*Владикавказский математический журнал*
*2012, Том 14, Выпуск 3, С. 58–62*

*УДК* **512.54**

# СТРУКТУРА ЛИЕВЫХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ АЛГЕБР ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

**И. М. Жураев**

В работе доказана теорема о представлении лиева дифференцирования в стандартном виде для случая алгебр измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $M$.

**Ключевые слова:** алгебра фон Неймана, измеримый оператор, алгебра фон Неймана типа I, дифференцирование, лиево дифференцирование, внутреннее дифференцирование, центрозначный след.

Задача о представлении лиева дифференцирования в стандартном виде является одной из важных задач функционального анализа. Помимо этого в последнее время интенсивно изучаются лиевы дифференцирования на $C^*$-алгебрах и на более общих банаховых алгебрах.

Пусть $A$ — некоторая алгебра. Линейный оператор $D : A \to A$ называется *дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ при всех $x, y \in A$. Каждый элемент $a \in A$ определяет дифференцирование $D_a$ по правилу $D_a(x) = ax - xa$, $x \in A$. Дифференцирования вида $D_a$ называются *внутренними*.

Линейный оператор $L : A \to A$ называется *лиевым дифференцированием*, если $L([xy]) = [L(x), y] + [x, L(y)]$ для всех $x, y \in A$.

Обозначим через $Z(A)$ центр $A$. Линейный оператор $\tau : A \to Z(A)$ называется *центрозначным следом*, если $\tau(xy) = \tau(yx)$ для всех $x, y \in A$.

В работе В. Е. Джонсона [3] доказано, что каждое непрерывное лиево дифференцирование $L$ из $C^*$-алгебры $A$ в банаховый $A$-бимодуль $X$ может быть представлено в виде $L = D + \tau$, где $D : A \to X$ — ассоциативное дифференцирование и $\tau$ — центрозначный след из $A$ в центр $X$. А. Р. Виллена [6], исследуя неограниченные лиевы дифференцирования на унитальных банаховых алгебрах, получил аналогичный результат. В работе М. Мэтью и А. Р. Виллена [5] была доказана теорема о стандартном разложении лиева дифференцирования для унитальных $C^*$-алгебр.

В теории колец проблема стандартного разложения лиевого дифференцирования изучалась в работах Херстейна [2] и Мартиндейла [4]. В работе Херстейна получено решение этой проблемы для простых, ассоциативных колец. Для примитивных колец, содержащих нетривиальные идемпотенты, и характеристикой, не равной двум, эта задача решена Мартиндейлом. Следуя этим результатам, полученным для колец, Роберт Майерс [7] решил проблему стандартного разложения лиевого дифференцирования для случая алгебр фон Неймана.

Настоящая работа посвящена стандартному разложению лиевых дифференцирований, действующих на алгебрах измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана.

Пусть $H$ — гильбертово пространство, $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $H$, $M$ — подалгебра фон Неймана в $B(H)$, $\mathscr{P}(M)$ — полная решетка всех ортопроекторов из $M$.

Линейное подпространство $D$ в $H$ называется *присоединенным* к $M$ (обозначение $D\eta M$), если $u(D) \subseteq D$ для любого унитарного оператора $u$ из коммутанта $M' = \{y \in B(H) : xy = yx \;\forall\, x \in M\}$ алгебры фон Неймана $M$.

Линейный оператор $x$, действующий в $H$, с областью определения $D(x) \subset H$ называется *присоединенным* к $M$ (обозначение $x\eta M$), если $u\,(D\,(x)) \subseteq D(x)$ для любого унитарного оператора $u \in M$, и $ux(\xi) = xu(\xi)$ для всех $\xi \in D(x)$.

Линейное подпространство $D$ в $H$ называется *сильно плотным* в $H$ относительно алгебры фон Неймана $M$, если: 1) $D\eta M$; 2) существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $P_n \uparrow \mathbf{1}$, $P_n(H) \subset D$, $P_n^{\perp} = \mathbf{1} - P_n$ — конечный проектор в $M$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $\mathbf{1}$ — единица в $M$.

Замкнутый линейный оператор $x$, действующий в гильбертовом пространстве $H$, называется *измеримым относительно алгебры фон Неймана* $M$, если $x\eta M$, и $D(x)$ является сильно плотным в $H$. Обозначим через $S(M)$ множество всех операторов, измеримых относительно $M$.

Множество $S(M)$ всех измеримых операторов относительно $M$ является унитальной $*$-алгеброй относительно операций сильного сложения и умножения и перехода к сопряженному оператору [8].

Пусть $M$ — алгебра фон Неймана с центром $Z$. Обозначим центр алгебры $S(M)$ через $Z(S(M))$. Пусть $L : S(M) \to S(M)$ — произвольное лиево дифференцирование. Если $p_i$, $p_j$ — проекторы в $S(M)$, то $p_i S(M) p_j = \{p_i A p_j : A \in S(M)\}$, $i, j = 1, 2$. Положим $p_1 = p$ и $p_2 = 1 - p$. Тогда $S(M) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} p_i S(M) p_j$. Пусть, далее, $M_{ij} = p_i S(M) p_j$, $i, j = 1, 2$. Напомним, что $M_{ij} = M_{ik} M_{kj}$ для $i, j = 1, 2$.

**Лемма 1.** *Пусть $p$ — проектор в $S(M)$. Тогда для всех $x \in S(M)$,*

$$\begin{aligned} &x\left\{pL\left(p\right)+L\left(p\right)p+pL\left(p\right)p-L\left(p\right)\right\}-\left\{pL\left(p\right)+L\left(p\right)p+pL\left(p\right)p-L\left(p\right)\right\}x \\ &\quad = 3px\left\{pL\left(p\right)+L\left(p\right)p-L\left(p\right)\right\}-3\left\{pL\left(p\right)+L\left(p\right)p-L\left(p\right)\right\}xp. \end{aligned} \tag{1}$$

◁ Для всех $x \in S(M)$ имеет место равенство

$$[[[xp]\,p]\,p] = [xp]\,. \tag{2}$$

Применяя $L$ к тождеству (2), получим

$$[[[L(x), p] + [\,x, L(p)]\,, p] + [[xp]\,, L(p)]\,, p] + [[[xp]\,p]\,, L(p)] = [L(x), p] + [x, L(p)]\,. \tag{3}$$

Отсюда получим требуемое равенство. ▷

**Лемма 2.** $L(p) = [ps] + z$ *для некоторого* $s \in S(M)$ *и* $z \in Z(S(M))$.

◁ Пусть $L(p) = \sum e_{ij}$, $e_{ij} \in M_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$. Применяя (1) для всех $x \in S(M)$, получим

$$x(2e_{11} - e_{22}) - (2e_{11} - e_{22})x = 3px(e_{11} - e_{22}) - 3(e_{11} - e_{22})xp. \tag{4}$$

Если $x \in M_{12}$, то из (4) заключаем, что $e_{11}x = xe_{22}$, откуда

$$(e_{11} + e_{22})x = x(e_{11} + e_{22}) \quad (x \in M_{12}).$$

Аналогично, $(e_{11} + e_{22})x = x(e_{11} + e_{22})$ $(x \in M_{21})$. Пусть теперь $x \in M_{11}$ и $y \in M_{12}$. Тогда

$$\begin{aligned} \{(e_{11} + e_{22})x - x(e_{11} + e_{22})\}\,y &= (e_{11} + e_{22})xy - xy(e_{11} + e_{22}) \\ &= (e_{11} + e_{22})xy - (e_{11} + e_{22})xy = 0, \end{aligned}$$

поскольку $y, xy \in M_{12}$. Отсюда получаем

$$(e_{11}+e_{22})x - x(e_{11}+e_{22}) = 0 \quad (x \in M_{11}).$$

Аналогично

$$(e_{11}+e_{22})x - x(e_{11}+e_{22}) = 0 \quad (x \in M_{22}),$$

т. е. $e_{11}+e_{22} = z \in Z(S(M))$. Следовательно, $L(p) = (e_{12}+e_{21})+z$ и, полагая $s = e_{12}-e_{21}$, получим, что $L(p) = (ps - sp) + z$. $\rhd$

Отсюда следует, что нам достаточно рассмотреть случай, когда $L(p) \in Z(S(M))$, поскольку если мы докажем основную теорему для этого случая, то, полагая $L' = L - D_s$, где $D_s$ — внутреннее дифференцирование, мы получим стандартное разложение в общем случае.

**Лемма 3.** *$L(M_{ij}) \subset M_{ij}$ для $i \neq j$.*

$\lhd$ Пусть $x \in M_{12}$ и $L(x) = \sum y_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$. Тогда, привлекая равенство $x = [p, x]$, получим

$$\sum y_{ij} = L(x) = L([p, x]) = [L(p), x] + [p, L(x)] = [p, L(x)] = y_{12} - y_{21}.$$

Отсюда следует, что $y_{11} = y_{21} = y_{22} = 0$. Таким образом, $L(x) \in M_{12}$. Аналогично рассматривается случай $x \in M_{21}$. $\rhd$

**Лемма 4.** *$L(M_{ii}) \subset M_{ii} + Z(S(M))$.*

$\lhd$ Пусть $x \in M_{11}$ и $L(x) = \sum y_{ij}$, $y_{ij} \in M_{ij}$ $(i = 1, 2)$. Тогда $0 = L([p, x]) = [L(p), x] + [p, L(x)] = [p, L(x)] = y_{12} - y_{21}$, следовательно, $y_{12} = y_{21} = 0$ и $L(x) \in M_{11} + M_{22}$. Аналогично, если $x \in M_{22}$, то $L(x) \in M_{11} + M_{22}$. Пусть $x \in M_{11}$ и $y \in M_{22}$, $L(x) = a_{11} + a_{22}$, $L(y) = b_{11} + b_{22}$ $(a_{ii}, b_{ii} \in M_{ii})$. Тогда $0 = L([x, y]) = [L(x), y] + [x, L(y))] = [a_{22}, y] + [x, b_{11}] = 0$. Отсюда, в частности, $[a_{22}, y] = 0$ для всех $y \in M_{22}$, т. е. $a_{22}$ является центральным элементом таким, что $a_{22} = (\mathbf{1} - p)\, z$, $z \in Z(S(M))$. Поэтому $L(x) = a_{11} + (\mathbf{1} - p)\, z = [a_{11} - pz + z] \in M_{11} + Z(S(M))$. Таким же образом заключаем, что $L(M_{22}) \in M_{22} + Z(S(M))$. $\rhd$

Из полученных результатов заключаем, в частности, что если $x \in M_{ij}$ $(i \neq j)$, то $L(x) = x^* \in M_{ij}$; если $x \in M_{ii}$, то $L(x) = x^* + z$, $x^* \in M_{ii}$, $z \in Z(S(M))$.

Исходя из этих соотношений, можно определить отображение $D$ из $S(M)$ в $S(M)$, полагая $D(x) = x^*$, если $x \in M_{ij}$ для всех $i$, $j$.

Теперь рассмотрим отображение $\tau$ из $S(M)$ в $Z(S(M))$, определяемое равенством

$$\tau(x) = L(x) - D(x), \quad x \in S(M).$$

**Лемма 5.** *Отображение $\tau : S(M) \to Z(S(M))$ является линейным.*

$\lhd$ Достаточно доказать аддитивность $\tau$ на $M_{ii}$. Если $x, y \in M_{ii}$, то

$$\begin{aligned}\tau(x+y) - \tau(x) - \tau(y) &= L(x+y) - D(x+y) - L(x) + D(x) - L(y) + D(y)\\ &= [D(x) + D(y) - D(x+y)] \in M_{ii} \cap Z(S(M)) = 0. \rhd\end{aligned}$$

**Следствие.** *Отображение $D : S(M) \to S(M)$ является линейным.*

**Лемма 6.** *$D(xyx) = D(x)yx + xD(y)x + xyD(x)$ для всех $x \in M_{ij}$ $(i \neq j)$ и для всех $y \in S(M)$.*

$\lhd$ Для $x \in M_{ij}$ $(i \neq j)$, $2xyx = [[x,y]x]$. Тогда

$$2D(xyx) = L(2xyx) = L([[x,y]x]) = [[L(x),y] + [x,L(y)],x] + [[x,y],L(x)]$$
$$= [[D(x),y] + [x,D(y)],x] + [[x,y],D(x)] = 2\left\{D(x)yx + xD(y)x + xyD(x)\right\},$$

что и требовалось. $\rhd$

**Лемма 7.** *Для $x \in M_{ii}$ и $y \in M_{jk}$ $(j \neq k)$, выполняется $D(xy) = D(x)y + xD(y)$.*

$\lhd$ Пусть $x \in M_{11}$ и $y \in M_{12}$. Тогда

$$D(xy) = L(xy) = L([x,y]) = [L(x),y] + [x,L(y)] = [D(x),y] + [x,D(y)] = D(x)y + xD(y). \rhd$$

**Лемма 8.** *Для $x \in M_{11}$ и $y \in M_{jj}$, выполняется $D(xy) = D(x)y + xD(y)$.*

$\lhd$ Пусть $x, y \in M_{11}$. Для $r \in M_{12}$, используя лемму 7, получим

$$D(xy)r = D(xyr) - xyD(r) = D(x)yr + xD(yr) - xyD(r)$$
$$= D(x)yr + x\left\{D(y)r + yD(r)\right\} - xyD(r) = \left\{D(x)y + xD(r)\right\}r.$$

Следовательно, $\{D(xy) - D(x)y - xD(y)\}\,r = 0$ для всех $r \in M_{12}$. Отсюда заключаем, что $D(xy) - D(x)y - xD(y) = 0$. $\rhd$

**Теорема 1.** *Отображение $D$ из $S(M)$ в $S(M)$ является ассоциативным дифференцированием.*

$\lhd$ Пусть $0 \neq x \in M_{12}$ и $y \in M_{21}$. Имеем

$$\tau([x,y]) = L([x,y]) - D([x,y]) = [L(x),y] + [x,L(y)] - D([x,y])$$
$$= [D(x),y] + [x,D(y)] - D(xy) + D(yx).$$

Отсюда

$$\{D(x)y + xD(y) - D(xy)\} + \{D(yx) - D(y)x - yD(x)\} = z \in Z(S(M)). \tag{5}$$

Если $z = 0$, то $[D(x)y + xD(y) - D(xy)] \in M_{11} \cap M_{22}$, т. е. $D(x)y + xD(y) - D(xy) = 0$. Предположим, что $z \neq 0$. Умножая равенство (5) слева на $x$, получим $xD(yx) - xD(y)x - xyD(x) = xz$. Применяя лемму 7, находим, что $D(xyx) - D(x)yx - xD(y)x - xyD(x) = xz$. Согласно лемме 6 получаем $xz = 0$. Отсюда $x = 0$, из противоречия получим требуемое равенство. $\rhd$

**Следствие.** *Равенство $\tau(xy - yx) = 0$ выполняется для всех $x, y \in S(M)$.*

Итак, мы получаем следующую основную теорему.

**Теорема 2.** *Всякое лиево дифференцирование на $S(M)$ единственным образом представляется в виде*

$$L = D + \tau,$$

*где $D$ — ассоциативное дифференцирование и $\tau$ — центрозначный след из $S(M)$ в $Z(S(M))$.*

Пусть $L^0(\Omega) = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — алгебра классов эквивалентности всех комплексных измеримых функций на $(\Omega, \Sigma, \mu)$. Рассмотрим произвольное дифференцирование $\delta : L^0(\Omega) \to L^0(\Omega)$, и $D_\delta$ — «покоординатное» дифференцирование на $M_n\left(L^0(\Omega)\right)$ матриц размера $n \times n$ над $L^0(\Omega)$, определенное по правилу

$$D_\delta\left((\lambda_{ij})_{i,j=1}^n\right) = \left(\delta\,(\lambda_{ij})_{i,j=1}^n\right),$$

где $(\lambda_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_n\left(L^0(\Omega)\right)$. Оператор $D_\delta$ является дифференцированием на $M_n\left(L^0(\Omega)\right)$. Исходя из этого можно определить дифференцирование $D_\delta$ на $S(M)$ [1], где $M$ — алгебра фон Неймана типа I, положив

$$D_\delta(x) = \left(D_{\delta_\alpha}(x_\alpha)\right), \quad x = (x_\alpha) \in S(M). \tag{6}$$

Из [1, теорема 3.6] получим следующее

**Следствие.** *Пусть $M$ — алгебра фон Неймана типа* I. *Тогда каждое лиево дифференцирование на $S(M)$ единственным образом представляется в виде*

$$L = D_a + D_\delta + \tau,$$

*где $D_a$ — внутреннее дифференцирование, $D_\delta$ — дифференцирование вида* (6).

## Литература


1. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* Structure of derivations on various algebras of measurable operators for type *I* von Neumann algebras // J. Func. Anal.—2009.—Vol. 256.—P. 2917–2943.
2. *Herstein I. N.* Lie and Jordan structures in simple, associative rings // Bull. Amer. Math. Soc.—1961.—Vol. 67.—P. 517–531.
3. *Johnson B. E.* Symmetric amenability and the nonexistence of Lie and Jordan derivatuons // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1996.—Vol. 120.—P. 455–473.
4. *Martindale W. S.* Lie derivations of primitive rings // Mich. Math. J.—1964.—Vol. 11.—P. 183–187.
5. *Mathieu M., Villena A. R.* Lie derivations on $C^*$-algebras // J. Func. Anal. Acad Press.—2003.—Vol. 202.—P. 504–525.
6. *Villena A. R.* Lie derivations on Banach algebras // J. Algebra.—2000.—Vol. 226.—P. 390–409.
7. *Robert Miers C.* Lie derivations of von Neumann algebras // J. Math.—1972.—P. 403–409.
8. *Segal I.* A non-commutative extension of abstract integration // Ann. of Math.—1953.—Vol. 57.—P. 401–457.
9. *Sakai S.* Derivations of $W^*$-algebras // Ann. of Math.—1966.—Vol. 83.—P. 273–279.


*Статья поступила 23 сентября 2011 г.*

Жураев Илхом Мухитдинович
Национальный университет Узбекистана,
докторант кафедры алгебры и функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 100174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: ijmo64@mail.ru

## STRUCTURE OF LIE DERIVATIONS ON ALGEBRAS OF MEASURABLE OPERATORS

Juraev I. M.

We prove that every Lie derivation on algebras of measurable operators is of standard form, that is, it can be uniquely decomposed into the sum of a derivation and a center-valued trace.

**Key words:** von Neumann algebras, measurable operator, type I von Neumann algebras, derivation, inner derivation, Lie derivation, center-valued trace.