*Владикавказский математический журнал*
*2014, Том 16, Выпуск 2, С. 62–68*

*УДК* **517.968**

# ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ВЕСОВЫХ ОБОБЩЕННЫХ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

**С. М. Умархаджиев**

Доказана теорема о двухвесовой ограниченности линейных операторов во введенных нами ранее обобщенных гранд-пространствах Лебега. С помощью этой теоремы получены двухвесовые оценки нормы потенциала Рисса в рассматриваемых пространствах.

**Ключевые слова:** обобщенное гранд-пространство Лебега, потенциал Рисса, интерполяционная теорема, весовые оценки.

## 1. Введение

Неравенство Соболева [2]

$$\|I^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<q<\infty,\ 1/q=1/p-\alpha/n, \tag{1}$$

для потенциала Рисса

$$I^\alpha f := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)\,dy, \quad 0<\alpha<n,$$

в пространствах Лебега $L^p(\mathbb{R}^n)$ имеет известные весовые обобщения, полученные в работах В. Кокилашвили [1, 15, 16], E. T. Sawyer [25], E. T. Sawyer и R. L. Weeden [26], C. Pérez [23, 24], S. Tord [30].

В этой работе мы рассматриваем потенциалы Рисса в весовых обобщенных *гранд-пространствах Лебега* $L^{p)}_a(\mathbb{R}^n, w)$. В 1992 г. T. Iwaniec и C. Sbordone [13] ввели *grand Lebesgue spaces* (*гранд-пространства Лебега*) по ограниченному множеству $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ следующим определением:

$$L^{p),\theta}(\Omega) = \left\{ f:\ \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} < \infty \right\}, \quad 1<p<\infty,\ \theta>0.$$

Операторы гармонического анализа интенсивно исследовались в таких пространствах в последние годы; они продолжают привлекать внимание исследователей в связи с различными приложениями [5, 6], [8–12], [14], [17–21].

В [27, 28] был предложен подход, позволяющий ввести гранд-пространства Лебега на множествах неограниченной меры. В наиболее общей форме этот подход реализован в [3] в виде

$$L^{p),\theta}_a(\Omega, w) = \left\{ f:\ \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, wa^\varepsilon)} < \infty \right\},$$

где $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ и $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольное открытое множество; в случае $\theta = 1$ пишут $L_a^p(\Omega, w) := L_a^{p,1}(\Omega, w)$ , и $L^{p,\theta}(\mathbb{R}^n, w) = L^{p),\theta}(\mathbb{R}^n, w)\Big|_{a\equiv 1}$ — в случае $a \equiv 1$.

Весовое обобщенное гранд-пространство Лебега $L_a^{p),\theta}(\Omega, w)$ зависит от «функционального параметра» $a$ и является расширением классического пространства Лебега $L^p(\Omega, w)$ при условии $a \in L^p(\Omega, w)$.

В работах [3, 27] с помощью теремы Рисса — Торина — Стейна — Вейса об интерполировании с изменением меры показано, что ограниченность произвольного линейного оператора в двух «близких друг к другу» обычных весовых пространствах Лебега влечет ограниченность в весовом гранд-пространстве Лебега. На основе этого в [3] доказана ограниченность операторов Кальдерона — Зигмунда и максимального оператора Харди — Литтлвуда в весовых гранд-пространствах Лебега.

Основная цель данной работы — исследование действия потенциала Рисса во введенных в [3] весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега. Для этого мы сначала в теореме 3.1, применением той же теремы Рисса — Торина — Стейна — Вейса получаем двухвесовые оценки для линейных операторов в рассматриваемых весовых гранд-пространствах. Как следствие из этих оценок и свойств весов Макенхаупта — Уидена получаем основное утверждение — теорему 4.2 об ограниченности потенциала Рисса в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега.

**Обозначения.** $C$, $c$ — различные абсолютные положительные постоянные, которые могут иметь различные значения даже в одной и той же строке; $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$; $|A|$ — мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$; $v$, $w$ — веса на $\Omega$, т. е. неотрицательные локально интегрируемые на $\Omega$ функции, обращающиеся в нуль на множестве нулевой меры; $w(E) = \int_E w(x)\,dx$; $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}$; $\widetilde{B}(x,r) = B(x,r) \cap \Omega$; $Q$ — куб в $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными координатным осям; $\hookrightarrow$ означает непрерывное вложение; $p' = \frac{p}{p-1}$.

## 2. Предварительные сведения

**2.1. Определения и вспомогательные утверждения.** Через $A_p$, $1 < p < \infty$, обозначаем класс весовых функций, удовлетворяющих условию Макенхаупта [22]:

$$\sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w(x)\,dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx \right)^{p-1} < \infty.$$

Определение 2.1. Будем говорить, что пара весов $(w, v)$ принадлежит классу $A_{p,q}^{\alpha}$, $0 < \alpha < n$, $1 < p, q < \infty$ [26], если

$$\sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} |Q|^{\alpha/n+1/q-1/p} \left( \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q v(x)\,dx \right)^{1/q} \left( \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w(x)^{1-p'}\,dx \right)^{1/p'} < \infty.$$

Определение 2.2. Будем говорить, что пара весов $(w, v)$ принадлежит классу $A^*(p,q)$, $1 < p, q < \infty$ [7], если

$$\sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q v(x)^q dx \right)^{1/q} \left( \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w(x)^{-p'} dx \right)^{1/p'} < \infty.$$

**Лемма 2.3.** *Пусть $0 < \alpha < n$, $1 < p, q < \infty$ и выполнены условия*

1) *для весовых функций $w$ и $v$ существуют числа $r > 1$ и $0 < \varepsilon < q - 1$ такие, что*

$$\sup_Q |Q|^{\alpha/n+1/(q-\varepsilon)-1/p} \left( \int_Q v(x)^r dx \right)^{\frac{1}{(q-\varepsilon)r}} \left( \int_Q w(x)^{(1-p')r}\, dx \right)^{\frac{1}{p'r}} < \infty; \tag{2}$$

2) *неотрицательные функции $a$ и $b$ таковы, что существует число $\delta > \varepsilon$ такое, что $\left(a^{\frac{\delta}{p}}, b^{\frac{\delta}{q-\varepsilon}}\right) \in A^*(p, q-\varepsilon)$.*

*Тогда $(wa^\varepsilon, vb^\varepsilon) \in A^\alpha_{p,q-\varepsilon}$.*

◁ Обозначим

$$\Delta := \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} |Q|^{\alpha/n+1/(q-\varepsilon)-1/p} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) b(x)^\varepsilon\, dx \right)^{1/(q-\varepsilon)} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \left[ w(x) a(x)^\varepsilon \right]^{1-p'} dx \right)^{1/p'}.$$

К обоим интегралам применим неравенство Гёльдера с показателем $r > 1$. Получим

$$\Delta \leqslant \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} |Q|^{\alpha/n+1/(q-\varepsilon)-1/p} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q v(x)^r dx \right)^{\frac{1}{r(q-\varepsilon)}} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{(1-p')r}\, dx \right)^{\frac{1}{rp'}}$$
$$\times \left[ \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \left[ b(x)^{\varepsilon r'/(q-\varepsilon)} \right]^{q-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \left[ a(x)^{\varepsilon r'/p} \right]^{-p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^{1/r'}.$$

Откуда следует утверждение леммы. ▷

В случае $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha/n$ известно соотношение

$$(w^{p/q}, w) \in A^\alpha_{p,q} \Longleftrightarrow w \in A_{1+q/p'}. \tag{3}$$

**2.2. Ограниченность риссова потенциала в весовых пространствах Лебега.** Будем говорить, что вес $w$ удовлетворяет условию удвоения, если существует $C > 0$ такое, что $w(2Q) \leqslant Cw(Q)$ для всех кубов $Q \subset \mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными координатным осям.

Основное утверждение данной статьи получено посредством теоремы Сойера — Уидена [26] об ограниченности оператора потенциала $I^\alpha$ в классических пространствах Лебега:

**Теорема 2.4.** *Пусть $0 < \alpha < n$, $1 < p \leqslant q < \infty$.*

(1) *Неравенство*

$$\|I^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^n, v)} \leqslant c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n, w)} \tag{4}$$

*выполняется, если существует $r > 1$ такое, что*

$$\sup_Q |Q|^{\alpha/n+1/q-1/p} \left( \int_Q v(x)^r dx \right)^{1/(qr)} \left( \int_Q w(x)^{(1-p')r}\, dx \right)^{1/(p'r)} < \infty. \tag{5}$$

(2) *Если предположить, что $p < q$ и функции $v$ и $w^{1-p'}$ удовлетворяют условию удвоения, то (4) выполняется тогда и только тогда, когда $(w, v) \in A^\alpha_{p,q}$.*

**2.3. Интерполяционная теорема.** Нам понадобится следующая интерполяционная теорема Рисса — Торина — Стейна — Вейса с изменением меры [4, 29], которую мы формулируем в весовых терминах.

**Теорема 2.5.** *Пусть $p_k, q_k \in [1, \infty)$ и $v_k, w_k$ — веса на $\Omega$, $k = 1, 2$, и $T$ — сублинейный оператор, определенный на $L^{p_1}(\Omega, w_1) \cap L^{p_2}(\Omega, w_2)$. Если $T : L^{p_1}(\Omega, w_1) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega, v_1)$ с нормой $M_1$ и $T : L^{p_2}(\Omega, w_2) \hookrightarrow L^{q_2}(\Omega, v_2)$ с нормой $M_2$, то*

$$T : \ L^{p_t}(\Omega, w_t) \hookrightarrow L^{q_t}(\Omega, v_t)$$

*с нормой $M \leqslant M_1^{1-t} M_2^t$, где*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1}{p_1} + \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)t, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1}{q_1} + \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)t, \tag{6}$$

$$w_t = w_1^{(1-t)\frac{p_t}{p_1}} w_2^{t\frac{p_t}{p_2}}, \quad v_t = v_1^{(1-t)\frac{q_t}{q_1}} v_2^{t\frac{q_t}{q_2}}, \quad 0 < t < 1. \tag{7}$$

## 3. Ограниченность линейных операторов в обобщенных гранд-пространствах Лебега

**Теорема 3.1.** *Пусть $1 < p, q < \infty$, $w$ и $v$ — два веса на $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть линейный оператор $T$ ограничен из пространства $L^p(\Omega, w)$ в пространство $L^q(\Omega, v)$ и ограничен из пространства $L^{p_0}(\Omega, wa^{p-p_0})$ и пространство $L^{q_0}(\Omega, vb^{q-q_0})$ для некоторых двух чисел $1 < p_0 < p$, $1 < q_0 < q$ и некоторых двух неотрицательных на $\Omega$ функций $a \in L^p(\Omega, w)$ и $b \in L^q(\Omega, v)$.*

*Тогда оператор $T$ ограничен из весового обобщенного гранд-пространства Лебега $L_a^{p),\theta}(\Omega, w)$ в весовое обобщенное гранд-пространство Лебега $L_b^{q),\theta q/p}(\Omega, v)$.*

$\lhd$ Для произвольного положительного числа $\theta_1$ имеем

$$\|Tf\|_{L_b^{q),\theta_1}(\Omega,v)} = \sup_{0<\varepsilon<q-1} \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega, vb^\varepsilon)} = \max\{A, B\},$$

где

$$A = \sup_{0<\varepsilon\leqslant q-q_0} \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega, vb^\varepsilon)}, \quad B = \sup_{q-q_0<\varepsilon<q-1} \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega, vb^\varepsilon)}. \tag{8}$$

*Оценка величины $A$.* По интерполяционной теореме 2.5 с параметрами

$$p_1 = p, \quad p_2 = p_0, \quad q_1 = q, \quad q_2 = q_0, \quad v_1 = w, \quad v_2 = wa^{p-p_0}, \quad w_1 = v, \quad w_2 = vb^{q-q_0}$$

получаем, что

$$\|Tf\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega, vb^\varepsilon)} \leqslant M_1^{1-t} M_2^t \|f\|_{L^{p_\varepsilon}(\Omega, wa^{p-p_\varepsilon})},$$

$p_\varepsilon = \left(\frac{1}{p} + t\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}\right)\right)^{-1}$, $t = \frac{\varepsilon q_0}{(q-q_0)(q-\varepsilon)}$ для всех $\varepsilon \in [0, q - q_0]$. Следовательно,

$$A \leqslant \sup_{0<\varepsilon\leqslant q-q_0} M_1^{1-t} M_2^t \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p_\varepsilon}(\Omega, wa^{p-p_\varepsilon})}$$
$$\leqslant \sup_{0<\varepsilon\leqslant q-q_0} M_1^{1-t} M_2^t \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}} (p - p_\varepsilon)^{-\frac{\theta}{p_\varepsilon}} \sup_{0<p-p_\varepsilon\leqslant p-p_0} (p - p_\varepsilon)^{\frac{\theta}{p_\varepsilon}} \|f\|_{L^{p_\varepsilon}(\Omega, wa^{p-p_\varepsilon})}.$$

Учитывая, что $t=\frac{p_0(p-p_\varepsilon)}{p_\varepsilon(p-p_0)}$, получим $A\leqslant C(p_0,q_0)\|f\|_{L_a^{p),\theta}(\Omega,w)}$, где

$$C(p_0,q_0)=\sup_{0<t\leqslant 1} M_1^{1-t}M_2^t\left(\frac{tq(q-q_0)}{q_0+t(q-q_0)}\right)^{-\theta\left(\frac{1-t}{q}+\frac{t}{q_0}\right)}\left(\frac{tp(p-p_0)}{p_0+t(p-p_0)}\right)^{\theta_1\left(\frac{1-t}{p}+\frac{t}{p_0}\right)}.$$

Выделив из правой части сомножитель $t^{\theta_1\frac{1}{q}-\theta\frac{1}{p}}$, можно сделать вывод: *константа $C(p_0,q_0)$ конечна, если $\theta_1=\frac{q}{p}\theta$.*

*Оценка величины $B$.* Воспользовавшись неравенством Гёльдера с показателем $\frac{q_0}{q-\varepsilon}>1$, получим

$$\|Tf\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega,vb^\varepsilon)}\leqslant\|b\|_{L^q(\Omega,v)}^{q\left(\frac{1}{q-\varepsilon}-\frac{1}{q_0}\right)}\|Tf\|_{L^{q_0}(\Omega,vb^{q-q_0})},$$

так что

$$\begin{aligned}B&\leqslant\sup_{q-q_0<\varepsilon<q-1}\varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}\|b\|_{L^q(\Omega,v)}^{q\left(\frac{1}{q-\varepsilon}-\frac{1}{q_0}\right)}\|Tf\|_{L^{q_0}(\Omega,vb^{q-q_0})}\\&=(q-q_0)^{-\frac{\theta_1}{q_0}}\|b\|_{L^q(\Omega,v)}^{-\frac{q}{q_0}}\sup_{q-q_0<\varepsilon<q-1}\varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}\|b\|_{L^q(\Omega,v)}^{\frac{q}{q-\varepsilon}}(q-q_0)^{\frac{\theta_1}{q_0}}\|Tf\|_{L^{q_0}(\Omega,vb^{q-q_0})}\\&\leqslant\inf_{0<q-q_0<q-1}\Big(h^{-1}(q-q_0)\sup_{q-q_0<\varepsilon<q-1}h(\varepsilon)\Big)\cdot A=A.\end{aligned}$$

где обозначено $h(\varepsilon):=\varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}\|b\|_{L^q(\Omega,v)}^{\frac{q}{q-\varepsilon}}$. Объединяя оценки для $A$ и $B$, получим утверждение теоремы 3.1. ▷

Замечание 3.2. В случае $\frac{p_0}{q_0}=\frac{p}{q}$ справедливо $C(p_0,q_0)=\max\Big\{M_1\big(\frac{q}{p}\big)^{\frac{\theta}{p}},M_2\big(\frac{q}{p}\big)^{\frac{\theta}{p_0}}\Big\}$.

## 4. Основное утверждение

В работе [21] получено необходимое и достаточное условие ограниченности потенциала Рисса в весовом гранд-пространстве Лебега на отрезке $[0,1]$:

**Теорема 4.1.** *Пусть $0<\alpha<1$, $1<p<\infty$, $\theta>0$ и $q=p/(1-\alpha p)$. Тогда неравенство*

$$\|I^\alpha(fw^\alpha)\|_{L^{q),\theta(1+\alpha q)}([0,1],w)}\leqslant c\|f\|_{L^{p),\theta}([0,1],w)}$$

*выполняется тогда и только тогда, когда $w\in A_{1+q/p'}$.*

На основании теоремы 3.1 мы можем получить двухвесовую оценку нормы потенциала Рисса по $\mathbb{R}^n$ в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега:

**Теорема 4.2.** *Пусть $0<\alpha<n$ и $1<p<q<\infty$. Пусть*

1) $(w,v)\in A^\alpha_{p,q}$;

2) *$v$ и $w^{1-p'}$ удовлетворяют условию удвоения;*

3) *для некоторых чисел $r>1$ и $0<\varepsilon_0<q-1$ выполняется условие*

$$\sup_Q|Q|^{\alpha/n+1/(q-\varepsilon_0)-1/p_0}\left(\int_Q v(x)^r dx\right)^{\frac{1}{(q-\varepsilon_0)r}}\left(\int_Q w(x)^{(1-p_0')r}\,dx\right)^{\frac{1}{p_0'r}}<\infty,\quad p_0\leqslant q-\varepsilon_0;$$

4) *неотрицательные функции $a$ и $b$ таковы, что существует число $\delta>\varepsilon_0$ такое, что $\left(a^{\frac{\delta}{p_0}},b^{\frac{\delta}{q-\varepsilon_0}}\right)\in A^*(p_0,q-\varepsilon_0)$ и функции $vb^{\varepsilon_0}$ и $(wa^{\varepsilon_0})^{1-p_0'}$ удовлетворяют условию удвоения.*

*Тогда оператор Рисса $I^\alpha$ ограничен из обобщенного гранд-пространства Лебега $L_a^{p,\theta}(\mathbb{R}^n, w)$ в обобщенное гранд-пространство Лебега $L_b^{q,\theta q/p}(\mathbb{R}^n, v)$, $\theta > 0$.*

$\lhd$ Из условий 1) и 2) в силу теоремы 2.4 следует ограниченность оператора Рисса из пространства $L^p(\Omega, w)$ в пространство $L^q(\Omega, v)$, из условий 3) и 4) на основании леммы 2.3 и теоремы 2.4 следует его ограниченность из пространства $L^{p_0}(\Omega, wa^{\varepsilon_0})$ в пространство $L^{q-\varepsilon_0}(\Omega, vb^{\varepsilon_0})$. Таким образом, условия теоремы 3.1 выполнены и тем самым теорема 4.2 доказана. $\rhd$

**Следствие 4.3.** *Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha/n$, $w \in A_{1+q/p'}$ и функции $w$ и $w^{-p'/q}$ удовлетворяют условию удвоения.*

*Тогда $I^\alpha : L^{p,\theta}(\Omega, w^{p/q}) \hookrightarrow L^{q,\theta q/p}(\Omega, w)$.*

$\lhd$ Из соотношения (3) следует, что пара функций $(w^{p/q}, w)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 4.2. Следовательно, $w \in A_{1+\frac{q}{p'}}$. Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $w \in A_{1+\frac{q}{p'}-\varepsilon}$. Решив систему уравнений $\frac{q-\varepsilon_0}{p_0'} = \frac{q}{p'} - \varepsilon$, $\frac{1}{q-\varepsilon_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$, получим числа $p_0$ и $\varepsilon_0$, для которых имеет место соотношение $A_{1+\frac{q}{p'}} = A_{1+\frac{q-\varepsilon_0}{p_0'}}$. Откуда следует выполнимость условия 3) теоремы 4.2. Первая часть условия 4) выполняется, так как класс $A^*_{p,q}$ содержит константу, а вторая — совпадает с условием 2). Таким образом, все условия теоремы 4.2 выполнены и следствие доказано. $\rhd$

Отметим, что в случае отрезка $[0,1]$ теорема 4.2 содержит достаточную частью теоремы 4.1 при выборе $w = w^{1-\alpha p}$, $v = w$, $b = 1$, $a = w^\alpha$.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору С. Г. Самко за полезные замечания, способствовшие улучшению содержания статьи.

## Литература


1. *Кокилашвили В.* Максимальные функции и интегралы типа потенциала в весовых пространствах Лебега и Лоренца // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—1985.—Vol. 172.—С. 192–201.
2. *Соболев С. Л.* Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб.—1938.—Vol. 4 (3).—С. 471–497.
3. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Изв. вузов. Математика.—2014.—Vol. 4.—С. 42–51.
4. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation Spaces. An Introduction.—Berlin: Springer, 1976.—207 p.
5. *Capone C., Fiorenza A.* On small Lebesgue spaces // J. Function Spaces and Appl.—2005.—Vol. 3.—P. 73–89.
6. *Di Fratta G., Fiorenza A.* A direct approach to the duality of grand and small Lebesgue spaces // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications.—2009.—Vol. 70, № 7.—P. 2582–2592.
7. *Ding Y., Lin C.-C.* Two-weight norm inequalities for the rough fractional integrals // Int. J. Math. Math. Sci.—2001.—Vol. 25, № 8.—P. 517–524.
8. *Fiorenza A., Gupta B., Jain P.* The maximal theorem in weighted grand Lebesgue spaces // Studia Math.—2008.—Vol. 188, № 2.—P. 123–133.
9. F*iorenza A.* Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces // Collect. Math.—2000.—Vol. 51, № 2.—P. 131–148.
10. *Fiorenza A., Karadzhov G. E.* Grand and small Lebesgue spaces and their analogs // J. Anal. Appl.—2004.—Vol. 23, № 4.—P. 657–681.
11. *Fiorenza A., Rakotoson J. M.* Petits espaces de Lebesgue et leurs applications // C.R.A.S. t.—2001.—Vol. 333.—P. 1–4.
12. *Greco L., Iwaniec T., Sbordone C.* Inverting the $p$-harmonic operator // Manuscripta Math.—1997.—Vol. 92.—P. 249–258.
13. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal.—1992.—Vol. 119.—P. 129–143.
14. *Kokilashvili V., Meskhi A.* A note on the boundedness of the Hilbert transform in weighted grand Lebesgue spaces // Georgian Math. J.—2009.—Vol. 16, № 3.—P. 547–551.

15. *Kokilashvili V.* Two-weighted estimates for some integral transforms in Lebesgue spaces with mixed norm and imbedding theorems // Georgian Math. J.—1994.—Vol. 1, № 5.—P. 495–503.
16. *Kokilashvili V.* On a progress in the theory of integral operators in weighted Banach function spaces // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. Proc. of the Conf. held in Milovy, Bohemian-Moravian Uplands, May 28 – June 2, 2004.—Praha: Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republick, 2005.—P. 152–175.
17. *Kokilashvili V.* Boundedness criterion for the Cauchy singular integral operator in weighted grand Lebesgue spaces and application to the Riemann problem // Proc. A. Razmadze Math. Inst.—2009.—Vol. 151.—P. 129–133.
18. *Kokilashvili V.* The Riemann boundary value problem for analytic functions in the frame of grand $L^{p)}$ spaces // Bull. Georgian Nat. Acad. Sci.—2010.—Vol. 4, № 1.—P. 5–7.
19. *Kokilashvili V., Samko S.* Boundedness of weighted singular integral operators on a Carleson curves in Grand Lebesgue spaces // ICNAAM 2010: Intern. Conf. Numer. Anal. Appl. Math.—Vol. 1281.—P. 490–493.
20. *Kokilashvili V., Samko S.* Boundedness of weighted singular integral operators in Grand Lebesgue spaces // Georg. Math. J.—2011.—Vol. 18, № 2.—P. 259–269.
21. *Meskhi A.* Criteria for the boundedness of potential operators in grand Lebesgue spaces.—arXiv:1007.1185.
22. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc.—1972.—Vol. 165.—P. 207–226.
23. *Pérez C.* Two weighted norm inequalities for Riesz potetials and uniform $L^p$-weighted Sobolev inequalities // Indiana Univ. Math. J.—1990.—Vol. 39, № 1.—P. 31–44.
24. *Pérez C.* Two weighted inequalities for potetial and fractional type maximal operators // Indiana Univ. Math. J.—1994.—Vol. 43, № 2.—P. 663–683.
25. *Sawyer E. T.* A two weight weak type inequality for fractional integrals // Trans. Amer. Math. Soc.—1984.—Vol. 281, № 1.—P. 339–345.
26. *Sawyer E. T., Weeden R. L.* Weighted inequalities for fractional integrals on euclidean and homogeneous spaces // Amer. J. Math.—1992.—Vol. 114, № 4.—P. 813–874.
27. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 1.—P. 67–84.
28. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure: addendum // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 2.—P. 143–144.
29. *Stein E. M., Weiss G.* Interpolation of operators with change of measures // Trans. Amer. Math. Soc.—1958.—Vol. 87.—P. 159–172.
30. *Tord S.* Weighted norm inequalities for Riesz potentials and fractional maximal functions in mixed norm Lebesgue spaces // Stud. Math.—1990.—Vol. 97, № 3.—P. 239–244.

*Статья поступила 29 июня 2013 г.*

Умархаджиев Салаудин Мусаевич
Чеченский государственный университет,
*профессор каф. информационных технологий*
РОССИЯ, 364037, Грозный, ул. Киевская, 33
E-mail: `umsalaudin@gmail.com`

## BOUNDEDNESS OF THE RIESZ POTENTIAL OPERATOR IN WEIGHTED GRAND LEBESGUE SPACES

Umarkhadzhiev S. M.

We prove a theorem on the two-weighted boundedness of linear operators in generalized Grand Lebesgue spaces introduced in our previous papers. This theorem is applied to obtain two-weigt estimated for the Riesz potential operator in such spaces.

**Key words:** generalized grand Lebesgue space, Riesz potential operator, interpolation theorem.