* $\varphi \in C^{(1)}(1, +\infty)$, *такая, что*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x) x}{\varphi(x)} = \alpha_\varphi. \tag{2}$$

Если $f \in H_\varphi(E)$ *и* $Z_f = \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, *то для любого* $R > 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\frac{1}{R} \leqslant \rho(z_n, E) \leqslant 2} (1 - |z_n|^2) \leqslant c_f \left(\frac{\varphi(R)}{R} + \int_1^R \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx \right). \tag{3}$$

Обратно,

а) *если* $\alpha_\varphi \notin \mathbb{Z}_+$, $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *— произвольная последовательность точек из* $\mathbb{D}$, *удовлетворяющая условию* (3), *б) если* $\alpha_\varphi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$, $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *— произвольная последовательность точек из* $\mathbb{D}$, *удовлетворяющая наряду с условием* (3) *условию*

$$\sup_{0\leqslant k\leqslant m-1} \left| \sum_{\frac{1}{R}\leqslant\rho(z_n,E)\leqslant 2} \left(i\frac{e^{i\tau_k}+z_n}{e^{i\tau_k}-z_n} \right)^{-\alpha_\varphi} \right| \leqslant M, \quad M>0,$$

причем

$$\sup_{x>1} \frac{x^{\alpha_\varphi}}{\varphi(x)} < +\infty,$$

можно построить функцию $g \in H_\varphi(E)$, *нули которой совпадают с точками последовательности* $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Отметим, что требование гладкости функции φ на $(1,+\infty)$ можно заменить на условие $\varphi \in C^{(1)}(a,+\infty)$, где a — произвольное достаточно большое положительное число.

Теорема 2. *Пусть* φ *— монотонно возрастающая положительная функция,* $\varphi \in C^{(1)}(1,+\infty)$. *Следующие утверждения равносильны:*

1. *Для любой последовательности* $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} = Z_f$, $f \in H_\varphi(E)$, *выполняется условие Бляшке, т. е.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|z_n|) < +\infty,$$

2. *Функция* φ *удовлетворяет условию*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx < +\infty. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть* φ *— монотонно возрастающая положительная функция,* $\varphi \in C^{(1)}(1,+\infty)$, *такая, что* $\alpha_\varphi \geqslant 1$, $f \in H_\varphi(E)$, $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} = Z_f$, $\psi(x) \downarrow 0$, $x \to 0+$, $\psi \in C^{(1)}(0,+\infty)$, *и при этом*

$$\lim_{R\to+\infty} \psi\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\varphi(R)}{R} < +\infty.$$

Тогда, если $\int\limits_1^{+\infty} \psi'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\varphi(x)}{x^3}dx < +\infty$, *то*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \psi(\rho(z_k,E))(1-|z_k|) < +\infty. \tag{5}$$

Обратно, если $\int_1^{+\infty} \psi'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\varphi(x)}{x^3}\,dx = +\infty$, *то можно в явном виде построить функцию* $g \in H_\varphi(E)$, $g \not\equiv 0$, *такую что* $g(z_k)=0$, $k=1,2,\ldots$, *для которой ряд* (5) *расходится.*

Замечание 1. Если в формулировке теоремы 3 положить $0<\alpha_\varphi<1$, то ряд (5) будет сходиться даже в том случае, когда $\psi(x)>\delta>0$, $x\in\mathbb{R}_+$ (см., например, [4]). Отметим также, что метод доказательства теорем 1–3 существенно отличается от методов, используемых в статьях [7–11], и впервые был применен первым автором в работах [12, 13].

Замечание 2. Интересно сравнить результат теоремы 2 для случая нулей, расположенных на радиусе $(0,1)$ единичного круга, со следующей теоремой Хеймана — Коренблюма (см. [14]).

Теорема Г. *Пусть φ — монотонно возрастающая положительная функция на $\mathbb{R}_+$. Следующие утверждения равносильны:*

1. *Для любой последовательности $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty} = Z_f$, $f \in H_\varphi(\mathbb{T})$, $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется условие Бляшке:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - r_n) < +\infty,$$

2. *Функция φ удовлетворяет условию*

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx < +\infty. \tag{6}$$

Из сходимости интеграла (6) следует сходимость интеграла (4), но обратное неверно. На это указывает пример функции $\varphi(x) = \frac{x}{(\ln 2x)^2}$, $x \geqslant 1$.

Доказательство основных результатов опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $w = \rho e^{i\theta} = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$ — конформное отображение единичного круга на верхнюю полуплоскость C_+, где $0 \leqslant \tau_0 \leqslant 2\pi$. Тогда при всех $0 < \theta < \pi$, $1 \leqslant \rho < +\infty$ справедливы оценки:*

$$\frac{\sin\theta}{\rho} \leqslant 1 - |z|^2 \leqslant \frac{4\sin\theta}{\rho}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\rho} \leqslant |e^{i\tau_0} - z| \leqslant \frac{2}{\rho}. \tag{8}$$

$\lhd$ Поскольку $w = \rho e^{i\theta} = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$, то $z = e^{i\tau_0}\frac{1+iw}{1-iw}$, откуда

$$1 - |z|^2 = \frac{4\rho\sin\theta}{1 + 2\rho\sin\theta + \rho^2} = \frac{4\sin\theta}{\rho}\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{2\sin\theta}{\rho} + 1\right)}.$$

Учитывая, что $1 \leqslant \rho < +\infty$ и $\sin\theta > 0$, получаем:

$$1 \leqslant \frac{1}{\rho^2} + \frac{2\sin\theta}{\rho} + 1 \leqslant 1 + 2\sin\theta + 1 \leqslant 4,$$

откуда непосредственно следует неравенство (7). Поскольку $w = \rho e^{i\theta} = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$, то $e^{i\tau_0} - z = \frac{2}{1-iw}$. Далее,

$$|1 - z| = \frac{2}{|1 + \rho\sin\theta - i\rho\cos\theta|} = \frac{2}{\rho}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{2\sin\theta}{\rho} + 1}},$$

откуда, снова учитывая, что $1 \leqslant \rho < +\infty$ и $\sin\theta > 0$, получим неравенство (8). $\rhd$

Следующее утверждение непосредственно следует из определения класса $H_\varphi(E)$:

Лемма 2. *Класс $H_\varphi(E)$ совпадает с классом функций*

$$H^*_\varphi(E) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \ln|f(z)| \leqslant c_f \left(\sum_{k=0}^{m-1} \varphi\left(\frac{1}{|z - e^{i\tau_k}|}\right)\right),\ z \in \mathbb{D} \right\},$$

где φ — возрастающая положительная функция, $\varphi \in C^{(1)}(1, +\infty)$.

Будем исследовать структуру корневых множеств класса H^*_φ.

При доказательстве основного результата существенную роль играет следующее утверждение, необходимая часть которого установлена в работе [13], а достаточная часть — в работе [15]:

Теорема Д. *Пусть $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая положительная функция на $\mathbb{R}_+$, $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$, $\alpha_\varphi > 1$.*

Если последовательность $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}$, $\rho_n \geqslant \rho_0 > 0$, точек из верхней полуплоскости C_+ является корневым множеством некоторой ненулевой функции из класса $H^\infty_\varphi(C_+) = \{f \in H(C_+) : \ln|f(w)| \leqslant c\varphi(|w|)\}$, то

$$\sum_{0<\rho_0<\rho_n\leqslant R} \frac{\sin\theta_n}{\rho_n} \leqslant C\frac{\varphi(R)}{R}, \tag{9}$$

где $C > 0$.

Обратно, если $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}$, $\rho_n \geqslant \rho_0 > 0$ — произвольная последовательность точек из верхней полуплоскости C_+, удовлетворяющая условию (9) и при $\alpha_\varphi \in \mathbb{Z}_+$ условиям:

$$\left|\sum_{0<\rho_0<\rho_n\leqslant R} \frac{1}{\rho_n^{\alpha_\varphi} e^{i\alpha_\varphi\theta_n}}\right| \leqslant M, \quad 0 < R < +\infty,$$

$$\sup_{x>1} \frac{x^{\alpha_\varphi}}{\varphi(x)} < +\infty,$$

то можно построить функцию $g \in H^\infty_\varphi(C_+)$, нули которой совпадают с последовательностью $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}$.

Перейдем к доказательству основных результатов статьи.

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Фиксируем $e^{i\tau_0} \in E$. Введем обозначение: $l_E = \min_{0\leqslant k,j\leqslant n-1} |e^{i\tau_k} - e^{i\tau_j}|$, $k \neq j$. Очевидно, что $l_E > 0$. Отобразим единичный круг $\mathbb{D}$ на верхнюю полуплоскость C_+ с помощью функции $w = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$.

Обозначим через $x_k = i\frac{e^{i\tau_0}+e^{i\tau_k}}{e^{i\tau_0}-e^{i\tau_k}}$, т. е. $e^{i\tau_k} = e^{i\tau_0}\frac{x_k-i}{x_k+i}$, $x_k \in \mathbb{R}$.

Выясним, какие условия накладываются на x_k.

$$|x_k| = 2\left|\frac{x_k+i-i}{2}\right| \leqslant 2\frac{|x_k+i|}{2} + 1 = \frac{2}{|e^{i\tau_0} - e^{i\tau_k}|} + 1 \leqslant \frac{2}{l_E} + 1.$$

Таким образом, все точки x_k находятся внутри полукруга

$$C_E^+ := \left\{w \in C_+ : |w| \leqslant \frac{2}{l_E} + 1\right\}.$$

Пусть $r_E = 2\left(\frac{1}{l_E} + 1\right)$.

Не ограничивая общности, будем считать, что множество E состоит из одной точки, т. е. $E = \{e^{i\tau_0}\}$.

Рассмотрим функцию $F(w) = f\left(e^{i\tau_0}\frac{iw+1}{iw-1}\right)$, $w \in C_+$, аналитическую в верхней полуплоскости. Так как $f \in H^*_\varphi$, то

$$\ln|F(w)| \leqslant c_f\varphi\left(\frac{|w+i|}{2}\right) \leqslant c_f\varphi\left(\frac{|w|+1}{2}\right) \leqslant c_f\varphi(|w|), \tag{10}$$

при всех $w: |w| \geqslant 1$.

Обозначим $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ — последовательность нулей функции F. Пусть далее $F_\eta(w) = F(w + i\eta)$, $\eta > 0$. Очевидно, что F_η — аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} w > -\eta$. Применим к функции $F_\eta(w)$ формулу Карлемана в полукольце $C_{r_E,R} := \{w \in C_+ : r_E \leqslant |w| \leqslant R\}$ (см., например, [16, с. 139]):

$$\sum_{r_E \leqslant \widetilde{\rho}_n \leqslant R} \left(\frac{1}{\widetilde{\rho}_n} - \frac{\widetilde{\rho}_n}{R^2}\right) \sin \widetilde{\theta}_n = \frac{1}{\pi R} \int\limits_0^\pi \ln |F_\eta(Re^{i\theta})| \sin \theta \, d\theta$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{r_E \leqslant |x| \leqslant R} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2}\right) \ln |F_\eta(x)||F_\eta(-x)| \, dx + A_\eta(R, f),$$

где $A_\eta(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{Im}\{\left(\frac{e^{-i\theta}}{r_E} - \frac{r_E e^{i\theta}}{R^2}\right) \ln F_\eta(r_E e^{i\theta})\} \, d\theta$, $\{\widetilde{\rho}_n e^{i\widetilde{\theta}_n}\}$ — последовательность нулей функции F_η в полукольце $C_{r_E,R}$.

Заметим, что все слагаемые в левой части равенства неотрицательны, поэтому, принимая во внимание оценку (10), получим:

$$\sum_{r_E \leqslant \widetilde{\rho}_n \leqslant R} \left(\frac{1}{\widetilde{\rho}_n} - \frac{\widetilde{\rho}_n}{R^2}\right) \sin \widetilde{\theta}_n \leqslant \widetilde{C}_f \left(\frac{\varphi(R + \eta)}{R} + \int\limits_{r_E}^R \frac{\varphi(x + \eta)}{x^2} \, dx\right) + A_\eta(R, f).$$

В условиях теоремы можно перейти к пределу при $\eta \to 0+$. Получим:

$$\sum_{r_E \leqslant \rho_n \leqslant R} \left(\frac{1}{\rho_n} - \frac{\rho_n}{R^2}\right) \sin \theta_n \leqslant C_f \left(\frac{\varphi(R)}{R} + \int\limits_{r_E}^R \frac{\varphi(x)}{x^2} \, dx\right) + A(R, f), \tag{11}$$

где $A(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \operatorname{Im}\left\{\left(\frac{e^{-i\theta}}{r_E} - \frac{r_E e^{i\theta}}{R^2}\right) \ln F\big(r_E e^{i\theta}\big)\right\} d\theta = O(1)$ при $R \to +\infty$.

Положим теперь $R' = \frac{R}{2}$. Выбирая нули только из кольца $r_E \leqslant \rho_n \leqslant R'$, из (11) получим:

$$\sum_{r_E \leqslant \rho_n \leqslant R'} \frac{\sin \theta_n}{\rho_n} \leqslant C_f \left(\frac{\varphi(2R')}{2R'} + \int\limits_{r_E}^{2R'} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, dx\right). \tag{12}$$

Поскольку $\int\limits_{r_E}^{2R'} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, dx = \int\limits_{r_E}^{R'} \ldots + \int\limits_{R'}^{2R'} \ldots \leqslant \int\limits_{r_E}^{R'} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, dx + \frac{\varphi(2R')}{2R'}$, ввиду возрастания функции $\varphi(x)$, то оценка (12) эквивалентна оценке

$$\sum_{r_E \leqslant \rho_n \leqslant R'} \frac{\sin \theta_n}{\rho_n} \leqslant C_f \left(\frac{\varphi(2R')}{R'} + \int\limits_{r_E}^{R'} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, dx\right). \tag{13}$$

Теперь заметим, что для произвольного положительного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших x справедливо

$$\varphi(cx) \leqslant c^{\alpha_\varphi + \varepsilon} \varphi(x), \tag{14}$$

где $c > 0$.

Действительно, из (2) следует, что для всех $t \geqslant t_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)} < \alpha_\varphi + \varepsilon$, поэтому

$$\int\limits_x^{cx} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt \leqslant (\alpha_\varphi + \varepsilon) \int\limits_x^{cx} \frac{dt}{t},$$

а значит, $\ln \frac{\varphi(cx)}{\varphi(x)} \leqslant (\alpha_\varphi + \varepsilon) \ln c$, откуда следует (14).

Принимая во внимание оценку (14), из (13) получим:

$$\sum_{r_E \leqslant \rho_n \leqslant R} \frac{\sin\theta_n}{\rho_n} \leqslant C_f \left(2^{\alpha_\varphi+\varepsilon} \frac{\varphi(R)}{R} + \int\limits_{r_E}^{R} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right). \tag{15}$$

Ввиду оценок (7), (8), неравенство (15) эквивалентно неравенству

$$\sum_{\frac{1}{R} \leqslant |e^{i\tau_0} - z_n| \leqslant 2} (1 - |z_n|^2) \leqslant C_f \left(\frac{\varphi(R)}{R} + \int\limits_{r_E}^{R} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx \right). \tag{16}$$

В силу произвольности выбора точки $e^{i\tau_0}$ из множества $E \subset \mathbb{T}$ и учитывая лемму 2, делаем вывод о справедливости оценки (3). Необходимость доказана.

Перейдем к доказательству обратного утверждения.

Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — произвольная последовательность точек из $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (3), $\alpha_\varphi \notin \mathbb{Z}_+$, $\alpha_\varphi > 1$. Докажем, что можно построить функцию $g \in H_\varphi(E)$, нули которой совпадают с точками последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Как и при доказательстве необходимости, отобразим единичный круг на верхнюю полуплоскость с помощью функции $w = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$. Точки последовательности $\{z_n\} \in \mathbb{D}$ отобразятся соответсвенно на точки последовательности $\{\rho_n e^{i\theta_n}\} \in C_+$, $\rho_n e^{i\theta_n} = i\frac{e^{i\tau_0}+z_n}{e^{i\tau_0}-z_n}$ удовлетворяющие, ввиду леммы 1, оценке (15).

Применяя правило Лопиталя, легко убедиться в справедливости оценки:

$$\int\limits_{r_E}^{R} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx \leqslant C\frac{\varphi(R)}{R}.$$

Поэтому неравенство (3) для $E = \{e^{i\tau_0}\}$ можно переписать в виде:

$$\sum_{\frac{1}{R} \leqslant |e^{i\tau_0} - z_n| \leqslant 2} (1 - |z_n|^2) \leqslant C\frac{\varphi(R)}{R}. \tag{17}$$

В силу леммы 1 неравенство (17) эквивалентно (9).

По теореме Д, если последовательность точек из верхней полуплоскости $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}$ удовлетворяет условию (9) при $\alpha_\varphi > 1$, то можно построить функцию $g(w) \in H(C_+)$ такую, что $\ln|g(w)| \leqslant \varphi(|w|)$, нули которой совпадают с последовательностью $\{\rho_n e^{i\theta_n}\}$. Рассмотрим функцию $G(z) = g\left(i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}\right)$. Очевидно, $G(z) \in H(\mathbb{D})$. Более того, $G \in H_\varphi(E)$. Нули функции G совпадают с последовательностью $\{z_n\}$, $z_n = \frac{i\rho_n e^{i\theta_n}+1}{i\rho_n e^{i\theta_n}-1}$ и выполняется оценка (17).

Справедливость пункта б) устанавливается аналогичным образом. Достаточность доказана. $\triangleright$

Для удобства изложения докажем теперь теорему 3. Введем дополнительные обозначения. Для любого $\beta > -1$ символом $\pi_\beta(z, z_k)$ будем обозначать бесконечное произведение М. М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ (см. [1]):

$$\pi_\beta(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp(-U_\beta(z, z_k)),$$

где

$$U_\beta(z, z_k) = \frac{2(\beta+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\beta \ln|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}|}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}} \, d\theta \rho \, d\rho.$$

Как установлено в [1], произведение $\pi_\beta(z, z_k)$ сходится абсолютно и равномерно в $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\beta+2} < +\infty.$$

$\lhd$ Доказательство теоремы 3. Фиксируем $\tau_0 \in \mathbb{R}$. Проведем доказательство для случая $E = \{e^{i\tau_0}\}$.

Отобразим, как и выше, единичный круг $\mathbb{D}$ на верхнюю полуплоскость C_+ с помощью функции $w = i\frac{e^{i\tau_0}+z}{e^{i\tau_0}-z}$. Точки последовательности $\{z_n\} \in \mathbb{D}$, $\{z_n\} = Z_f$, отобразятся соответственно на точки последовательности $\{\rho_n e^{i\theta_n}\} \in C_+$, $\rho_n e^{i\theta_n} = i\frac{e^{i\tau_0}+z_n}{e^{i\tau_0}-z_n}$.

Пусть $s(\rho) = \sum\limits_{r_E < \rho_n \leqslant \rho} \frac{\sin\theta_n}{\rho_n}$. Тогда для любой функции $\psi \in C^{(1)}(0, +\infty)$ справедливо равенство:

$$\sum_{r_E < \rho_n \leqslant R} \psi\left(\frac{1}{\rho_n}\right) \frac{\sin\theta_n}{\rho_n} = \int_{r_E}^{R} \psi\left(\frac{1}{x}\right) ds(x) = I(R).$$

Следовательно,

$$I(R) = s(R)\psi\left(\frac{1}{R}\right) + \int_{r_E}^{R} \psi'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \, s(x) \, dx.$$

Но $\psi'\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 0$, поэтому, учитывая, что $s(x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}$ по теореме Д, получаем:

$$I(R) \leqslant \frac{\varphi(R)}{R}\psi\left(\frac{1}{R}\right) + \int_{r_E}^{R} \psi'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\varphi(x)}{x^3} \, dx.$$

В условиях теоремы $I(R)$ ограничено, значит, сходится ряд

$$\sum_{r_E < \rho_n \leqslant R} \psi\left(\frac{1}{\rho_n}\right) \frac{\sin\theta_n}{\rho_n} < +\infty. \tag{18}$$

Но (18) ввиду леммы 1 эквивалентно (5).

Перейдем к доказательству обратного утверждения этой теоремы. Не ограничивая общности, можно полагать, что $\tau_0 = 0$. Разобьем полуинтервал $[0, 1)$ на полузамкнутые интервалы $\Delta_k = \left[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Построим последовательность $\{r_k\}$ следующим образом: $r_k \in \Delta_k$, т. е. $1 - \frac{1}{2^k} \leqslant r_k < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем кратность r_k

равна $[\varphi(2^k)]$, где $[a]$ — целая часть $a \in \mathbb{R}$. Докажем, что если $\int_{r_E}^{+\infty} \psi'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\varphi(x)}{x^3}\, dx = +\infty$, то ряд (5) расходится. Обозначим Ω_k полузамнутый интервал $[2^k, 2^{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда $[1, +\infty) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \Omega_k$.

Для любого $p > 1$ справедливо:

$$\int\limits_1^{2^p} \frac{\varphi(t)}{t^3} \psi'\left(\frac{1}{t}\right) dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int\limits_{\Omega_k} \frac{\varphi(t)}{t^3} \psi'\left(\frac{1}{t}\right) dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{\varphi(t)}{t} \psi'\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2}\, dt$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\varphi(2^{k+1})}{2^k} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \psi'\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2}\, dt = 2 \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\varphi(2^{k+1})}{2^{k+1}} \left(\psi\left(\frac{1}{2^k}\right) - \psi\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)\right)$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\varphi(2^{k+1})}{2^{k+1}} \psi\left(\frac{1}{2^k}\right),$$

ввиду того, что $\psi\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$.

Применяя оценку (14), окончательно получим:

$$\int\limits_1^{2^p} \frac{\varphi(t)}{t^3}\, \psi'\left(\frac{1}{t}\right) dt \leqslant c_\varphi \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\varphi(2^k)}{2^k}\, \psi\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

Так как интеграл в левой части неравенства стремится к бесконечности при $p \to +\infty$, то расходится ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(2^k)}{2^k}\, \psi\left(\frac{1}{2^k}\right) = +\infty. \tag{19}$$

Но ряды (5) и (19) — равнорасходящиеся при указанном выборе последовательности $\{z_k\}$, следовательно, ряд (5) расходится.

Функцию $g(z)$ будем строить в виде бесконечного произведения М. М. Джрбашяна $\pi_\beta(z, z_k)$ с нулями $z_k = r_k$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\{r_k\}$ — построенная вышеуказанным образом последовательность.

Покажем, что в условиях теоремы произведение $\pi_\beta(z, r_k)$ сходится при всех $\beta > \alpha_\varphi - 2$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\beta+2} = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{r_m \in \Delta_k} (1 - r_m)^{\beta+2} n_m \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi(2^k)}{2^{k(\beta+2)}}.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\beta+2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k((\beta+2)-(\alpha_\varphi+\varepsilon))}.$$

Очевидно, ряд сходится при всех $\beta > \alpha_\varphi - 2$, $0 < \varepsilon < \beta + 2 - \alpha_\varphi$. Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\beta+2}$ следует абсолютная и равномерная сходимость бесконечного произведения $\pi_\beta(z, z_k)$.

Теперь докажем, что $\pi_\beta(z, r_k) \in H_\varphi(E)$. Используем известную оценку произведения М. Джрбашяна (см. [4]):

$$\ln |\pi_\beta(z, z_k)| \leqslant c(\beta) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - |z_k|}{|1 - \overline{z}_k z|}\right)^{\beta+2}.$$

Ясно, что

$$\ln|\pi_\beta(z,r_k)| \leqslant c(\beta)\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-r_k}{|1-r_kz|}\right)^{\beta+2} = c(\beta)\sum_{k\geqslant 1}\sum_{r_m\in\Delta_k} n_m\cdot\left(\frac{1-r_m}{|1-r_mz|}\right)^{\beta+2},$$

$$\ln|\pi_\beta(z,r_k)| \leqslant c(\beta)\sum_{k\geqslant 1}\frac{\varphi(2^k)}{2^{k(\beta+2)}}\frac{1}{|1-r_kz|^{\beta+2}}. \tag{20}$$

Пусть $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant |1-z| < \frac{1}{2^n}$, где n — фиксированное натуральное число. Разобьем ряд на части:

$$I = \sum_{k\geqslant 1}\frac{\varphi(2^k)}{2^{k(\beta+2)}}\frac{1}{|1-r_kz|^{\beta+2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(\ldots) + \frac{\varphi(2^n)}{2^{n(\beta+2)}}\frac{1}{|1-r_nz|^{\beta+2}} + \frac{\varphi(2^{n+1})}{2^{(n+1)(\beta+2)}}\frac{1}{|1-r_{n+1}z|^{\beta+2}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty}(\ldots)$$

$$= I_1 + (I_n + I_{n+1}) + I_2.$$

Рассмотрим сумму I_1. Оценим снизу $|1-r_kz|$ при $1\leqslant k\leqslant n-1$:

$$|1-r_kz| = |(1-r_k)+r_k(1-z)| \geqslant (1-r_k)-|1-z| > (1-r_k)-\frac{1-r_k}{2} > \frac{1}{2^{k+2}}.$$

С учетом этой оценки получаем:

$$I_1 = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\varphi(2^k)}{2^{k(\beta+2)}}\frac{1}{|1-r_kz|^{\beta+2}} \leqslant 2^{2(\beta+2)}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(2^k).$$

Но $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\varphi(2^k) \leqslant 2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt$, поэтому справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(2^k) \leqslant 2\int\limits_1^{2^n}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt.$$

Покажем, что $\int\limits_1^y\frac{\varphi(t)}{t}dt \sim \frac{1}{\alpha_\varphi}\varphi(y)$ при $y\to+\infty$, $0<\alpha_\varphi<+\infty$. Воспользуемся правилом Лопиталя

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\int\limits_1^y\frac{\varphi(t)}{t}\,dt}{\varphi(y)} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(y)} = \frac{1}{\alpha_\varphi},$$

поэтому заключаем, что $I_1 \leqslant c_{\varphi,\beta}\varphi(2^n)$.

Рассмотрим I_2. Оценим снизу $|1-r_kz|$ при $k\geqslant n+2$:

$$|1-r_kz| = |(1-z)+z(1-r_k)| \geqslant |1-z|-(1-r_k) > |1-z|-\frac{1}{2^{n+2}} > \frac{|1-z|}{2} \geqslant \frac{1}{2^{n+2}}.$$

С учетом этой оценки получаем

$$I_2 \leqslant \sum_{k\geqslant n+2}\frac{\varphi(2^k)}{2^{k(\beta+2)}}2^{(n+2)(\beta+2)} \leqslant 2^{(n+2)(\beta+2)}\sum_{k\geqslant n+2}\int\limits_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{\varphi(t)}{t^{\beta+3}}\,dt \leqslant 2^{(n+2)(\beta+2)}\int\limits_{2^{n+2}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{\beta+3}}\,dt.$$

Покажем, что $\int\limits_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{\beta+3}} dt \sim \frac{1}{(\beta+2)-\alpha_\varphi} \cdot \frac{\varphi(x)}{x^{\beta+2}}$, при $x \to +\infty$. Снова воспользуемся правилом Лопиталя для вычисления предела

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{\beta+3}}\, dt}{\frac{\varphi(x)}{x^{\beta+2}}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\varphi(x)}{x^{\beta+3}}}{\frac{(x\varphi'(x)-(\beta+2)\varphi(x))x^{\beta+1}}{x^{2(\beta+2)}}}$$
$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} - (\beta+2)} = \frac{1}{(\beta+2)-\alpha_\varphi} > 0,$$

поскольку $\beta + 2 > \alpha_\varphi$. Поэтому заключаем, что $I_2 \leqslant c_\varphi \varphi(2^{n+2}) \leqslant \widetilde{c}_\varphi \varphi(2^n)$. Осталось оценить сумму

$$I_n + I_{n+1} = \frac{\varphi(2^n)}{2^{n(\beta+2)}} \frac{1}{|1-r_n z|^{\beta+2}} + \frac{\varphi(2^{n+1})}{2^{(n+1)(\beta+2)}} \frac{1}{|1-r_{n+1} z|^{\beta+2}}.$$

Поскольку $(1-r_n) \leqslant |1-r_n z|$ при всех $z \in \mathbb{D}$, $r_n \in (0,1)$, $n = 1,2,\ldots$, и с учетом неравенства (14), получим $I_n + I_{n+1} \leqslant \varphi(2^n) + \varphi(2^{n+1}) = c_\varphi \varphi(2^n)$. Объединяя оценки для I_1, I_2, $I_n + I_{n+1}$, из (20) получаем:

$$\ln|\pi_\beta(z, r_k)| \leqslant C(\varphi)\varphi(2^n),$$

т. е.

$$\ln|\pi_\beta(z, r_k)| \leqslant C(\varphi)\varphi\left(\frac{1}{|1-z|}\right).$$

Таким образом, $\pi_\beta(z, r_k) \in H_\varphi(E)$.

В силу произвольности выбора τ_0 и с учетом леммы 2, делаем вывод о справедливости теоремы для общего случая, т. е. для $E = \{e^{i\tau_k}\}_{k=0}^{m-1} \in \mathbb{T}$. Теорема 3 доказана полностью. $\rhd$

Приступим к доказательству теоремы 2.

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Сначала заметим, что если $\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx < +\infty$, то

$$\frac{\varphi(R)}{R} \to 0, \quad R \to +\infty. \tag{21}$$

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) сразу следует из оценок (3) и (21).

Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) непосредственно следует из доказательства второй части теоремы 3. $\rhd$

Авторы статьи благодарят рецензента профессора Б. Н. Хабибуллина, обратившего их внимание на недавние результаты, полученные в работах [8–11].

Литература

1. *Джрбашян М. М.* К проблеме представимости аналитических функций // Сообщ. Института математики и механики АН Арм. ССР.—1948.—№ 2.—С. 3–40.
2. *Shapiro H. S., Shields A. L.* On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces // Math. Z.—1962.—№ 80.—С. 217–229.
3. *Seip K.* Interpolating and sampling in spaces of analytic functions.—Providence (R. I.): Amer. Math. Soc., 2004.—183 p.
4. *Djrbashian A. E., Shamoyan F. A.* Topics in the Theory of A^p_α Spaces.—Leipzig: Teubner-Texte zur Math., 1988.—105 p.

5. *Шамоян Ф. А.* Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеризация нулей аналитических функций с мажорантой конечного роста // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Математика.—1978.—Т. 13, № 5–6.—С. 405–422.
6. *Шамоян Ф. А.* О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи его границы // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Математика—1983.—Т. 18, № 1.—С. 215–228.
7. *Borichev A., Golinskii L., Kupin S.* A Blaschke-type condition and its application to complex Jacobi matrices // Bulletin of the London Mathematical Society.—2009.—Vol. 41.—P. 117–123.
8. *Golinskii L., Kupin S.* A Blaschke-type condition for analytic functions on finitely connected domains. Applications to complex perturbations of a finite-band selfadjoint operator // J. Math. Anal. Appl.—2012.—Vol. 389, № 2.—P. 705–712.
9. *Favorov S., Golinskii L.* Blaschke-Type Conditions for Analytic and Subharmonic Functions in the Unit Disk: Local Analogs and Inverse Problems // Computational Methods and Func. Theory.—2012.—Vol. 12.—P. 151–166.
10. *Favorov S., Golinskii L.* Blaschke-type conditions in unbounded domains, generalized convexity and applications in perturbation theory.—arXiv:1204.4283.
11. *Favorov S., Radchenko L.* On Analytic and Subharmonic Functions in Unit Disc Growing Near a Part of the Boundary // Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.—2013.—Vol. 9, № 3.—P. 304–315.
12. *Shamoyan F. A.* On some properties of zero sets of analytic functions with given majorant // Theory functions and applications. Collections of works dedicates to the memory of M. M. Djrbashian.—Yerevan: Luys Publishing House, 1995.—P. 169–172.
13. *Шамоян Ф. А.* О нулях аналитических в круге функций с заданной мажорантой вблизи его границы // Матем. заметки.—2009.—Vol. 85, № 2.—С. 300–312.
14. *Hayman W. K., Korenblum B.* A critical growth rate for functions regular in a disk // Michigan Math. J.—1980.—Vol. 27.—P. 21–30.
15. *Быков С. В.* Факторизационные представления и свойства корневых множеств весовых классов аналитических функций: Дисс.... канд. физ.-мат. наук.—Брянск: БГУ, 2010.—130 с.
16. *Титчмарш Е.* Теория функций.—М.: Наука, 1980.—480 с.

Статья поступила 9 ноября 2013 г.

Шамоян Файзо Агитович
Брянский государственный университет имени акад. И. Г. Петровского,
зав. кафедрой математического анализа
РОССИЯ, 241036, Россия, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14
E-mail: `shamoyanfa@yandex.ru`

Родикова Евгения Геннадьевна
Брянский государственный университет имени акад. И. Г. Петровского,
аспирантка кафедры математического анализа
РОССИЯ, 241036, Россия, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14
E-mail: `evheny@yandex.ru`

ON CHARACTERIZATION OF ZERO SETS OF THE WEIGHTED CLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS IN A DISC

Shamoyan F.A., Rodikova E. G.

Complete description of the zero sets of analytic functions in a unit disc, allowing growth near the given finite set of points on the boundary circle, are obtained in this paper.

Key words: analytic function, unit disk, zero sets of analytic function.