*Владикавказский математический журнал*
*2012, Том 14, Выпуск 3, С. 13–30*

*УДК* **517.538+517.547.7**

# МИНИМАЛЬНЫЕ АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ГЛАДКОСТЬЮ[1]

**А. В. Абанин, С. В. Петров**

Рассматриваются пространства функций, аналитических в выпуклой области и бесконечно дифференцируемых вплоть до ее границы, с заданными оценками всех производных. Для пространств, порожденных одним весом, получены необходимые и достаточные условия, при которых минимальные в определенном смысле системы экспонент являются в них абсолютно представляющими. С помощью этих результатов установлено, что абсолютно представляющие системы экспонент в пространствах такого типа не обладают устойчивостью относительно предельного перехода по области.

**Ключевые слова:** абсолютно представляющие системы, пространства аналитических функций, граничная гладкость.

## Введение

Пусть $G$ — ограниченная односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, для которой $\operatorname{int}\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}$. Через $A^\infty(\overline{G})$ обозначим пространство всех функций, аналитических в $G$ и бесконечно дифференцируемых вплоть до ее границы $\partial G$.

*Весом* будем называть произвольную неубывающую выпуклую на $[0,\infty)$ функцию $\varphi$, для которой

$$t = o(\varphi(t)) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{1}$$

Семейство всех весов обозначим символом $V$. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi(0) = 0$ для любого $\varphi \in V$.

Для $\varphi$ из $V$ образуем банахово пространство

$$A_\varphi(\overline{G}) := \left\{ f \in A^\infty(\overline{G}) : \; \|f\|_\varphi = \sup_{z\in G} \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(z)|}{k!\; e^{\varphi(k)}} < \infty \right\}.$$

Возьмем произвольную последовательность $\varPhi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ функций из $V$, для которой существуют такие $C_n \geqslant 0$, что

$$\varphi_{n+1}(t+1) + t \leqslant \varphi_n(t) + C_n \quad (t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

и образуем пространство $A_\varPhi(\overline{G}) = \bigcap_{n=1}^\infty A_{\varphi_n}(\overline{G})$, наделенное топологией, задаваемой набором норм $(\|\cdot\|_{\varphi_n})_{n=1}^\infty$. Заметим, что в силу (2) оно является пространством Фреше — Шварца (коротко, $(FS)$-пространством).

---



[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., заявки № 2012-1.1-12-000-1003-029 и № 2012-1.2.1-12-000-1001-004.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь выпуклые ограниченные области $G$ комплексной плоскости, что естественно при изучении представления функций рядами из экспонент. В [1] (см. также [2]) было доказано, что в тех случаях, когда сопряженное к $A_\Phi(\overline{G})$ пространство допускает так называемое экспоненциальное описание, существуют последовательности экспонент, являющиеся абсолютно представляющими системами (АПС) в $A_\Phi(\overline{G})$. Поскольку в пространствах такого типа ни одна АПС экспонент не может составлять базиса (см. [3]; в терминологии монографии [4] такие системы называются свободными), то любая АПС экспонент в $A_\Phi(\overline{G})$ заведомо переполнена. В связи с этим традиционно ставится вопрос о минимальных в определенном смысле АПС [5–8]. В настоящей работе этот вопрос изучается для пространств функций с заданной граничной гладкостью, задаваемых с помощью весовых последовательностей, порождаемых одной весовой функцией. Именно, пусть $\varphi \in V$ и последовательность положительных чисел $(p_n)_{n=1}^\infty$ такова, что $p_n \uparrow p \in (0, \infty]$. Для пространства $A_\Phi(\overline{G})$, образованного по последовательности $\Phi = (p_n\varphi(t/p_n))_{n=1}^\infty$, будем использовать специальное обозначение $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$. Нетрудно видеть, что оно не зависит от выбора последовательности $(p_n)_{n=1}^\infty$, лишь бы $p_n \uparrow p$.

В первой части работы при дополнительных ограничениях на $\varphi$ приводится более простое по сравнению с известным представление сопряженного с $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ пространства. Затем из него выводятся новые по форме и более удобные для приложений критерии для АПС экспонент в $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ и дается описание всех мультипликаторов и достаточные условия для делителей полученной реализации сопряженного пространства. На их основании и с помощью общих результатов из [8] во второй части доказывается существование АПС минимального типа в $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ при $p < \infty$. Наконец, в заключительной третьей части работы АПС минимального типа используются для того, чтобы показать, что для пространств аналитических функций с заданной граничной гладкостью, в отличие от пространств всех аналитических функций, невозможны теоремы о предельном переходе по области.

## 1. Пространства, порождаемые одним весом, и их сопряженные

Всюду далее предполагаем без ограничения общности, что выпуклая ограниченная область $G$ содержит начало.

Напомним описание сильного сопряженного с $A_\Phi(\overline{G})$ пространства из работы [1, следствие 1].

Свяжем с каждым весом $\varphi \in V$ выпуклую функцию $\psi(r) = \varphi(r) + r\ln^+ \frac{r}{e}$, $r \geqslant 0$. Очевидно, что $\psi$ — вес из $V$. Через $\psi^*$ обозначим функцию, сопряженную с $\psi \in V$ по Юнгу — Фенхелю, т. е. $\psi^*(s) := \sup_{t\geqslant 0}(ts - \psi(t))$, $s \geqslant 0$. Ясно, что функция $\psi^*$ принимает лишь конечные значения. По $\psi^*$ образуем банахово пространство целых функций

$$E_{\psi^*}(G) := \left\{ F \in H(\mathbb{C}) : |F|_{\psi^*} = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|F(\lambda)|}{\exp(H_G(\lambda) + \psi^*(\ln^+|\lambda|))} < \infty \right\},$$

где $H_G(\lambda) = \sup_{z\in G} \operatorname{Re}(\lambda z)$ — опорная функция компакта $\overline{G}$. Для весовой последовательности $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ рассмотрим образованную по вышеуказанному правилу последовательность $\Psi^* = \{\psi_n^*\}_{n=1}^\infty$ и соответствующее ей пространство целых функций $E_{\Psi^*}(G) := \bigcup_{n=1}^\infty E_{\psi_n^*}(G)$, которое наделим топологией индуктивного предела последовательности пространств $(E_{\psi_n^*}(G))_{n=1}^\infty$. В силу (2) пространство $E_{\Psi^*}(G)$ относится к классу $(DFS)$. В [1] установлена справедливость следующей теоремы.

**Теорема A.** *Пусть $G$ — ограниченная выпуклая область комплексной плоскости. Пусть, далее, $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций из $V$, для которой выполнено (2), и известно, что $\varphi_n(t) = O(t^2)$ при $t \to \infty$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда преобразование Лапласа функционалов $T \mapsto \widehat{T}(\lambda) := T(e^{\lambda z})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к $A_\Phi(\overline{G})$ пространством $\big(A_\Phi(\overline{G})\big)'_b$ и пространством $E_{\Psi^*}(G)$.*

**Следствие.** *Пусть $G$ — ограниченная выпуклая область комплексной плоскости, а $\varphi \in V$ такова, что $\varphi(t) = O(t^2)$ при $t \to \infty$. Предположим дополнительно, что для любого $q > 1$ существует $C_q > 0$ такое, что*

$$q\varphi\left(\frac{t}{q}\right) + t \leqslant \varphi(t) + C_q \quad (\forall\, t \geqslant 0). \tag{3}$$

*Определим последовательность $\Psi^*$, состоящую из функций, образованных по правилу*

$$\psi_n^*(s) := \sup_{t \geqslant 0} \left\{ ts - p_n\varphi\Big(\frac{t}{p_n}\Big) - t\ln^+\frac{t}{e} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Тогда преобразование Лапласа функционалов устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ пространством $\Big(A^p_{(\varphi)}(\overline{G})\Big)'_b$ и $E_{\Psi^*}(G)$ при любом $p \in (0, \infty]$.*

$\lhd$ В соответствии с теоремой A нам достаточно проверить, что весовая последовательность $p_n\varphi(t/p_n)$ удовлетворяет условию (2).

Из выпуклости $\varphi$ и того, что $\varphi(t) = O(t^2)$ при $t \to \infty$, для произвольного фиксированного $r > 0$ имеем

$$r\left(\varphi\left(\frac{t+1}{r}\right) - \varphi\left(\frac{t}{r}\right)\right) \leqslant \frac{\varphi(2t/r) - \varphi(t/r)}{t/r} \leqslant \frac{\varphi(2t/r)}{t/r} \leqslant \frac{At}{r}$$

при всех $t \geqslant 1$, где постоянная $A$ зависит только лишь от $\varphi$. Поэтому найдется такое $B = B(r) > 0$, что

$$\varphi\left(\frac{t}{r}\right) \geqslant \varphi\left(\frac{t+1}{r}\right) - N \cdot \frac{t}{r} - B \quad (\forall\, t \geqslant 0), \tag{4}$$

где $N := [A/r] + 1$.

Далее, положив $r := p_{n+1}$ и применив $N+1$ раз условие (3) при $q = \sqrt[N+1]{\dfrac{p_{n+1}}{p_n}} > 1$, получим

$$\varphi\left(\frac{t}{p_n}\right) \geqslant q^{N+1}\varphi\left(\frac{t}{p_n q^{N+1}}\right) + \frac{(N+1)t}{p_n} - D = \frac{p_{n+1}}{p_n} \cdot \varphi\left(\frac{t}{p_{n+1}}\right) + \frac{(N+1)t}{p_n} - D,$$

где $D$ — некоторая положительная постоянная, зависящая лишь от $n$. Поэтому из неравенства (4), примененного к $r = p_{n+1}$, следует

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{t}{p_n}\right) &\geqslant \frac{p_{n+1}}{p_n} \cdot \left(\varphi\left(\frac{t+1}{p_{n+1}}\right) - N\frac{t}{p_{n+1}} - B\right) + \frac{(N+1)t}{p_n} - D \\ &\geqslant \frac{p_{n+1}}{p_n} \cdot \varphi\left(\frac{t+1}{p_{n+1}}\right) + \frac{t}{p_n} - B\frac{p_{n+1}}{p_n} - D.\end{aligned}$$

Таким образом, при $C_n := Bp_{n+1} + Dp_n$ имеем

$$p_{n+1}\varphi\left(\frac{t+1}{p_{n+1}}\right) + t \leqslant p_n\varphi\left(\frac{t}{p_n}\right) + C_n, \quad t \geqslant 0,$$

что доказывает следствие. $\rhd$

Заметим, что при $p = \infty$ вместо (3) можно было потребовать выполнения более мягкого условия

$$(\exists\, q > 1)\,(\exists\, C > 0) \quad q\varphi\left(\frac{t}{q}\right) + t \leqslant \varphi(t) + C \quad (\forall\, t \geqslant 0).$$

Обозначим через $W$ — подкласс тех весов $\varphi \in V$, для которых преобразование Лапласа функционалов устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ пространством $\left(A^p_{(\varphi)}(\overline{G})\right)'_b$ и пространством $E_{\Psi^*}(G)$, где $\Psi^*$ образована по правилу, указанному в следствии, для любой ограниченной выпуклой области $G$.

Наша ближайшая цель — выделить подкласс тех $\varphi \in W$, для которых сопряженное можно описать в более простой форме, чем в следствии. В связи с этим рассмотрим те веса $\varphi$, для которых

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t) - q\varphi(t/q)}{t\ln t} = +\infty \quad (\forall\, q > 1). \tag{5}$$

Примерами весов, удовлетворяющих (5), являются
1) $t^\alpha$, $\alpha > 1$;
2) $t\ln^\beta(1+t)$, $\beta > 2$;
3) $t(\ln t)^{\ln\ln t}$.

Ясно, что условие (5) влечет выполнение (3). Далее, из (5), очевидно, следует, что

$$t\ln t = o(\varphi(t)) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{6}$$

Установим некоторые свойства весов, удовлетворяющие условию (5) или (6), и ассоциированных с ними весовых последовательностей.

**Лемма 1.** *Пусть вес $\varphi$ удовлетворяет условию* (6). *Тогда*

$$\ln\varphi^*(s) = o(s) \quad \text{\textit{при} } s \to \infty$$

*и существует такая постоянная $A > 0$, что*

$$\varphi^*(\ln^+(s+1)) - \varphi^*(\ln^+ s) \leqslant A, \quad s \geqslant 0. \tag{7}$$

$\lhd$ В силу условия (6) на вес $\varphi$ для любого $C > 1$ найдется такая постоянная $D = D(\varphi, C) > 0$, что при всех $t > 0$

$$\varphi(t) \geqslant Ct\ln^+ t - D.$$

Поэтому для любого $s \geqslant 0$

$$\varphi^*(s) = \sup_{t>0}(ts - \varphi(t)) \leqslant \sup_{t>0}(ts - Ct\ln^+ t) + D \leqslant \max\left\{s, \sup_{t\geqslant 1}(ts - Ct\ln t)\right\} + D.$$

Так как

$$\sup_{t\geqslant 1}(ts - Ct\ln t) = \begin{cases} \frac{C}{e}\, e^{s/C} & \text{при} \quad s \geqslant C, \\ s & \text{при} \quad 0 \leqslant s < C, \end{cases}$$

и $Ce^{s/C} \geqslant s$ при любом $s \geqslant 0$, то окончательно имеем, что

$$\varphi^*(s) \leqslant se^{s/C} + D \quad (\forall\, s \geqslant 0).$$

Отсюда в силу произвольности $C > 1$ получаем, что $\ln\varphi^*(s) = o(s)$ при $s \to \infty$, и тем более $\varphi^*(s) = o(e^s)$ при $s \to \infty$.

Таким образом, для $\varphi^*$ выполнены все условия леммы 6.1.2 из [9], в соответствии с которой $\varphi^*$ удовлетворяет (7). $\rhd$

**Лемма 2.** *Пусть вес* $\varphi$ *удовлетворяет условию* (5), $p_n \uparrow p \in (0,\infty]$, $\psi_n(t) := p_n\varphi(t/p_n) + t\ln^+(t/e)$ $(n \in \mathbb{N})$. *Тогда весовые последовательности* $\Psi^* := (\psi_n^*(s))_{n=1}^\infty$ *и* $\Phi^* := (p_n\varphi^*(s))_{n=1}^\infty$ *удовлетворяют при некоторых постоянных* $C_n > 0$ *неравенствам*

$$\psi_n^*(s) \leqslant p_n\varphi^*(s) \leqslant \psi_{n+1}^*(s) + C_n, \quad s \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

$\lhd$ Левая часть неравенства следует без каких-либо ограничений из определения функций $\psi_n^*$:

$$\psi_n^*(s) \leqslant p_n \sup_{t>0}((t/p_n)s - \varphi(t/p_n)) = p_n\varphi^*(s).$$

С другой стороны, из условия (5) имеем, что для произвольных $q > 1$ и $A > 0$ найдется постоянная $C(q,A) > 0$ такая, что

$$\varphi(t) \geqslant q\varphi(t/q) + t\ln^+(At) - C(q,A) \quad (\forall\, t \geqslant 0).$$

Поэтому для $q = p_{n+1}/p_n > 1$ и $A = p_n/e > 0$ найдется такая постоянная $C_n > 0$, что

$$\begin{aligned} p_n\varphi^*(s) &= p_n\sup_{t>0}(ts - \varphi(t)) = \sup_{t>0}(ts - p_n\varphi(t/p_n)) \\ &\leqslant \sup_{t>0}\big(ts - p_n\big(q\varphi(t/(qp_n)) + (t/p_n)\ln^+(At/p_n) - C(q,A)\big)\big) \\ &= \sup_{t>0}\big(ts - \big(p_{n+1}\varphi(t/p_{n+1}) + t\ln^+(t/e)\big)\big) + C_n = \psi_{n+1}^*(s) + C_n \quad (s \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}). \ \rhd \end{aligned}$$

Отметим еще один полезный факт, вытекающий из более слабого, чем (5), условия.

**Лемма 3.** *Пусть вес* $\varphi$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t) - q\varphi(t/q)}{t} = +\infty \quad (\forall\, q > 1).$$

*Тогда для любого* $q > 1$ *существует* $C_q > 0$ *такое, что*

$$\varphi^*(s+1) \leqslant q\varphi^*(s) + C_q \quad (\forall\, s \geqslant 0). \tag{8}$$

$\lhd$ По условию для любого $q > 1$ найдется постоянная $C_q > 0$ такая, что

$$q\varphi^*(s) = \sup_{t\geqslant 0}\left(ts - q\varphi\left(\frac{t}{q}\right)\right) \geqslant \sup_{t\geqslant 0}\big(t(s+1) - \varphi(t)\big) - C_q = \varphi^*(s+1) - C_q. \ \rhd$$

Для веса $\varphi$ и последовательности $p_n \uparrow p \in (0,\infty]$ определим весовую последовательность $\Phi^* := (p_n\varphi^*(t))_{n=1}^\infty$, а по ней весовое пространство целых функций $E_{\Phi^*}(G)$, представляющее собой внутренний индуктивный предел последовательности банаховых пространств

$$E_{p_n\varphi^*}(G) := \left\{ F \in H(\mathbb{C}) :\, |F|_{p_n\varphi^*} = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|F(\lambda)|}{\exp(H_G(\lambda) + p_n\varphi^*(\ln^+|\lambda|))} < \infty \right\}.$$

Будем использовать для этого пространства специальное обозначение $E^p_{(\varphi^*)}(G)$. Ясно, что это пространство не зависит от выбора последовательности $(p_n)_{n=1}^\infty$, лишь бы $p_n \uparrow p$.

Обозначим через $\widetilde{W}$ семейство всех весов из $W$, для которых имеет место условие (5). Из леммы 2 и следствия из теоремы А получаем такой результат

**Теорема 1.** *Для веса $\varphi \in \widetilde{W}$ преобразование Лапласа функционалов устанавливает топологический изоморфизм между пространством $(A^p_{(\varphi)}(\overline{G}))'_b$, сильно сопряженным к $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$, и $E^p_{(\varphi^*)}(G)$ для любой ограниченной выпуклой области $G$ и любого $p \in (0, \infty]$.*

$\lhd$ Действительно, в силу леммы 2 для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливы вложения

$$E_{\psi_n^*}(G) \hookrightarrow E_{p_n\varphi^*}(G) \hookrightarrow E_{\psi_{n+1}^*}(G), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\psi_n$ те же, что и в лемме 2. Отсюда следует топологическое равенство $E^p_{(\varphi^*)}(G) = E_{\Psi^*}(G)$. Остается применить следствие из теоремы A, чтобы получить нужное. $\rhd$

В дальнейшем нам потребуется описание всех мультипликаторов пространства $E^p_{(\varphi^*)}(G)$, которое мы сейчас приведем. Напомним, что целая функция $\mu$ называется *мультипликатором множества* $E$ целых функций, если $\mu \cdot E \subset E$. Так как $E^p_{(\varphi^*)}(G)$ является $(DFS)$-пространством, то всякий его мультипликатор $\mu$ непрерывен, т. е. соответствующий оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует из $E^p_{(\varphi^*)}(G)$ в $E^p_{(\varphi^*)}(G)$ непрерывно (см. по этому поводу [10]). Это обстоятельство позволяет нам воспользоваться общими результатами из [11] об описании непрерывных мультипликаторов и установить следующий результат, имеющий самостоятельное значение.

**Предложение 1.** *Пусть вес $\varphi$ удовлетворяет условию* (5). *Класс $M^p_{(\varphi^*)}(G)$ всех мультипликаторов пространства $E^p_{(\varphi^*)}(G)$ допускает следующее описание*

$$M^p_{(\varphi^*)}(G) = \Big\{\mu \in H(\mathbb{C}) : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, C_\varepsilon > 0 : |\mu(\lambda)| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon\varphi^*(\ln^+|\lambda|)},\ \lambda \in \mathbb{C}\Big\}$$

*при* $0 < p < \infty$;

$$M^\infty_{(\varphi^*)}(G) = \Big\{\mu \in H(\mathbb{C}) : \exists\, C > 0 : |\mu(\lambda)| \leqslant C e^{C\varphi^*(\ln^+|\lambda|)},\ \lambda \in \mathbb{C}\Big\}.$$

$\lhd$ Положим

$$h_n(\lambda) = \exp\big(H_G(\lambda) + p_n\varphi^*(\ln^+|\lambda|)\big) \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}).$$

Так как $\varphi^*$ не убывает и выпукла на $[0, \infty)$, то $\varphi^*(\ln^+|\lambda|)$, а следовательно, и $H_G(\lambda) + p_n\varphi^*(\ln^+|\lambda|)$ — субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция. Далее, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(1+|\lambda|^2)^3 \sup_{|\xi-\lambda|\leqslant 1} h_n(\xi) &\leqslant \exp\Big[\sup_{|\xi-\lambda|\leqslant 1} H_G(\xi) + p_n \sup_{|\xi-\lambda|\leqslant 1}\varphi^*(\ln^+|\xi|) + 3\ln(1+|\lambda|^2)\Big]\\ &\leqslant \exp\Big[H_G(\lambda) + \Delta_G + p_n\varphi^*(\ln(|\lambda|+1)) + 6\ln^+|\lambda| + 3\ln 2\Big],\end{aligned}$$

где $\Delta_G = \sup_{z\in G}|z|$ — радиус наименьшего круга с центром в начале, содержащего $G$. Применив лемму 1 и использовав то, что $s = o(\varphi^*(s))$ при $s \to \infty$, получим, что

$$p_n\varphi^*(\ln^+(|\lambda|+1)) + 6\ln^+|\lambda| \leqslant p_{n+1}\varphi^*(\ln^+|\lambda|) + A_n \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

где $A_n > 0$ — некоторые постоянные. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\big(1+|\lambda|^2\big)^3 \sup_{|\xi-\lambda|\leqslant 1} h_n(\xi) \leqslant B_n e^{H_G(\lambda)+p_{n+1}\varphi^*(\ln^+|\lambda|)} = B_n h_{n+1}(\lambda),$$

где $B_n := 8\exp(\Delta_G + A_n)$. Таким образом, для весовой системы $\{h_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ выполнены все условия предложения 5 из работы [11], в соответствии с которым $E^p_{(\varphi^*)}(G)$ является так называемым густым пространством. А тогда по предложению 3 из той же работы $M^p_{(\varphi^*)}(G)$ совпадает с семейством тех целых функций $\mu$, которые удовлетворяют для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ условию

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\,(\exists\, m \in \mathbb{N})\,(C_n > 0) \quad |\mu(\lambda)| \leqslant C_n \frac{h_m(\lambda)}{h_n(\lambda)} \leqslant C_n\, e^{(p_m - p_n)\varphi^*(\ln^+|\lambda|)}.$$

Отсюда, очевидно, следует описание пространств мультипликаторов в обоих случаях — $p \in (0,\infty)$ и $p = \infty$. $\rhd$

Из предложения 1 следует, что класс $M^p_{(\varphi^*)}(G)$ мультипликаторов не зависит от области и одинаков для всех конечных $p$. Поэтому в дальнейшем, если не возникнет недоразумений, мы будем применять сокращенные обозначения $M_{(\varphi^*)} := M^p_{(\varphi^*)}(G)$, $0 < p < \infty$, и $M^{\infty}_{(\varphi^*)} := M^{\infty}_{(\varphi^*)}(G)$.

Нетривиальный мультипликатор $\mu$ множества $E$ целых функций называется *делителем* $E$, если справедлива импликация (теорема деления):

$$\left(f \in E,\ \frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C})\right) \implies \frac{f}{\mu} \in E.$$

Приведем достаточные условия того, что $\mu \in M_{(\varphi^*)}$ является делителем $E^p_{(\varphi^*)}(G)$, где $0 < p < \infty$.

**Предложение 2.** *Пусть вес $\varphi$ удовлетворяет* (4) *и функция $\rho :\ (0,\infty) \to (0,\infty)$ такова, что*

$$\rho(t) = o(\varphi^*(\ln t)), \quad t \to \infty. \tag{9}$$

*Предположим, что для мультипликатора $\mu \in M_{(\varphi^*)}$ имеет место условие $(\Delta)$:*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, R_\varepsilon \geqslant 1)\,(\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\, |\lambda| > R_\varepsilon)\,(\exists\, \zeta \in \mathbb{C})$$
$$|\zeta - \lambda| < \rho(|\lambda|), \quad |\mu(\zeta)| \geqslant e^{-\varepsilon\varphi^*(\ln^+|\zeta|)}.$$

*Тогда $\mu$ является делителем пространства $E^p_{(\varphi^*)}(G)$ для любого $p \in (0,\infty)$ и любой выпуклой ограниченной области $G$.*

$\lhd$ Пусть $f \in E^p_{(\varphi^*)}(G)$ такова, что $f/\mu \in H(\mathbb{C})$. Из принадлежности $f$ пространству $E^p_{(\varphi^*)}(G)$ имеем, что при некоторых постоянных $q \in (0,p)$ и $C_1$

$$\ln|f(\xi)| \leqslant H_G(\xi) + q\varphi^*(\ln^+|\xi|) + C_1, \quad \xi \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Возьмем $\varepsilon \in (0,1)$ так, чтобы $q + 6\varepsilon < p$. Так как $\mu \in M_{(\varphi^*)}$, то найдется $C_2 > 0$ такое, что

$$\ln|\mu(\xi)| \leqslant \varepsilon\varphi^*(\ln^+|\xi|) + C_2, \quad \xi \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Из (7) следует, что

$$\varphi^*(\ln^+(t + 4\rho(t))) \leqslant \varphi^*(\ln^+ t) + 4A(\rho(t) + 1), \quad t \geqslant 0.$$

Кроме того,

$$H_G(\xi) \leqslant H_G(\lambda) + 4\Delta_G\rho(|\lambda|), \quad |\xi - \lambda| \leqslant 4\rho(|\lambda|);\ \ \lambda, \xi \in \mathbb{C}.$$

Тогда, применив в последних двух неравенствах условие (9), получим, что имеется такое $R \geqslant 1$, что

$$\varphi^*(\ln(t + 4\rho(t))) \leqslant (1+\varepsilon_1)\varphi^*(\ln t), \quad t \geqslant R,\ \varepsilon_1 := \min(\varepsilon, \varepsilon/q); \tag{12}$$

$$H_G(\xi) \leqslant H_G(\lambda) + \varepsilon\varphi^*(\ln|\lambda|), \quad |\xi - \lambda| \leqslant 4\rho(|\lambda|),\ |\lambda| \geqslant R. \tag{13}$$

Из условия $(\Delta)$ найдем соответствующее $R_\varepsilon$. Без ограничения общности можно считать, что $R_\varepsilon \geqslant R$. Рассмотрим произвольное $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| \geqslant R_\varepsilon$. Учитывая неравенства (10)–(13), имеем

$$\begin{aligned}\ln \max_{|\xi-\lambda|\leqslant 4\rho(|\lambda|)} |f(\xi)| &\leqslant H_G(\lambda) + \varepsilon\varphi^*(\ln|\lambda|) + q(1+\varepsilon_1)\varphi^*(\ln|\lambda|) + C_1 \\ &\leqslant H_G(\lambda) + (q+2\varepsilon)\varphi^*(\ln|\lambda|) + C_1;\end{aligned}$$

$$\ln \max_{|\xi-\lambda|\leqslant 4\rho(|\lambda|)} |\mu(\xi)| \leqslant \varepsilon(1+\varepsilon_1)\,\varphi^*(\ln|\lambda|) + C_2 \leqslant 2\varepsilon\,\varphi^*(\ln|\lambda|) + C_2.$$

С другой стороны, из оценки $|\mu(\zeta)|$ снизу, фигурирующей в условии $(\Delta)$, и (12) получаем

$$\ln \max_{|\xi-\lambda|\leqslant \rho(|\lambda|)} |\mu(\xi)| \geqslant \ln|\mu(\zeta)| \geqslant -\varepsilon\varphi^*(\ln|\zeta|) \geqslant -\varepsilon(1+\varepsilon_1)\varphi^*(\ln|\lambda|) \geqslant -2\varepsilon\varphi^*(\ln|\lambda|).$$

Как известно (см. [12]),

$$\ln\left|\frac{f(\lambda)}{\mu(\lambda)}\right| \leqslant \ln \max_{|\xi-\lambda|\leqslant 4\rho(|\lambda|)} |f(\xi)| + \ln \max_{|\xi-\lambda|\leqslant 4\rho(|\lambda|)} |\mu(\xi)| - 2\ln \max_{|\xi-\lambda|\leqslant \rho(|\lambda|)} |\mu(\xi)|.$$

Использовав в этом неравенстве полученные выше оценки, приходим к следующему неравенству, справедливому при всех $|\lambda| \geqslant R_\varepsilon$,

$$\ln\left|\frac{f(\lambda)}{\mu(\lambda)}\right| \leqslant H_G(\lambda) + (q+6\varepsilon)\,\varphi^*(\ln|\lambda|) + C_1 + C_2.$$

Так как в соответствии с выбором $\varepsilon$ у нас $q + 6\varepsilon < p$, то отсюда следует, что $f/\mu$ принадлежит пространству $E^p_{(\varphi^*)}(G)$. $\triangleright$

## 2. Минимальные АПС экспонент в $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$. Общие результаты

Всюду ниже, если не оговорено дополнительно, $p \in (0, \infty)$ и $\varphi$ — вес из $\widetilde{W}$.

Как уже отмечалось во введении, АПС экспонент в пространстве $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ заведомо переполнены. В таких случаях возникает задача о построении минимальных в определенном смысле АПС экспонент. Мы будем исходить из общего понятия минимальности АПС, введенного в [8] на основании классических результатов А. Ф. Леонтьева о представлении аналитических в выпуклой области комплексной плоскости функций рядами Дирихле, показатели которых являются нулями целых функций минимально возможного роста. План изложения в текущем параграфе заключается в конкретизации и проверке основных определений и результатов из [8] для систем экспонент и пространств $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ и $E^p_{(\varphi^*)}(G)$. Для удобства читателя мы согласуем некоторые наши обозначения с [8] и при необходимости приведем нужные нам понятия из этой работы.

Положим $H := A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$, $e(\lambda) := \exp \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) и $E := E^p_{(\varphi^*)}(G)$. Для краткости будем использовать обозначение $\|\cdot\|_q := \|\cdot\|_{q\varphi(\cdot/q)}$, $q \in (0,\infty)$. В рассматриваемом случае справедливо следующее уточнение леммы 1 из [1].

**Лемма 4.** *Пусть вес $\varphi \in V$ удовлетворяет условию (5). Тогда для любых $0 < r < q < \infty$ существует такая постоянная $c = c(q,r) > 0$, что*

$$ce^{H_G(\lambda)+r\varphi^*(\ln^+|\lambda|)} \leqslant \|e(\lambda)\|_q \leqslant e^{H_G(\lambda)+q\varphi^*(\ln^+|\lambda|)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

$\lhd$ Правая часть (14) верна без каких-либо ограничений на $\varphi$:

$$\|e(\lambda)\|_q = \sup_{z\in G}\sup_{k\in Z_+} \frac{|e^{\lambda z}|\cdot|\lambda|^k}{k! e^{q\varphi\left(\frac{k}{q}\right)}} \leqslant \exp\left[H_G(\lambda) + \sup_{k\in Z_+}\left(k\ln^+|\lambda| - \ln k! - q\varphi\left(\frac{k}{q}\right)\right)\right]$$
$$\leqslant \exp\left[H_G(\lambda) + \sup_{t\geqslant 0}\left(t\ln^+|\lambda| - q\varphi\left(\frac{t}{q}\right)\right)\right] = \exp\left[H_G(\lambda) + q\varphi^*(\ln^+|\lambda|)\right] \quad (\forall\, \lambda \in \mathbb{C}).$$

Докажем теперь левую часть (14). При $|\lambda| \leqslant 1$ имеем

$$\|e(\lambda)\|_q \geqslant \sup_{z\in G}|e^{\lambda z}| = e^{H_G(\lambda)}. \tag{15}$$

Пусть теперь $|\lambda| > 1$. Тогда

$$\|e(\lambda)\|_q = \sup_{z\in G}\sup_{k\in Z_+} \frac{|e^{\lambda z}|\cdot|\lambda|^k}{k! e^{q\varphi\left(\frac{k}{q}\right)}} = \exp\left[H_G(\lambda) + \sup_{k\in Z_+}\left(k\ln|\lambda| - \ln k! - q\varphi\left(\frac{k}{q}\right)\right)\right]$$
$$\geqslant \exp\left[H_G(\lambda) + \sup_{k\in Z_+}\left(k\ln|\lambda| - k\ln^+ k - q\varphi\left(\frac{k}{q}\right)\right)\right].$$

Возьмем $\varepsilon_0 > 0$ так, что $r + \varepsilon_0 < q$. Из условия (5) следует, что при некотором $B > 0$

$$(r+\varepsilon_0)\,\varphi\left(\frac{t}{r+\varepsilon_0}\right) \geqslant q\varphi\left(\frac{t}{q}\right) + t\ln^+ t - B, \quad t \geqslant 0.$$

Продолжив оценку $\|e(\lambda)\|_q$, получим отсюда

$$\|e(\lambda)\|_q \geqslant \exp\left[H_G(\lambda) + \sup_{k\in Z_+}\left(k\ln|\lambda| - (r+\varepsilon_0)\varphi\left(\frac{k}{r+\varepsilon_0}\right)\right) - B\right]$$
$$\geqslant \exp\left[H_G(\lambda) + \sup_{t\geqslant 0}\left(t\ln|\lambda| - (r+\varepsilon_0)\varphi\left(\frac{t}{r+\varepsilon_0}\right)\right) - \ln|\lambda| - B\right]$$
$$= \exp\left[H_G(\lambda) + (r+\varepsilon_0)\varphi^*(\ln|\lambda|) - \ln|\lambda| - B\right].$$

Учитывая еще, что $x = o(\varphi^*(x))$ при $x \to +\infty$, заключаем, что при некотором $C \geqslant B$, не зависящем от $\lambda$,

$$\|e(\lambda)\|_q \geqslant \exp\left[H_G(\lambda) + r\varphi^*(\ln|\lambda|) - C\right].$$

Объединив эту оценку с (15) и положив $c := e^{-C}$, получаем левую часть (14). $\rhd$

Из леммы 4 следует, что для любого $p \in (0,\infty)$ и $p_n \uparrow p$ весовые системы $(\exp(H_G(\lambda)+p_n\varphi^*(\ln^+|\lambda|)))_{n=1}^\infty$ и $(\|e(\lambda)\|_{p_n})_{n=1}^\infty$ эквивалентны в том смысле, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$ при некоторых положительных постоянных $c_n$ и $C_n$

$$c_n\, e^{H_G(\lambda)+p_n\varphi^*(\ln^+|\lambda|)} \leqslant \|e(\lambda)\|_{p_{n+1}} \leqslant C_n\, e^{H_G(\lambda)+p_{n+1}\varphi^*(\ln^+|\lambda|)}. \tag{16}$$

Отсюда следует, что во всех определениях, результатах, оценках и т. п. из работы [8], касающихся пространств $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ и $E^p_{(\varphi^*)}(G)$, мы можем использовать $\exp(H_G(\lambda)+p_n\varphi^*(\ln^+|\lambda|))$ вместо $\|e(\lambda)\|_{p_n}$.

Отметим следующие три момента:

1) Экспоненты $e(\lambda)$ являются собственными функциями оператора дифференцирования $D : f \mapsto f'$, причем совокупность всех решений уравнения $Df = \lambda f$ образует в $H$ одномерное подпространство, натянутое на элемент $e(\lambda)$. Заметим также, что оператор дифференцирования действует непрерывно из $H$ в $H$ (см. [3, лемма 1]).

2) Так как по предположению вес $\varphi$ входит в класс $\widetilde{W}$, то преобразование Лапласа $\mathscr{F} : \nu \mapsto \hat{\nu}(\lambda) = \nu(e(\lambda))$ устанавливает топологический изоморфизм между $H'_b$ и пространством $E$, которое в силу (16) совпадает с $\operatorname{ind} E_n$, где

$$E_n := \left\{ g \in H(\mathbb{C}) : \ |g|_n := \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|g(\lambda)|}{\|e(\lambda)\|_{p_n}} < \infty \right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

3) Из условия (7) имеем, что

$$\sup_{|\xi|\leqslant 1} (H_G(\lambda+\xi) + p_n\varphi^*(\ln^+|\lambda+\xi|)) \leqslant H_G(\lambda) + p_n\varphi^*(\ln^+|\lambda|) + A + \Delta_G, \tag{17}$$

где, как и прежде, $\Delta_G = \sup\{|z| : z \in G\}$. Отсюда, как известно, следует, что пространство $E$ инвариантно относительно деления на полиномы. Впрочем, тот же самый вывод можно, очевидно, сделать с помощью предложения 2.

Таким образом, для пространств $H = A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ и $E = E^p_{(\varphi^*)}(G)$ и системы экспонент $\mathscr{E} := \{e(\lambda) := \exp \lambda z,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$ выполнены все предварительные условия работы [8].

Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности и $\mathscr{E}(\Lambda) := (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ — соответствующая ей система экспонент. Из леммы 4 следует, что в рассматриваемом нами случае общее понятие минимальной системы элементов, введенное в [8], интерпретируется следующим образом.

Система $\mathscr{E}(\Lambda)$ называется *минимальной* для $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$, если существует такая нетривиальная целая функция $L$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$(a)$ $(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, R_\varepsilon \geqslant 1)$ $\ln|L(\lambda)| \leqslant H_G(\lambda) + (p+\varepsilon)\,\varphi^*(\ln|\lambda|)$, $|\lambda| \geqslant R_\varepsilon$;

$(b)$ $L$ имеет в точках $\lambda_k$ простые нули (она может иметь нули произвольной кратности в других точках).

Совокупность всех функций $L$, удовлетворяющих условиям $(a)$ и $(b)$, обозначим символом $\mathscr{L}^p_{\varphi^*}(G;\Lambda)$.

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующий вспомогательный результат, касающийся, так называемых, правильных пар. Определение таких пар технически громоздко и само по себе в данной статье не используется. Поэтому мы его приводить не будем, отослав читателя за подробностями к работе [8].

**Лемма 5.** *Пусть вес* $\varphi \in V$ *удовлетворяет условию* (5) *и* $\mathscr{E}(\Lambda)$ *— минимальная для* $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ *система. Тогда пара* $(\mathscr{E}(\Lambda), A^p_{(\varphi)}(\overline{G}))$ *является правильной.*

$\lhd$ Положим $k_n(\lambda) := \exp\big(H_G(\lambda) + p_n\varphi^*(\ln^+|\lambda|)\big)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, и отметим, что условие (14) означает, что весовые системы $(\|e(\lambda)\|_{p_n} : n \in \mathbb{N})$ и $(k_n(\lambda) : n \in \mathbb{N})$ эквивалентны между собой. Значит, мы можем использовать в наших рассуждениях одну вместо другой. Положим еще $k_{n,m}(\lambda) := k_m(\lambda)/k_n(\lambda)$, $m > n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

В соответствии с [8, с. 492–493] (см. пп. а), б)) для доказательства правильности пары $(\mathscr{E}(\Lambda), A^p_{(\varphi)}(\overline{G}))$ достаточно проверить следующие условия:

(i) функции из $\mathscr{L}^p_{\varphi^*}(G)$ имеют конечный порядок;

(ii) $(\forall\, n)\,(\exists\, m)\,(\exists\, C>0)\ \ \sup_{|\xi|\leqslant 1}\|e(\lambda+\xi)\|_{p_n}\leqslant C\|e(\lambda)\|_{p_m}$, $\lambda\in\mathbb{C}$;

(iii) функции $k_{n,m}(\lambda)$ радиальны, а $\ln k_{n,m}(\lambda)$ субгармоничны в $\mathbb{C}$ $(m>n,\ n\in\mathbb{N})$;

(iv) $(\forall\, n)\,(\forall\, s>n)\,(\exists\, m>n)\,(\exists\, a>1)\ \ k_{n,s}(a\lambda)\leqslant Ak_{n,m}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

(i) Из условия $(a)$, участвующего в определении класса $\mathscr{L}^p_{\varphi^*}(G)$, и того, что $\ln\varphi(s)=o(s)$ при $s\to\infty$ (см. лемму 1), следует, что элементы из $\mathscr{L}^p_{\varphi^*}(G)$ являются целыми функциями порядка не выше первого (более того, если их порядок равен 1, то они имеют конечный тип и индикатор, не превосходящий $H_G(e^{i\theta})$).

(ii) Перепишем (17) в виде

$$\sup_{|\xi|\leqslant 1} k_n(\lambda+\xi)\leqslant e^{A+\Delta_G}k_n(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}.$$

Отсюда, в силу отмеченной выше эквивалентности весовых систем $(\|e(\lambda)\|_{p_n}:\, n\in\mathbb{N})$ и $(k_n(\lambda):\, n\in\mathbb{N})$, получаем справедливость (ii).

(iii) Имеем $k_{n,m}(\lambda)=e^{(p_m-p_n)\varphi^*(\ln^+|\lambda|)}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, откуда следует, что функции $k_{n,m}(\lambda)$ радиальны в $\mathbb{C}$. Далее, так как $\varphi^*$ не убывает и выпукла на $[0,\infty)$, то функции $\ln k_{n,m}(\lambda)=(p_m-p_n)\varphi^*(\ln^+|\lambda|)$ субгармоничны в $\mathbb{C}$ при всех $m>n$.

(iv) Возьмем произвольные $n,s\in\mathbb{N}$, $s>n$. Положим $m:=s+1$, $a:=e$. Тогда в силу (8) для $q:=\frac{p_{s+1}-p_n}{p_s-p_n}>1$ имеется $A>0$ такое, что при всех $\lambda\in\mathbb{C}$

$$k_{n,s}(a\lambda)=e^{(p_s-p_n)\varphi^*(\ln^+ e|\lambda|)}\leqslant e^{(p_s-p_n)\varphi^*(\ln^+|\lambda|+1)}\leqslant e^{(p_{s+1}-p_n)\varphi^*(\ln^+|\lambda|)+A}=e^Ak_{n,m}(\lambda).$$

Таким образом, выполнены все требуемые условия (i)–(iv), что обеспечивает правильность пары $(\mathscr{E}(\Lambda),\ A^p_{(\varphi)}(\overline{G}))$. $\rhd$

**Теорема 2.** *Пусть $p\in(0,\infty)$, $\varphi$ — вес из $\widetilde{W}$, $\mathscr{E}(\Lambda)$ — минимальная для $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ система и $L\in\mathscr{L}^p_{\varphi^*}(G;\Lambda)$. Для того чтобы $\mathscr{E}(\Lambda)$ была АПС в $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$, необходимо, чтобы для некоторого нетривиального мультипликатора $\mu$ из $M_{\varphi^*}$ выполнялись условия:*

$$A)\quad \exists\, r_n\uparrow+\infty:\quad \left|\frac{\mu(\lambda)}{L(\lambda)}\right|\leqslant e^{-H_G(\lambda)-p_n\varphi^*(\ln|\lambda|)},\quad |\lambda|=r_n,\ n\in\mathbb{N};$$

$$B)\quad \limsup_{k\to\infty}\frac{1}{\varphi^*(\ln|\lambda_k|)}\left[\ln\left|\frac{\mu(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\right|+H_G(\lambda_k)\right]\leqslant -p.$$

*Эти же условия достаточны для того, чтобы $\mathscr{E}(\Lambda)$ была АПС в $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$, если они выполняются для некоторого делителя пространства $E^p_{(\varphi^*)}(G)$.*

$\lhd$ Из того, что класс $\mathscr{L}^p_{\varphi^*}(G;\Lambda)$ состоит из функций экспоненциального типа и леммы 5 следует, что выполнены все условия теоремы 3 работы [8]. Поэтому достаточно проверить эквивалентность приведенных условий $A)$ и $B)$ с соответствующими им из [8]. Напомним их, отметив как условия $A')$ и $B')$, так как символы $A)$ и $B)$ уже используются:

$$A')\quad \exists\, r_n\uparrow+\infty:\quad \left|\frac{\mu(\lambda)}{L(\lambda)}\right|\leqslant\frac{1}{\|e(\lambda)\|_{p_n}},\quad |\lambda|=r_n,\ n\in\mathbb{N};$$

$$B')\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\mu(\lambda_k)|}{|L'(\lambda_k)|}\|e(\lambda_k)\|_{p_n}<\infty\quad (\forall\, n\in\mathbb{N}).$$

Эквивалентность условий $A)$ и $A')$ получаем непосредственно из леммы 4.

Далее, предположим, что для некоторого нетривиального мультипликатора $\mu$ из $M_{\varphi^*}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\mu(\lambda_k)|}{|L'(\lambda_k)|}\|e(\lambda_k)\|_{p_n}$ сходится при каждом $n\in\mathbb{N}$. Отсюда следует, что последовательность общих членов ряда ограничена (при каждом $n$). Учитывая (14), получаем, что тогда для каждого $n\in\mathbb{N}$ найдется такая постоянная $C_n>0$, что

$$\frac{1}{\varphi^*(\ln|\lambda_k|)}\left[\ln\left|\frac{\mu(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\right|+H_G(\lambda_k)\right]\leqslant -p_n+\frac{C_n}{\varphi^*(\ln|\lambda_k|)}\quad(\forall\, k\in\mathbb{N}).$$

Переходя здесь сначала к верхнему пределу по $k$, а затем к пределу по $n$, получаем $B$). Таким образом, $B')\Rightarrow B)$.

Пусть теперь имеет место условие $B$). Тогда для каждого $n\in\mathbb{N}$ при некоторой положительной постоянной $C=C(n)$ выполняется неравенство

$$\frac{|\mu(\lambda_k)|}{|L'(\lambda_k)|}\exp\left[H_G(\lambda_k)+p_{n+1}\varphi^*(\ln|\lambda_k|)\right]\leqslant C\quad(\forall\, k\in\mathbb{N}).$$

Учитывая (16) и то, что $x=o(\varphi^*(x))$ при $x\to+\infty$, получим

$$\frac{|\mu(\lambda_k)|}{|L'(\lambda_k)|}\|e(\lambda_k)\|_{p_n}\leqslant\frac{A}{|\lambda_k|^2}\quad(\forall\, k\in\mathbb{N}),$$

где постоянная $A>0$ не зависит от $k$. Поскольку $L$ является целой функцией экспоненциального типа, то, учитывая связь между порядком целой функции и показателем сходимости последовательности ее нулей, заключаем, что $\sum_{k=1}^{\infty}1/|\lambda_k|^2<\infty$, откуда получаем $B'$). $\rhd$

Так как $\mu(\lambda)\equiv 1$ является делителем пространства $E^p_{(\varphi^*)}(G)$, то из теоремы 2 получаем такой результат.

**Следствие 1.** *Пусть $p\in(0,\infty)$, $\varphi$ — вес из $\widetilde{W}$, $\mathscr{E}(\Lambda)$ — минимальная для $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ система и $L\in\mathscr{L}^p_{\varphi^*}(G;\Lambda)$. Если выполнены условия*

(I) $(\exists\, r_n\uparrow+\infty)\quad \ln|L(\lambda)|\geqslant H_G(\lambda)+p_n\varphi^*(\ln|\lambda|),\quad |\lambda|=r_n,\ n\in\mathbb{N};$

(II) $\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|L'(\lambda_k)|-H_G(\lambda_k)}{\varphi^*(\ln|\lambda_k|)}=p,$

*то система $\mathscr{E}(\Lambda)$ является АПС в $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$.*

Перейдем к рассмотрению вопроса о существовании функции $L$, удовлетворяющей всем условиям следствия 1. Исследование основывается на работе [13], в которой получены общие результаты о приближении субгармонических функций, и [14], в которой приводится схема, использованная нами при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 3.** *Пусть $p\in(0,\infty)$ и вес $\varphi\in V$ удовлетворяет условию (6). Положим $u(\lambda):=H_G(\lambda)+p\,\varphi^*(\ln^+|\lambda|)$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Тогда существует целая функция экспоненциального типа $L$, обладающая свойствами:*

1) *все нули $\Lambda:=(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ функции $L(\lambda)$ простые;*

2) *$L(\lambda)\in\mathscr{L}^p_{\varphi^*}(G;\Lambda)$;*

3) *для $L(\lambda)$ выполняются условия* (I) *и* (II) *следствия* 1.

$\lhd$ Обозначим $D(\xi,r):=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-\xi|\leqslant r\}$, $\xi\in\mathbb{C}$, $r>0$. По теореме 4 из [13] для субгармонической в $\mathbb{C}$ функции $u(\lambda)$ найдется целая функция $L(\lambda)$, все нули $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ которой простые и при некотором $\delta>0$ круги $D_k:=D(\lambda_k,\delta)$ попарно не пересекаются, причем вне множества $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}D_k$ выполняется асимптотическое соотношение

$$\big|u(\lambda)-\ln|L(\lambda)|\big|=O(\ln|\lambda|),\quad |\lambda|\to\infty. \tag{18}$$

Отсюда, с учетом условия (1), следует, что $L(\lambda)\in\mathscr{L}^p_{\varphi^*}(G;\Lambda)$.

Положим $\widetilde{D_k} := D_k$, если $k \leqslant 1/\sqrt{\delta}$, и $\widetilde{D_k} := D(\lambda_k, 1/k^2)$ — в противном случае. Тогда круги $\widetilde{D_k}$ попарно не пересекаются и при этом имеют конечную сумму радиусов. Учитывая (18) и (1), получаем, что для каждого $\varepsilon \in (0, p)$ при достаточно больших $k$ на границе круга $\partial D_k$ имеет место оценка

$$\ln\left|\frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}\right| \geqslant H_G(\lambda) + (p-\varepsilon)\,\varphi^*(\ln^+|\lambda|) - \ln\delta. \tag{19}$$

Далее, функция $\ln\left|\dfrac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}\right|$ гармонична в некоторой окрестности круга $D_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Поэтому из принципа гармонической мажоранты следует, что всюду на $D_k \backslash \widetilde{D_k}$ выполняется

$$\ln|L(\lambda)| \geqslant H_G(\lambda) + (p-\varepsilon)\,\varphi^*(\ln^+|\lambda|) - 2\ln k - \ln\delta.$$

Так как $L(\lambda)$ — функция экспоненциального типа, то $\limsup_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty$. Тогда для достаточно больших $k$ имеем

$$k \leqslant C|\lambda_k| \leqslant (C+1)|\lambda| \quad (\forall\, \lambda \in D_k),$$

где постоянная $C$ не зависит от $k$. Учитывая все вышесказанное и то, что $t = o(\varphi(t))$ при $t \to \infty$, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших $k$ имеет место оценка на $D_k \backslash \widetilde{D_k}$

$$\ln|L(\lambda)| \geqslant H_G(\lambda) + (p-2\varepsilon)\,\varphi^*(\ln^+|\lambda|).$$

Тогда из последнего неравенства и соотношения (19), учитывая, что круги $\widetilde{D_k}$ имеют конечную сумму радиусов, получаем (I).

Для доказательства выполнения (II) снова воспользуемся гармоничностью функции $\ln\left|\frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_k}\right|$ в некоторой окрестности круга $D_k$. С учетом этого свойства из (7) и (19) имеем для достаточно больших $k$

$$\begin{aligned}\ln|L'(\lambda_k)| &\geqslant \min_{\lambda\in\partial D_k} \ln\left|\frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_k}\right| \geqslant \min_{\lambda\in\partial D_k}\big(H_G(\lambda) + (p-\varepsilon)\varphi^*(\ln^+|\lambda|)\big) - \ln\delta \\ &\geqslant H_G(\lambda_k) + (p-\varepsilon)\varphi^*(\ln^+|\lambda_k|) - A,\end{aligned}$$

где $A$ — некоторая постоянная, зависящая только от $\delta$, $\varepsilon$ и $G$. Таким образом,

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\ln|L'(\lambda_k)| - H_G(\lambda_k)}{\varphi^*(\ln|\lambda_k|)} \geqslant p.$$

Аналогично с помощью (18) показывается, что

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln|L'(\lambda_k)| - H_G(\lambda_k)}{\varphi^*(\ln|\lambda_k|)} \leqslant p.$$

Откуда и следует нужное. $\triangleright$

Объединяя следствие 1 и теорему 3 и используя определение минимальной системы, получаем

**Следствие 2.** *Пусть $p \in (0, \infty)$, $\varphi$ — вес из $\widetilde{W}$. Тогда в пространстве $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ всегда существует минимальная АПС экспонент.*

## 3. Неустойчивость АПС экспонент в $A^p_{(\varphi)}(\overline{G})$ относительно предельного перехода по области

Для систем экспонент в пространствах $H(G)$ всех функций, аналитических в выпуклой ограниченной области комплексной плоскости, известен следующий результат, принадлежащий А. В. Абанину (см. [6, гл. 2, § 3, теорема 9]).

*Пусть $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность выпуклых областей, исчерпывающая $G$ изнутри, т. е. $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$. Тогда всякая система экспонент, являющаяся АПС в $H(G_n)$ при всех $n \geqslant 1$, будет АПС и в $H(G)$.*

Результаты подобного характера называют теоремами об устойчивости АПС относительно предельного перехода по области.

В [3] нами было установлено, что для пространств вида $A_{\Phi}(\overline{G})$ имеют место теоремы об устойчивости АПС экспонент относительно предельного перехода по весовым последовательностям при фиксированной области, и высказано предположение, что АПС экспонент в этих пространствах не обладают устойчивостью относительно предельного перехода по области. В текущем параграфе с помощью теоремы 2 и ее следствия доказывается справедливость этого предположения.

Нам потребуются следующие известные свойства целой функции $g_0(\lambda) := \sin \pi\lambda$ (см., например, [15, с. 51–52]):

1) $g_0$ — целая функция экспоненциального типа с простыми нулями в точках $\lambda = k$, причем $|g_0'(k)| = \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

2) $\ln |g_0(\lambda)| \leqslant \pi|\lambda||\sin(\arg \lambda)|$, $\lambda \in \mathbb{C}$;

3) для любого $\delta \in (0, 1/2)$ имеется такая постоянная $C_\delta > 0$, что

$$\ln |g_0(\lambda)| \geqslant \pi|\lambda||\sin(\arg \lambda)| - C_\delta, \quad \lambda \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - k| < \delta\}.$$

В качестве $G$ возьмем квадрат $\Pi := \{z : |\operatorname{Im} z| \leqslant \pi, |\operatorname{Re} z| \leqslant \pi\}$. Рассмотрим функцию $L(\lambda) := \sin \pi\lambda \cdot \sin i\pi\lambda$. Из свойств $g_0$ следует, что выполнены следующие условия:

(a) $L$ — целая функция экспоненциального типа с простыми нулями в точках $k$ и $ik$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0;\ \lambda = 0$ является нулем $L$ второй кратности) и индикатором $H_\Pi(\lambda) = \pi(|\operatorname{Im} \lambda| + |\operatorname{Re} \lambda|)$, причем $\ln |L(\lambda)| \leqslant H_\Pi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$;

(b) Пусть $\delta \in (0, 1/2)$ и $U_{\zeta,\delta} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \zeta| < \delta\}$ $(\zeta \in \mathbb{C})$. Имеет место асимптотическое равенство

$$\ln |L(\lambda)| = H_\Pi(\lambda) + O(1) \quad \text{при } \lambda \to \infty,\ \lambda \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big(U_{k,\delta} \cup U_{ik,\delta}\Big).$$

В частности, это асимптотическое равенство имеет место на системе концентрических окружностей $|\lambda| = k + 1/2$ $(k \in \mathbb{N})$;

(c) $\ln |L'(k)| = H_\Pi(k) + O(1) = \pi|k| + O(1)$ при $|k| \to \infty$.

Из свойств функции $L$ следует, что множество ее простых нулей $\Lambda := \{k, ik : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$ образует последовательность показателей минимальной для $A^p_{(\varphi)}(\overline{\Pi})$ системы $\mathscr{E}(\Lambda)$ при любых фиксированных $p \in (0, \infty)$ и $\varphi$ из $\widetilde{W}$. В то же время, по теореме 2 $\mathscr{E}(\Lambda)$ не может быть АПС в $A^p_{(\varphi)}(\overline{\Pi})$ ни при каких $p \in (0, \infty)$ и $\varphi$ из $\widetilde{W}$, поскольку условие $A$) этой теоремы не может быть выполнено ни для одного нетривиального мультипликатора $\mu$ из $M_{\varphi^*}$. В самом деле, если найдется последовательность радиусов $r_n \uparrow +\infty$ такая, что

$$\left|\frac{\mu(\lambda)}{L(\lambda)}\right| \leqslant \exp\Big[ - H_\Pi(\lambda) - p_n\varphi^*(\ln |\lambda|)\Big], \quad |\lambda| = r_n,\ n \in \mathbb{N},$$

то отсюда немедленно следует, что

$$|\mu(\lambda)| \leqslant \exp(-p_1\varphi^*(\ln|\lambda|)), \quad |\lambda| = r_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Последнее же возможно лишь для $\mu \equiv 0$.

Далее, образуем подпоследовательности $\widetilde{\Lambda}_n := (\lambda_{nk})_{k\in\mathbb{Z}}$ вещественных нулей функции $L$, где $\lambda_{nk} = 2^n k + 2^{n-1} - 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Как нетрудно видеть, любые две такие подпоследовательности не имеют одинаковых элементов. Заметим также, что $\widetilde{\Lambda}_n$ является последовательностью всех нулей функции $g_n(\lambda) := \sin\pi\Big(\frac{\lambda}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\Big)$. Положим $\mathscr{L}_n(\lambda) := \prod_{m=1}^n g_m(\lambda)\widetilde{g_m}(\lambda)$ и $\Pi_n := \Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)\Pi$ $(n \in \mathbb{N})$, где

$$\widetilde{g_m}(\lambda) := \sin\pi i\bigg(\frac{\lambda}{2^m} + \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2}\bigg).$$

Тогда из свойств функции $L$ следует, что при каждом $n \in \mathbb{N}$:

(I) Существует такая последовательность $(R_{nm})_{m=1}^\infty$, $R_{nm} \uparrow \infty$ при $m \to \infty$, что $\ln|\mathscr{L}_n(\lambda)| = H_{\Pi_n}(\lambda) + O(1)$, $|\lambda| = R_{nm}$, $m \to \infty$;

(II) $\ln|\mathscr{L}_n'(\lambda_{nk})| = H_{\Pi_n}(\lambda_{nk}) + O(1)$ при $k \to \infty$.

Следует отметить, что в последовательность $\widetilde{\Lambda}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ заведомо не попали точки $\lambda_s := 2^s - 1$ $(s \in \mathbb{N},\ s \geqslant n)$, являющиеся нулями функции $L$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ образуем целую функцию

$$\mathscr{L}_n^0(\lambda) := \prod_{s=n}^\infty \left(1 - \frac{\lambda}{2^s - 1}\right),$$

имеющую нулевой порядок. Положим

$$T_s := \big\{\lambda \in \mathbb{C} :\ ||\lambda| - \lambda_s| \leqslant 1\big\}, \quad s \in \mathbb{N};$$

$$T := \bigcup_{s=1}^\infty T_s; \quad s(\lambda) := [\log_2(|\lambda| + 1)], \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

и рассмотрим произвольное $\lambda$, лежащее вне $T$. Ясно, что $2^{s(\lambda)} < |\lambda| < 2^{s(\lambda)+1} - 2$. Тогда при достаточно большом $\lambda \notin T$ (например, при $|\lambda| \geqslant 2^{n+2} - 1$) имеют место следующие оценки

$$\begin{aligned}\ln|\mathscr{L}_n^0(\lambda)| &= \sum_{s=n}^{s(\lambda)} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{2^s - 1}\right| + \sum_{s=s(\lambda)+1}^\infty \ln\left|1 - \frac{\lambda}{2^s - 1}\right| \\ &\geqslant \sum_{s=n}^{s(\lambda)} \ln\left(\frac{|\lambda|}{2^s - 1} - 1\right) + \sum_{s=s(\lambda)+1}^\infty \ln\left(1 - \frac{|\lambda|}{2^s - 1}\right) \\ &\geqslant \sum_{s=n}^{s(\lambda)} \ln\left(\frac{2^{s(\lambda)}}{2^s - 1} - 1\right) + \sum_{s=s(\lambda)+1}^\infty \ln\left(1 - \frac{2^{s(\lambda)+1} - 2}{2^s - 1}\right).\end{aligned}$$

Отметим, что $\ln\Big(\frac{2^{s(\lambda)}}{2^s-1} - 1\Big) \geqslant (s(\lambda) - s)\ln 2 - 1$ при $s \leqslant s(\lambda) - 1$, и ряд

$$\sum_{s=s(\lambda)+3}^\infty \ln\left(1 - \frac{1}{2^{s-s(\lambda)-2}}\right) = \sum_{s=1}^\infty \ln\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)$$

сходится, причем его сумма не зависит от $\lambda$. Поэтому, учитывая очевидные соотношения $\ln|\lambda|/\ln 2 - 1 \leqslant s(\lambda) \leqslant \ln|\lambda|/\ln 2 + 1$, $|\lambda| \geqslant 1$, получаем

$$\ln|\mathscr{L}_n^0(\lambda)| \geqslant \sum_{s=n}^{s(\lambda)-1} ((s(\lambda)-s)\ln 2 - 1) + \ln\left(\frac{2^{s(\lambda)}}{2^{s(\lambda)}-1} - 1\right)$$

$$+\ln\left(1 - \frac{2^{s(\lambda)+1}-2}{2^{s(\lambda)+1}-1}\right) + \ln\left(1 - \frac{2^{s(\lambda)+1}-2}{2^{s(\lambda)+2}-1}\right) + \sum_{s=s(\lambda)+3}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2^{s-s(\lambda)-2}}\right)$$

$$= \frac{s^2(\lambda)}{2}\ln 2 + O(s(\lambda)) = \frac{\ln^2|\lambda|}{2\ln 2} + O(\ln|\lambda|).$$

Кроме того, аналогичные оценки, проведенные для $\lambda$ с $|\lambda - \lambda_s| = 1$, показывают, что

$$\ln\left|(\mathscr{L}_n^0)'(\lambda_s)\right| \geqslant \frac{\ln^2|\lambda_s|}{2\ln 2} + O(\ln|\lambda_s|) \quad \text{при } s \to \infty.$$

С другой стороны, для любого достаточно большого $\lambda \in \mathbb{C}$ (например, $|\lambda| \geqslant 2^{n+1} - 1$)

$$\ln|\mathscr{L}_n^0(\lambda)| \leqslant \sum_{s=n}^{s(\lambda)} \ln\left(1 + \frac{|\lambda|}{2^s - 1}\right) + \sum_{s=s(\lambda)+1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{|\lambda|}{2^s - 1}\right)$$

$$\leqslant \sum_{s=n}^{s(\lambda)} \ln\left(1 + 2^{s(\lambda)-s+2}\right) + \sum_{s=s(\lambda)+1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^{s-s(\lambda)-2}}\right) \leqslant \sum_{s=n}^{s(\lambda)} ((s(\lambda)-s+2)\ln 2 + 1) + O(1)$$

$$= \frac{s(\lambda)-n+4}{2}(s(\lambda)-n+1)\ln 2 + O(s(\lambda)) = \frac{\ln^2|\lambda|}{2\ln 2} + O(\ln|\lambda|).$$

Положим $L_n(\lambda) := \mathscr{L}_n(\lambda)\mathscr{L}_n^0(\lambda)$ $(n \in \mathbb{N})$ и обозначим через $\Lambda_n$ простые нули этой функции — $\{\lambda_{mk} : k \in \mathbb{Z},\ 1 \leqslant m \leqslant n\} \cup \{\lambda_s : s \geqslant n\}$.

Из асимптотических оценок, установленных выше, получаем, что

$$\ln|L_n(\lambda)| \leqslant H_{\Pi_n}(\lambda) + \frac{\ln^2|\lambda|}{2\ln 2} + O(\ln|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \to \infty,$$

$$\ln|L_n(\lambda)| \geqslant H_{\Pi_n}(\lambda) + \frac{\ln^2|\lambda|}{2\ln 2} + O(\ln|\lambda|) \quad \text{при } |\lambda| = 2^s + \frac{1}{2},\ s \to \infty,$$

и

$$\ln|L_n'(\lambda)| = H_{\Pi_n}(\lambda) + \frac{\ln^2|\lambda|}{2\ln 2} + O(\ln|\lambda|) \quad \text{при } \lambda \in \Lambda_n,\ \lambda \to \infty.$$

Отсюда следует, что при $p_0 := 2/\ln 2$ и $\varphi_0(t) := t^2$ (при этом ясно, что $\varphi_0 \in \widetilde{W}$ и что $\varphi_0^*(t) = t^2/4$) $\mathscr{E}(\Lambda_n)$ является минимальной для $A^{p_0}_{(\varphi_0)}(\overline{\Pi}_n)$ системой, для которой выполнены все условия следствия 1. В соответствии с ним $\mathscr{E}(\Lambda_n)$ является АПС в $A^{p_0}_{(\varphi_0)}(\overline{\Pi}_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $\Lambda_n \subset \Lambda$, то $\mathscr{E}(\Lambda)$ также является АПС в $A^{p_0}_{(\varphi_0)}(\overline{\Pi}_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что при этом последовательность квадратов $(\Pi_n)_{n=1}^{\infty}$ исчерпывает $\Pi$ изнутри.

Таким образом, мы построили систему экспонент, которая не обладает свойством устойчивости относительно предельного перехода по области для пространств вида $A^p_{(\varphi)}(\overline{\Pi})$.

## Литература

1. *Петров С. В.* Существование абсолютно представляющих систем экспонент в пространствах аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки.—2010.—№ 5.—С. 25–31.
2. *Петров С. В.* Существование абсолютно представляющих систем экспонент в пространствах аналитических функций с заданной граничной гладкостью // Исследования по математическому анализу.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2009.—С. 190–199.—(Итоги науки. ЮФО. Мат. форум. Т. 3).
3. *Абанин А. В., Петров С. В.* Свойства абсолютно представляющих систем экспонент и простейших дробей в пространствах аналитических функций с заданной граничной гладкостью // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки.—2011.—№ 4.—С. 5–11.
4. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы: теория и приложения.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2009.—336 с.
5. *Коробейник Ю. Ф.* Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1980.—Т. 44, № 5.—С. 1066–1114.
6. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, вып. 1.—С. 73–126.
7. *Абанин А. В.* Характеризация минимальных систем показателей представляющих систем обобщенных экспонент // Изв. вузов. Математика.—1991.—№ 2.—С. 3–12.
8. *Абанин А. В.* Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Мат. заметки.—1995.—Т. 57, № 4.—С. 483–497.
9. *Абанин А. В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения.—М.: Наука, 2007.—223 с.
10. *Абанин А. В.* О мультипликаторах пространства целых функций, задаваемого нерадиальным двучленным весом // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 4.—С. 10–16.
11. *Коробейник Ю. Ф.* О мультипликаторах весовых функциональных пространств // Anal. Math.—1989.—Vol. 15, № 2.—P. 105–114.
12. *Hörmander L.* On the range of convolution operators // Ann. of Math.—1962.—Vol. 76.—P. 148–170.
13. *Юлмухаметов Р. С.* Приближение субгармонических функций // Мат. сб.—1984.—Т. 124 (166), № 3 (7).—С. 393–415.
14. *Abanin A. V., Le Hai Khoi, Nalbandyan Yu. S.* Minimal absolutely representing systems of exponentials for $A^{-\infty}(\Omega)$ // J. Approx. Theory.—2011.—Vol. 163, № 10.—P. 1534–1545.
15. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1983.—176 с.

*Статья поступила 5 июля 2011 г.*

Абанин Александр Васильевич
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
заведующий отделом математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: abanin@math.rsu.ru

Петров Сергей Владимирович
Южный федеральный университет,
ассистент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
E-mail: prostopetrov@inbox.ru

# MINIMAL ABSOLUTELY REPRESENTING SYSTEMS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS IN SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS WITH GIVEN BOUNDARY SMOOTHNESS

Abanin A. V. and Petrov S. V.

We consider spaces of functions holomorphic in a convex domain which are infinitely differentiable up to the boundary and have certain estimates of all derivatives. Some necessary and sufficient conditions are obtained for a minimal system of exponential functions to be an absolutely representing system in the spaces which are generated by a single weight. Relying on these results, we prove that absolutely representing systems of exponentials do not have the stability property under the passage to the limit over domains.

**Key words:** absolutely representing systems, spaces of analytic functions, boundary smoothness.