Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 2, С. 14–28

УДК **517.5**

ЛОКАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ. ПОДМОДУЛИ РАНГА 1

Т. А. Волковая, А. Б. Шишкин

Подмодуль целых функций называется обильным, если он совпадает со своей локальной оболочкой. Свойство обильности подмодуля расщепляется на три отдельных свойства: интенсивность, устойчивость и насыщенность. В настоящей работе подмодули целых функций исследуются на наличие указанных свойств. При этом особое внимание уделяется подмодулям ранга 1.

Ключевые слова: подмодули целых функций, локальные подмодули, локальная оболочка, локальное описание, обильность, интенсивность, устойчивость, насыщенность, критерий обильности.

1. Критерий обильности

1.1. Постановка задачи и ее предыстория. Пусть π — целая функция, $\mathbf{C}[\pi]$ — кольцо многочленов от π над полем $\mathbb{C}$. Для упрощения изложения будем считать, что полный образ $\pi(\mathbb{C})$ совпадает с $\mathbb{C}$. Функция φ, локально аналитическая в точках множества $U \subseteq \mathbb{C}$, называется *π-симметричной*, если она представляется в виде $\Phi \circ \pi$, где Φ — некоторая локально аналитическая на $\pi(U)$ функция. Простейшие π-симметричные функции — это отображения, осуществляемые элементами кольца $\mathbf{C}[\pi]$. Если $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\omega \subseteq \tilde{\lambda} := \pi^{-1}(\lambda)$, то $O(\omega)$ — кольцо ростков функций, локально голоморфных в окрестностях ω, $O_\pi(\omega)$ — кольцо ростков π-симметричных функций, локально голоморфных в окрестностях ω. Естественное вложение $O_\pi(\tilde{\lambda}) \to O_\pi(\omega)$ является кольцевым изоморфизмом. Это позволяет рассматривать $O(\omega)$ как модуль над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$.

Символом $O(\mathbb{C})$ обозначим пространство всех целых функций, с топологией равномерной сходимости на компактах. Выделим в $O(\mathbb{C})$ произвольное множество P, обладающее структурой отделимого локально выпуклого пространства над полем $\mathbb{C}$ и структурой топологического модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$. Пусть I — замкнутый подмодуль в P. Обозначим $I(\omega)$ минимальный подмодуль $O_\pi(\tilde{\lambda})$-модуля $O(\omega)$, включающий I. Ясно, что $I(\omega)$ состоит из всевозможных конечных сумм f вида

$$f = \sum c_i \varphi_i, \quad c_i \in O_\pi(\tilde{\lambda}),\ \varphi_i \in I. \tag{1}$$

Пересечение

$$\bigcap\nolimits_{\omega \Subset \tilde{\lambda}} I(\omega)$$

называется *локальным подмодулем* I, ассоциированным с π-слоем $\tilde{\lambda}$ и обозначается $I(\tilde{\lambda})$. Здесь символ $\omega \Subset \tilde{\lambda}$ означает, что перебираются лишь конечные подмножества ω π-слоя $\tilde{\lambda}$. Согласно этому определению, локальный подмодуль $I(\tilde{\lambda})$ исчерпывается ростками функций, локально голоморфных в окрестностях $\tilde{\lambda}$ и представимых в виде (1) в окрестности каждого конечного подмножества $\tilde{\lambda}$. Представление (1) называется *локальным представлением* функции f в окрестности множества $\omega \Subset \tilde{\lambda}$.

Целая функция f принадлежит I *локально*, в записи $f \in_{\text{loc}} I$, если $f \in I(\tilde{\lambda})$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$. Подмодуль I допускает *локальное описание* (или является *обильным*) если справедлива импликация:

$$f \in P, \quad f \underset{\text{loc}}{\in} I \Rightarrow f \in I.$$

Пересечение

$$\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \left(I(\tilde{\lambda}) \cap P\right)$$

называется *локальной оболочкой* подмодуля I. Ясно, что замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ является обильным тогда и только тогда, когда он совпадает со своей локальной оболочкой. *Задача локального описания* состоит в нахождении условий, при которых замкнутые подмодули $I \subseteq P$ являются обильными.

Эта задача имеет длинную предысторию. Случай $\pi(z) = z$ исследовался в работах [1–3]. В работах [4, 5] изучался случай $\pi(z) = z^q$. В работе [6] инициированы исследования по ситуации $\pi(z)$ — многочлен. В работе [7] инициирован случай $\pi(z) = (\pi_1(z), \dots, \pi_n(z))$, где $\pi_1(z), \dots, \pi_n(z)$ — многочлены. Случай $\pi(z)$ — целая функция рассматривался в [8–10]. Задача локального описания тесно связана с задачей спектрального синтеза для дифференциального оператора $\pi(D)$ с постоянными коэффициентами [7, 11].

В работах [1–3] исследовались общие приемы решения задачи локального описания в случае $\pi(z) = z$. В этих работах разрабатывается *метод резольвентной функции*, в основе которого лежит возможность деления аналитической функции на двучлен $z - \lambda$ при обращении этой функции в нуль в точке λ. Этот метод существенно опирается на равномерную устойчивость пространства P. Аксиома равномерной устойчивости [2] является основным ограничителем класса пространств, к которым применимы результаты статей [1–2]. В работе [3] аксиома равномерной устойчивости заменена менее ограничительной аксиомой — аксиомой локальной устойчивости. В статье [10] авторы адаптировали метод резольвентной функции к общей ситуации, в которой деление на двучлен $z - \lambda$ заменено делением на целую функцию $\pi - \lambda$. В этой статье проверка обильности замкнутого подмодуля была сведена к проверке трех свойств — интенсивности, устойчивости и насыщенности. В настоящей работе упомянутые свойства замкнутых подмодулей подвергаются дополнительному исследованию. При этом основное внимание уделяется подмодулям ранга 1, свойства которых допускают глубокую аналогию со свойствами $\mathbf{C}[z]$-подмодулей целых функций общего вида.

1.2. Начальные условия. Аксиомы. Будем считать, что пространство P удовлетворяет следующим аксиомам.

Аксиома компактной сходимости. *Вложение $P \subseteq O(\mathbb{C})$ непрерывно.*

Аксиома равномерной устойчивости. *Для любой окрестности нуля $V \subset P$ существует окрестность нуля $U \subset P$ такая, что*

$$f \in U, \ \lambda \in \mathbf{C}, \quad \frac{f}{\pi - \lambda} \underset{\text{loc}}{\in} P \Rightarrow \frac{f}{\pi - \lambda} \in V.$$

Аксиома равномерной устойчивости влечет *устойчивость* P:

$$f \in P, \ \lambda \in \mathbf{C}, \quad \frac{f}{\pi - \lambda} \underset{\text{loc}}{\in} P \Rightarrow \frac{f}{\pi - \lambda} \in P.$$

Кроме того, из аксиомы равномерной устойчивости вытекает выполнимость следующей аксиомы.

Аксиома локальной устойчивости. *Для любой точки $\lambda \in \mathbb{C}$ и любого ограниченного множества $B \subset P$ существуют окрестность U_λ точки λ и ограниченное множество $B' \subset P$ такие, что*

$$f \in B,\ \zeta \in U_\lambda, \quad \frac{f}{\pi - \zeta} \underset{\mathrm{loc}}{\in} P \Rightarrow \frac{f}{\pi - \zeta} \in B'.$$

Аксиома локальной устойчивости, как и аксиома равномерной устойчивости, влечет устойчивость пространства P.

1.3. Критерий обильности. Во-первых, подмодуль $I \subseteq P$ *устойчив в точке* $\lambda \in \mathbb{C}$, если

$$f \in I, \quad \frac{f}{\pi - \lambda} \underset{\mathrm{loc}}{\in} I \Rightarrow \frac{f}{\pi - \lambda} \in I.$$

Подмодуль I *устойчив*, если он устойчив в любой точке $\lambda \in \mathbb{C}$. Если подмодуль $I \subseteq P$ является обильным, то он, очевидно, устойчив.

Во-вторых, пусть I — подмодуль в P, $f \in P$ и $f \in_{\mathrm{loc}} I$. Фиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}$ и рассмотрим представление

$$f = u_\lambda + (\pi - \lambda) f_\lambda,$$

где элемент u_λ выбирается из I таким образом, чтобы выполнялось условие

$$f_\lambda := \frac{f - u_\lambda}{\pi - \lambda} \underset{\mathrm{loc}}{\in} I. \tag{2}$$

Подмодуль I называем *слабо интенсивным в точке* λ, если для любой окрестности нуля $V \subset P$ существует окрестность нуля $U \subset P$ такая, что для любой функции $f \in U$, принадлежащей I локально, найдется функция $u_\lambda \in I \cap V$, для которой выполняется условие (2).

Если подмодуль I слабо интенсивен в точке $\lambda \in \mathbb{C}$, то для любой функции $f \in P$, локально принадлежащей I, возможно представление

$$f = u_\lambda + (\pi - \lambda)\, u_{\lambda^2} + (\pi - \lambda)^2 f_{\lambda^2},$$

где элементы u_λ и u_{λ^2} выбираются из I таким образом, что выполняется условие

$$f_\lambda := \frac{f - u_\lambda}{\pi - \lambda}, \quad f_{\lambda^2} := \frac{f_\lambda - u_{\lambda^2}}{\pi - \lambda} = \frac{f - u_\lambda - (\pi - \lambda) u_{\lambda^2}}{(\pi - \lambda)^2} \underset{\mathrm{loc}}{\in} I.$$

Пусть подмодуль $I \subseteq P$ является слабо интенсивным в любой точке ζ из некоторой окрестности точки λ. Подмодуль I называем *интенсивным в точке* λ, если для любой функции $f \in P$, принадлежащей I локально, существуют окрестность U_λ точки λ и функции $u_\zeta, u_\lambda, u_{\lambda^2} \in I$, удовлетворяющие условию

$$\frac{f - u_\zeta}{\pi - \zeta},\ \frac{f - u_\lambda}{\pi - \lambda}, \frac{f - u_\lambda - (\pi - \lambda) u_{\lambda^2}}{(\pi - \lambda)^2} \underset{\mathrm{loc}}{\in} I,$$

для которых множество

$$\left\{ v_{\lambda\zeta} := \frac{1}{\zeta - \lambda} \left(\frac{u_\zeta - u_\lambda}{\zeta - \lambda} - u_{\lambda^2} \right) : \zeta \in U_\lambda,\ \zeta \neq \lambda \right\}$$

ограничено в P.

Если подмодуль $f \in P$ слабо интенсивен (соответственно интенсивен) в любой точке $\lambda \in \mathbb{C}$, то его называем *слабо интенсивным* (соответственно *интенсивным*). Если подмодуль $I \subseteq P$ является обильным, то он интенсивный и, значит, слабо интенсивный. Действительно, в этом случае достаточно положить $u_\lambda = u_\zeta = f$, $u_{\lambda^2} = 0$.

В-третьих, пусть I — устойчивый слабо интенсивный подмодуль в P, $f \in P$ и $f \in_{\mathrm{loc}} I$. Рассмотрим линейный непрерывный функционал S на P, аннулирующий I. Этому функционалу соответствует комплексная функция

$$\Phi(\lambda) := \langle S, f_\lambda \rangle ,$$

где f_λ — элемент из условия (2). Так как

$$\frac{f - u_\lambda}{\pi - \lambda} - \frac{f - u'_\lambda}{\pi - \lambda} = \frac{u'_\lambda - u_\lambda}{\pi - \lambda} \underset{\mathrm{loc}}{\in} I,$$

то в силу устойчивости I

$$\frac{u'_\lambda - u_\lambda}{\pi - \lambda} \in I.$$

Это означает, что функция Φ не зависит от выбора элемента $u_\lambda \in I$, для которого справедливо условие (2). Когда S пробегает совокупность всех линейных непрерывных функционалов, аннулирующих I, функция Φ пробегает некоторый класс функций, заданных на $\mathbb{C}$. Этот класс мы обозначим $S(I, f)$. Класс $S(I, f)$ *не разделяет точек* $\mathbb{C}$, если существуют две точки $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, такие, что $\Phi(\lambda_1) = \Phi(\lambda_2)$ для любой $\Phi \in S(I, f)$. Подмодуль I *слабо насыщен относительно* f, если $S(I, f)$ не разделяет точек $\mathbb{C}$. Подмодуль I *слабо насыщен*, если он слабо насыщен относительно любого элемента $f \in P$, $f \in_{\mathrm{loc}} I$. Обильный подмодуль I является слабо насыщенным, так как в этом случае класс $S(I, f)$ содержит лишь тождественный нуль.

Пусть ρ — некоторая непрерывная полунорма в P, $f \in P$ и $f \in_{\mathrm{loc}} I$. Положим $\rho_f(\lambda) = \inf \rho\,(f - u_\lambda)$, где $\inf$ берется по всевозможным $u_\lambda \in I$, для которых справедливо условие (2) (если такого u_λ не существует, то полагаем $\rho_f(\lambda) = +\infty$). Подмодуль I *насыщен относительно* $f \in P$, если для любой непрерывной полунормы ρ справедлива импликация:

$$\Phi \in O(\mathbb{C}), \quad |\Phi(\lambda)| \leqslant \rho_f(\lambda)\ (\forall\, \lambda \in \mathbb{C}) \Rightarrow \sup\nolimits_{\mathbb{C}} |\Phi| < +\infty.$$

Подмодуль I *насыщен*, если он насыщен относительно любого $f \in P$, локально принадлежащего I. Обильный подмодуль I является насыщенным, так как в этом случае функция ρ_f совпадает с тождественным нулем.

Слабый критерий обильности в локально устойчивых пространствах. *Для того чтобы замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ был обильным, необходимо и достаточно, чтобы I был слабо интенсивным, устойчивым и слабо насыщенным* [10].

Критерий обильности в равномерно устойчивых пространствах. *Для того чтобы замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ был обильным, необходимо и достаточно, чтобы I был интенсивным, устойчивым и насыщенным* [10].

2. Интенсивность

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Введем в $O(\tilde{\lambda})$ отделимую локально выпуклую топологию, порожденную счетным набором полунорм

$$u \to \frac{1}{n!} |D^n u(\zeta)|, \tag{3}$$

каждая из которых определяется выбором точки (n,ζ) из декартова произведения $Z_\lambda = \mathbb{Z}_+ \times \tilde\lambda$. Топология в пространстве $O(\tilde\lambda)$ может быть описана как топология проективного предела пространств $O(\omega)$ относительно отображений сужения

$$\sigma_{\omega,\tilde\lambda} : O(\tilde\lambda) \to O(\omega).$$

Здесь ω — конечные подмножества слоя $\tilde\lambda$; пространство $O(\omega)$, топологизируется с помощью полунорм вида (3), каждая из которых определяется выбором точки (n,ζ) из декартова произведения $Z_\omega = \mathbb{Z}_+ \times \omega$. При описании топологии в $O(\tilde\lambda)$ можно обойтись не более чем счетной совокупностью $\omega_1, \omega_2, \ldots$ конечных подмножеств $\tilde\lambda$, удовлетворяющей условиям

$$\omega_1 \subseteq \omega_2 \subseteq \ldots \subseteq \tilde\lambda, \quad \omega_1 \cup \omega_2 \cup \ldots = \tilde\lambda.$$

Легко видеть, что топология $O(\tilde\lambda)$ совпадает с топологией проективного предела пространств $O(\omega_k)$ относительно отображений сужения

$$\sigma_{\omega_k,\tilde\lambda} : O(\tilde\lambda) \to O(\omega_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Произведение элементов $O(\tilde\lambda)$ на элементы кольца $O_\pi(\tilde\lambda)$ непрерывно в топологии $O(\tilde\lambda)$, следовательно, $O_\pi(\tilde\lambda)$-модуль $O(\tilde\lambda)$ является топологическим. Аналогичное утверждение верно также и для $O_\pi(\omega_k)$-модулей $O(\omega_k)$.

Пусть I — замкнутый подмодуль P, $I(\tilde\lambda)$ — локальный подмодуль I, ассоциированный с π-слоем $\tilde\lambda$. В [8] доказано, что из аксиомы компактной сходимости вытекает выполнимость следующего предложения.

Предложение 2.1. *Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ локальный подмодуль $I(\tilde\lambda)$, ассоциированный с π-слоем $\tilde\lambda$, замкнут в топологии $O(\tilde\lambda)$ и совпадает с замыканием подмодуля I в топологии $O(\tilde\lambda)$.*

Система элементов $u_1, \ldots, u_n \in O(\mathbb{C})$ называется *независимой*, если выполняется импликация

$$c_1u_1 + \ldots + c_nu_n = 0, \quad c_1, \ldots, c_n \in O_\pi(\mathbb{C}) \Longrightarrow c_1, \ldots, c_n = 0.$$

Ранг множества $I \subseteq O(\mathbb{C})$ (в обозначениях $\operatorname{Rank} I$) — это максимальное число элементов в независимых системах $u_1, \ldots, u_n \in I$.

Предложение 2.2. *Всякий подмодуль $I \subseteq P$ ранга 1 является интенсивным.*

$\lhd$ Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $z_\lambda \in \tilde\lambda$, $f \in P$ и $u \in I$. Считаем, что $f \in_{\mathrm{loc}} I$, $u \not\equiv 0$ и кратность обращения в нуль функции u в точке $z_\lambda \in \tilde\lambda$ является наименьшей из возможных. В окрестности точки z_λ имеет место представление $f = c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$, где $c_1, \ldots, c_n \in O_\pi(\tilde\lambda)$, $u_1, \ldots, u_n \in I$. Так если $\operatorname{Rank} I = 1$, то система элементов $\{u, u_k\}$ зависима при любом $k \in \{1, \ldots, n\}$. Значит, существуют отличные от тождественного нуля $a_k, b_k \in O_\pi(\mathbb{C})$, для которых $a_ku = b_ku_k$. При этом

$$f = c_1u_1 + \ldots + c_nu_n = \left(\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right)u = u.$$

Функция

$$c = \frac{c_1u_1 + \ldots + c_nu_n}{u}$$

голоморфна в точке z_λ. Из представления

$$c = \frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{A \circ \pi}{B \circ \pi},$$

где $A, B \in O(\lambda)$, вытекает, что $c \in O_\pi(\tilde{\lambda})$. Это означает, что $c = C \circ \pi$, где $C \in O(\lambda)$. Следовательно, для любого $\zeta = \pi(z)$ из некоторой окрестности U_λ точки λ функция f допускает представление

$$f = u_\zeta + (\pi - \zeta)\, u_{\zeta^2} + (\pi - \zeta)^2 f_{\zeta^2},$$

в котором $u_\zeta = c(z_\zeta)\, u = (C \circ \pi)\,(z_\zeta)\, u$, $u_{\zeta^2} = c'(z_\zeta)\, u = (C' \circ \pi)\,(z_\zeta)\, u$, где C' — производная функции C. При этом

$$f_\zeta := \frac{f - u_\zeta}{\pi - \zeta} = \frac{c - c(z_\zeta)}{\pi - \zeta}\, u = a_\zeta u \underset{\text{loc}}{\in} I,$$

$$f_{\zeta^2} := \frac{f_\zeta - u_{\zeta^2}}{\pi - \zeta} = \frac{\frac{c - c(z_\zeta)}{\pi - \zeta} - \tilde{c}(z_\zeta)}{\pi - \zeta}\, u = b_\zeta u \underset{\text{loc}}{\in} I.$$

Действительно, имеют место представления $a_\zeta = A_\zeta \circ \pi$, $b_\zeta = B_\zeta \circ \pi$, где

$$A_\zeta(\zeta') = \frac{C(\zeta') - C(\zeta)}{\zeta' - \zeta}, \quad B_\zeta(\zeta') = \frac{1}{\zeta' - \zeta}\left(\frac{C(\zeta') - C(\zeta)}{\zeta' - \zeta} - C'(\zeta)\right) \in O(\zeta).$$

Значит, $a_\zeta u, b_\zeta u \in I(\tilde{\zeta})$ для любого $\zeta \in U_\lambda$. Если $\zeta' \notin U_\lambda$, то включения $a_\zeta u, b_\zeta u \in I(\tilde{\zeta}')$ очевидно выполнены.

Если $f \to 0$ в топологии P, то в силу аксиомы компактной сходимости $f(z) = c(z)u(z) \to 0$ равномерно по z из некоторой окрестности точки z_λ. Следовательно, $c(z) \to 0$ равномерно по z из некоторой окрестности точки z_λ. Отсюда следует, что $u_\lambda = c(z_\lambda)u \to 0$ в топологии P. Значит, подмодуль I является слабо интенсивным в точке λ. При этом для любого $\zeta \in U_\lambda$, $\zeta \neq \lambda$, имеют место представления

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - \lambda}\left(\frac{u_\zeta - u_\lambda}{\zeta - \lambda} - u_{\lambda^2}\right) &= \frac{1}{\zeta - \lambda}\left(\frac{c(z_\zeta) - c(z_\lambda)}{\zeta - \lambda} - \tilde{c}(z_\lambda)\right) u \\ &= \frac{1}{\zeta - \lambda}\left(\frac{C(\zeta) - C(\lambda)}{\zeta - \lambda} - C'(\lambda)\right) u. \end{aligned}$$

Значит, множество

$$\left\{ v_{\lambda\zeta} := \frac{1}{\zeta - \lambda}\left(\frac{u_\zeta - u_\lambda}{\zeta - \lambda} - u_{\lambda^2}\right) : \zeta \in U_\lambda,\ \zeta \neq \lambda \right\}$$

ограничено в P. Следовательно, подмодуль I является интенсивным в точке λ. Остальное следует из произвольности выбора точки $\lambda \in \mathbb{C}$. $\triangleright$

3. Устойчивость

3.1. Свойства устойчивых подмодулей. Пусть I — интенсивный подмодуль в P. Возникают естественные вопросы:

1) При каких условиях устойчивость подмодуля I в одной точке влечет устойчивость подмодуля I, т. е. его устойчивость в любой другой точке?

2) Влечет ли устойчивость подмодуля I устойчивость его замыкания $\bar{I}$ в P?

При условии замкнутости подмодуля I на первый вопрос отвечает следующее предложение.

Предложение 3.1. *Если замкнутый интенсивный подмодуль $I \subseteq P$ устойчив в точке λ, то он устойчив.*

$\lhd$ Пусть $\lambda' \in \mathbb{C}$, $f \in I$ и $\frac{f}{\pi-\lambda'} \in_{\mathrm{loc}} I$. Нам необходимо показать, что $\frac{f}{\pi-\lambda'} \in I$. Выберем произвольный линейный непрерывный функционал $\hat{S}$ на пространстве P/I. По свойствам резольвентной функции [10] функция

$$\Phi(\zeta) = \left\langle \hat{S}, F(\zeta) \right\rangle = \left\langle \hat{S}, \left[\frac{f - u_\zeta}{\pi - \zeta} \right] \right\rangle$$

является целой и при некоторых натуральных a_m^n

$$\Phi^{(n)}(\lambda) = \sum_{m=1}^{n+1} a_m^n \Phi_m(\lambda),$$

где $\Phi^{(n)}(\lambda) = \langle \hat{S}, F^{(n)}(\lambda) \rangle$, $\Phi_m(\lambda) = \langle \hat{S}, F_m(\lambda) \rangle$. Так как подмодуль I устойчив в точке λ, то $f_{\lambda^n} \in I$. Это означает, что $\Phi_m(\lambda) = 0$ для любого натурального $m \leqslant n$. Следовательно, $\Phi^{(n)}(\lambda) = 0$ для любого натурального n, т. е. Φ — тождественный нуль. Значит, любой линейный непрерывный функционал S на P, аннулирующий I, обращается в нуль на элементе $f_{\lambda'} = \frac{f - u_{\lambda'}}{\pi - \lambda'}$. По теореме Хана — Банаха $f_{\lambda'} \in I$. Значение функции Φ в точке λ' не зависит от выбора элемента $u_{\lambda'} \in I$, для которого справедливо представление (2), значит, можно считать, что $u_{\lambda'} = 0$ и $f_{\lambda'} = \frac{f}{\pi-\lambda'} \in I$. $\rhd$

Следующее предложение отвечает на второй вопрос.

Предложение 3.2. *Если слабо интенсивный в точке λ подмодуль $I \subseteq P$ устойчив в этой точке, то его замыкание $\bar{I}$ устойчиво в той же точке.*

$\lhd$ Пусть $f \in \bar{I}$ и $\frac{f}{\pi-\lambda} \in_{\mathrm{loc}} \bar{I}$. Утверждаем, что $\frac{f}{\pi-\lambda} \in \bar{I}$. Действительно, пусть $f^\alpha \in I$ и $f^\alpha \to f$ в топологии P. Из аксиомы компактной сходимости и предложения 2.1 вытекает, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ локальные подмодули $I(\tilde{\lambda})$ и $\bar{I}(\tilde{\lambda})$ совпадают (с замыканием I в топологии $O(\tilde{\lambda})$). Значит, $f - f^\alpha \in_{\mathrm{loc}} I$ и $\frac{f}{\pi-\lambda} \in_{\mathrm{loc}} I$. В силу слабой интенсивности подмодуля I существуют $u_\lambda^\alpha \in I$, для которых $\frac{f - f^\alpha - u_\lambda^\alpha}{\pi-\lambda} \in_{\mathrm{loc}} I$ и $u_\lambda^\alpha \to 0$ в топологии P. Так как $\frac{f}{\pi-\lambda} \in_{\mathrm{loc}} I$, то $\frac{f^\alpha + u_\lambda^\alpha}{\pi-\lambda} \in_{\mathrm{loc}} I$. Устойчивость подмодуля I в точке λ влечет включение $\frac{f^\alpha + u_\lambda^\alpha}{\pi-\lambda} \in I$. При этом $f^\alpha + u_\lambda^\alpha \to f$ в топологии P. В силу аксиомы равномерной устойчивости $\frac{f^\alpha + u_\lambda^\alpha}{\pi-\lambda} \to \frac{f}{\pi-\lambda}$ в топологии P. Это означает, что $\frac{f}{\pi-\lambda} \in \bar{I}$. $\rhd$

3.2. Главные подмодули. Замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ *порожден элементами* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in P$, если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \not\equiv 0$ и I совпадает с замыканием в P множества элементов вида $r_1\varphi_n + \ldots + r_n\varphi_n$, где $r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{C}[\pi]$. Если замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ порожден одним элементом $\varphi \not\equiv 0$, то его называют *главным* (с образующей φ).

Пусть I_φ — главный подмодуль в P с образующей φ, J_φ — подмодуль в P, образованный элементами вида $r\varphi$, где $r \in \mathbf{C}[\pi]$. Подмодуль I_φ совпадает с замыканием подмодуля J_φ в топологии P.

Предложение 3.3. *Ранги подмодулей J_φ и I_φ равны* 1.

$\lhd$ Сначала докажем, что ранг подмодуля J_φ равен 1. Действительно, если $u_1, u_2 \in J_\varphi$, $u_1, u_2 \not\equiv 0$, то $u_1 = r_1\varphi$, $u_2 = r_2\varphi$, где $r_1, r_2 \in \mathbf{C}[\pi] \subset O_\pi(\mathbb{C})$ и $r_1, r_2 \not\equiv 0$. Следовательно, $c_1u_1 + c_2u_2 = 0$, где $c_1 = r_2, c_2 = -r_1 \in O_\pi(\mathbb{C})$ и $c_1, c_2 \not\equiv 0$.

Далее убедимся, что ранг подмодуля I_φ тоже равен 1. Действительно, если $u_1, u_2 \in I_\varphi$, то существуют обобщенные последовательности $u_1^\alpha, u_2^\alpha \in J_\varphi$, сходящиеся к u_1 и u_2 соответственно в топологии P. При этом $u_1^\alpha = r_1^\alpha\varphi$, $u_2^\alpha = r_2^\alpha\varphi$, где $r_1^\alpha, r_2^\alpha \in \mathbf{C}[\pi] \subset O_\pi(\mathbb{C})$

и $c_1^\alpha u_1^\alpha + c_2^\alpha u_2^\alpha = 0$, где $c_1^\alpha = r_2^\alpha$, $c_2^\alpha = -r_1^\alpha \in O_\pi(\mathbb{C})$. Из аксиомы равномерной сходимости вытекает, что функции $\frac{u_1}{\varphi}, \frac{u_2}{\varphi}$ являются целыми и $r_1^\alpha = R_1^\alpha \circ \pi \to \frac{u_1}{\varphi}$, $r_2^\alpha = R_2^\alpha \circ \pi \to \frac{u_2}{\varphi}$ равномерно на компактах. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $z_0 \in \tilde{\lambda}$. Сужение π_0 функции π на некоторую окрестность U_0 точки z_0 является собственным отображением $U_0 \to V_0 = \pi(U_0)$. Значит, $R_1^\alpha \to C_1$, $R_2^\alpha \to C_2$ равномерно на компактах из V_0. Это означает, что $C_1, C_2 \in O(\lambda)$, а $\frac{u_1}{\varphi} = C_1 \circ \pi, \frac{u_2}{\varphi} = C_2 \circ \pi \in O_\pi(\tilde{\lambda})$. Следовательно, $c_1 = \frac{u_1}{\varphi}$, $c_2 = \frac{u_2}{\varphi} \in O_\pi(\mathbb{C})$ и $c_2 u_1 - c_1 u_2 = 0$. При этом $c_1, c_2 \not\equiv 0$, если $u_1, u_2 \not\equiv 0$. $\rhd$

В силу предложения 2.2 подмодули I и J являются интенсивными.

Предложение 3.4. *Главный подмодуль является устойчивым.*

$\lhd$ Пусть I_φ — главный подмодуль в P с образующей φ, J_φ — подмодуль в P, образованный элементами вида $r\varphi$, где $r \in \mathbf{C}[\pi]$. Подмодуль I совпадает с замыканием подмодуля J_φ в топологии P. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ и $\varphi(z_0) \neq 0$. Покажем, что подмодуль J_φ является устойчивым в точке $\lambda = \pi(z_0)$. Предположим, что $f \in J$ и $\frac{f}{\pi-\lambda} \in_{\mathrm{loc}} J$. Нам нужно показать, что $\frac{f}{\pi-\lambda} \in J$. Так как $f \in J$, то $f = r\varphi$, где $r = R \circ \pi$, R — многочлен. Так как $\frac{f}{\pi-\lambda} \in_{\mathrm{loc}} J$, то $\frac{f}{\pi-\lambda} = \varphi$, где $c = \ \circ \pi \in O_\pi(\tilde{\lambda})$. Значит, $f = r\varphi = (\pi - \lambda)\, c\varphi$. Так как $\varphi(z_0) \neq 0$, то для всех z из некоторой окрестности точки z_0 имеет место равенство $r(z) = (\pi(z) - \lambda)\, c(z)$ и для всех ζ из некоторой окрестности точки λ имеет место равенство $R(\zeta) = (\zeta - \lambda) C(\zeta)$. Это означает, что многочлен $R(\zeta)$ делится на двучлен $\zeta - \lambda$ и функция $\frac{r}{\pi-\lambda}$ принадлежит кольцу $\mathbf{C}[\pi]$. Следовательно, $\frac{f}{\pi-\lambda} = \frac{r}{\pi-\lambda}\varphi \in J_\varphi$. Таким образом, доказано, что подмодуль J_φ является устойчивым в точке λ. В силу предложения 3.2 подмодуль I_φ тоже устойчив в точке λ, а в силу предложения 3.1 подмодуль I_φ является устойчивым. Предложение доказано. $\rhd$

3.3. Конечнопорожденные подмодули. Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — подмодули в P. Замкнутый подмодуль $I = I_0 \subseteq P$ *порожден подмодулями* $I_1, \ldots, I_n$, если I есть замыкание множества элементов вида $f_1 + \ldots + f_n$, где $f_k \in I_k$. Фиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}$, для которой выполняется условие: для любого $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ найдутся $z_k \in \tilde{\lambda}$ и $u_k \in I_k$ такие, что $u_k(z_k) \neq 0$. Набор $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ комплексных функций на слое $\tilde{\lambda}$ называем *допустимым*, если существуют элементы $f_k \in I_k$ такие, что $f_k|_{\tilde{\lambda}} = a_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Положим

$$T(a, \lambda) = \big\{ f = f_1 + \ldots + f_n : \ f_k \in I_k, \ f_k|_{\tilde{\lambda}} = a_k \big\}.$$

Предложение 3.5. *Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — устойчивые подмодули в P, I — замкнутый подмодуль ранга 1, порожденный подмодулями $I_1, \ldots, I_n$. Для того чтобы подмодуль I был устойчивым в точке λ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для любого допустимого набора $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$, для которого $a_1 + \ldots + a_n = 0$, замыкание множества $T(a, \lambda)$ в топологии P содержит нулевой элемент.*

$\lhd$ *Достаточность.* Пусть замыкание множества $T(a, \lambda)$ в топологии P содержит нулевой элемент. Рассмотрим произвольный элемент $F \in I$, для которого $\frac{F}{\pi-\lambda} \in_{\mathrm{loc}} I$. Нам нужно показать, что $\frac{F}{\pi-\lambda} \in I$. Пусть J — подмодуль в P, составленный из сумм вида $f_1 + \ldots + f_n$, где $f_k \in I_k$. Так как $J \subseteq I$, то $\operatorname{Rank} J = 1$. По предложению 2.2 подмодуль J является интенсивным. При этом подмодуль I совпадает с замыканием подмодуля J в пространстве P. Выберем произвольную окрестность нуля V в пространстве P. По аксиоме равномерной устойчивости существует окрестность нуля V^* такая, что справедлива импликация:

$$f \in V^*, \ \lambda \in \mathbf{C}, \quad \frac{f}{\pi - \lambda} \underset{\mathrm{loc}}{\in} P \Rightarrow \frac{f}{\pi - \lambda} \in V. \tag{4}$$

Подбираем теперь окрестности V_1, V_2 так, чтобы $V_1 + V_2 \subseteq V^*$. Так как $F \in I$, то существует обобщенная последовательность $F^\alpha = F_1^\alpha + \ldots + F_n^\alpha \in J$, $F_k^\alpha \in I_k$, сходящаяся к F в топологии P. Так как подмодуль J является интенсивным, то он является слабо интенсивным в точке λ. При этом по предложению 2.1 для любого α имеет место локальное вложение $F - F^\alpha \in_{\mathrm{loc}} J$. Значит, для любого α имеет место представление

$$F - F^\alpha = u_\lambda^\alpha + (\pi - \lambda) f_\lambda^\alpha,$$

где элемент $u^\alpha = u_{1\lambda}^\alpha + \ldots + u_{n\lambda}^\alpha \in J$, $u_{k\lambda}^\alpha \in I_k$, выбран так, чтобы выполнялось условие

$$f_\lambda^\alpha := \frac{F - F^\alpha - u_\lambda^\alpha}{\pi - \lambda} \underset{\mathrm{loc}}{\in} J.$$

При этом для некоторого α' разница $F - f'$ принадлежит V_1, где

$$f' = F^{\alpha'} + u_\lambda^{\alpha'} = (\pi - \lambda)\left(\frac{F}{\pi - \lambda} - f_\lambda^{\alpha'}\right) \in J.$$

Рассмотрим представление $f' = f_1' + \ldots + f_k'$, где $f_k' = F_k^{\alpha'} + u_{k\lambda}^{\alpha'} \in I_k$, и обозначим a_k сужение $f_k'|_{\tilde{\lambda}}$ функции f_k' на слой $\tilde{\lambda}$. Ясно, что система $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ является допустимой и $a_1 + \ldots + a_n = 0$. По условию 0 принадлежит замыканию множества $T(a, \lambda)$; поэтому существует элемент

$$f = f_1 + \ldots + f_n \in T(a, \lambda) \cap V_2, \quad f_k \in I_k, \;\; f_k|_{\tilde{\lambda}} = a_k.$$

Так как $\operatorname{Rank} I = 1$, то $\operatorname{Rank} I_k = 1$. При этом $f_k' - f_k = c_k u_k \in I_k$ и $\frac{f_k' - f_k}{\pi - \lambda} = \frac{c_k}{\pi - \lambda} u_k$, где c_k — π-симметричная мероморфная функция. По условию выбора точки λ существует $z_k \in \tilde{\lambda}$ такое, что $u_k(z_k) \neq 0$. Значит, $c_k(z_k) = 0$, $\frac{c_k}{\pi - \lambda} \in O_\pi(\tilde{\lambda})$ и $\frac{f_k' - f_k}{\pi - \lambda} \in_{\mathrm{loc}} I_k$. Из устойчивости подмодуля I_k вытекает, что $\frac{f_k' - f_k}{\pi - \lambda} \in I_k$.

Рассмотрим теперь элемент $\varphi = F - f' + f$. Так как $F - f' \in V_1$, а $f \in V_2$, то $\varphi \in V_1 + V_2 \subseteq V^*$. Далее, замечаем, что $\frac{\varphi}{\pi - \lambda} \in P$. Поэтому, в силу импликации (4),

$$\frac{\varphi}{\pi - \lambda} = \frac{F}{\pi - \lambda} - \frac{f' - f}{\pi - \lambda} \in V.$$

Но

$$\frac{f' - f}{\pi - \lambda} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k' - f_k}{\pi - \lambda}, \quad \frac{f_k' - f_k}{\pi - \lambda} \in I_k.$$

Значит,

$$\psi := \frac{f' - f}{\pi - \lambda} \in I.$$

Итак, для любой окрестности нуля V существует элемент $\psi \in I$ такой, что $\frac{F}{\pi - \lambda} - \psi \in V$. Это значит, что $\frac{F}{\pi - \lambda}$ — точка прикосновения I и, поскольку I замкнут, $\frac{F}{\pi - \lambda} \in I$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть I устойчив в точке λ. Рассмотрим элемент $f = f_1 + \ldots + f_n \in T(a, \lambda)$. Замечаем, что $f(z) = 0$ для любого $z \in \tilde{\lambda}$. Так как $\operatorname{Rank} I = 1$, то $f = c u_0 \in I$ и $\frac{f}{\pi - \lambda} = \frac{c}{\pi - \lambda} u_0$, где c — π-симметричная мероморфная функция. По условию выбора точки λ существует $z_0 \in \tilde{\lambda}$, такое, что $u_0(z_0) \neq 0$. Значит, $c(z_0) = 0$, $\frac{c}{\pi - \lambda} \in O_\pi(\tilde{\lambda})$ и $\frac{f}{\pi - \lambda} \in_{\mathrm{loc}} I$. Из устойчивости подмодуля I вытекает, что $\frac{f}{\pi - \lambda} \in I$. Поэтому существует обобщенная последовательность $f^\alpha = f_1^\alpha + \ldots + f_n^\alpha$, $f_k^\alpha \in I_k$, сходящаяся к $\frac{f}{\pi-\lambda}$ в топологии P. Поскольку операция умножения на $\pi - \lambda$ непрерывна в P, то последовательность $F^\alpha = (\pi-\lambda)\, f^\alpha$ сходится к f в топологии P и, значит, $f - F^\alpha \to 0$ в P. Остается отметить, что $f - F^\alpha \in T(a,\lambda)$. Необходимость доказана. $\rhd$

Применим предложение 3.5 к конечнопорожденным подмодулям. Пусть подмодуль $I \subseteq P$ порожден системой $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Фиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}$, для которой выполняется условие: для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ найдется $z_k \in \tilde{\lambda}$ такое, что $\varphi_k(z_k) \neq 0$. Символом $A(\lambda)$ обозначим совокупность наборов $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ комплексных функций на слое $\tilde{\lambda}$, для которых набор $\left\{a_1\varphi_1\big|_{\tilde{\lambda}}, \ldots, a_n\varphi_n\big|_{\tilde{\lambda}}\right\}$ является допустимым и $a_1\varphi_1\big|_{\tilde{\lambda}} + \ldots + a_n\varphi_n\big|_{\tilde{\lambda}} = 0$.

Предложение 3.6. *Для того чтобы замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ ранга 1, порожденный системой $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, был устойчив в точке λ, необходимо и достаточно, чтобы для каждого набора $a = \{a_1, \ldots, a_n\} \in A(\lambda)$ существовали обобщенные последовательности $r_1^\alpha, \ldots, r_n^\alpha \in \mathbf{C}[\pi]$ такие, что*

1) $r_1^\alpha|_{\tilde{\lambda}} = a_1, \ldots, r_n^\alpha|_{\tilde{\lambda}} = a_n$,

2) $r_1^\alpha\varphi_1 + \ldots + r_n^\alpha\varphi_n \to 0$ *в топологии P.*

$\lhd$ Обозначим через I_k подмодуль элементов вида $r\varphi_k$, где r пробегает $\mathbf{C}[\pi]$, $k = 1, \ldots, n$. Каждый такой подмодуль устойчив и их совокупность порождает I. Фиксируем $a = \{a_1, \ldots, a_n\} \in A(\lambda)$ и рассмотрим систему комплексных функций на слое $\tilde{\lambda}$

$$b_1(z) = a_1(z)\varphi_1(z), \ldots, b_n(z) = a_n(z)\varphi_n(z), \quad z \in \tilde{\lambda}.$$

Очевидно, что эта система допустима и $b_1(z) + \ldots + b_n(z) = 0$ для любого $z \in \tilde{\lambda}$. Требуемое утверждение следует из предложения 3.5, если учесть, что включение $0 \in \overline{T(a,\lambda)}$ эквивалентно условиям 1), 2). $\rhd$

4. Насыщенность подмодулей ранга 1

4.1. Импликации насыщенности. Пусть I — множество в P ранга 1, ρ — некоторая непрерывная полунорма в P, $f \in P$. Положим $\rho_f(\lambda) = \inf \rho\,(f - u_\lambda)$, где inf берется по всевозможным $u_\lambda \in I$, для которых справедливо условие (2) (если такого u_λ не существует, то полагаем $\rho_f(\lambda) = +\infty$). Множество I *насыщено относительно* $f \in P$, если для любой непрерывной полунормы ρ справедлива

Импликация 1. *Если целая функция Φ удовлетворяет неравенству*

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant \rho_f(\lambda)$$

для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, то Φ ограничена.

Подмодуль I *насыщен*, если он насыщен относительно любого $f \in P$, локально принадлежащего I. Рассмотрим другую импликацию.

Импликация 2. *Если целая функция Φ удовлетворяет неравенству*

$$|\Phi(\lambda)\varphi(z_\lambda)| \leqslant \rho\,(\varphi(z_\lambda)f - f(z_\lambda)\varphi)$$

для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $z_\lambda \in \tilde{\lambda}$ и любого $\varphi \in I$, то Φ ограничена.

Сравним импликацию 1 с импликацией 2.

Предложение 4.1. *Если множество $I \cup \{f\}$ имеет ранг 1, то импликация 1 эквивалентна импликации 2.*

$\lhd$ *Достаточность.* Так как $f \in_{\mathrm{loc}} I$ множество $I \cup \{f\}$ имеет ранг 1, то существуют $c_1 := C_1 \circ \pi$ и $c_2 := C_2 \circ \pi$ такие, что $c_1\varphi + c_2 f = 0$ и $C_1, C_2 \in O(\mathbb{C})$. Значит, вне нулей c_2 имеет место тождество

$$f(z) = -\frac{c_1(z)}{c_2(z)}\varphi(z),$$

а вне нулей произведения $c_2\varphi$ имеет место тождество

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = -\frac{c_1(z)}{c_2(z)}.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $z_\lambda \in \tilde{\lambda}$, $c_2(z_\lambda)\varphi(z_\lambda) \neq 0$ и $u_\lambda = \frac{f(z_\lambda)}{\varphi(z_\lambda)}\varphi$. Тогда

$$\frac{f - u_\lambda}{\pi - \lambda} = \frac{f - \frac{f(z_\lambda)}{\varphi(z_\lambda)}\varphi}{\pi - \lambda} = \frac{-\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_1(z_\lambda)}{c_2(z_\lambda)}}{\pi - \lambda}\varphi = -c\varphi,$$

где $c := C \circ \pi$ и

$$C(\zeta) = \frac{1}{\zeta - \lambda}\left(\frac{C_1(\zeta)}{C_2(\zeta)} - \frac{C_1(\lambda)}{C_2(\lambda)}\right) \in O(\lambda).$$

Значит, $\frac{f-u_\lambda}{\pi-\lambda} \in I(\tilde{\lambda})$ и, более того, $\frac{f-u_\lambda}{\pi-\lambda} \in_{\mathrm{loc}} I$. Так как

$$\rho_f(\lambda) = \inf \rho\,(f - u_\lambda) \leqslant \rho\left(f - \frac{f(z_\lambda)}{\varphi(z_\lambda)}\varphi\right) \leqslant \left|\frac{1}{\varphi(z_\lambda)}\right| \rho\,(\varphi(z_\lambda) f - f(z_\lambda)\varphi)\,,$$

то из соображений непрерывности вытекает, что выполнение неравенства $|\Phi(\lambda)| \leqslant \rho_f(\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ влечет выполнение неравенства $|\Phi(\lambda)\varphi(z_\lambda)| \leqslant \rho\,(\varphi(z_\lambda) f - f(z_\lambda)\varphi)$ для любых $\varphi \in I$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $z_\lambda \in \tilde{\lambda}$. Это означает, что выполнимость импликации 2 влечет выполнимость импликации 1.

Необходимость. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $u_\lambda \in I$ и $\frac{f-u_\lambda}{\pi-\lambda} \in_{\mathrm{loc}} I$. Предположим, что $z_\lambda \in \tilde{\lambda}$ и $u_\lambda(z_\lambda) \neq 0$. Тогда $f(z_\lambda) = u_\lambda(z_\lambda)$. По условию неравенство $|\Phi(\lambda)\varphi(z_\lambda)| \leqslant \rho\,(\varphi(z_\lambda) f - f(z_\lambda)\varphi)$ выполняется для любых $\varphi \in I$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $z_\lambda \in \tilde{\lambda}$. Значит, выполняются неравенства $|\Phi(\lambda) u_\lambda(z_\lambda)| \leqslant \rho\,(u_\lambda(z_\lambda) f - f(z_\lambda) u_\lambda)$ и $|\Phi(\lambda)| \leqslant \rho\,(f - u_\lambda)$. Из соображений непрерывности вытекает, что $|\Phi(\lambda)| \leqslant \rho_f(\lambda)$. Это означает, что выполнимость импликации 1 влечет выполнимость импликации 2. $\rhd$

Для проверки насыщенности в случае единичного ранга можно пользоваться импликациями 1 или 2.

4.2. Сверхнасыщенность. Пространство P называется *аналитически уплотненным*, если выполнено условие: для любой конечной системы элементов $f_1, \ldots, f_n \in P$ множество

$$B_{f_1,\ldots,f_n} := \{f \in O(\mathbb{C}) : \ |f(z)| \leqslant |f_1(z)| + \ldots + |f_n(z)| \ \ \forall\, z \in \mathbb{C}\}$$

принадлежит и ограничено в P.

Множество $I \subseteq P$ *сверхнасыщено*, если оно насыщено относительно любой функции $f \in P$.

Предложение 4.2. *Пусть P — аналитически уплотненное пространство. Тогда всякий обильный подмодуль $I \subseteq P$ ранга 1 является сверхнасыщенным.*

$\lhd$ Пусть I — обильный подмодуль в P, $\operatorname{Rank} I = 1$ и $f \in P$. Подмодуль I насыщен относительно тождественного нуля. Поэтому предположим, что f отлично от тождественного нуля и покажем, что подмодуль I насыщен относительно f. Для этого докажем более сильное утверждение, именно: существует ограниченное множество $B \subset P$ такое, что выполнение неравенства

$$|\Phi(\pi(z))\varphi(z)| \leqslant \rho\big(\varphi(z)f - f(z)\varphi\big)$$

для любой непрерывной полунормы ρ, для любого $z \in \mathbb{C}$ и любого $\varphi \in I \cap B$ влечет ограниченность целой функции Φ.

Фиксируем ненулевой элемент $\varphi_0 \in I$ и полагаем

$$m(z) = |\varphi_0(z)| + |f(z)|\,,$$

$$B = \big\{f \in O(\mathbb{C}) : |f(z)| \leqslant m(z)\big\}.$$

Поскольку P — аналитически уплотненное пространство, B принадлежит и ограничено в P. Выберем произвольную непрерывную полунорму ρ из условия $\rho(\lambda) \neq 0$ и предположим, что неравенство $|\Phi(\pi(z))\varphi(z)| \leqslant \rho\,(\varphi(z)f - f(z)\varphi)$ выполнено для любых $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in I \cap B$. Покажем, что целая функция Φ ограничена. Так как $\varphi_0 \in I \cap B$, то

$$\begin{aligned}|\Phi(\pi(z))\varphi_0(z)| &\leqslant |\varphi_0(z)|\,\rho\,(f) + |f(z)|\,\rho\,(\varphi_0)\\ &\leqslant (|\varphi_0(z)| + |f(z)|)\,\rho\,(f,\varphi_0) \leqslant 2\rho\,(f,\varphi_0)\,m(z),\end{aligned}$$

где $\rho\,(f,\varphi_0) = \max\{\rho(f), \rho(\varphi_0)\}$. Отсюда следует, что

$$\varphi_1 = \frac{\Phi(\pi)\varphi_0}{2\rho\,(f,\varphi_0)} \in B.$$

Так как подмодуль I обильный, то $\Phi(\pi)\varphi_0 \in I$. Таким образом, элемент φ_1 принадлежит $I \cap B$. Значит, для него справедливы неравенства

$$|\Phi(\pi(z))\varphi_1(z)| \leqslant (|\varphi_1(z)| + |f(z)|)\,\rho\,(f,\varphi_1) \leqslant 2\rho\,(f,\varphi_1)\,m(z),$$

где $\rho(f,\varphi_1) = \max\{\rho(f), \rho(\varphi_1)\}$. Отсюда следует, что

$$\varphi_2 = \frac{\Phi(\pi)\varphi_1}{2\rho(f,\varphi_1)} \in B$$

и, поскольку $\varphi_1 \in I$, имеет место включение $\varphi_2 \in I \cap B$. Продолжая выкладки, установим, что $\varphi_n \in I \cap B$ для любого $n \in \mathbb{N}$. В частности, $|\varphi_n(z)| \leqslant m(z)$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$. Заметим, что

$$|\varphi_n| = \left|\frac{\Phi(\pi)\varphi_{n-1}}{2\rho\,(f,\varphi_{n-1})}\right| \leqslant \left|\frac{\Phi(\pi)\varphi_{n-1}}{2\rho\,(f)}\right| \leqslant \left|\frac{\Phi(\pi)}{2\rho\,(f)}\right|^n |\varphi_0|\,.$$

Таким образом, при всех $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{|\Phi(\pi(z))|}{2\rho\,(f)}\right)^n |\varphi_0(z)| \leqslant m(z).$$

Поскольку $\varphi_0(z) \neq 0$, это возможно только при условии ограниченности целой функции Φ. $\triangleright$

Следствие 4.1. *Пусть P — аналитически уплотненное пространство и I — множество в P ранга 1. Если I содержит обильный подмодуль ранга 1, то I насыщено.*

5. Обильность подмодулей ранга 1

5.1. Равномерно устойчивые пространства. Как и прежде предполагаем, что P — произвольное множество в $O(\mathbb{C})$, обладающее структурой отделимого локально выпуклого пространства над полем $\mathbb{C}$ и структурой топологического модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$. Кроме этого, считаем, что P удовлетворяет аксиомам равномерной устойчивости и сходимости. Согласно критерию обильности в равномерно устойчивых пространствах, обильность подмодуля обеспечивается сочетанием трех свойств — интенсивности, устойчивости и насыщенности. Соединяя необходимые или достаточные условия интенсивности, устойчивости и насыщенности, установленные выше, получаем необходимые или достаточные условия обильности.

Прежде всего, рассмотрим необходимое и достаточное условие обильности подмодуля ранга 1 в общем случае.

Предложение 5.1. *Пусть I — замкнутый устойчивый подмодуль в I ранга 1. Для того чтобы подмодуль I был обильным, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $f \in P$, локально принадлежащего I, и любой непрерывной полунормы ρ выполнялась импликация: если целая функция Φ удовлетворяет неравенству*

$$|\Phi(\lambda)\varphi(z_\lambda)| \leqslant \rho\left(\varphi(z_\lambda)f - f(z_\lambda)\varphi\right)$$

для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $z_\lambda \in \tilde{\lambda}$ и любого $\varphi \in I$, то Φ ограничена.

$\lhd$ Справедливость предложения вытекает из критерия обильности в равномерно устойчивых пространствах, из предложения 2.2 и предложения 4.1. $\rhd$

5.2. Аналитически уплотненные пространства. Далее рассмотрим условия обильности в аналитически уплотненных пространствах.

Предложение 5.2. *Пусть P — аналитически уплотненное пространство, I — замкнутый устойчивый подмодуль в P ранга 1, удовлетворяющий условию: I содержит обильный подмодуль. Тогда I — обильный.*

$\lhd$ По предложению 2.2 подмодуль I является интенсивным. По следствию к предложению 4.2 подмодуль I является насыщенным. В силу критерия обильности I — обильный. $\rhd$

Напомним, что *главным* подмодулем $I \subseteq P$ с образующей φ мы называем замыкание множества элементов вида $r\varphi$, где r пробегает кольцо $\mathbf{C}[\pi]$.

Модуль P называется *чистым*, если каждый главный подмодуль в P является обильным.

Предложение 5.3. *Пусть P — аналитически уплотненный чистый модуль. Для того чтобы замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ ранга 1 был обильным, необходимо и достаточно, чтобы он был устойчив.*

$\lhd$ *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Так как ранг I равен 1, то найдется элемент φ из I, отличный от тождественного нуля. Главный подмодуль I_φ с образующей φ является обильным и принадлежит I. Таким образом, подмодуль I содержит обильный подмодуль. В силу предложения 5.2 I — обильный. $\rhd$

Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — подмодули в P. Замкнутый подмодуль $I = I_0 \subseteq P$ *порожден подмодулями* $I_1, \ldots, I_n$, если I есть замыкание множества элементов вида $f_1 + \ldots + f_n$, где $f_k \in I_k$. Фиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}$, для которой выполняется условие: для любого $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ найдутся $z_k \in \tilde{\lambda}$ и $u_k \in I_k$ такие, что $u_k(z_k) \neq 0$. Набор $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$

комплексных функций на слое $\tilde\lambda$ называем *допустимым*, если существуют элементы $f_k \in I_k$ такие, что $f_k'|_{\tilde\lambda} = a_k$, $k = 1, \dots, n$.

Для допустимого набора $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ комплексных функций на слое $\tilde\lambda$ положим

$$T(a,\lambda) = \big\{f = f_1 + \ldots + f_n : \ f_k \in I_k, \ f_k|_{\tilde\lambda} = a_k\big\}.$$

Предложение 5.4. *Пусть P — аналитически уплотненный модуль, $I_1, \dots, I_n$ — обильные подмодули в P ранга 1. Для того чтобы подмодуль I ранга 1, порожденный подмодулями $I_1, \dots, I_n$, был обильным, необходимо и достаточно, чтобы для любого допустимого набора $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ комплексных функций на слое $\tilde\lambda$, удовлетворяющего условию $a_1 + \ldots + a_n = 0$, замыкание множества $T(a,\lambda)$ в топологии P содержало нулевой элемент.*

$\lhd$ По предложению 4.2 каждый из подмодулей $I_1, \dots, I_n$ будет сверхнасыщен. Так как ранг I равен 1 и I содержит каждый из этих подмодулей, то I также будет сверхнасыщен и, тем более, насыщен. По предложению 2.2 подмодуль I является интенсивным. Осталось заметить, что в силу предложения 3.5 устойчивость подмодуля I эквивалентна условию: нуль содержится в $T(a,\lambda)$ для любого допустимого набора $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ комплексных функций на слое $\tilde\lambda$, удовлетворяющего условию $a_1 + \ldots + a_n = 0$. $\rhd$

Предложение 5.4 сохраняет силу, если свойством обильности будет обладать лишь один из подмодулей $I_1, \dots, I_n$.

Пусть подмодуль $I \subseteq P$ ранга 1 порожден системой $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Фиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}$, для которой выполняется условие: для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ найдется $z_k \in \tilde\lambda$ такое, что $\varphi_k(z_k) \neq 0$. Символом $A(\lambda)$ обозначим совокупность векторов $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, для которых $a_1\varphi_1(z) + \ldots + a_n\varphi_n(z) = 0$ для любого $z \in \tilde\lambda$.

Предложение 5.5. *Пусть P — аналитически уплотненный чистый модуль. Для того чтобы замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ ранга 1, порожденный системой $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, был обильным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого вектора $a = (a_1, \dots, a_n) \in A(\lambda)$ существовали обобщенные последовательности $r_1^\alpha, \dots, r_n^\alpha \in \mathbf{C}[\pi]$ такие, что*

1) $r_1^\alpha|_{\tilde\lambda} = a_1, \dots, r_n^\alpha|_{\tilde\lambda} = a_n$,

2) $r_1^\alpha\varphi_1 + \ldots + r_n^\alpha\varphi_n \to 0$ *в топологии P.*

$\lhd$ Обозначим I_k главный подмодуль в P, порожденный функцией φ_k, $k = 1, \dots, n$. Каждый такой подмодуль обилен и их совокупность порождает I. Фиксируем $a = (a_1, \dots, a_n) \in A(\lambda)$ и рассмотрим систему комплексных функций на слое $\tilde\lambda$

$$b_1 = a_1\varphi_1|_{\tilde\lambda}, \dots, b_n = a_n\varphi_n|_{\tilde\lambda}.$$

Очевидно, что набор $\{b_1, \dots, b_n\}$ является допустимым и $b_1(z) + \ldots + b_n(z) = 0$ для любого $z \in \tilde\lambda$. Требуемое утверждение следует из предложения 5.4, если учесть, что включение $0 \in \overline{T(a,\lambda)}$ эквивалентно условиям 1), 2). $\rhd$

Литература

1. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1979.—Т. 43, № 1.—С. 44–66.
2. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1979.—Т. 43, № 2.—С. 309–341.
3. *Красичков-Терновский И. Ф.* Абстрактные приемы локального описания замкнутых подмодулей аналитических функций // Мат. сб.—1990.—Т. 181, № 12.—С. 1640–1658.
4. *Шишкин А. Б.* Локальное описание замкнутых подмодулей в специальном модуле целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки.—1989.—Т. 46, № 6.—С. 94–100.

5. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной // Мат. сб.—1991.—Т. 182, № 6.—С. 828–848.
6. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Мат. сб.—1991.—Т. 182, № 1.—С. 1559–1588.
7. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Мат. сб.—1998.—Т. 189, № 9.—С. 143–160.
8. *Чернышев А. Н.* Спектральный синтез для дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Армавир, 2004.—100 с.
9. *Письменный Р. Г.* Главные подмодули и инвариантные подпространства аналитических функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Славянск-на-Кубани, 2010.—104 с.
10. *Волковая Т. А., Шишкин А. Б.* Локальное описание целых функций // Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 212–223.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 8, ч. 1).
11. *Шишкин А. Б.* Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2014.—Т. 14, № 1.—С. 47–65.

Статья поступила 13 сентября 2013 г.

Волковая Татьяна Анатольевна
Кубанский государственный университет
(филиал в Славянске-на-Кубани),
аспирантка кафедры математики, информатики и МП
РОССИЯ, 353560, Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200
E-mail: `vta1987@yandex.ru`

Шишкин Андрей Борисович
Кубанский государственный университет
(филиал в Славянске-на-Кубани),
профессор кафедры математики, информатики и МП
РОССИЯ, 353560, Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200
E-mail: `Shishkin-home@mail.ru`

LOCAL DESCRIPTION OF ENTIRE FUNCTIONS. SUBMODULES OF RANK 1

Volkovaya T. A., Shishkin A. B.

Submodule in the module of entire functions is called ample, if this submodule coincides with its local hull. Ampleness splits in three separate properties: intensity, stability and saturation. In the article submodules of entire functions are investigated for the presence of these properties. Particular attention is paid to submodules of rank 1.

Key words: submodules of entire functions, local submodules, local shell, local description, ampleness, intensity, stability, saturation, criterion of ampleness.