Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 4, С. 5–9

УДК **517.547+517.982**

ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОГО РОСТА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ[1]

А. В. Абанин, В. А. Варзиев

Изучаются (LB)-пространства голоморфных в выпуклой ограниченной области функций, имеющих при приближении к границе конечный тип при заданном порядке. С помощью преобразования Лапласа функционалов дано описание сопряженных пространств, получено описание и доказано существование минимальных абсолютно представляющих систем экспонент в них.

Ключевые слова: пространства голоморфных функций заданного роста, абсолютно представляющие системы, системы экспонент.

1. Введение

Пространства Фреше голоморфных в ограниченной области функций заданного роста вблизи границы и существование в них абсолютно представляющих систем экспонент (АПСЭ) изучались А. Ф. Леонтьевым [1], Р. С. Юлмухаметовым [2], В. В. Напалковым [3], Т. Белгхити [4], А. В. Абаниным [5]. При этом наибольший интерес представляют минимальные, в определенном смысле, АПСЭ (см. [1, 2, 5]). Двойственная ситуация (LB)-пространств (т. е. внутренних индуктивных пределов последовательностей банаховых пространств) аналогичного типа вплоть до последнего времени не изучалась. Возможно, это было связано с тем, что для модельного (LB)-пространства всех локально аналитических на выпуклом компакте функций не удается ввести понятие минимальной абсолютно представляющей системы экспонент. Недавно в работе А. В. Абанина, Ле Хай Хоя и Ю. С. Налбандян [6] для пространства $A^{-\infty}(D)$ голоморфных в выпуклой ограниченной области функций полиномиального роста вблизи границы было установлено существование АПСЭ, которые перестают быть таковыми после отбрасывания любой, сколь угодно редкой, своей подпоследовательности. Заметим, что удаление любого конечного числа экспонент из произвольной АПСЭ в $A^{-\infty}(D)$ не приводит к потере ее свойства быть АПСЭ в $A^{-\infty}(D)$.

В настоящей работе изучается вопрос о существовании и описании минимальных АПСЭ для (LB)-пространства голоморфных в выпуклой ограниченной области функций, имеющих при приближении к границе конечный тип при заданном порядке. Исследование основано на подходящем описании сопряженного пространства с помощью преобразования Лапласа функционалов, использовании двойственной связи между АПСЭ и достаточными множествами и недавних результатах авторов о минимальных достаточных множествах в пространствах Фреше.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8210.

2. Пространства заданного роста и их сопряженные

Пусть D — выпуклая ограниченная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(D)$ — пространство всех голоморфных в G функций. Через $d(z)$ обозначим расстояние от z до границы ∂D области D. Для числа $\rho \in (0, \infty)$ определим банаховы пространства

$$H_n^\rho(D) := \left\{ f \in H(D) : \ \|f\|_n := \sup_{z \in D} |f(z)| e^{-n/(d(z))^\rho} < \infty \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

и образуем по ним (LB)-пространство

$$H^\rho(D) := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^\rho(D),$$

наделенное топологией внутреннего индуктивного предела пространств $H_n^\rho(D)$. Оно относится к классу (DFS)-пространств и называется пространством голоморфных в области функций, имеющих при приближении к границе конечный тип при порядке ρ.

Сопряженное с ним пространство описывается следующим образом. Пусть $\rho^* := \frac{\rho}{\rho+1}$ — сопряженный с ρ порядок. Определим по нему пространство Фреше целых функций

$$H_D^{\rho^*}(\mathbb{C}) := \left\{ g \in H(\mathbb{C}) : \ |g|_n := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} \frac{|g(\zeta)|}{e^{H(\zeta) - n|\zeta|^{\rho^*}}} < \infty \right\},$$

топология в котором задана набором норм $(|\cdot|_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Здесь и далее $H(\zeta) := \sup_{z \in D} \operatorname{Re} z\zeta$ — опорная функция области D.

Теорема 1. *Преобразование Лапласа функционалов*

$$\varphi \longmapsto \hat{\varphi}(\zeta) := \varphi(e^{\zeta z}) \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

устанавливает топологический изоморфизм между сильным сопряженным с $H^\rho(D)$ пространством $\big(H^\rho(D)\big)'_b$ и $H_D^{\rho^*}(\mathbb{C})$.

$\lhd$ Доказательство проводится по схеме работы [7] с некоторыми упрощениями, предложенными в [8] при изучении многомерной ситуации. В связи с этим выделим здесь лишь его узловые моменты, опустив технические детали. Наибольшую трудность составляет проверка сюръективности оператора преобразования Лапласа.

Итак, пусть g — фиксированная функция из $H_D^{\rho^*}(\mathbb{C})$. Образуем ассоциированную с ней по Борелю функцию $G(\zeta) := \sum_{k=1}^{\infty} k!\, g_k \zeta^{-k-1}$, где g_k — тейлоровские коэффициенты g. Из принадлежности g пространству $H_D^{\rho^*}(\mathbb{C})$ выводим, что G голоморфна в дополнении D^c области D до расширенной комплексной плоскости, исчезает в бесконечности ($G(\infty) = 0$) и бесконечно дифференцируема вплоть до границы $\partial D^c = \partial D$. Более того, как бесконечно дифференцируемая в вещественном смысле в D^c функция она принадлежит классу Жевре порядка $1/\rho^*$, т. е.

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \sup_{\zeta \in D^c} \frac{|G^{(k)}(\zeta)|}{(k!)^{1/\rho^*} h^k} < \infty \quad \text{при всех} \quad h > 0. \tag{1}$$

Тогда в соответствии с аналогом теоремы Уитни (см. [9, теорема 4.5]) G продолжается до бесконечно дифференцируемой в $\mathbb{R}^2$ функции $\widetilde{G}$ с сохранением оценки (1) во всем $\mathbb{R}^2$.

Определим линейный функционал

$$\varphi(f) := \lim_{t \to 1-0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} f(t\zeta) G(\zeta)\, d\zeta.$$

Использовав продолжение $\widetilde{G}$ и формулу Грина, получаем отсюда, что φ — элемент $\big(H^\rho(D)\big)'$. Применив еще теорему Полиа (см., например, [10, теорема 5.2]), заключаем, что $\hat{\varphi} = g$. Таким образом, оператор преобразования Лапласа действует из $\big(H^\rho(D)\big)'$ на $H_D^{\rho^*}(\mathbb{C})$, что и требовалось проверить. $\rhd$

3. Минимальные абсолютно представляющие системы экспонент

Применим теорему 1 к исследованию задачи об описании и существовании минимальных АПСЭ в пространстве $H^\rho(D)$. Нам потребуются для этого некоторые дополнительные понятия и результаты.

Следуя Л. Эренпрайсу [11], назовем подмножество S комплексной плоскости *достаточным* для $H_D^{\rho^*}(\mathbb{C})$, если набор преднорм

$$|g|_{n,S} := \sup_{\zeta\in S} \frac{|g(\zeta)|}{e^{H(\zeta)-n|\zeta|^{\rho^*}}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

задает в $H_D^{\rho^*}(\mathbb{C})$ исходную топологию. Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности. В соответствии с общим определением Ю. Ф. Коробейника (см. [12, с. 74]) система экспонент $\mathscr{E}_\Lambda := (e^{\lambda_k z})_{k=1}^\infty$ называется АПСЭ в $H^\rho(D)$, если любую функцию f из $H^\rho(D)$ можно представить в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty c_k e^{\lambda_k z},$$

абсолютно сходящегося в $H^\rho(D)$. Из теоремы 1 и критерия Ю. Ф. Коробейника для абсолютно представляющих систем в (DFS) пространствах [12, теорема 7, с. 84] выводим следующий результат.

Теорема 2. *Для того чтобы система $\mathscr{E}_\Lambda := (e^{\lambda_k z})_{k=1}^\infty$ была абсолютно представляющей в $H^\rho(D)$, необходимо и достаточно, чтобы Λ было достаточным для $H_D^{\rho^*}(\mathbb{C})$ множеством.*

Эта теорема позволяет применить результаты общего характера о достаточных множествах в пространствах Фреше, установленные нами в работе [13]. В частности, из теоремы 3.5, предложения 4.8 и теоремы 5.1 этой работы после проверки их предварительных условий в нашем конкретном случае, следует такой результат.

Теорема 3. *Пусть L — целая функция, имеющая в точках последовательности Λ простые нули и других нулей у нее нет. Предположим, что L обладает такими свойствами:*

$$(\exists\, C > 0)\ (\exists\, n_0 \in \mathbb{N}) \quad \ln|L(z)| \leqslant H(z) + n_0|z|^{\rho*} + C \quad (z \in \mathbb{C}); \tag{2}$$

имеются номер $m_0 \in \mathbb{N}$ и окружности $\{z \in \mathbb{C} :\ |z| = r_m\}$ с $r_m \uparrow +\infty$ такие, что

$$\ln|L(z)| \geqslant m + H(z) - m_0|z|^{\rho*}, \quad |z| = r_m,\ m = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

и, наконец, существует такая нетривиальная целая функция A конечного типа при порядке ρ^*, что

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^{\rho^*}} \left(\ln\left|\frac{A(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\right| + H(\lambda_k) \right) < \infty. \tag{4}$$

Тогда Λ — достаточное для $H_D^{\rho^*}(\mathbb{C})$ множество.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат работы.

Теорема 4. *Пусть L — целая функция, удовлетворяющая оценке (2), имеющая в точках последовательности Λ и только в них простые нули. Для того чтобы система экспонент $\mathscr{E}_\Lambda$ была АПСЭ в $H^\rho(D)$, необходимо и достаточно, чтобы для нее выполнялись условия (3) и (4).*

$\lhd$ Достаточность следует непосредственно из предыдущей теоремы.

Необходимость доказывается по схеме из [6] и [12]. Именно, из того, что $\mathscr{E}_\Lambda$ является АПСЭ в $H^\rho(D)$, следует, что она допускает нетривиальное разложение нуля

$$\sum_{k=1}^\infty a_k e^{\lambda_k z} = 0,$$

абсолютно сходящееся в $H^\rho(D)$ (здесь хотя бы один коэффициент a_k отличен от нуля). Это следует, например, из теоремы 2 и результатов [13], в соответствии с которыми достаточные множества в пространствах Фреше, инвариантных относительно умножения на независимую переменную, заведомо переполнены — из них можно отбросить любое конечное число точек, не утратив свойства множества быть достаточным.

Наличие нетривиального разложения нуля влечет (см. доказательство теоремы 2 на с. 106 в [12] и теоремы 1.2 в [6]) существование такой целой функции D, что

$$A(\lambda)e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda - \lambda_k} L(\lambda), \quad z \in D,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Оценивая норму $e^{\lambda z}$ в $H^\rho(D)$, выводим из этого разложения, что функция A имеет конечный тип при порядке ρ^*. Отсюда, использовав разложение вновь и применив классические результаты из теории целых функций, получаем выполнение условий (3) и (4). $\rhd$

Отметим, что оценку (2) функции L сверху нельзя заменить на более сильную

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\exists\, C > 0) \quad \ln|L(\lambda)| \leqslant H(z) - n|z|^{\rho*} + C \quad (z \in \mathbb{C}).$$

В самом деле, тогда бы L принадлежала пространству $H_D^{\rho^*}(\mathbb{C})$, и ее нули не могли бы составлять достаточное для этого пространства множество (поскольку всякое достаточное множество является множеством единственности для соответствующего пространства).

В заключение отметим, что из результатов Р. С. Юлмухаметова [14] об аппроксимации субгармонических функций логарифмами модулей целых следует существование целой функции L, удовлетворяющей всем условиям теорем 3 и 4.

Литература

1. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1980.—Т. 44, № 6.—С. 1308–1328.
2. Юлмухаметов Р. С. Достаточные множества в одном классе пространств целых функций // Мат. сб.—1981.—Т. 116, № 3.—С. 427–439.
3. Напалков В. В. Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1987.—Т. 51, № 2.—С. 287–305.
4. Belghiti T. Espaces de fonctions holomorphes à poids // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.—1994.—Vol. 318.—P. 619–622.
5. Абанин А. В. Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Мат. заметки.—1995.—Т. 57, № 4.—С. 483–497.
6. Abanin A. V., Le Hai Khoi, Nalbandyan Yu. S. Minimal absolutely representing systems of exponentials for $A^{-\infty}(\Omega)$ // J. Approx. Theory.—2011.—Vol. 163.—P. 1534–1545.
7. Melikhov S. N. (DFS)-spaces of holomorphic functions invariant under differentiation // J. Math. Anal. Appl.—2004.—Vol. 297.— P. 577–586.
8. Abanin A. V., Le Hai Khoi. Dual of the function algebra $A^{-\infty}(D)$ and representation of functions in Dirichlet series // Proc. Amer. Math. Soc.—2010.—Vol. 138.—P. 3623–3635.
9. Bonet J., Braun R. W., Meise R., Taylor B. A. Whitney's extension theorem for nonquasianalytic classes of ultradifferentiable functions // Studia Math.—1991.—Vol. 99.—P. 155–184.
10. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1983.—176 с.
11. Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables.—New York: Wiley-Interscience Publishers, 1970.—506 p.—(Pure and Appl. Math. Vol. 17).
12. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1.—С. 73–126.
13. Абанин А. В., Варзиев В. А. Достаточные множества в весовых пространствах Фреше целых функций // Сиб. мат. журн.—(В печати).
14. Юлмухаметов Р. С. Приближение субгармонических функций // Мат. сб.—1984.—Т. 124, № 3.—С. 393–415.

Статья поступила 5 ноября 2012 г.

Абанин Александр Васильевич
Южный федеральный университет,
зав. кафедрой математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
зав. отделом математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: abanin@math.rsu.ru

Варзиев Владислав Аликович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
младший науч. сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: varzi@yandex.ru

REPRESENTING SYSTEMS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS IN SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS WITH GIVEN GROWTH NEAR BOUNDARY

Abanin A. V., Varziev V. A.

We consider (LB) spaces of functions which are holomorphic in a convex domain and have a finite type with respect to an order near its boundary. Using Laplace transformation, we give a description of their duals. Then we characterize mimimal absolutely representing systems of exponential functions in these spaces and prove that they always exist.

Key words: spaces of holomorphic functions with a given growth, absolutely representing systems, systems of exponential functions.