Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 3, С. 37–44

УДК **517.982+517.547**

ЛИНЕЙНЫЙ НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРАВЫЙ ОБРАТНЫЙ К ОПЕРАТОРУ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В (LB)-ПРОСТРАНСТВАХ

В. А. Варзиев

Изучается вопрос существования линейного непрерывного правого обратного к операторам представления в (LB)-пространствах. Получены достаточные условия существования таких операторов для представлений по дельта-функциям в пространствах, сопряженных с весовыми пространствами Фреше целых функций. Сформулированы условия, при которых полученные результаты могут быть использованы для представлений по системам обобщенных экспонент. В основе исследования лежит метод, предложенный ранее для двойственной ситуации С. Н. Мелиховым, и предшествующие работы А. В. Абанина и автора по достаточным множествам в весовых пространствах Фреше целых функций и существованию линейного непрерывного левого обратного у соответствующего оператора сужения.

Ключевые слова: весовые пространства, абсолютно представляющие системы экспонент, линейный непрерывный правый/левый обратный.

1. Введение

В работах А. Ф. Леонтьева, Ю. Ф. Коробейника и многих других математиков (см. [1–4] и библиографию в них) широко изучались задачи представления функций рядами экспонент и их обобщений. К настоящему времени с наибольшей полнотой исследован случай пространств Фреше. В статье С. Н. Мелихова [5] было показано, что при подходящей реализации сопряженного пространства к пространству Фреше с помощью преобразования Лапласа эти задачи можно рассматривать как задачи представления функционалов рядами по дельта-функциям. При этом оператор представления такими рядами является сопряженным к оператору сужения в соответствующей реализации сопряженного пространства как весового (LB)-пространства целых функций и, таким образом, существование линейного непрерывного правого обратного (ЛНПО) у оператора представления в пространствах Фреше (т. е. возможности линейно и непрерывно находить коэффициенты разложения в зависимости от разлагаемой функции) сводится к вопросу о существовании линейного непрерывного левого обратного (ЛНЛО) у оператора сужения в весовых (LB)-пространствах целых функций.

В настоящей работе исследуется двойственная задача, когда разложения берутся в (LB)-пространствах, а оператор сужения рассматривается в весовых пространствах Фреше целых функций. Отправляясь от методов упомянутой выше работы [5], мы существенно опираемся на статьи [6] и [7], в которых была развита техника исследования

---

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения № 14.A18.21.0356 и № 8210, а также гранта ЮФУ «Весовые пространства бесконечно дифференцируемых функций. Общая теория и приложения», проект № 213.01-24/2013-63.

минимальных достаточных множеств в весовых пространствах Фреше целых функций и задачи о существовании ЛНЛО у соответствующего оператора сужения. Эта техника, основанная на привлечении канонических весовых последовательностей (см. [8] и [9]), позволяет избавляться от ряда существенных ограничений, которые налагались в статье [5].

Структура работы такова. Во втором параграфе изучается вопрос о сходимости рядов по дельта-функциям и дается описание соответствующего коэффициентного пространства. В следующем, третьем, параграфе рассматривается задача о наличии ЛНПО у оператора представления, построенного по данной последовательности дельта-функций. В заключительном, четвертом, параграфе излагается общая схема применения полученных результатов к проблеме существования ЛНПО у оператора представления рядами по обобщенным системам экспонент в (LB)-пространствах и формулируется соответствующий результат, который является основным в работе и имеет широкие возможности применения.

2. Ряды по дельта-функциям

Начнем с необходимых для дальнейшего изложения определений и обозначений. Рассмотрим последовательность $\Phi := (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ непрерывных функций (*весов*) $\varphi_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, направленную влево по подчинению, т. е.

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, C_n) \quad \varphi_{n+1}(z) \leqslant \varphi_n(z) + C_n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Образуем по ней весовое пространство Фреше $P(\Phi) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(\varphi_n)$, где

$$E(\varphi_n) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|_{\varphi_n} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} < \infty \right\}$$

— соответствующее φ_n банахово пространство.

Сопряженное с $P(\Phi)$ пространство $P'(\Phi)$, очевидно, имеет вид $P'(\Phi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n(\Phi)$, где $P'_n(\Phi) := \{\nu : \nu$ — линейный функционал на $P(\Phi)$ с $\|\nu\|'_{\varphi_n} < \infty\}$ — банахово пространство с нормой

$$\|\nu\|'_{\varphi_n} = \sup_{\substack{f\in P(\Phi),\\ \|f\|_{\varphi_n}\leqslant 1}} |\nu(f)|.$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что последовательность Φ *разделена логарифмом*, т. е.

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, m \in \mathbb{N})(\exists C_n) \quad \varphi_m(z) + \log(1 + |z|) \leqslant \varphi_n(z) + C_n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Этому предположению удовлетворяют все пространства, встречающиеся в приложениях. Оно обеспечивает компактность вложения $E(\varphi_{n+1})$ в $E(\varphi_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, а следовательно, принадлежность пространства $P(\Phi)$ классу пространств Фреше — Шварца (коротко, (FS)-пространств; по поводу общих сведений об (FS)- и (DFS)-пространствах см. обзор [10]). Поэтому сильное сопряженное пространство $P'_b(\Phi)$ является (DFS)-пространством, топология которого — это топология внутреннего индуктивного предела последовательности банаховых пространств $(P'_n(\Phi))_{n=1}^{\infty}$.

При каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ дельта-функция $\delta_\lambda(f) = f(\lambda)$ $(f \in P(\Phi))$ является элементом сопряженного пространства $P'(\Phi)$. В самом деле, линейность δ_λ очевидна, а непрерывность следует из оценки

$$|\delta_\lambda(f)| = |f(\lambda)| \leqslant \|f\|_{\varphi_1} e^{\varphi_1(\lambda)}, \quad f \in P(\Phi).$$

Заметим, что эта оценка означает, что все дельта-функции δ_λ содержатся в самом узком пространстве $P'_1(\Phi)$.

Займемся вопросом об описании последовательностей коэффициентов рядов по дельта-функциям, сходящихся абсолютно в $P'_b(\Phi)$. Для этого нам потребуется тот общий факт, что ряд сходится абсолютно в (DFS)-пространстве $E = \operatorname{ind}_n E_n$ тогда и только тогда, когда все его члены содержатся в некотором E_n и он сходится абсолютно в E_n.

Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность попарно различных точек комплексной плоскости с $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Из сказанного выше следует, что $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta_{\lambda_j}$ сходится абсолютно в $P'_b(\Phi)$ тогда и только тогда, когда $c = (c_j)_{j=1}^{\infty}$ принадлежит пространству

$$K(\Phi, \Lambda) := \left\{ c = (c_j)_{j=1}^{\infty} : \ (\exists\, n \in \mathbb{N})\ |c|_n := \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|\, \|\delta_{\lambda_j}\|'_{\varphi_n} < \infty \right\}.$$

Наша ближайшая цель — дать удобное для приложений описание коэффициентного пространства $K(\Phi, \Lambda)$.

Заметив, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\|\delta_\lambda\|'_{\varphi_n} = \sup_{\substack{f \in P(\Phi),\\ \|f\|_{\varphi_n} \leqslant 1}} |f(\lambda)| \leqslant \sup_{\substack{f \in P(\Phi),\\ \|f\|_{\varphi_n} \leqslant 1}} \|f\|_n e^{\varphi_n(\lambda)} \leqslant e^{\varphi_n(\lambda)}, \tag{1}$$

образуем банаховы пространства

$$K^1(\varphi_n, \Lambda) := \left\{ c = (c_j)_{j=1}^{\infty} : \ |c|_n^1 := \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|\ e^{\varphi_n(\lambda_j)} < \infty \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

и (DFS)-пространство

$$K^1(\Phi, \Lambda) := \bigcup_{n=1}^{\infty} K^1(\varphi_n, \Lambda).$$

То, что $K^1(\Phi, \Lambda)$ — (DFS)-пространство, вытекает из условия разделенности Φ логарифмом. Из оценки (1) следует, что

$$|c|_n \leqslant |c|_n^1 \quad (\forall\, c \in K^1(\varphi_n, \Lambda)),$$

и, следовательно,

$$K^1(\varphi_n, \Lambda) \hookrightarrow K(\varphi_n, \Lambda) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

где $\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения. Поэтому

$$K^1(\Phi, \Lambda) \hookrightarrow K(\Phi, \Lambda).$$

Покажем, что если последовательность Φ является канонической в смысле [9], то имеет место обратное включение $K(\Phi, \Lambda) \subset K^1(\Phi, \Lambda)$, и, следовательно, пространства $K(\Phi, \Lambda)$ и $K^1(\Phi, \Lambda)$ совпадают.

Напомним определение каноничности. Следуя [9], рассмотрим веса

$$\underline{\varphi}_n(z) := \sup \left\{ \log |f(z)| : \ f \in B(\varphi_n) \cap P(\Phi) \right\},$$

где $B(\varphi_n)$ — единичный шар в пространстве $E(\varphi_n)$.

Последовательность Φ называется *канонической*, если она эквивалентна последовательности $\underline{\Phi} := (\underline{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Заметим, что всегда имеет место подчинение $\underline{\Phi} \prec \Phi$, т. е. для любого $l \in \mathbb{N}$ существуют такие $k \in \mathbb{N}$ и константа C_l, что $\underline{\varphi}_k(z) \leqslant \varphi_l(z) + C_l,\ z \in \mathbb{C}$. Тогда становится очевидным, что требование эквивалентности, равносильно выполнению следующей оценки

$$(\forall\, n)(\exists\, m)(\exists\, C_n) \quad \varphi_m(z) \leqslant \underline{\varphi}_n(z) + C_n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Имеем

$$\underline{\varphi}_n(z) = \sup_{\substack{f \in P(\Phi),\\ \|f\|_{\varphi_n} \leqslant 1}} \log|f(z)| = \sup_{\substack{f \in P(\Phi),\\ \|f\|_{\varphi_n} \leqslant 1}} \log\frac{|f(z)|}{\|f\|_n} = \log\|\delta_z\|'_{\varphi_n}.$$

Применяя свойство каноничности Φ, получаем отсюда

$$|c|_n = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|\,\|\delta_{\lambda_j}\|'_{\varphi_n} \geqslant e^{-C_n}\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|\,e^{\varphi_m(\lambda_j)} = e^{-C_n}|c|^1_m.$$

Из этого соотношения, очевидно, следует требуемое вложение $K(\Phi,\Lambda) \subset K^1(\Phi,\Lambda)$.

Итак нами доказано следующее утверждение.

Предложение 1. *Допустим, что Φ — каноническая последовательность. Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j\delta_{\lambda_j}$ сходится в $P'_b(\Phi)$ абсолютно тогда и только тогда, когда $c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in K^1(\Phi,\Lambda)$.*

3. Оператор представления по дельта-функциям

Всюду ниже предполагается и не оговаривается дополнительно, что Φ — каноническая весовая последовательность. Тогда в силу предложения 1 оператор

$$W:\ c = (c_j)_{j=1}^{\infty} \longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} c_j\,\delta_{\lambda_j}$$

действует из $K^1(\Phi,\Lambda)$ в $P'_b(\Phi)$. Ясно, что он линеен, а его непрерывность (из $K^1(\Phi,\Lambda)$ в $P'_b(\Phi)$) вытекает из оценки

$$\|Wc\|'_{\varphi_n} = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} c_j\delta_{\lambda_j}\right\|'_{\varphi_n} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|c_j|\,\|\delta_{\lambda_j}\|'_{\varphi_n} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|c_j|\,e^{\varphi_n(\lambda_j)} = |c|^1_n.$$

Как и выше, мы использовали здесь то, что при любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\|\delta_\lambda\|'_{\varphi_n} \leqslant e^{\varphi_n(\lambda)}.$$

Предположим, что оператор $W : K^1(\Phi,\Lambda) \to P'_b(\Phi)$ сюръективен. Другими словами, в соответствии с определением Ю. Ф. Коробейника (см. [1]) система $\Delta_\Lambda := (\delta_{\lambda_j})_{j\in\mathbb{N}}$ является абсолютно представляющей в $P'_b(\Phi)$. В этом случае представляет интерес задача о существовании ЛНПО к W. Как и в двойственном случае из [5] она сводится к задаче о существовании ЛНЛО у соответствующего оператора сужения. Остановимся на этом подробнее.

Образуем по нашим весам $\varphi_n \in \Phi$ банаховы пространства

$$E(\varphi_n,\Lambda) := \left\{d = (d_k)_{k=1}^{\infty}:\ \|d\|_n := \sup_{k\geqslant 1}\frac{|d_k|}{e^{\varphi_n(\lambda_k)}} < \infty\right\},$$

а по ним пространство Фреше последовательностей комплексных чисел $P(\Phi,\Lambda) := \bigcap_{n=1}^{\infty} E(\varphi_n,\Lambda)$ с топологией, заданной набором норм $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Как известно, сильное сопряженное с $P(\Phi,\Lambda)$ пространство отождествляется с $K^1(\Phi,\Lambda)$ посредством билинейной формы $\langle c,d\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, d_j$, $c\in K^1(\Phi,\Lambda)$, $d\in P(\Phi,\Lambda)$.

Рассмотрим оператор сужения $R : f \mapsto (f(\lambda_j))_{j=1}^{\infty}$, который, очевидно, действует непрерывно из $P(\Phi)$ в $P(\Phi,\Lambda)$. Тогда сопряженный с ним оператор R' действует (при указанном выше отождествлении $P_b'(\Phi,\Lambda)$ с $K^1(\Phi,\Lambda)$) из $K^1(\Phi,\Lambda)$ в $P_b'(\Phi)$. При этом для любых $c=(c_j)_{j\in\mathbb{N}}\in K^1(\Phi,\Lambda)$ и $f\in P(\Phi)$ имеем

$$R'(c)(f) = \big\langle R(f), c\big\rangle = \big\langle (f(\lambda_j))_{j\in\mathbb{N}}, c\big\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} f(\lambda_j)c_j = \Bigg(\sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_{\lambda_j} c_j\Bigg)(f).$$

Поэтому $R'(c)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\delta_{\lambda_j}c_j$ для всех $c=(c_j)_{j\in\mathbb{N}}\in K^1(\Phi,\Lambda)$. Заключаем, что оператор R' совпадает с W.

В силу рефлексивности пространств $P(\Phi)$ и $K^1(\Phi,\Lambda)$ из вышеизложенного следует, что оператор W имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда R имеет ЛНЛО. Это заключение позволяет нам применить результаты работы [6] о существовании ЛНЛО у оператора R к вопросу о существовании ЛНПО у оператора представления W. Чтобы сформулировать соответствующий результат, нам придется напомнить некоторые обозначения и определения из [6] и [7].

Как и выше, предполагаем, что Φ — весовая последовательность проективного типа, удовлетворяющая условию разделенности логарифмом. Далее, предположим, что

$$(\forall\, n)(\exists\, m)(\exists\, C>0) \quad \sup_{|\zeta|\leqslant 1}\varphi_m(z+\zeta)\leqslant \inf_{|\zeta|\leqslant 1}\varphi_n(z+\zeta)+C \quad (z\in\mathbb{C}) \tag{2}$$

и

$$(\forall\, n)(\exists\, m)(\exists\, C>0) \quad \max_{|\zeta|\leqslant 1}\psi(z+\zeta)\leqslant \min_{|\zeta|\leqslant 1}\psi(z+\zeta)+\varphi_n(z)-\varphi_m(z)+C \quad (z\in\mathbb{C}), \tag{3}$$

где ψ — некоторая локально ограниченная в $\mathbb{C}$ функция.

Допустим, что имеется такая целая функция L, для которой точки λ_k являются простыми нулями и других нулей у нее нет, удовлетворяющая следующим условиям:

(L1)
$$(\forall\, n)(\exists\, m)(\exists\, C>0) \quad \log|L(z)|\leqslant 2\varphi_n(z)+\psi(z)-\varphi_m(z)+C \quad (z\in\mathbb{C});$$

(L2) существует последовательность окружностей $\{z : |z|=r_m\}$, $r_m\uparrow\infty$, на которых выполняется оценка
$$\log|L(z)|\geqslant \varphi_{n_0}(z)+\psi(z), \quad |z|=r_m,\ m=1,2,\dots;$$

(L3)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|L'(\lambda_k)|}\,e^{\varphi_{n_0}(\lambda_k)+\psi(\lambda_k)}<\infty,$$

где n_0 — некоторый фиксированный номер.

Нам еще потребуются понятия согласованности и правильности последовательностей Φ и Λ из [7]. Для этого введем следующее множество последовательностей положительных чисел:

$$\Gamma(\Lambda,\Phi) := \Bigg\{(\gamma_k)_{k=1}^{\infty} : \ (\forall\, n)(\exists\, m)(\exists\, C>0)\ \ln\frac{1}{\gamma_k}\leqslant\varphi_n(\lambda_k)-\varphi_m(\lambda_k)+C \ \ (\forall\, k\in\mathbb{N})\Bigg\}.$$

Для $\gamma \in \Gamma(\lambda, \Phi)$ положим

$$\mathscr{U}_\gamma := \bigcup_{k=1}^{\infty} \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - \lambda_k| < \gamma_k\big\}.$$

Говорят, что Λ и Φ *согласованы*, если имеется хотя бы одна последовательность $\gamma \in \Gamma(\Lambda, \Phi)$, для которой множество $\mathbb{C} \setminus \mathscr{U}_\gamma$ достаточно для $P(\Phi)$.

Далее, назовем Φ *правильной*, если

$$(\forall\, n)(\exists\, s)(\forall\, k)(\exists\, m)(\exists\, c > 0)$$
$$\sup\big\{|\mu(\lambda)| : \ \mu \in B(\varphi_n - \varphi_m) \cap M(\Phi)\big\} \geqslant c e^{\varphi_s(\lambda) - \varphi_k(\lambda)} \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Здесь $B(\varphi_n - \varphi_m)$ — единичный шар пространства $E(\varphi_n - \varphi_m)$.

Отметим, что в работе [7] указаны удобные условия проверки согласованности и правильности Φ и Λ.

Теорема 2. *Пусть Λ и Φ согласованы, Φ — каноническая последовательность, удовлетворяющая условиям* (2) *и* (3). *Предположим еще, что функция L имеет в точках из Λ простые нули, других нулей у нее нет и она удовлетворяет условиям* (L1)–(L3). *Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *Оператор представления $W : K^1(\Phi, \Lambda) \to P_b'(\Phi)$ имеет ЛНПО.*

(ii) *Имеется такая целая в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_\lambda$ функция $G(z, \lambda)$, которая удовлетворяет условиям*

$$G(z, z) = L(z) \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{4}$$

$$(\forall\, l)(\exists\, m)(\exists\, C > 0) \quad |G(z, \lambda)| \leqslant C e^{\varphi_l(z) + \psi(\lambda) + \varphi_l(\lambda) - \varphi_m(\lambda)} \quad (z, \lambda \in \mathbb{C}). \tag{5}$$

4. Приложения к абсолютно представляющим системам

В данном разделе рассматривается применение предыдущих результатов к абсолютно представляющим системам элементов. Сначала приведем общую схему, которая позволяет это делать.

Пусть $H = \operatorname{ind}_{n \in \mathbb{N}} H_n$ — (LB)-пространство, т. е. H_n — банаховы пространства (с нормами $|\cdot|_n$), $H_1 \hookrightarrow H_2 \hookrightarrow \ldots$ и $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ наделяется топологией внутреннего индуктивного предела. Предполагаем, что это пространство рефлексивно. Для наших целей достаточно ограничиться еще более узким классом (DFS)-пространств, когда вложения H_n в H_{n+1} компактны. По определению рефлексивность H означает, что оператор естественного вложения H в H''

$$I : \ x \in H \longmapsto \langle x, \cdot\rangle \in H''$$

является изоморфизмом между H и $H_b'' := (H_b')_b'$. Здесь и далее под словом изоморфизм мы всюду подразумеваем топологический изоморфизм.

Допустим, что в пространстве H имеется семейство элементов $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$, для которого оператор обобщенного преобразования Фурье — Лапласа функционалов

$$\mathscr{F} : \ x' \in H' \longmapsto \widehat{x'}(\lambda) := x'(e_\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

является топологическим изоморфизмом между H_b' и $P(\Phi)$.

Покажем, что при этих условиях между H и $P'_b(\Phi)$ также имеется изоморфизм, который переводит элементы e_λ в соответствующие дельта-функции δ_λ. В самом деле, поскольку $\mathscr{F}$ является изоморфизмом между H'_b и $P(\Phi)$, то сопряженный с ним оператор $\mathscr{F}'$ будет изоморфизмом между $P'_b(\Phi)$ и H''_b. Поэтому оператор $J := I^{-1} \circ \mathscr{F}'$ устанавливает изоморфизм между $P'_b(\Phi)$ и H. При этом по правилам действия операторов (I и сопряженного) имеем

$$\bigl\langle J(\nu), x' \bigr\rangle = \bigl\langle (I^{-1} \circ \mathscr{F}')(\nu), x' \bigr\rangle = \bigl\langle \mathscr{F}'(\nu), x' \bigr\rangle = \bigl\langle \nu, \mathscr{F}(x') \bigr\rangle, \quad \nu \in P'(\Phi),\ x' \in H'_b.$$

Подставив сюда $\nu = \delta_\lambda$, получим

$$\bigl\langle J(\delta_\lambda), x' \bigr\rangle = \bigl\langle \delta_\lambda, \mathscr{F}(x') \bigr\rangle = \bigl\langle \delta_\lambda, \widehat{x'}(\zeta) \bigr\rangle = \widehat{x'}(\lambda) \quad (\forall\, x' \in H'_b).$$

С другой стороны, и $\langle e_\lambda, x' \rangle = \widehat{x'}(\lambda)$ для всех $x' \in H'_b$. Значит, $J(\delta_\lambda) = e_\lambda$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Из изложенного выше непосредственно следуют такие заключения:

- Ряды $\sum_{j=1}^\infty c_j\, \delta_{\lambda_j}$ и $\sum_{j=1}^\infty c_j\, e_{\lambda_j}$ сходятся или расходятся в $P'_b(\Phi)$ и H, соответственно, одновременно.

- Системы $(\delta_{\lambda_j})_{j=1}^\infty$ и $(e_{\lambda_j})_{j=1}^\infty$ одновременно являются или не являются АПС в $P'_b(\Phi)$ и H, соответственно.

- Оператор представления

$$T:\ c = (c_j)_{j=1}^\infty \in K^1(\Phi, \Lambda) \longmapsto x = \sum_{j=1}^\infty c_j e_{\lambda_j} \in H$$

  имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда оператор сужения $R : P(\Phi) \to P(\Phi, \Lambda)$ имеет ЛНЛО.

Отсюда и из теоремы 2 следует такой результат для АПС вида $\mathscr{E}_\Lambda := (e_{\lambda_j})_{j=1}^\infty$.

Теорема 3. *Пусть Λ, Φ, ψ и L удовлетворяют всем условиям теоремы 2. Предположим, что $H = \operatorname{ind}_{n\in\mathbb{N}} H_n$ — (DFS)-пространство, в котором имеется такое семейство элементов $(e_{\lambda_j})_{j\in\mathbb{C}}$, для которого оператор обобщенного преобразования Фурье — Лапласа функционалов является топологическим изоморфизмом между H'_b и $P(\Phi)$. Тогда равносильны следующие два условия:*

(i) *Оператор представления $T :\ K^1(\Phi, \Lambda) \to H$ имеет ЛНПО.*

(ii) *Имеется целая в $\mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_\lambda$ функция $G(z, \lambda)$, удовлетворяющая условиям* (4) *и* (5).

Напомним, что смысл того, что оператор представления имеет ЛНПО, заключается в том, что в случае его существования имеется принципиальная возможность линейно и непрерывно в зависимости от разлагаемого элемента найти коэффициенты разложения.

Ясно, что теорема 3 может применяться к широкому спектру (DFS)-пространств H, лишь бы имелось подходящее описание сопряженного с помощью преобразования Фурье — Лапласа функционалов. Этому предполагается посвятить отдельную работу.

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1.—С. 73–126.
2. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы: теория и приложения.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2009.—336 с.

3. *Абанин А. В.* Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Ростов н/Д., 1995.—268 с.
4. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
5. *Мелихов С. Н.* О левом обратном к оператору сужения на весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2002.—Т. 14, вып. 1.—С. 99–133.
6. *Абанин А. В., Варзиев В. А.* О существовании линейного непрерывного левого обратного у оператора сужения на пространствах Фреше целых функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2013.—№ 4.—С. 5–10.
7. *Абанин А. В., Варзиев В. А.* Достаточные множества в весовых пространствах Фреше целых функций // Сиб. мат. журн.—2013.—Т. 54, № 4.—С. 725–741.
8. *Абанин А. В.* Густые пространства и аналитические мультипликаторы // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естетв. науки.—1994.—№ 4.—С. 3–10.
9. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions with growth conditions and some of its applications // Stud. Math.—2010.—Vol. 200.—P. 279–295.
10. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛПВ и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.

Статья поступила 19 августа 2013 г.

Варзиев Владислав Аликович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
младший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: varziev@smath.ru

A LINEAR CONTINUOUS RIGHT INVERSE TO THE REPRESENTATION OPERATOR IN (LB)-SPACES

Varziev V. A.

We study the question of the existence of a linear continuous right inverse to the representation operators in (LB)-spaces. It is obtained suficient conditions for the existence of such operators in the case of representations in delta-functions in spaces which are dual to weighted Fréchet spaces of entire functions. We state some conditions under which the results can be used for representations in systems of generalized exponential functions. Our study is based on the method developed by S. N. Melikhov for the dual situation and previous works of A. V. Abanin and the author on suffiient sets in weighted Fréchet spaces of entire functions and existence of a linear continuous left inverse for the corresponding restriction operator.

Key words: weighting space, absolutely representing systems of exponential, linear continuous right/left inverse.