Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 3, С. 55–63

УДК **517.957+517.988+517.977.56**

О ТОТАЛЬНОМ СОХРАНЕНИИ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А. В. Чернов

Исследуется задача Гурса для одного управляемого полулинейного уравнения четвертого порядка псевдопараболического типа, имеющего различные приложения. При сделанных предположениях доказывается тотальное (по всему множеству допустимых управлений) сохранение глобальной разрешимости указанной задачи.

Ключевые слова: задача Гурса, полулинейное управляемое уравнение псевдопараболического типа, тотальное сохранение глобальной разрешимости, функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна.

Введение

Как указано в [2] (там же см. соответствующую библиографию), необходимость исследования псевдопараболических уравнений возникает в теории фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвогрунтах, распространения импульсно-лучевых волн, моделировании различных биологических процессов и т. д. В [2] изучалось одно линейное неоднородное уравнение четвертого порядка псевдопараболического типа, представляющее собой обобщение многих модельных уравнений некоторых процессов (обобщенного уравнения влагопереноса, телеграфного уравнения, уравнения колебаний струны и т. д.). Понятно, что при исследовании практических задач ситуация усложняется, в результате чего могут возникать полулинейные уравнения с главной частью аналогичного вида. При необходимости управления соответствующими процессами сразу же возникает вопрос о глобальной разрешимости управляемой системы для всех допустимых управлений. Иначе говоря, вопрос о *тотальном сохранении глобальной разрешимости* (ТСГР). В работе [7] была предложена методика доказательства ТСГР управляемых распределенных систем, связанных с эволюционными уравнениями[2], основанная, во-первых, на редукции управляемой системы к функционально-операторному уравнению типа Гаммерштейна[3], и во-вторых, на предположении о глобальной разрешимости некоторого мажорантного уравнения, правая часть которого не содержала управления. В работе [8] были, в частности, установлены простые условия, достаточные для разрешимости мажорантного уравнения.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011), а также при частичной поддержке грантом (соглашение от 27.08.2013, № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

[2] Что касается управляемых систем, связанных с уравнениями эллиптического типа, из недавних работ, касающихся условий ТСГР, укажем, например, [3, 4, 9].

[3] Мы следуем здесь общепринятой терминологии, см. [1, глава VI, п. 19.2].

В данной статье методика [7] применяется для установления достаточных условий ТСГР задачи Гурса для полулинейного управляемого аналога линейного уравнения из работы [2] (другие примеры см. в [7]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый полулинейный аналог линейного псевдопараболического уравнения [2]:

$$\mathscr{L}[y] \equiv \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{1} a_{i,j}(t)\, D_1^i D_2^j y(t) = f\bigl(t, y(t), u(t)\bigr), \quad t = (t_1; t_2) \in \Pi, \tag{1}$$

при тех же начально-краевых условиях:

$$\begin{cases} y(0,0) = \varphi_{0,0} \in \mathbb{R};\ D_1 y(0,0) = \varphi_{1,0} \in \mathbb{R};\ D_1^2 y(0,0) = \varphi_{2,0} \in \mathbb{R}; \\ D_1^3 y(t_1, 0) = \varphi_{3,0}(t_1),\ \varphi_{3,0} \in L_p(\Pi_1); \\ D_2 y(0, t_2) = \varphi_{0,1}(t_2),\ \varphi_{0,1} \in L_p(\Pi_2); \\ D_1 D_2 y(0, t_2) = \varphi_{1,1}(t_2),\ \varphi_{1,1} \in L_p(\Pi_2); \\ D_1^2 D_2 y(0, t_2) = \varphi_{2,1}(t_2),\ \varphi_{2,1} \in L_p(\Pi_2). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $p \in (1;\infty)$, $D_k = \frac{\partial}{\partial t_k}$ $(k = 1,2)$ — оператор обобщенного дифференцирования в смысле С. Л. Соболева; $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$, $\Pi_k = (0; T_k)$ $(k = 1,2)$; $a_{i,j}$ — измеримые функции на Π, удовлетворяющие условиям: $a_{i,0} \in L_p$, $a_{i,1} \in L_{p,\infty}$, $i = 0,1,2$, $a_{3,0} \in L_{\infty,p}$, $a_{3,1} \equiv 1$; $u \in \mathscr{D} \subset L_r(\Pi)$ $(r \geqslant 1)$ — управление; множество $\mathscr{D}$ считаем поточечно ограниченным; иными словами, предполагаем, что существуют функции $\overline{u}, \widehat{u} \in L_r(\Pi)$, при которых $\overline{u} \leqslant u \leqslant \widehat{u}$ для всех $u \in \mathscr{D}$; функция $f(t,x,v) : \Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по $t \in \Pi$, непрерывна по $(x; v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и такова, что при некотором $q \in (p; \infty)$, $1/2 \geqslant 1/p - 1/q$, выполнено условие

$\mathbf{F}_1$) суперпозиция $f(\cdot, y, u) \in L_p(\Pi)$ для всех $y \in L_q(\Pi)$, $u \in L_r(\Pi)$.

Чтобы дать определение решения задачи (1), (2) и обосновать его корректность, рассмотрим задачу (2) для вспомогательного уравнения:

$$\mathscr{L}[y] = z(t), \quad t = (t_1; t_2) \in \Pi, \tag{3}$$

при заданном $z \in L_p(\Pi)$. Задача (3), (2) изучалась в [2]; решение ее (понимаемое в смысле следов) искалось в пространстве Соболева $W_p^{(3,1)}(\Pi)$. В [2], в частности, была доказана

Лемма 1.1. *Для любых* $z \in L_p(\Pi)$,

$$\varphi = \{\varphi_{0,0}; \varphi_{1,0}; \varphi_{2,0}; \varphi_{3,0}; \varphi_{0,1}; \varphi_{1,1}; \varphi_{2,1}\} \in E(\Pi) = \mathbb{R}^3 \times L_p(\Pi_1) \times L_p^3(\Pi_2)$$

существует единственное решение $y \in W_p^{(3,1)}(\Pi)$ *задачи* (3), (2) *и справедлива оценка:* $\|y\|_{W_p^{(3,1)}(\Pi)} \leqslant C\bigl\{\|\varphi\|_{E(\Pi)} + \|z\|_{L_p(\Pi)}\bigr\}$, *где константа* C *не зависит от* y, φ, z.

Пусть $1/p + 1/p' = 1$. Следуя [2], определим функцию

$$R_0(\tau_1, \tau_2; t_1, t_2) = \frac{(t_1 - \tau_1)^2}{2}\, \theta(t_1 - \tau_1)\theta(t_2 - \tau_2), \quad \theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leqslant 0, \end{cases}$$

и *линейный ограниченный оператор* (ЛОО) $N^* : L_{p'}(\Pi) \to L_{p'}(\Pi)$,

$$\begin{gathered}
N^*[\omega](\tau) = \omega(\tau) + \int\limits_{\tau_1}^{T_1} dt_1 \int\limits_{\tau_2}^{T_2} \frac{(t_1-\tau_1)^2}{2}\, a_{0,0}(t)\,\omega(t)\,dt_2 \\
+ \int\limits_{\tau_1}^{T_1} dt_1 \int\limits_{\tau_2}^{T_2} (t_1-\tau_1)\, a_{1,0}(t)\,\omega(t)\,dt_2 + \int\limits_{\tau_1}^{T_1} dt_1 \int\limits_{\tau_2}^{T_2} a_{2,0}(t)\,\omega(t)\,dt_2 \\
+ \int\limits_{\tau_2}^{T_2} a_{3,0}(\tau_1,t_2)\,\omega(\tau_1,t_2)\,dt_2 + \int\limits_{\tau_1}^{T_1} \frac{(t_1-\tau_1)^2}{2}\, a_{0,1}(t_1,\tau_2)\,\omega(t_1,\tau_2)\,dt_1 \\
+ \int\limits_{\tau_1}^{T_1} (t_1-\tau_1)\, a_{1,1}(t_1,\tau_2)\,\omega(t_1,\tau_2)\,dt_1 + \int\limits_{\tau_1}^{T_1} a_{2,1}(t_1,\tau_2)\,\omega(t_1,\tau_2)\,dt_1.
\end{gathered} \tag{4}$$

В [2] N^* — это сопряженный к некоторому ЛОО $N : L_p(\Pi) \to L_p(\Pi)$ (формулу здесь не приводим, поскольку она громоздкая, непосредственно нам не требуется и имеется в [2]). Для каждой точки $t = (t_1;t_2) \in \overline{\Pi}$ функция $R(\cdot;t) \in L_{p'}(\Pi)$, являющаяся решением уравнения

$$N^*[\omega](\tau) = R_0(\tau;t), \quad \omega \in L_{p'}(\Pi),\ \tau \in \Pi,$$

названа в [2] *обобщенной функцией Римана* для задачи (3), (2). Как указано в [2], справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Задача* (3), (2) *имеет единственную обобщенную функцию Римана*[4]. *Решение задачи* (3), (2) *определяется формулой:*

$$y(t) = g_0[\varphi](t) + \iint\limits_{\Pi} \big(z(\tau) - \mathscr{L}\big[g_0[\varphi]\big](\tau), R(\tau;t)\big)\, d\tau_1\, d\tau_2, \quad t \in \Pi, \tag{5}$$

функция $g_0[\varphi] \equiv 0$ *при* $\varphi = 0$[5].

Непосредственно из формулы (5) видно, что решение задачи (3), (2) представляется в виде: $y(t) = \theta(t) + A[z](t)$, $t \in \Pi$, где $\theta \in W_p^{(3,1)}(\Pi)$ — решение задачи (3), (2) при $z = 0$; $A[z]$ — решение задачи (3), (2) при $\varphi = 0$. При этом, согласно леммам 1.1 и 1.2, можем понимать A как ЛОО $A : L_p(\Pi) \to W_p^{(3,1)}(\Pi)$, определяемый формулой

$$A[z](t) = \iint\limits_{\Pi} R(\tau;t)\, z(\tau)\, d\tau_1\, d\tau_2, \quad z \in L_p(\Pi),\ t = (t_1;t_2) \in \Pi.$$

Согласно теореме вложения Соболева (см., например, [6, с. 409]), при условии $1/2 \geqslant 1/p - 1/q$, $q \geqslant p$ (оно выполняется в силу исходных предположений), имеет место ограниченное вложение $W_p^{(1)}(\Pi) \subset L_q(\Pi)$, и очевидно, $W_p^{(3,1)}(\Pi) \subset W_p^{(1)}(\Pi)$. Поэтому оператор A можно рассматривать как ЛОО $L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$. Стало быть, решение исходной

[4] Строго говоря, полного доказательства этого факта в [2] не приводится; приведены только некоторые общие соображения. Поскольку нам потребуется не только сам этот факт, но также и формула, представляющая обобщенную функцию Римана, далее мы все это строго доказываем — см. лемму 4.2.

[5] Точную формулу для $g_0[\varphi]$ см. в [2]; нам она непосредственно не требуется.

задачи можем понимать как решение функционально-операторного уравнения типа Гаммерштейна:

$$y = \theta + A\big[f(\cdot, y, u)\big], \quad y \in L_q(\Pi). \tag{6}$$

Такое определение решения корректно, поскольку в силу исходных предположений, $f(\cdot, y, u) \in L_p(\Pi)$ для всех $y \in L_q(\Pi)$, $u \in \mathscr{D}$, следовательно, значение $A\big[f(\cdot, y, u)\big]$ определено и принадлежит пространству Соболева $W_p^{(3,1)}(\Pi) \subset L_q(\Pi)$; $\theta \in W_p^{(3,1)}(\Pi) \subset L_q(\Pi)$. Уравнение (6) — это частный случай уравнения, изучавшегося в [7].

2. Формулировка основных результатов

Сделаем еще два предположения относительно функции f.

F$_2$) Функция $f(t, x, v)$ дифференцируема по $x \in \mathbb{R}$, причем производная $f'_x(t, x, v)$ измерима по $t \in \Pi$, непрерывна по $(x; v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и такова, что $f'_x(\cdot, y, u) \in L_\sigma(\Pi)$ $\forall\, y \in L_q(\Pi)$, $u \in L_r(\Pi)$; $1/q + 1/\sigma = 1/p$.

F$_3$) Существует функция $\psi(t, x) : \Pi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная и не убывающая по $x \in \mathbb{R}_+$, $\psi(\cdot, y) \in L_p(\Pi)$ для всех $y \in L_q(\Pi)$, и такая, что

$$\Big| f\big(t, \theta(t) + x, u(t)\big)\Big| \leqslant \psi(t, |x|) \quad \text{для п.в. } t \in \Pi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathscr{D}.$$

Определим оператор $B : L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$ как мажоранту для ЛОО A:

$$B[z](t) = \iint\limits_{\Pi} |R(\tau; t)|\, z(\tau)\, d\tau_1\, d\tau_2, \quad z \in L_p(\Pi),\ t = (t_1; t_2) \in \Pi.$$

Мажорантным уравнением для уравнения (6) назовем уравнение вида

$$y = B\big[\psi(\cdot, y)\big], \quad y \in L_q(\Pi). \tag{7}$$

Замечание 2.1. В случае, когда обобщенная функция Римана неотрицательна, ясно, что $B = A$. В этом случае уравнение (7) равносильно задаче (2) с нулевыми условиями $\varphi = 0$ для уравнения $\mathscr{L}[y](t) = \psi(t, y)$. Эту задачу естественно называть *мажорантной* по отношению к исходной задаче (1), (2).

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 2.1. *Пусть мажорантное уравнение имеет глобальное неотрицательное решение $y = \overline{y} \in W_p^{(3,1)}(\Pi)$. Тогда исходная задача* (1), (2) *имеет единственное глобальное решение $y = y[u]$ для каждого управления $u \in \mathscr{D}$, и более того, $|y[u] - \theta| \leqslant \overline{y}$ $(\forall\, u \in \mathscr{D})$.*

В связи с теоремой 2.1 и замечанием 2.1 представляют интерес условия, обеспечивающие неотрицательность обобщенной функции Римана.

Теорема 2.2. *Предположим, что коэффициенты $a_{i,j}$ удовлетворяют условиям:*
K) $a_{i,0} \leqslant 0$, $i = 0, 1, 2, 3$; $a_{i,1} \leqslant 0$, $i = 0, 1, 2$.
Тогда $R(\cdot; t) \geqslant 0$ для всех $t \in \overline{\Pi}$.

Теоремы 2.1 и 2.2 будут доказаны ниже в § 5. Для доказательства теоремы 2.1 воспользуемся методикой [7]. Для удобства читателя основной результат работы [7] (который формулировался для случая банаховых идеальных пространств и мажорантного уравнения более общего вида) переформулируем для случая лебеговых пространств и мажорантного уравнения конкретного вида.

3. О ТСГР уравнения типа Гаммерштейна

Пусть $1 \leqslant p \leqslant q$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, ℓ, m, n, $s \in \mathbb{N}$ — заданные числа; $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное, измеримое по Лебегу множество; $\mathscr{D} \subset L_r^s(\Pi)$ — заданное поточечно ограниченное множество; $A : L_p^m(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$ — ЛОО; $g(t,x,v) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям:

$\mathbf{G}_1$) $g(t,x,v)$ измерима по $t \in \Pi$, непрерывна по $(x;v) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и такова, что суперпозиция $g(\cdot,y,u) \in L_p^m(\Pi)$ для всех $y \in L_q^\ell(\Pi)$, $u \in L_r^s(\Pi)$.

$\mathbf{G}_2$) Функция $g(t,x,v)$ дифференцируема по $x \in \mathbb{R}$, причем производная $g'_x(t,x,v)$ измерима по $t \in \Pi$, непрерывна по $(x;v) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и такова, что суперпозиция $g'_x(\cdot,y,u) \in L_\sigma^{m\times\ell}(\Pi)$ для всех $y \in L_q^\ell(\Pi)$, $u \in L_r^s(\Pi)$; $1/q + 1/\sigma = 1/p$.

$\mathbf{G}_3$) Существует функция $\psi(t,x) : \Pi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная и не убывающая по $x \in \mathbb{R}_+$, которая дает суперпозицию $\psi(\cdot,y) \in L_p(\Pi)$ для всех $y \in L_q(\Pi)$ и обеспечивает оценку:

$$\Big|g\big(t,x,u(t)\big)\Big| \leqslant \psi(t,|x|) \quad \text{для п.в. } t \in \Pi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^\ell,\ u \in \mathscr{D}.$$

Рассмотрим управляемое функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна:

$$x = A\big[g(\cdot,x,u)\big], \quad x \in L_q^\ell(\Pi),\ u \in \mathscr{D}. \tag{8}$$

Сделаем еще одно предположение.

$\mathbf{A}_1$) ЛОО A обладает положительной мажорантой, т. е. существует положительный ЛОО $B : L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$ такой, что $\big|A[z]\big| \leqslant B\big[|z|\big]$ для всех $z \in L_p^m(\Pi)$, причем для всякого $y \in L_\sigma(\Pi)$, $y \geqslant 0$, и оператора $B_{(y)} : L_q(\Pi) \to L_q(\Pi)$, определяемого формулой $B_{(y)}[x] = B[yx]$, спектральный радиус $\rho(B_{(y)}) < 1$.

Уравнение

$$x = B\big[\psi(\cdot,x)\big], \quad x \in L_q(\Pi), \tag{9}$$

в соответствии с терминологией [7] назовем *мажорантным* для уравнения (8). Из результатов [7] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть мажорантное уравнение* (9) *имеет решение* $\widehat{x} \in L_q(\Pi)$, $\widehat{x} \geqslant 0$. *Тогда каждому управлению* $u \in \mathscr{D}$ *отвечает единственное решение* $x[u] \in L_q^\ell(\Pi)$ *уравнения* (8), *удовлетворяющее оценке:* $|x[u]| \leqslant \widehat{x}$.

Отметим, что единственность решения во всем пространстве $L_q^\ell(\Pi)$ из теоремы 3.1 не следует. Однако в [7] отдельно доказана также и теорема единственности для уравнения (8). Для того, чтобы сформулировать ее, понадобится ввести некоторые понятия.

Определение 3.1. Пусть $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ — σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Π, P_H — оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества $H \in \Sigma$. Тогда систему $\mathscr{B}(A) = \big\{H \in \Sigma : P_H A P_H = P_H A\big\}$ будем называть *системой вольтерровых множеств* ЛОО $A : L_p^m(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$. При этом для числа $\delta > 0$ подсистему $\mathscr{T} = \big\{\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\big\} \subset \mathscr{B}(A)$ будем называть

1) *вольтерровой δ-цепочкой* ЛОО A, если $\big\|P_h A P_h\big\| < \delta$ для всех $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = 1,\ldots,k$;

2) *вольтерровой δ-малой по мере цепочкой множеств* ЛОО A, если $\mathrm{mes}\,(h) < \delta$ для всех $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = 1,\ldots,k$.

Сделаем еще одно предположение.

$\mathbf{A}_2$) Имеет место неравенство $p < q$; ЛОО $A : L_p^m(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$ обладает для всех $\delta > 0$ вольтерровой δ-малой по мере цепочкой множеств.

Как показано в [7, теорема 2.1], из выполнения одного только условия $\mathbf{A}_2$) вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.2 (признак квазинильпотентности). *Для всякой функции* $y \in L_\sigma^{m\times\ell}(\Pi)$ *операторы* $A_{(y)} : L_q^\ell(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$ *и* $A_{[y]} : L_p^m(\Pi) \to L_p^m(\Pi)$, *определяемые соответственно формулами:*

$$A_{(y)}[x] = A[yx], \quad x \in L_q^\ell(\Pi); \qquad A_{[y]}[z] = yA[z], \quad z \in L_p^m(\Pi),$$

являются квазинильпотентными, и более того, обладают для любого $\delta > 0$ *вольтерровой* δ*-цепочкой.*

Первое утверждение теоремы 3.2 вытекает из второго ее утверждения, а также из следующего факта, установленного в [5] (далее он понадобится нам сам по себе).

Теорема 3.3. *Пусть ЛОО* $F : L_q^\ell(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$ *обладает для любого числа* $\delta > 0$ *вольтерровой* δ*-цепочкой. Тогда спектральный радиус* $\rho(F) = 0$ (*т. е. оператор квазинильпотентен*).

Следующее утверждение является конкретизацией теоремы 2.2 из [7].

Теорема 3.4. *При выполнении предположений* $\mathbf{G}_1$), $\mathbf{G}_2$), $\mathbf{A}_2$) *уравнение* (8) *не может иметь более одного решения ни при каком управлении* $u \in L_r^s(\Pi)$.

4. Вспомогательные утверждения

Прежде всего, определим ЛОО $G = I - N^* : L_{p'}(\Pi) \to L_{p'}(\Pi)$ (здесь I — это тождественный оператор).

Лемма 4.1. *ЛОО* G *квазинильпотентен, т. е.* $\rho(G) = 0$.

$\lhd$ Согласно теореме 3.3, достаточно доказать, что оператор G обладает для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой. В силу (4), для ЛОО G всякое множество вида $H_\nu = \big\{t \in \Pi :\ t_1 + t_2 \geqslant \nu\big\}$, $\nu \in [0;T]$, $T = T_1 + T_2$, является вольтерровым. Поэтому остается лишь убедиться в том, что для всякого множества $h = H_{\nu'} \setminus H_\nu$, $0 \leqslant \nu' < \nu' \leqslant T$, норма $\|P_hGP_h\| \to 0$ при $|\nu' - \nu| \to 0$ равномерно по ν, ν'. Заметим, что выражение $G[\omega]$, $\omega \in L_{p'}(\Pi)$, представляет собой сумму слагаемых следующих трех типов:

$$G_1[\omega](\tau) = \int\limits_{\tau_1}^{T_1} dt_1 \int\limits_{\tau_2}^{T_2} a_1(t)\,\omega(t)\,dt_2, \quad G_2[\omega](\tau) = \int\limits_{\tau_2}^{T_2} a_2(\tau_1,t_2)\,\omega(\tau_1,t_2)\,dt_2,$$

$$G_3[\omega](\tau) = \int\limits_{\tau_1}^{T_1} a_3(t_1,\tau_2)\,\omega(t_1,\tau_2)\,dt_1,$$

где $a_1 \in L_p(\Pi)$, $a_2 \in L_{\infty,p}(\Pi)$, $a_3 \in L_{p,\infty}(\Pi)$. По условию $p > 1$[6].

Выберем произвольно $\omega \in L_{p'}(\Pi)$, $\|\omega\| \leqslant 1$. Рассмотрим по отдельности операторы G_i, $i = 1,2,3$.

1. Непосредственно из неравенства Гёльдера получаем:

$$\big|G_1P_h[\omega]\big| \leqslant \iint\limits_\Pi |\chi_h(t)a_1(t)|\,|\omega(t)|\,dt \leqslant \|\chi_ha_1\|_{L_p}\,\|\omega\|_{L_{p'}} \leqslant \|\chi_ha_1\|_{L_p}.$$

[6] В случае $p = 1$, и соответственно, $p' = \infty$, для строгого доказательства потребуются дополнительные предположения относительно коэффициентов a_2, a_3.

Отсюда ясно, что

$$\|P_hG_1P_h\| \leqslant (\operatorname{mes}\Pi)^{1/p'}\|\chi_h a_1\|_{L_p(\Pi)},$$

после чего остается воспользоваться абсолютной непрерывностью интеграла Лебега.

2. Вновь применяя неравенство Гёльдера, можем оценить:

$$\iint\limits_{\Pi}\big|P_hG_2P_h[\omega]\big|^{p'}\,d\tau \leqslant \iint\limits_{\Pi}\chi_h(\tau)\bigg(\int\limits_{\tau_2}^{T_2}|a_2(\tau_1,t_2)|\cdot|\omega(\tau_1,t_2)|\,dt_2\bigg)^{p'}d\tau$$

$$\leqslant \iint\limits_{\Pi}\chi_h(\tau)\cdot\|a_2(\tau_1,.)\|^{p'}_{L_p(\Pi_2)}\cdot\int\limits_{\tau_2}^{T_2}|\omega(\tau_1,t_2)|^{p'}\,dt_2\,d\tau$$

$$\leqslant \|a_2\|^{p'}_{L_{\infty,p}(\Pi)}\iint\limits_{\Pi}\int\limits_{0}^{\tau_2}\chi_h(\tau_1,t_2)\,dt_2\cdot|\omega(\tau)|^{p'}\,d\tau \leqslant \|a_2\|^{p'}_{L_{\infty,p}(\Pi)}\cdot|\nu'-\nu|\cdot\|\omega\|^{p'}_{L_{p'}}.$$

Отсюда $\|P_hG_2P_h\| \leqslant \|a_2\|_{L_{\infty,p}(\Pi)}\cdot\big(|\nu'-\nu|\cdot T_2\big)^{1/p'}$.

3. Аналогично пункту 2, $\|P_hG_3P_h\| \leqslant \|a_3\|_{L_{p,\infty}(\Pi)}\cdot\big(|\nu'-\nu|\cdot T_1\big)^{1/p'}$. $\rhd$

Лемма 4.2. *Обобщенная функция Римана существует, единственна и выражается формулой (здесь G^k — k-я степень оператора G):*

$$R(\cdot;t) = (I-G)^{-1}\big[R_0(\cdot;t)\big] = \sum_{k=0}^{\infty}G^k[R_0(\cdot;t)],\quad t\in\overline{\Pi}. \tag{10}$$

$\lhd$ По определению, обобщенная функция Римана — это решение уравнения:

$$N^*[\omega] = R_0(\cdot;t),\quad \omega\in L_{p'}(\Pi),$$

которое, согласно нашим обозначениям, равносильно следующему:

$$(I-G)[\omega] = R_0(\cdot;t),\quad \omega\in L_{p'}(\Pi).$$

Согласно лемме 4.1, $\rho(G)=0<1$. Поэтому существует ЛОО $(I-G)^{-1}: L_{p'}(\Pi)\to L_{p'}(\Pi)$, который выражается формулой: $(I-G)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}G^k$. $\rhd$

Лемма 4.3. *Для п.в.* $\tau\in\Pi\setminus\Pi_t$, $\Pi_t=[0;t_1]\times[0;t_2]$, *имеем:* $R(\tau;t)=0$.

$\lhd$ Обозначим $\widetilde{\Pi_t}=\Pi\setminus\Pi_t$. Исходя из формулы (4) и определения оператора G, нетрудно понять, что множество $\widetilde{\Pi_t}$ является вольтерровым для оператора G. Таким образом, для любого натурального k оно оказывается вольтерровым и для степени G^k. Действительно,

$$P_{\widetilde{\Pi_t}}G^k = P_{\widetilde{\Pi_t}}GP_{\widetilde{\Pi_t}}G^{k-1} = \ldots = \big(P_{\widetilde{\Pi_t}}GP_{\widetilde{\Pi_t}}\big)^k = P_{\widetilde{\Pi_t}}G^kP_{\widetilde{\Pi_t}}.$$

Отсюда ясно, что множество $\widetilde{\Pi_t}$ будет вольтерровым и для оператора $(I-G)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}G^k$. Тогда, пользуясь формулой (10), получаем:

$$P_{\widetilde{\Pi_t}}R(\cdot;t) = P_{\widetilde{\Pi_t}}(I-G)^{-1}P_{\widetilde{\Pi_t}}R_0(\cdot;t).$$

Остается заметить, что $P_{\widetilde{\Pi_t}}R_0(\cdot;t)\equiv 0$ согласно определению функции $R_0(\cdot;t)$. $\rhd$

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия* **K**). *Тогда оператор G положителен.*

$\lhd$ Доказательство очевидно из определения ЛОО G и формулы (4). $\rhd$

5. Доказательство основных результатов

Прежде всего, делая замену $y - \theta = x$, преобразуем уравнение (6) к виду

$$x = A\big[g(\cdot, x, u)\big], \quad x \in L_q(\Pi),\ u \in \mathscr{D}, \tag{11}$$

где $g(t, x, u) = f\big(t, \theta(t) + x, u\big)$. Уравнение (11) — это частный случай уравнения (8). Для доказательства теоремы 2.1 достаточно проверить выполнение условий теорем 3.1 и 3.4.

Выполнение условий $\mathbf{G}_1$), $\mathbf{G}_2$), $\mathbf{G}_3$) следует, очевидно, из условий $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), $\mathbf{F}_3$), а также предположения § 2 о существовании функции ψ.

По лемме 4.3, всякое множество вида $H'_\nu = \big\{t \in \Pi : t_1 + t_2 \leqslant \nu\big\}$, $0 \leqslant \nu \leqslant T = T_1 + T_2$, будет вольтерровым для операторов A и B, следовательно, оба они обладают для каждого $\delta > 0$ вольтерровой δ-малой по мере цепочкой множеств. Отсюда сразу же следует выполнение условия $\mathbf{A}_2$), а в соответствии с теоремой 3.2 — и выполнение условия $\mathbf{A}_1$).

Таким образом, выполняются все предположения теорем 3.1 и 3.4, а тем самым, справедливо утверждение теоремы 2.1.

Для доказательства теоремы 2.2 достаточно заметить, что $R_0(\cdot; t) \geqslant 0$ для всех $t \in \overline{\Pi}$ и воспользоваться леммой 4.4 и формулой (10).

Литература

1. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.—М.: Наука, 1972.—416 с.
2. *Мамедов И. Г.* Формула интегрирования по частям неклассического типа при исследовании задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 4.—С. 40–51.
3. *Потапов Д. К.* Задачи управления для уравнений со спектральным параметром и разрывным оператором при наличии возмущений // Журн. Сибирского федерального ун-та. Сер. Математика и физика.—2012.—Т. 5, № 2.—С. 239–245.
4. *Потапов Д. К.* Оптимальное управление распределенными системами эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Изв. РАН. ТиСУ.—2013.—№ 2.—С. 19–24.
5. *Сумин В. И., Чернов А. В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Диф. уравнения.—1998.—Т. 34, № 10.—С. 1402–1411.
6. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.—М.: Мир, 1980.—664 с.
7. *Чернов А. В.* Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 3.—С. 95–107.
8. *Чернов А. В.* О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика.—2012.—№ 3.—С. 62–73.
9. *Чернов А. В.* Об одном обобщении метода монотонных операторов // Диф. уравнения.—2013.—Т. 49, № 4.—С. 535–544.

Статья поступила 3 сентября 2013 г.

Чернов Андрей Владимирович
Нижегородский гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского,
доцент кафедры математической физики
РОССИЯ, 603950, Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23

Нижегородский гос. технический ун-т им. Р. Е. Алексеева,
доцент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
E-mail: chavnn@mail.ru

ON TOTAL PRESERVATION OF GLOBAL SOLVABILITY FOR A GOURSAT PROBLEM ASSOCIATED WITH A CONTROLLED SEMILINEAR PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Chernov A. V.

We investigate a Goursat problem associated with a controlled fourth order semilinear equation of the pseudoparabolic type having various applications. Under some hypotheses we prove the total (with respect to the set of admissible controls) preservation of global solvability for the considered problem.

Key words: Goursat problem, semilinear controlled pseudoparabolic equation, total preservation of global solvability, functional operator equation of the Hammerstein type.